

ĐỘNG LỰC HỌC BIỂN PHẦN 3 - THỦY TRIỀU

Phạm Văn Huân



NXB Đại học Quốc gia Hà Nội – 2002

Từ khóa: Thủy triều, nước lớn, nước ròng, triều cường, triều kiệt, triều sai, thuyết tĩnh học thủy triều, phương trình truyền triều triều, sóng Kelvin, điểm vô triều, phân tích điều hòa, dự tính thủy triều, yếu tố thiên văn, mực nước.

Tài liệu trong Thư viện điện tử Trường Đại học Khoa học Tự nhiên có thể được sử dụng cho mục đích học tập và nghiên cứu cá nhân. Nghiêm cấm mọi hình thức sao chép, in ấn phục vụ các mục đích khác nếu không được sự chấp thuận của nhà xuất bản và tác giả.

PHẠM VĂN HUẤN

**ĐỘNG LỰC HỌC BIỂN
PHẦN 3
THỦY TRIỀU**



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
CHƯƠNG 1 - CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ THỦY TRIỀU	4
1.1. HIỆN TƯỢNG THỦY TRIỀU Ở ĐẠI DƯƠNG	4
1.2. SỰ HÌNH THÀNH LỰC TẠO TRIỀU	7
1.3. BIỂU THỨC GIẢI TÍCH CỦA LỰC TẠO TRIỀU	9
1.4. THUYẾT TĨNH HỌC THỦY TRIỀU	11
1.5. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA THỦY TRIỀU	13
1.6. PHÂN TÍCH ĐỊNH TÍNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG TRIỆU	17
1.7. DAO ĐỘNG THỦY TRIỀU TRONG KÊNH	19
1.8. BƯỚC SÓNG VÀ NĂNG LƯỢNG SÓNG THỦY TRIỀU	24
1.9. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CORIOLIS TỚI CHUYỂN ĐỘNG THỦY TRIỆU	25
1.10. ẢNH HƯỞNG CỦA MA SÁT TỚI CHUYỂN ĐỘNG TRIỀU	29
1.11. ẢNH HƯỞNG ĐỒNG THỜI CỦA LỰC CORIOLIS VÀ MA SÁT	31
1.12. HIỆU ỨNG PHI TUYẾN TRONG KÊNH MA SÁT	32
CHƯƠNG 2 – NHỮNG PHƯƠNG PHÁP SỐ TRỊ TÍNH THỦY TRIỀU	39
2.1. PHƯƠNG PHÁP DEFANT	39
2.2. PHƯƠNG PHÁP HANSEN	41
2.3. MÔ HÌNH DAO ĐỘNG MỨC NƯỚC TỔNG CỘNG TRONG BIỂN VEN	46
CHƯƠNG 3 - NHỮNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THỦY TRIỀU VÀ MỨC NƯỚC	49
3.1. LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH ĐIỀU HÈA THỦY TRIỀU	49

3.2. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÈA THỦY TRIỀU BẰNG PHƯƠNG PHÁP DARWIN	53
3.3. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÒA BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀNG HẢI	57
3.4. PHÂN TÍCH CHUỖI DÒNG CHẢY MỘT NGÀY BẰNG PHƯƠNG PHÁP MAXIMOV	60
3.5. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÒA BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT	63
3.6. TÍNH CÁC YẾU TỐ THIÊN VĂN VÀ CÁC HỆ SỐ SUY BIẾN	65
3.7. ĐỘ GIÁN ĐOẠN VÀ ĐỘ DÀI CHUỖI QUAN TRẮC	67
3.8. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÒA THỦY TRIỀU VỚI NHỮNG CHUỖI QUAN TRẮC NGẮN	68
3.9. ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC PHÂN TÍCH THỦY TRIỀU THEO PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT	71
3.10. SỬ DỤNG BỘ LỌC TẦN THẤP TRONG PHÂN TÍCH CHUỖI QUAN TRẮC	74
3.11. TÍNH CÁC ĐỘ CAO CỰC TRỊ CỦA THỦY TRIỀU	75
3.12. TÍNH VÀ ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC CỦA CÁC TRỊ SỐ TRUNG BÌNH MỨC NƯỚC	83
TÀI LIỆU THAM KHẢO	88

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình "**Động lực học biển - Phần 3 - Thủy triều**" cung cấp cho người học những kiến thức cơ sở về một hiện tượng động lực quan trọng diễn ra trong đại dương và biển là hiện tượng thủy triều.

Chương 1 mở đầu bằng mô tả định tính về hiện tượng thủy triều trong đại dương và biển, những đặc điểm biến thiên về cường độ và tính chất của dao động thủy triều của mực nước trong không gian và thời gian. Nội dung chính của chương này nhằm giải thích cơ chế hình thành hiện tượng thủy triều trong biển, những nguyên nhân làm cho dao động thủy triều có những tính chất và độ lớn, tương quan giữa dao động mực nước và triều lưu... phân hóa mà chúng ta quan sát thấy trong biển và đại dương thực. Đồng thời trong chương này cũng chú ý xây dựng những biểu thức định lượng của độ cao thủy triều tĩnh học, hệ phương trình vi phân của chuyển động triều làm cơ sở cho những phương pháp tính toán thủy triều ở các chương 2 và 3.

Tính toán thủy triều là một lĩnh vực phức tạp và tỉ mỉ và nhiều phương pháp tính và phân tích số liệu mực nước thủy triều đã hình thành. Các chương 2 và 3 chỉ giới thiệu những nguyên lý về những phương pháp tính toán thủy triều, nhưng cũng chú ý tới những phương pháp đang được sử dụng rộng rãi hiện nay nhằm giúp cho người học tìm hiểu và có thể triển khai trong công tác nghiên cứu sau này.

Giáo trình này được soạn dựa theo những tài liệu có tính chất giáo khoa hoặc chuyên khảo của các tác giả Suleikin V. V., Đuvanhin A. I.,

Peresupkin V. I., Koutitas C. G và. Nhekrasov A. V.

The Text-book "Tide in the sea" is intended for supplying students-oceanographers with the basic knowledge on an important dynamical phenomenon in the sea - the tide.

Chapter 1 describes qualitatively the tidal phenomenon in oceans and seas. The main content of this chapter is to explain the mechanism of formation of tidal motion in oceans, the dynamic factors that cause the space differentiation on the magnitude and wave properties of tidal oscillations, the ratio of tidal level and current oscillations... in real oceans. In this chapter quantitative expressions of equilibrium tide height and differential equations of the tide propagation are also derived to serve a basis for tidal computations in chapter 2 and chapter 3.

Tidal computation is a complex and detailed field and a large number of tide calculation methods are available. So in the chapter 2 and chapter 3 presented the basic principles of the computations. The attention is paid to largely used methods such as harmonic analysis after the Darwin and Doodson schemes and by the least squares method and numerical modeling of tide propagation in sea space.

This text-book was prepared based on the text-books and monographs by V. V. Suleikin, A. I. Duvanin, V. I. Peresipkin, C. G. Koutitas, A. V. Nhekrasov...

CHƯƠNG 1 - CƠ SỞ LÝ THUYẾT VỀ THỦY TRIỀU

1.1. HIỆN TƯỢNG THỦY TRIỀU Ở ĐẠI DƯƠNG

Hiện tượng thủy triều trong biển và đại dương là những chuyển động phức tạp của nước các thủy vực đó do các lực hấp dẫn vũ trụ gây nên. Hiện tượng thủy triều biểu hiện dưới dạng biến đổi tuần hoàn của mực nước biển và dòng chảy. Những lực hấp dẫn vũ trụ gây nên thủy triều gồm lực hấp dẫn giữa Trái Đất với Mặt Trăng và Mặt Trời. Do vị trí tương đối giữa Trái Đất, Mặt Trăng và Mặt Trời thay đổi liên tục trong thời gian, nên những lực gây ra thủy triều cũng thay đổi, kéo theo sự thay đổi về đặc điểm cũng như cường độ của thủy triều với thời gian mà chúng ta thấy trong đại dương.

Chuyển động triều là hiện tượng chuyển động sóng. Dưới tác động của lực tạo triều biến đổi tuần hoàn, trong biển xuất hiện những dao động với chu kỳ tương ứng với chu kỳ của lực và những dao động này lan truyền trong biển, chịu tác động của những quá trình khác, dao động ở những điểm khác nhau trên biển sẽ khác nhau về cường độ và pha.

Những hạt nước trong sóng triều chuyển động theo những quỹ đạo dạng ellip. Người quan sát ghi nhận được quỹ đạo ấy thông qua hiện tượng biến thiên tuần hoàn của độ cao mực nước thủy triều và các vectơ dòng triều. Dòng triều có thể coi như hình chiếu của quỹ đạo chuyển động lên mặt phẳng ngang, còn dao động mực nước – hình chiếu của quỹ đạo lên mặt phẳng thẳng đứng.

Những điều kiện địa lý của biển như hình dạng đường bờ, kích thước hình học của bờ, phân bố độ sâu, sự tồn tại các đảo và các vịnh trong biển có ảnh hưởng quyết định đến độ lớn và đặc điểm thủy triều trong biển đó và trong các bộ phận của nó. Thực tế quan trắc thấy rằng, trong khi ở một số vùng của đại dương dao động thủy triều có biên độ rất lớn, thì ở một số vùng khác dao động thủy triều diễn ra yếu hoặc gần như không có. Được biết nơi có biên độ dao động mực nước thủy triều lớn nhất trong đại dương 18m là vùng vịnh Fundy (Canada) và nơi thủy triều hoàn toàn không đáng kể là biển Bantích.

Dưới đây là một số thuật ngữ và định nghĩa cơ bản thường gặp khi mô tả và nghiên cứu thủy triều.

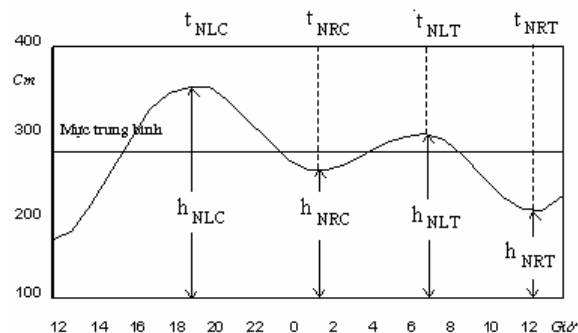
Triều dâng là sự dâng lên của mực nước từ mực thấp nhất (*nước ròng*) lên tới mực cao nhất (*nước lớn*) trong một chu kỳ triều. *Chu kỳ triều* là khoảng thời gian giữa hai nước lớn hoặc hai nước ròng liên tiếp nhau. Theo chu kỳ triều người ta phân loại: *triều bán nhật* nếu như chu kỳ dao động của thủy triều bằng nửa ngày Mặt Trăng (12g25ph), *triều toàn nhật* – chu kỳ bằng một ngày Mặt Trăng (24g50ph) và *triều hỗn hợp* với chu kỳ biến đổi trong thời gian nửa tháng Mặt Trăng từ bán nhật sang toàn nhật hay ngược lại. Nếu số ngày với chu kỳ toàn nhật chiếm ưu thế thì thủy triều được gọi là *triều toàn nhật không đều*, nếu số ngày với chu kỳ bán nhật chiếm ưu thế – *triều bán nhật không đều*.

Biên độ triều được xác định bằng hiệu giữa độ cao mực nước lớn hoặc mực nước ròng và mực nước trung bình (giá trị trung bình số học của các độ cao mực nước trong một khoảng thời gian: ngày, tháng, năm hoặc nhiều năm). Trong thực tế người ta hay dùng một đại lượng gọi là *độ lớn triều* – bằng hiệu giữa độ cao nước lớn và nước ròng kế tiếp nhau trong một chu kỳ triều.

Tuần tự ứng với các thời điểm xuất hiện nước lớn và nước ròng người ta có các khái niệm *thời gian nước lớn* hoặc *thời gian nước ròng*.

Khoảng thời gian từ nước ròng tới nước lớn – *thời gian dâng nước* và khoảng thời gian từ nước lớn tới nước ròng – *thời gian rút nước*.

Đối với thủy triều hỗn hợp khi trong một ngày triều có hai lần nước lớn và hai lần nước ròng, thì người ta còn phân biệt *nước lớn cao* và *nước lớn thấp*, *nước ròng cao* và *nước ròng thấp*. Hình 1.1 là thí dụ biến thiên mực nước thủy triều ở một trạm với thủy triều hỗn hợp (trạm Vũng Tàu ngày 11–12/01/1988).



Hình 1.1. Biến trình ngày của mực nước thủy triều

Khi xem đường cong triều ký trong nhiều ngày liền, có thể thấy những khác nhau về các thời gian dâng nước hoặc rút nước cũng như về độ lớn triều trong các chu kỳ triều, các ngày triều kế tiếp nhau. Những khác nhau này liên quan tới những thay đổi có quy luật của vị trí Mặt Trăng, Mặt Trời và Trái Đất và được gọi là *triều sai*. Căn cứ vào chu kỳ biến đổi của các triều sai người ta phân chia thành triều sai ngày, triều sai nửa tháng, triều sai thị sai và các triều sai chu kỳ dài với chu kỳ từ nửa năm trở lên tới nhiều năm.

Triều sai ngày thể hiện ở chỗ độ cao hai nước lớn hay hai nước ròng kế tiếp nhau trong ngày không bằng nhau, thời gian nước dâng và thời gian nước rút trong ngày không bằng nhau. Triều sai ngày liên quan tới

góc xích vĩ Mặt Trăng, Mặt Trời và điều kiện địa lý tại điểm quan trắc. Trong nhật triều không đều, triều sai ngày có thể thể hiện mạnh làm mất hẳn nước lớn thấp và nước ròng cao trong những ngày Mặt Trăng có góc xích vĩ lớn và dao động thủy triều trở thành toàn nhật đều trong những ngày đó.

Triều sai nửa tháng có hai dạng: 1) Triều sai liên quan tới tuần trăng đặc trưng cho thủy triều bán nhật. Vào kỳ sóc vọng (trăng non hoặc trăng tròn) triều đạt độ lớn cực đại (*triều cường*), còn vào kỳ trực thệ (thượng huyền hoặc hạ huyền) triều đạt độ lớn nhỏ nhất (*triều kém*). Do ảnh hưởng của điều kiện địa lý, triều cường không trùng hẳn với kỳ sóc vọng, mà thường xảy ra muộn hơn một số ngày, khoảng trễ này gọi là *tuổi bán nhật triều*. 2) Triều sai liên quan tới biến đổi góc xích vĩ Mặt Trăng trong một tháng Mặt Trăng đặc trưng cho nhật triều. Khi góc xích vĩ lớn nhất, Mặt Trăng tới chí tuyến bắc hoặc chí tuyến nam) thì triều đạt độ lớn cực đại – *triều chí tuyến*, những ngày góc xích vĩ bằng không, Mặt Trăng ở xích đạo, thì triều cực tiểu – *triều xích đạo* hay *triều nhật phân*. Cũng do điều kiện địa lý cụ thể của điểm quan trắc, triều chí tuyến thường xảy ra muộn hơn so với thời gian góc xích vĩ Mặt Trăng cực đại một khoảng thời gian gọi là *tuổi nhật triều*.

Triều sai thị sai liên quan tới sự thay đổi khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trăng. Chu kỳ của dạng triều sai này bằng một tháng Mặt Trăng. Những triều sai chu kỳ dài có nguyên nhân ở sự biến đổi góc xích vĩ Mặt Trời (chu kỳ nửa năm), sự biến đổi khoảng cách Trái Đất – Mặt Trời (chu kỳ năm) và sự biến thiên nhiều năm của góc xích vĩ Mặt Trăng (trong chu kỳ 18,61 năm góc xích vĩ Mặt Trăng biến thiên trong khoảng $23^{\circ}27'3\pm 5^{\circ}8'7$).

Thủy triều quan sát thấy ở những vùng đại dương rất khác nhau về độ lớn và đặc điểm. Những đặc trưng này của thủy triều chủ yếu phụ thuộc vào điều kiện địa lý điểm quan trắc biểu hiện định lượng bằng

những đại lượng gọi là hằng số điều hoà thủy triều của các phân triều chính (xem chương 3).

Trong thực hành người ta căn cứ vào giá trị của tỷ số

$$\frac{H_{K_1} + H_{O_1}}{H_{M_2}}$$

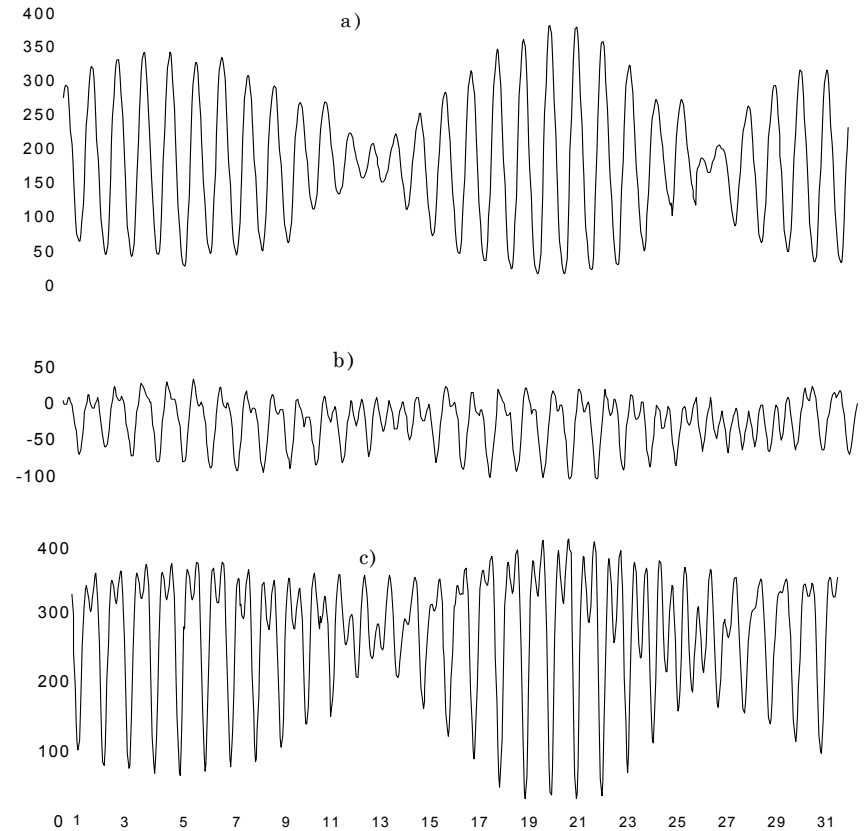
trong đó H – hằng số điều hoà biên độ của các phân triều chính: nhật triều Mặt Trăng – Mặt Trời K_1 ; nhật triều Mặt Trăng elliptic O_1 và bán nhật triều chính Mặt Trăng M_2 , để phân loại thủy triều. Trên đại dương có thể có bốn loại thủy triều cơ bản ứng với những giá trị của tỷ số trên như sau [4]:

<i>Loại thủy triều:</i>	<i>Giới hạn của tỷ số:</i>
– Bán nhật triều đều	$0 \div 0,5$
– Bán nhật triều không đều	$0,5 \div 2,0$
– Nhật triều không đều	$2,0 \div 4,0$
– Nhật triều đều	$> 4,0$

Thí dụ, những đường cong triều ký của một số loại giao động triều cơ bản trên đây ở biển Đông được thể hiện trên hình 1.2. Trên hình này, trục ngang biểu thị những ngày trong một tháng, trục thẳng đứng là độ cao mực nước thủy triều (cm) trên số không trạm.

Thấy rằng ở vùng Hòn Dấu, hầu hết các ngày của tháng mỗi ngày có một lần nước lớn, một lần nước ròng. Trong khi đó ở Vũng Tàu, mỗi ngày có hai lần nước lớn và hai lần nước ròng, độ cao của các nước lớn và các nước ròng trong ngày không như nhau. Biên độ và độ lớn của thủy triều ở hai trạm này tương đối lớn, khoảng 3,6–3,8 m. Tại trạm Cửa Gianh, ta thấy thủy triều có tính bán nhật, mỗi ngày thường có hai nước

lớn và hai nước ròng, nhưng độ lớn của giao động thủy triều khác với hai trạm trên là rất nhỏ, khoảng xấp xỉ một mét. Qua thí dụ này chúng ta thấy rõ về hiện tượng phân hóa của thủy triều cả về tính chất lẫn độ lớn trong không gian của biển.



(a – trạm Hòn Dấu, b – trạm Cửa Gianh, c – trạm Vũng Tàu)

Hình 1.2. Biến thiên mực nước tháng của một số loại thủy triều

1.2. SỰ HÌNH THÀNH LỰC TẠO TRIỀU

Những lực tác dụng lên mỗi phần tử vật chất của Trái Đất gồm lực trọng trường, lực hấp dẫn của Mặt Trăng, Mặt Trời và lực ly tâm hình thành khi các hệ Trái Đất – Mặt Trăng hay Trái Đất – Mặt Trời quay quanh những trọng tâm chung tương ứng của chúng. Trọng lực đối với mỗi điểm của Trái Đất không đổi, vì vậy có thể không cần kể đến. Lực hấp dẫn của Mặt Trăng hay Mặt Trời tác động lên những điểm khác nhau trên Trái Đất sẽ không bằng nhau, phụ thuộc vào khoảng cách từ những điểm đó đến Mặt Trăng và Mặt Trời.

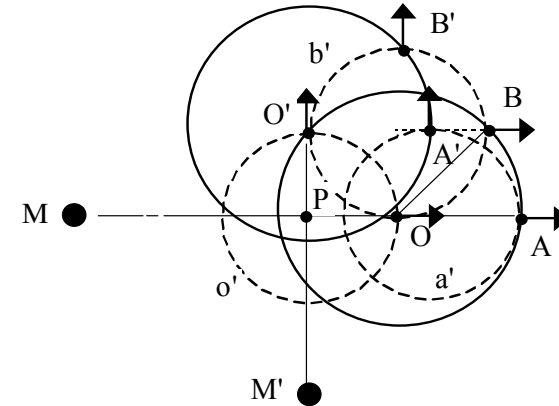
Muốn hiểu về lực ly tâm vừa nói ở trên, ta xét sự chuyển động của hệ Trái Đất – Mặt Trăng hay Trái Đất – Mặt Trời. Nhờ những chuyển động biệt lập trong không gian và hấp dẫn lẫn nhau, Trái Đất và Mặt Trăng không rơi vào nhau mà cùng quay quanh một trọng tâm chung P ở khoảng cách 0,73 bán kính Trái Đất, trên đường nối tâm Trái Đất với tâm Mặt Trăng (hình 1.3). Giả sử vị trí Mặt Trăng ký hiệu là M , tâm Trái Đất ký hiệu là O . Nếu nhìn từ sao Bắc Cực, thì thấy Mặt Trăng quay quanh trọng tâm chung theo chiều ngược kim đồng hồ, sau một khoảng thời gian vị trí mới của Mặt Trăng sẽ là M' , tâm Trái Đất O cũng quay quanh trọng tâm chung theo chiều ngược kim đồng hồ trên vòng tròn o' bán kính OP đến điểm O' (hình 1.3). Bây giờ nếu ta không xét đến sự xoay của Trái Đất quanh trục của nó, thì thấy rằng tất cả các điểm bên trong và trên mặt Trái Đất đều quay trên những vòng tròn bán kính bằng bán kính vòng tròn quỹ đạo của tâm Trái Đất nhưng với những tâm khác nhau, thí dụ: điểm A quay theo đường tròn đến điểm A' , điểm B quay theo đường tròn b' đến điểm B' . Trên hình vẽ ta thấy rằng tại thời điểm bất kỳ những đường thẳng nối những điểm quay bất kỳ với những tâm quay tương ứng của chúng đều song song với nhau và song song với đường thẳng nối tâm Trái Đất với Mặt Trăng. Vậy trong khi hệ thống quay, những lực ly tâm (được vẽ bằng những mũi tên đậm) xuất hiện ở

mọi điểm trên Trái Đất, kể cả ở tâm của nó, đều bằng nhau về độ lớn và có hướng song song với đường thẳng nối tâm Trái Đất với Mặt Trăng về phía xa Mặt Trăng.

Quá trình hình thành những lực ly tâm ở các điểm trên Trái Đất trong khi hệ Trái Đất – Mặt Trời quay quang trọng tâm chung cũng tương tự như vậy.

Nếu ký hiệu lực ly tâm ở điểm bất kỳ trên Trái Đất là \vec{C} , lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên điểm đó là \vec{P} (hình 1.4). Tổng vectơ của lực ly tâm và lực hấp dẫn tại mỗi điểm sẽ là lực tạo triều \vec{F}

$$\vec{F} = \vec{C} + \vec{P}. \quad (1.1)$$



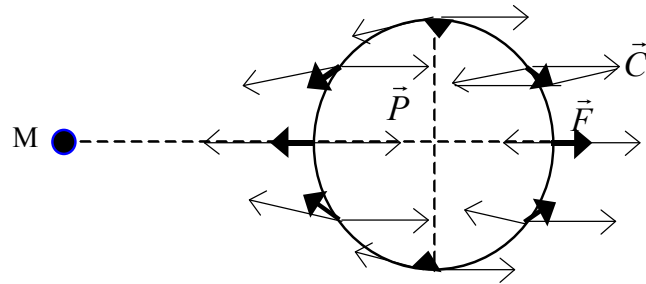
Hình 1.3. Giải thích sự hình thành lực tạo triều của hệ Trái Đất – Mặt Trăng

Nhưng do lực ly tâm ở mỗi điểm bất kỳ bằng về độ lớn và ngược hướng so với lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên tâm Trái Đất nên

$$\vec{F} = \vec{P} - \vec{P}_o, \quad (1.2)$$

trong đó \vec{P}_o – lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên tâm Trái Đất.

Như vậy suy ra lực tạo triều tại một điểm bất kỳ trên Trái Đất bằng hiệu giữa lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên điểm đó và lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên tâm Trái Đất. Công thức (1.2) rất thuận tiện khi tính các lực tạo triều cho các điểm trên Trái Đất.

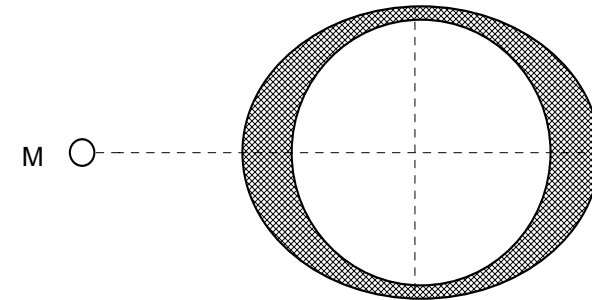


Hình 1.4. Phân bố lực tạo triều trên Trái Đất

Trên hình 1.4 biểu diễn sự phân bố lực tạo triều trên mặt Trái Đất. Thấy rằng tại điểm gần Mặt Trăng nhất trên đường nối tâm Trái Đất với tâm Mặt Trăng lực tạo triều có độ lớn lớn nhất và hướng về phía Mặt Trăng. Tại điểm xa Mặt Trăng nhất trên đường này lực tạo triều cũng có độ lớn đó nhưng hướng về phía xa Mặt Trăng. Tại những điểm trên vòng sáng Trái Đất, lực tạo triều có độ lớn chỉ bằng khoảng một nửa so với hai trường hợp trên và hướng vào phía tâm Trái Đất. Với những điểm chuyển tiếp khác, các lực tạo triều có độ lớn và hướng chuyển tiếp giữa hai trường hợp đặc biệt trên.

Dưới tác động của các lực tạo triều, những phần tử nước trên Trái Đất cần phải dịch chuyển theo chiều các mũi tên chỉ vector lực. Nếu như đại dương là một lớp vỏ nước dày đều bao phủ khắp mặt Trái Đất thì nước sẽ dâng cao nhất tại những điểm nằm trên đường nối các tâm Trái Đất và Mặt Trăng, hạ thấp nhất tại những điểm nằm trên vòng sáng Trái Đất. Kết quả là mặt đại dương có dạng ellipxoit tròn xoay với trục lớn

hướng theo đường nối các tâm Trái Đất và Mặt Trăng (hình 1.5).



Hình 1.5. Phân bố độ cao mực nước trên Trái Đất dưới tác dụng lực tạo triều

Bây giờ ta thử sử dụng công thức (1.2) để tính độ lớn của các lực tạo triều của Mặt Trăng và Mặt Trời và so sánh chúng. Lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên một hạt nước khối lượng một đơn vị tại tâm Trái Đất bằng

$$F_0^M = \frac{kM}{r^2},$$

trong đó M – khối lượng Mặt Trăng; khoảng cách từ tâm Trái Đất tới Mặt Trăng; k – hằng số hấp dẫn ($k = \frac{g\rho^2}{E}$, g – gia tốc trọng trường Trái Đất, ρ – bán kính Trái Đất, E – khối lượng Trái Đất). Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến Mặt Trăng bằng 60 lần bán kính Trái Đất, khối lượng Trái Đất lớn gấp 81 lần khối lượng Mặt Trăng. Do đó ta tính được lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên tâm Trái Đất bằng

$$F_0^M = \frac{g\rho^2 M}{(60\rho)^2 \cdot (81M)} = \frac{g}{(60)^2 \cdot 81} \approx \frac{g}{291600}$$

và lực hấp dẫn của Mặt Trăng lên điểm xa Mặt Trăng nhất trên mặt Trái Đất bằng

$$F_p^M = \frac{g\rho^2 M}{(61\rho)^2 \cdot (81M)} = \frac{g}{(61)^2 \cdot 81} \approx \frac{g}{301401}.$$

Vậy độ lớn của lực tạo triều Mặt Trăng tại điểm này bằng $F_p^M = 0,11 \times 10^{-6} g$. Tương tự ta tính lực tạo triều của Mặt Trời, biết rằng khoảng cách từ tâm Trái Đất tới Mặt Trời bằng 23.400 lần bán kính Trái Đất, khối lượng Mặt Trời bằng 333.000 khối lượng Trái Đất. Các lực hấp dẫn của Mặt Trời lên tâm Trái Đất và lên một điểm xa Mặt Trời nhất trên mặt Trái Đất tuân tự bằng:

$$F_0^S = \frac{g\rho^2 E(333.000)}{(23.400\rho)^2 E} = \frac{g(333.000)}{(23.400)^2} \approx \frac{g}{1644,3243},$$

$$F_p^S = \frac{g\rho^2 E(333.000)}{(23.401\rho)^2 E} = \frac{g(333.000)}{(23.401)^2} \approx \frac{g}{1644,4649},$$

và độ lớn lực tạo triều Mặt Trời cho điểm này $F_p^S = 0,52 \times 10^{-7} g$. Từ đây có thể đánh giá lực tạo triều Mặt Trăng lớn hơn lực tạo triều Mặt Trời khoảng 2,1 lần.

1.3. BIỂU THỨC GIẢI TÍCH CỦA LỰC TẠO TRIỀU

Bây giờ ta sẽ tìm những biểu thức định lượng của lực tạo triều làm cơ sở cho những tính toán thủy triều tiếp sau.

Trên hình 1.6 là hệ tọa độ vuông góc $OXYZ$ với tâm O tại tâm Trái Đất và mặt phẳng XOY trùng mặt phẳng xích đạo Trái Đất, trục OZ hướng lên trên. Mặt Trăng với khối lượng M có tọa độ biến đổi ε, η, ζ . Ký hiệu ρ – bán kính Trái Đất, D – khoảng cách từ điểm $P(x, y, z)$ đến tâm Mặt Trăng, r – khoảng cách từ tâm Trái Đất đến tâm Mặt Trăng, Z – góc thiên đỉnh của Mặt Trăng đối với điểm P . Hình chiếu của lực tạo triều trên các trục tọa độ tính cho một đơn vị khối lượng của phần tử nước tại điểm P theo công thức (1.2) sẽ bằng

$$F_x = \frac{kM}{D^2} \frac{\varepsilon - x}{D} - \frac{kM}{r^2} \frac{\varepsilon}{r} = kM \left(\frac{\varepsilon - x}{D^3} - \frac{\varepsilon}{r^3} \right),$$

$$F_y = \frac{kM}{D^2} \frac{\eta - y}{D} - \frac{kM}{r^2} \frac{\eta}{r} = kM \left(\frac{\eta - y}{D^3} - \frac{\eta}{r^3} \right), \quad (1.3)$$

$$F_z = \frac{kM}{D^2} \frac{\zeta - z}{D} - \frac{kM}{r^2} \frac{\zeta}{r} = kM \left(\frac{\zeta - z}{D^3} - \frac{\zeta}{r^3} \right),$$

trong đó k – hằng số hấp dẫn.

Trong tam giác MOP ta có

$$D = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos Z)^{1/2} = r \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos Z \right)^{1/2}.$$

Vì $\frac{\rho}{r}$ rất nhỏ nên có thể bỏ qua bình phương của nó và

$$D = r \left(1 - 2\frac{\rho}{r} \cos Z \right)^{1/2},$$

do đó

$$\frac{1}{D^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - 2\frac{\rho}{r} \cos Z \right)^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3} \left(1 + 3\frac{\rho}{r} \cos Z \right).$$

Thế biểu thức cuối cùng này vào (1.3), biến đổi, bỏ qua những số hạng nhỏ dạng

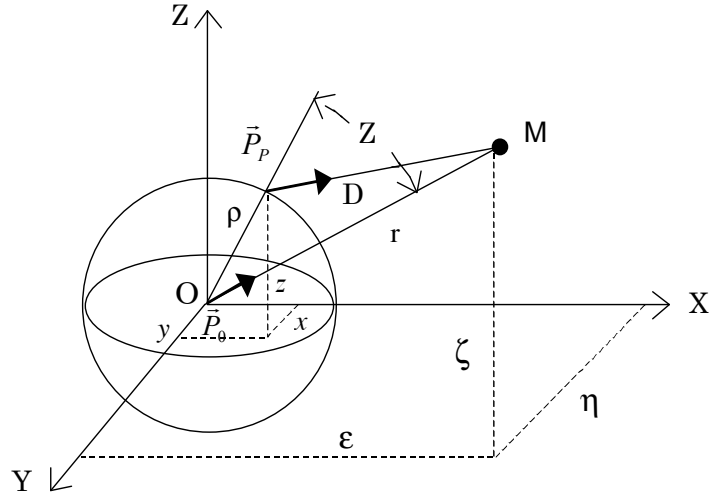
$$\frac{\rho x}{r}, \frac{\rho y}{r}, \frac{\rho z}{r},$$

ta sẽ nhận được

$$F_x = \frac{kM}{r^3} \left(-x + 3\frac{\rho\varepsilon}{r} \cos Z \right),$$

$$F_y = \frac{kM}{r^3} \left(-y + 3 \frac{\rho \eta}{r} \cos Z \right), \quad (1.4)$$

$$F_z = \frac{kM}{r^3} \left(-z + 3 \frac{\rho \zeta}{r} \cos Z \right),$$



Hình 1.6. Hệ tọa độ để xác định lực tạo triều Mặt Trăng

Trong lý thuyết thủy triều thường dùng khái niệm *hàm thế vị* của lực tạo triều – là một hàm mà đạo hàm riêng theo các hướng của trục tọa độ sẽ bằng hình chiếu của lực tạo triều trên các hướng đó. Ngược lại, khi đã biết hình chiếu của lực trên các trục tọa độ – các biểu thức (1.4), thì hàm thế vị Ω tìm được bằng cách lấy tích phân

$$\Omega = \int_{0,0,0}^{x,0,0} F_x dx + \int_{x,0,0}^{x,y,0} F_y dy + \int_{x,y,0}^{x,y,z} F_z dz. \quad (1.5)$$

Thế những biểu thức (1.4) vào (1.5), biểu diễn

$$\cos Z = \frac{\varepsilon x + \eta y + \zeta z}{\rho r}$$

rồi tính tích phân, ta được biểu thức hàm thế vị của lực tạo triều Mặt Trăng

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{k M \rho^2}{r^3} \left(\cos^2 Z - \frac{1}{3} \right). \quad (1.6)$$

Tương tự ta có thể tìm được biểu thức hàm thế vị của lực tạo triều Mặt Trời

$$\Omega' = \frac{3}{2} \frac{k M' \rho'^2}{r'^3} \left(\cos^2 Z' - \frac{1}{3} \right), \quad (1.7)$$

trong đó dấu phẩy trên các ký hiệu dùng để chỉ rằng chúng ứng với Mặt Trời. Thế vị thực của lực tạo triều bằng tổng các thế vị của Mặt Trăng và Mặt Trời

$$W = \Omega + \Omega'. \quad (1.8)$$

Khi đã biết biểu thức thế vị lực tạo triều, có thể tính được các thành phần lực tạo triều theo phương bất kỳ. Các biểu thức (1.9) tuân tự biểu diễn thành phần lực tạo triều tiếp tuyến với mặt Trái Đất và thành phần hướng theo bán kính Trái Đất

$$F_s = \frac{\partial \Omega}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = \frac{3}{2} \frac{k \rho M}{r^3} \sin 2Z,$$

$$F_\rho = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = \frac{3k \rho M}{r^3} \left(\cos^2 Z - \frac{1}{3} \right). \quad (1.9)$$

Thành phần tiếp tuyến F_s cực đại khi Z bằng 45° và 135° , còn thành phần thẳng đứng cực đại khi Z bằng 0° và 180° . Thành phần tiếp tuyến bằng không khi Z bằng 0° và 180° , thành phần thẳng đứng bằng không khi Z bằng 54° và 126° . Thay trị số của các đại lượng trong công

thức (1.9), nhận được

$$F_s = \frac{g}{12 \times 10^6} \quad \text{và} \quad F_\rho = \frac{g}{9 \times 10^6}$$

đối với trường hợp lực tạo triều Mặt Trăng. Thấy rằng lực tạo triều rất nhỏ so với trọng lực. Thành phần thẳng đứng tuy lớn hơn thành phần tiếp tuyến, nhưng có cùng phương với trọng lực nên không gây chuyển động, chỉ làm thay đổi trọng lượng của các hạt nước, trong khi đó thành phần tiếp tuyến tác động theo phương vuông góc với trọng lực có thể làm cho các hạt nước dịch chuyển trong mặt phẳng ngang, dẫn tới dâng nước ở nơi này và hạ thấp mực nước ở nơi khác.

1.4. THUYẾT TĨNH HỌC THỦY TRIỀU

Newton là người đầu tiên tìm ra biểu thức thế vị của lực tạo triều và đề xướng thuyết tĩnh học thủy triều hay còn gọi là thuyết thủy triều cân bằng. Thuyết tĩnh học giả thiết rằng đại dương bao phủ khắp Trái Đất bằng một lớp nước dày đều và trong từng thời điểm lực trọng trường Trái Đất tác dụng lên phần tử nước luôn cân bằng với lực tạo triều tác dụng lên nó. Nếu cân bằng thế vị của lực tạo triều với công năng một đơn vị khối lượng nước từ mực trung bình lên tới mực triều $g\bar{\zeta}$ chống lại trọng lực, thì ta nhận được công thức tính độ cao triều tĩnh học như sau

$$\bar{\zeta} = -\frac{\Omega}{g} \quad (1.10)$$

đối với triều Mặt Trăng.

Thay biểu thức thế vị lực tạo triều Mặt Trăng (1.6) vào (1.10) và biểu diễn $\cos Z$ qua vĩ độ địa lý φ , xích vĩ Mặt Trăng δ , góc giờ Mặt Trăng A :

$$\cos Z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos A,$$

người ta nhận được công thức độ cao triều tĩnh dưới dạng

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{2} \frac{k M \rho^2}{g r^3} \left\{ \frac{(1 - 3 \sin^2 \delta)(1 - 3 \sin^2 \varphi)}{6} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos A + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta \cos 2A \right\}. \quad (1.11)$$

Theo công thức này độ cao triều tĩnh gồm ba hợp phần: hợp phần thứ nhất biến đổi chậm cùng với biến thiên xích vĩ Mặt Trăng gọi là hợp phần chu kỳ dài, hợp phần thứ hai biến đổi cùng với biến thiên góc giờ của Mặt Trăng gọi là hợp phần toàn nhật và hợp phần thứ ba chứa hàm $\cos 2A$ gọi là hợp phần triều bán nhật.

Tương tự có công thức độ cao triều tĩnh do lực tạo triều Mặt Trời

$$\bar{\zeta}' = \frac{3}{2} \frac{k M' \rho^2}{g r'^3} \left\{ \frac{(1 - 3 \sin^2 \delta')(1 - 3 \sin^2 \varphi)}{6} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\delta' \cos A' + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \cos^2 \delta' \cos 2A' \right\}. \quad (1.12)$$

Mực triều đại dương được tính theo công thức (1.11) hay (1.12) có dạng những ellipxoit tròn xoay với trục lớn hướng về phía Mặt Trăng hay Mặt Trời (hình 1.5). Nếu kể tới sự xoay của Trái Đất trong ngày quanh trục của nó, thì trong một ngày mỗi điểm trên mặt Trái Đất sẽ trải qua hai lần nước dâng lên và hai lần nước rút xuống do tác động của lực tạo triều Mặt Trăng hoặc Mặt Trời riêng biệt.

Tổng của hai ellipxoit triều sẽ cho độ cao tổng cộng của cả Mặt Trăng và Mặt Trời. Trong thời gian nửa tháng, do dịch chuyển vị trí tương đối của Mặt Trăng và Mặt Trời, nên vị trí tương đối của hai ellipxoit cũng thay đổi: những ngày sóc vọng (trăng non hoặc trăng tròn) hai tinh tú đồng thời thiên đỉnh, các trục lớn của hai ellipxoit định hướng trùng nhau tạo nên triều lớn nhất. Những ngày trực thệ (thượng huyền

hoặc hạ huyền) các trục lớn của hai ellipxoid vuông góc nhau, triều dâng do Mặt Trăng diễn ra đúng lúc triều rút do Mặt Trời và triều tổng cộng sẽ nhỏ nhất (hình 1.7).

Tính triều tĩnh theo các công thức (1.11) và (1.12) với những trị số trung bình của các tham số Mặt Trăng và Mặt Trời cho những kết quả như sau: độ lớn triều Mặt Trăng 0,54 m, triều Mặt Trời 0,25 m, do đó triều sóc vọng 0,79 m, triều trực thế 0,29 m. Thủy triều lớn nhất khi cả hai tinh tú ở cận điểm trên quỹ đạo của chúng: triều Mặt Trăng 0,64 m, triều Mặt Trời 0,26 m, triều tổng cộng 0,90 m. Nếu lúc trực thế mà Mặt Trăng ở viễn điểm, Mặt Trời ở cận điểm, thì triều Mặt Trăng 0,45 m và triều tổng cộng 0,19 m.

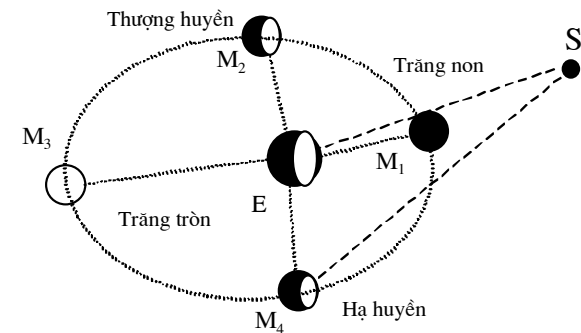
Ở các bờ đảo ngoài khơi đại dương, thủy triều diễn ra gần đúng như tính theo lý thuyết [2,4]. Sai khác giữa lý thuyết và triều thực xảy ra mạnh mẽ ở những vùng gần đất liền, điều này chủ yếu do ảnh hưởng của những điều kiện địa lý, địa hình mỗi vùng.

Đỉnh sóng triều tổng cộng luôn luôn gần trùng với đỉnh sóng triều Mặt Trăng vì triều Mặt Trăng lớn hơn triều Mặt Trời hai lần. Do đó người ta xác định thời gian nước lớn theo thời gian thượng đỉnh Mặt Trăng. Trong thực tế ngay những ngày sóc vọng nước lớn vẫn xuất hiện sau thượng đỉnh Mặt Trăng một khoảng thời gian gọi là nguyệt khoảng mà thuyết tĩnh không giải thích được.

Thuyết tĩnh giải thích sự biến đổi của nguyệt khoảng là do thượng đỉnh Mặt Trăng chậm hơn thượng đỉnh Mặt Trời (trung bình 50 phút một ngày) mà thời gian nước lớn triều tổng cộng cũng xê dịch so với thời gian nước lớn triều Mặt Trăng.

Thuyết tĩnh cũng có thể giải thích nguyên nhân của triều sai ngày. Trên hình (1.8) đường PP_1 là trục quay của Trái Đất, EQ – xích đạo, zn hướng lên Mặt Trăng khi xích vĩ bằng δ , Df – vòng giới hạn nửa chiều

sáng. Trục lớn của ellipxoid triều Mặt Trăng trong trường hợp này trùng với zn . Người quan sát ở điểm z thấy nước lớn lúc thượng đỉnh trên của Mặt Trăng. Khi Trái Đất xoay mang người quan sát đến điểm Z_2 trên vòng chiếu sáng, thì anh ta thấy nước ròng, nhưng không phải sau 6 giờ 12 phút sau nước lớn, mà lâu hơn, vì cung vĩ tuyến ZZ_2 lớn hơn một phần tư vòng tròn vĩ tuyến. Tiếp sau nước ròng này sẽ xuất hiện nước lớn thứ hai khi người quan sát được mang tới điểm Z_1 đúng 12 giờ 25 phút sau lần nước lớn đầu. Vậy nước lớn này xuất hiện sau nước ròng trước đó không phải là 6 giờ 12 phút mà ít hơn, vì cung vĩ tuyến Z_2Z_1 nhỏ hơn một phần tư vòng tròn vĩ tuyến. Nước lớn thứ hai ở Z_1 rõ ràng thấp hơn nước lớn thứ nhất ở Z . Sau nước lớn ở Z_1 nước ròng thứ hai sẽ xuất hiện sớm hơn 6 giờ 12 phút và sau 24 giờ 50 phút kể từ nước lớn thứ nhất người quan sát lại trở về điểm Z và lại thấy nước lớn. Đối với những điểm khác trên Trái Đất mực nước lớn lúc thượng đỉnh trên và lúc thượng đỉnh dưới không như nhau, vì ellipxoid triều không đối xứng qua trục quay của Trái Đất. Chỉ ở xích đạo hai nước lớn trong ngày mới cao như nhau. Tại các cực Trái Đất mực nước không biến đổi trong ngày.

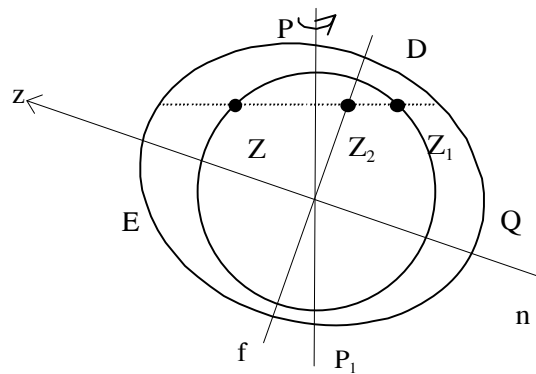


Hình 1.7. Giải thích triều sai tuần trăng

Triều Mặt Trời có chu kỳ triều sai ngày là nửa năm vì cứ sau nửa năm Mặt Trời lại đi qua xích đạo. Trong triều Mặt Trăng triều sai ngày có hai chu kỳ. Chu kỳ thứ nhất bằng 14 ngày do trong vòng $27\frac{1}{3}$ ngày Mặt Trăng quay một vòng đầy đủ quanh Trái Đất, hai lần đi qua mặt phẳng xích đạo, chu kỳ thứ hai bằng 18,6 năm do xích vĩ Mặt Trăng dao động trong khoảng $23^{\circ}27'3\pm 5^{\circ}8'8$ trong vòng ngàn ấy năm.

Như vậy sự biến thiên xích vĩ các tinh tú là nguyên nhân không những của triều sai ngày mà của cả những triều sai chu kỳ nửa tháng, nửa năm và 18,61 năm.

Triều thực Mặt Trăng và Mặt Trời trên đại dương có các lực địa không giống như trong mô hình lý tưởng của thuyết tĩnh. Ở đây không thể giải thích được sự phân bố phức tạp về độ lớn và tính chất triều ở đại dương và các biển như trên các bản đồ triều thực nhận được bằng quan trắc.



Hình 1.8. Giải thích triều sai ngày

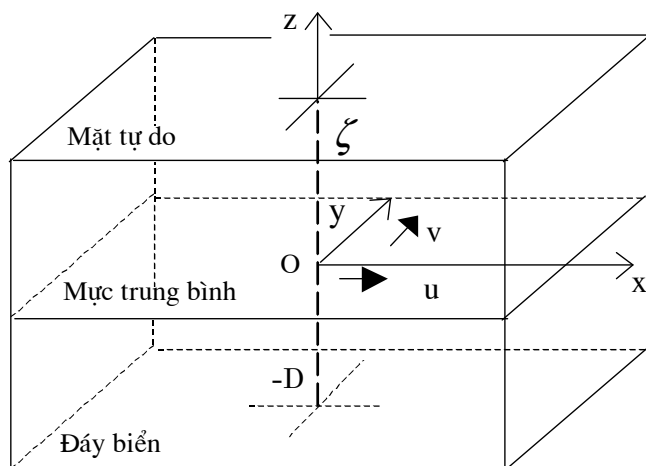
1.5. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA THỦY TRIỀU

Mối phụ thuộc phức tạp của lực tạo triều với thời gian được thể hiện bằng cách khai triển các hàm thế vị $\Omega(t)$ hay hàm độ cao mực nước triều $\zeta(t)$ thành các số hạng (thành phần) điều hoà theo thời gian, hơn nữa trong thực tiễn người ta chỉ tính tới một số các thành phần điều hoà đầu tiên, những số hạng khai triển quan trọng nhất (xem chương 3). Điều này phù hợp với những nguyên lý của cơ học cổ điển nói rằng: (1) chu kỳ dao động do tác động của lực tuần hoàn thì bằng chu kỳ của lực; (2) nếu có nhiều lực tác động thì có thể nghiên cứu dao động do từng lực gây ra, kết quả cộng các dao động ấy sẽ cho kết quả tác động tổng cộng của tất cả các lực.

Sự biến động nhanh của lực tạo triều với thời gian dẫn tới phá hủy có tính chu kỳ sự cân bằng và lôi cuốn các khối nước dao động với tốc độ và gia tốc lớn. Thành thử trong thực tế hiện tượng thủy triều có đặc điểm động lực rõ rệt, chứ không như giả thiết cơ bản của thuyết tĩnh học về thủy triều: Các khối nước có quán tính lớn không thể trở nên cân bằng tức khắc với biến đổi của lực tạo triều. Vì vậy, dưới tác động của lực tạo triều tuần hoàn, các phần tử nước chuyển động đến những vị trí cân bằng mới, có xu hướng vượt quá vị trí cân bằng đó và sau đó dao động bên nó. Nếu lực tạo triều ngừng tác động thì dao động của các phần tử nước và do đó của mực biển sẽ tắt dần do ma sát. Vì lực tạo triều tuần hoàn, có chu kỳ xác định, nên dao động mực biển không tắt dần và có chu kỳ. Mực biển không còn đặc trưng bằng $\bar{\zeta}$ nữa mà bằng độ dâng thực ζ so với mực trung bình.

Như vậy, nếu xem xét hiện tượng thủy triều theo quan điểm động lực như trên thì đòi hỏi phải kể đến các lực liên quan với bản chất động lực của hiện tượng. Những lực quan trọng nhất gồm: gradien áp suất do tồn tại độ chênh mực nước theo phương ngang, các lực quán tính thời

gian và không gian, lực Coriolis và các lực ma sát. Trong trường hợp này hiện tượng thủy triều được mô tả bằng hệ các phương trình thủy triều bao gồm phương trình chuyển động phản ánh cân bằng động lượng đối với yếu tố thể tích chất lỏng và phương trình liên tục biểu diễn sự bảo tồn khối lượng của yếu tố thể tích đó. Lấy hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ với gốc O nằm trên mặt phẳng mực nước trung bình, trục Ox hướng dương phía đông, trục Oy hướng dương phía bắc và trục Oz hướng dương lên trên (hình 1.9).



Hình 1.9. Hệ tọa độ và các ký hiệu để xây dựng phương trình thủy triều

Để nhận được hệ phương trình mô tả chuyển động thủy triều ta xuất phát từ phương trình chuyển động và phương trình liên tục của chất lỏng không nén trong Trái Đất quay. Dưới dạng vectơ hệ này có dạng:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F} = 0;$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

trong đó \vec{v} – vectơ vận tốc; p – áp suất trong chất lỏng; $\vec{\omega}$ – vectơ tốc độ góc quay của Trái Đất; t – thời gian; ρ – mật độ chất lỏng; \vec{F} – ngoại lực, hay dưới dạng cho tọa độ vuông góc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y = 0;$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Trong các phương trình trên các đại lượng F_x, F_y, F_z – là những hình chiếu của ngoại lực; u, v, w – những hình chiếu của vận tốc tuần tự trên các hướng Ox, Oy, Oz ; f – thông số Coriolis ($= 2\omega \sin \varphi$, φ – vĩ độ địa lý).

Bây giờ chúng ta xem các chuyển động triều trong đại dương như là phản ứng của lớp nước đối với tác động của lực tạo triều.

Một trong những tính chất quan trọng của lực tạo triều rút ra từ các mực trước là sự đồng nhất của nó theo chiều thẳng đứng trong phạm vi cả lớp nước. Còn phân bố không gian của thành phần ngang của lực tạo triều (như đã nhận xét, thành phần thẳng đứng không có giá trị đáng kể đối với chuyển động triều) thường được mô tả bằng hàm thế vị Ω hay bằng thủy triều tĩnh (tức độ dâng của mực nước ζ so với mực trung bình) liên quan với hàm thế vị bằng biểu thức kiểu (1.10).

Khi đó các thành phần phương ngang của ngoại lực F_x, F_y sẽ là

những hình chiếu của lực tạo triều lên các trục tọa độ ngang, còn thành phần thẳng đứng F_z chỉ gồm trọng lực:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}; \\ F_y &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}; \\ F_z &= g. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Như vậy lực tạo triều tại mọi thời điểm được thể hiện qua gradien ngang của áp suất thủy tĩnh gây bởi độ dâng mực nước $\bar{\zeta}$ của thủy triều tĩnh học trên mặt phẳng gốc tọa độ.

Lấy trung bình thời gian của các phương trình chuyển động và liên tục trên đây, ta sẽ nhận được hệ phương trình chuyển động chất lỏng không nén trong Trái Đất quay dưới dạng Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z} - A \nabla^2 u + F_x = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z} - A \nabla^2 v + F_y = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (1.16)$$

và phương trình liên tục

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.17)$$

Trong các phương trình trên các đại lượng K – hệ số nhớt rối phương thẳng đứng và A – hệ số nhớt rối phương ngang.

Xuất phát từ những phương trình (1.14–1.17) chúng ta sẽ thực hiện một số biến đổi để nhận được hệ phương trình đặc trưng mô tả chuyển động triều liên hệ giữa các vận tốc chuyển động theo các phương ngang ứng với các trục Ox, Oy và dao động thẳng đứng của mặt nước biển trong thủy triều.

Tích phân phương trình (1.16) từ độ sâu đến mặt tự do của biển để tính áp suất tại độ sâu z và giá trị của các đạo hàm áp suất theo các phương ngang, chúng ta sẽ nhận được:

$$\int_p^{P_0} d p = -g \int_z^{\zeta} \rho dz \Rightarrow p = P_0 + g \int_z^{\zeta} \rho dz,$$

trong đó P_0 – áp suất khí quyển, ζ – độ cao mực nước triều trên mực trung bình. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial P_0}{\partial x} + g \int_z^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz + g \rho(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial P_0}{\partial y} + g \int_z^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial y} dz + g \rho(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \end{aligned}$$

hoặc nếu $P_0, \rho = \text{const}$ thì

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= g \rho \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= g \rho \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Gộp các số hạng chứa đạo hàm áp suất theo các trục tọa độ (biểu thức (1.18)) với các số hạng chứa đạo hàm của độ cao triều tĩnh (biểu thức (1.13)) ta viết lại các phương trình (1.14–1.15) như sau

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v - \\ & - g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}) - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z} - A \nabla^2 u = 0; \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u - \\ & - g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}) - \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z} - A \nabla^2 v = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Những phương trình (1.19), (1.20) và (1.17) làm thành hệ phương trình để mô tả chuyển động thủy triều trong biển đồng nhất. Bây giờ chúng ta biến đổi tiếp để nhận hai phương trình chuyển động trong đó có mặt các thành phần vận tốc trung bình toàn bề dày lớp nước biển từ mặt tự do tới đáy $z = -D$:

$$\bar{u} = \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \int_{-D}^{\bar{\zeta}} u dz \quad \text{và} \quad \bar{v} = \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \int_{-D}^{\bar{\zeta}} v dz. \quad (1.21)$$

Muốn vậy phải tích phân từng số hạng trong các phương trình chuyển động và liên tục (1.19)–(1.20) và (1.17) và sử dụng những điều kiện biên theo phương trục thẳng đứng:

$$\begin{aligned} & \text{– Điều kiện dính tại đáy đối với các thành phần tốc độ ngang} \\ & u = v = 0 \quad \text{khi } z = -D, \end{aligned} \quad (1.22)$$

còn đối với thành phần thẳng đứng có thể xác định theo biểu thức

$$w_{-D} = u_{-D} \frac{\partial D}{\partial x} + v_{-D} \frac{\partial D}{\partial y} \quad (1.23)$$

khi có những bất đồng nhất khá lớn về độ sâu biển, hoặc thông thường người ta sử dụng điều kiện triệt tiêu tốc độ thẳng đứng tại đáy

$$w_{-D} = 0. \quad (1.24)$$

– Điều kiện triệt tiêu ứng suất ma sát trên mặt tự do:

$$K \frac{\partial u}{\partial z} = K \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{khi } z = \zeta, \quad (1.25)$$

với D – độ sâu biển.

– Ứng suất ma sát ở đáy xấp xỉ bằng luật bình phương, tức thông lượng động lượng tỷ lệ với bình phương độ lớn của vận tốc dòng nước:

$$K \frac{\partial u}{\partial z} = r \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \bar{u} \quad \text{và} \quad K \frac{\partial v}{\partial z} = r \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \bar{v}, \quad (1.26)$$

trong đó r – hệ số ma sát đáy.

– Trên mặt tự do thoả mãn biểu thức động học:

$$w_{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (1.27)$$

Trong khi lấy tích phân từng số hạng của các phương trình và đổi thứ tự phép lấy tích phân và phép vi phân người ta phải áp dụng công thức tích phân với các cận biên đổi, thí dụ đối với hàm $F(x, y, z, t)$ công thức có dạng sau:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \int_{-D}^{\bar{\zeta}} \frac{\partial F}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \int_{-D}^{\bar{\zeta}} F dz + \\ & + \frac{1}{(D + \bar{\zeta})^2} \frac{\partial(D + \bar{\zeta})}{\partial x} \int_{-D}^{\bar{\zeta}} F dz - \frac{1}{D + \bar{\zeta}} F_{\bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} - \frac{1}{D + \bar{\zeta}} F_{-D} \frac{\partial D}{\partial x} \end{aligned}$$

Thí dụ, với phương trình liên tục (1.17) ta thực hiện như sau:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \int_{-D}^{\bar{\zeta}} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \frac{\partial(D + \bar{\zeta})}{\partial x} \bar{u} - \frac{u_{\bar{\zeta}}}{D + \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} - \frac{u_{-D}}{D + \bar{\zeta}} \frac{\partial D}{\partial x}; \\ & \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \int_{-D}^{\bar{\zeta}} \frac{\partial v}{\partial x} dz = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{1}{D + \bar{\zeta}} \frac{\partial(D + \bar{\zeta})}{\partial x} \bar{v} - \frac{v_{\bar{\zeta}}}{D + \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} - \frac{v_{-D}}{D + \bar{\zeta}} \frac{\partial D}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{D+\zeta} \int_{-D}^{\zeta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w_{\zeta} - w_{-D}.$$

Vậy sau khi sử dụng các điều kiện (1.24) và (1.27) phương trình liên tục trở thành

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (D+\zeta)\bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial (D+\zeta)\bar{v}}{\partial y}. \quad (1.28)$$

Thực hiện tương tự chúng ta nhận được các phương trình chuyển động viết cho tốc độ trung bình độ sâu dưới dạng tổng quát

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{1}{D} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-D}^{\zeta} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-D}^{\zeta} u v dz \right) - f \bar{v} = \\ -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}) - \frac{r}{D} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \bar{u} + A \nabla^2 \bar{u}; \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{D} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-D}^{\zeta} u v dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-D}^{\zeta} v^2 dz \right) + f \bar{u} = \\ -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}) - \frac{r}{D} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \bar{v} + A \nabla^2 \bar{v}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Khi viết các phương trình này người ta đã chấp nhận $D \gg \zeta$. Người ta có thể thay thế các số hạng thứ hai biểu thị lực quán tính không gian trong các phương trình chuyển động (1.29) và (1.30) bằng những số hạng tương đương thông qua các thành phần tốc độ trung bình độ sâu chứ không phải là tốc độ u và v . Người ta đã chứng minh được rằng những xấp xỉ

$$\frac{1}{D+\zeta} \int_{-D}^{\zeta} u^2 dz \approx \bar{u}^2, \quad \frac{1}{D+\zeta} \int_{-D}^{\zeta} u v dz \approx \bar{u} \bar{v},$$

hay

$$\frac{1}{D+\zeta} \int_{-D}^{\zeta} v^2 dz \approx \bar{v}^2$$

sẽ chỉ mắc sai số khoảng 2–3% trong điều kiện phân bố tốc độ theo độ sâu có dạng parabol – là dạng hiện thực của chuyển động triều. Trong những trường hợp này hai phương trình chuyển động sẽ có dạng sau đây thường được sử dụng nhiều nhất trong thực tiễn mô hình hóa thủy triều

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \bar{v} = \\ -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}) - \frac{r}{D} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \bar{u} + A \nabla^2 \bar{u}; \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \bar{u} = \\ -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}) - \frac{r}{D} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \bar{v} + A \nabla^2 \bar{v}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Các phương trình (1.28) và (1.31)–(1.32) liên hệ giữa các hàm – hai thành phần tốc độ ngang và độ cao mực nước trong thủy triều gọi là những phương trình triều. Người ta cũng còn gọi những phương trình trên là hệ phương trình chuyển động của sóng dài trong nước nông [7].

1.6. PHÂN TÍCH ĐỊNH TÍNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG TRIỀU

Phương trình chuyển động triều nhận được ở mục 1.5 tương đối tổng quát. Phân tích định tính hệ phương trình này nhằm đánh giá mức độ quan trọng của từng số hạng trong mỗi phương trình. Trong mục này chúng ta sẽ dùng phương pháp chuẩn hóa biến để đánh giá mức độ đóng góp của các số hạng trong phương trình chuyển động triều [6]. Theo

phương pháp này người ta biến đổi các phương trình triều thành dạng liên hệ giữa các biến không thứ nguyên nhận được bằng cách quy chuẩn các biến theo quy mô đặc trưng của chúng sao cho những biến không thứ nguyên có giá trị biến thiên trong khoảng từ không đến đơn vị. Mức độ quan trọng của mỗi số hạng tùy thuộc vào độ lớn của các hệ số không thứ nguyên đứng trước nó. Nếu số hạng nào có hệ số đứng trước có bậc nhỏ hơn so với hệ số của các số hạng khác, thì trong những trường hợp cụ thể để đơn giản cho việc giải hệ phương trình người ta có thể bỏ qua số hạng đó.

Bây giờ chúng ta đưa vào các phương trình (1.28), (1.29), (1.30) những biến số không thứ nguyên. Dùng đại lượng α^{-1} nghịch đảo với số sóng ($\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ – bước sóng thủy triều) làm quy mô ngang đặc trưng của chuyển động, độ sâu làm quy mô thẳng đứng đặc trưng, đại lượng σ^{-1} nghịch đảo với tốc độ góc của sóng triều ($\sigma = \frac{2\pi}{T}$, T – chu kỳ sóng) làm quy mô thời gian đặc trưng. Quy mô đặc trưng của tốc độ và mực nước triều tĩnh và triều thực ký hiệu tuần tự là U , $\bar{\zeta}_0$ và ζ_0 .

Thí dụ, với phương trình liên tục (1.28) thực hiện chuẩn hóa như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_0}{\sigma^{-1}} \frac{\partial \zeta_n}{\partial t_n} &= -U u_n \frac{(D + \zeta_0) \partial \zeta_n}{\alpha^{-1} \partial x_n} - \frac{(D + \zeta_0) U \partial u_n}{\alpha^{-1} \partial x_n} - \\ &- U v_n \frac{(D + \zeta_0) \partial \zeta_n}{\alpha^{-1} \partial y_n} - \frac{(D + \zeta_0) U \partial v_n}{\alpha^{-1} \partial y_n} \Rightarrow \\ \frac{\zeta_0}{\sigma^{-1}} \frac{\partial \zeta_n}{\partial t_n} &= -\frac{U D}{\alpha^{-1}} \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial y_n} \right). \end{aligned}$$

Từ đây thấy rằng, để duy trì tất cả các số hạng của phương trình liên tục, cần thoả mãn đẳng thức:

$$\frac{\zeta_0}{\sigma^{-1}} = \frac{U D}{\alpha^{-1}} \quad \text{hay} \quad \alpha^{-1} \zeta_0 = U D \sigma^{-1} \quad \text{hay} \quad \alpha \zeta_0 = \frac{U D \alpha^2}{\sigma}.$$

Với lực quán tính thời gian – số hạng thứ nhất của phương trình (1.29)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \rightarrow \frac{U}{\sigma^{-1}} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t_n},$$

với các số hạng quán tính không gian, tức số hạng thứ hai hoặc thứ ba

$$\frac{1}{D} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-D}^{\zeta} u^2 dz \right) \rightarrow \frac{1}{D} \frac{U^2 D}{\alpha^{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \int_0^1 u_n^2 dz_n \right) \dots$$

Thực hiện tương tự như vậy với tất cả các số hạng của các phương trình chuyển động, chia tất cả các số hạng cho hệ số của số hạng quán tính thời gian, sau khi rút gọn có sử dụng đẳng thức

$$\alpha \zeta_0 = \frac{U D \alpha^2}{\sigma}$$

(rút ra khi chuẩn hóa phương trình liên tục ở trên), người ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t_n} + R_o \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \int_0^1 u_n^2 dz_n + \frac{\partial}{\partial y_n} \int_0^1 u_n v_n dz_n \right) - a \bar{v}_n = \\ - \frac{R_o^2}{F_r} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\zeta_n - \frac{\bar{\zeta}_0}{D R_o} \bar{\zeta}_n \right) - \frac{r R_o}{\alpha D} \sqrt{\bar{u}_n^2 + \bar{v}_n^2} \bar{u}_n + \frac{R_o}{R_e} \nabla_n^2 \bar{u}_n; \quad (1.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial t_n} + R_o \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \int_0^1 u_n v_n dz_n + \frac{\partial}{\partial y_n} \int_0^1 v_n^2 dz_n \right) - a \bar{u}_n = \\ - \frac{R_o^2}{F_r} \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\zeta_n - \frac{\bar{\zeta}_0}{D R_o} \bar{\zeta}_n \right) - \frac{r R_o}{\alpha D} \sqrt{\bar{u}_n^2 + \bar{v}_n^2} \bar{v}_n + \frac{R_o}{R_e} \nabla_n^2 \bar{v}_n; \quad (1.34) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \zeta_n}{\partial t_n} = - \left(\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial y_n} \right). \quad (1.35)$$

Trong các biểu thức trên chỉ số n đánh dấu các đại lượng không thứ nguyên; $R_o = \frac{U}{C}$ ($C = \sigma \alpha^{-1}$ – tốc độ truyền sóng) – số Rossby biến tính; $R_e = \frac{U}{A \alpha}$ – số Reynolds biến tính; $a = \frac{f}{\sigma}$ – thông số biểu thị tương quan giữa lực Coriolis và lực quán tính; $F_r = \frac{U^2}{g D}$ – số Froude.

Mỗi số hạng trong các phương trình chuyển động là một lực tác động lên một đơn vị khối lượng. Để xác định mức độ ảnh hưởng của lực này hay lực khác trong chuyển động chỉ cần đánh giá các hệ số không thứ nguyên đứng trước các số hạng tương ứng.

Trong chuyển động nhật triều và bán nhật triều ở đại dương và các biển lớn [6] thì $O(\sigma) = 10^{-4} s^{-1}$; $O(D) = 10^5 cm$; $O(\alpha) = 10^{-8} cm^{-1}$, do đó bậc của các hệ số bằng:

$$O(R_o) = 10^{-3}; \quad O\left(\frac{r R_o}{\alpha D}\right) = 10^{-3}; \quad O\left(\frac{R_o}{R_e}\right) = 10^{-3};$$

$$O(r) = 10^{-3}; \quad O(A) = 10^9 cm^2/s; \quad O(a) = 1; \quad O\left(\frac{R_o^2}{F_r}\right) = 1.$$

Chính nhờ phân tích bậc đại lượng theo phương pháp trên đây mà người ta thấy rằng khi nghiên cứu thủy triều ở đại dương có thể bỏ qua những số hạng phi tuyến và các số hạng đặc trưng cho ma sát rôi ở đáy và ma sát rôi ngang. Các lực tạo triều trong trường hợp này nhỏ hơn một ít so với các lực gradien ngang của áp suất, lực Coriolis và lực quán tính thời gian ($O(\bar{\zeta}_o / DR_o) = 0,2 \div 0,3$), và do đó cần phải tính đến chúng khi mô phỏng thủy triều đại dương [6]. Có thể bỏ qua đóng góp của các lực

tạo triều nếu $\bar{\zeta}_o / DR_o \ll 1$, tức khi mực triều tĩnh đặc trưng nhỏ hơn mực triều thực ít nhất một bậc.

Chính vì vậy mà trong thực tiễn giải bài toán về phân bố thủy triều trên toàn đại dương người ta phân biệt các bài toán [6]: (1) tính thủy triều ở đại dương; (2) tính dao động triều ở phần khơi các biển ven và (3) tính triều ở các vùng gần bờ và các vịnh nông. Bài toán thứ nhất tương đối đơn giản vì trong hệ phương trình mô phỏng có thể loại trừ các thành phần phi tuyến và ma sát rôi, không cần đặt điều kiện biên lòng và đồng thời có thể bỏ qua những chi tiết bất đồng đều của đường bờ và đáy. Bài toán thứ hai liên quan tới những khó khăn đáng kể do có mặt của các lực ma sát trong sự thành tạo thủy triều. Đôi khi người ta hoặc bỏ qua lực này, hoặc đặt ra những giả thiết rất thô, xa thực tế. Ngày nay sự phát triển của phương pháp tính và kỹ thuật tính toán đã cho phép tính tới một cách khá đầy đủ những yếu tố chính trong các phương trình động lực thủy triều. Đó là những thành công của các phương pháp số tính thủy triều mà chúng ta sẽ xét trong chương 2.

Trong các mục tiếp dưới đây chúng ta sẽ xét một số bài toán truyền triều đơn giản cho phép khảo sát giải tích để rút ra những đặc điểm quan trọng nhất của hiện tượng triều trong đại dương và biển.

1.7. DAO ĐỘNG THỦY TRIỀU TRONG KÊNH

Vào năm 1845 G. Airy đã giải bằng giải tích bài toán truyền dao động thủy triều trong kênh hẹp không ma sát gọi là thuyết kênh thủy triều (xem [11]). Trong kênh hẹp chuyển động chỉ xảy ra theo phương dọc kênh, trục x , và thay vì các phương trình chuyển động (1.31)-(1.32), chỉ cần mô tả chuyển động đó bằng một phương trình chuyển động đơn giản

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial(\zeta - \bar{\zeta})}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (1.36)$$

Nếu độ sâu của kênh không đổi thì phương trình liên tục có dạng

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -D \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.37)$$

Bây giờ ta khảo sát trường hợp chuyển động triều dọc kênh bỏ qua lực tạo triều, tức xét sự truyền sóng tự do trong kênh. Tạm thời bỏ qua số hạng thứ hai về phải của phương trình (1.36), lấy đạo hàm hai vế của phương trình này theo x , lấy đạo hàm hai vế của phương trình (1.37) theo t rồi thế vào phương trình (1.36), nhận được phương trình sóng dưới đây cho đại lượng ζ :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -gD \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (1.38)$$

Như đã biết, phương trình này xác định sóng lan truyền dọc theo trục x với vận tốc

$$C = \sqrt{gD}. \quad (1.39)$$

Có thể kiểm tra điều này bằng cách viết tích phân tổng quát của phương trình (1.38) dưới dạng

$$\zeta = F_1(x - Ct) + F_2(x + Ct), \quad (1.40)$$

trong đó F_1, F_2 – những hàm số dạng bất kỳ.

Thoạt đầu bỏ qua số hạng thứ hai trong phương trình (1.40) và đặt $t = 0$. Khi đó nhận được phương trình của hình nghiêng sóng tại thời điểm đầu

$$\zeta = F_1(x). \quad (1.41)$$

Trong phương trình (1.41), nếu thêm một lượng C vào tọa độ x và thêm một giây vào thời gian t , ta được

$$\zeta = F_1[x + C - C(0 + 1)] = F_1(x).$$

Thấy rằng sau một giây, cùng một hình nghiêng sóng sẽ di chuyển

tới một điểm khác, cách điểm ban đầu một khoảng C , tức khoảng cách đi được sau một giây với tốc độ C . Vậy sóng truyền theo kênh với tốc độ bằng C .

Nếu tính đến số hạng thứ hai trong phương trình (1.40) thì thấy rằng sóng thứ hai sẽ truyền trong kênh với tốc độ bằng về giá trị tuyệt đối so với sóng thứ nhất nhưng theo hướng ngược lại. Hình nghiêng của nó được cho bởi hàm F_2 dạng bất kỳ. Tốc độ truyền sóng thủy triều không phụ thuộc vào dạng của hình nghiêng sóng, mà chỉ phụ thuộc vào độ sâu D . Dạng của các hàm F_1 và F_2 phụ thuộc điều kiện thành tạo sóng thủy triều.

Bây giờ giả sử dao động mặt kênh có dạng điều hoà đơn giản

$$\zeta = \zeta_0 \cos(Ct - x) = \zeta_0 \cos(nt - kx). \quad (1.42)$$

trong đó ζ_0 – biên độ dao động mực nước; $n = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (n – tốc độ góc của sóng; k – số sóng; T – chu kỳ sóng; λ – bước sóng), thì từ (1.37) ta có tốc độ chuyển động của các hạt nước trong kênh sẽ bằng

$$u = \frac{C}{D} \zeta_0 \cos(nt - kx). \quad (1.43)$$

Phân tích (1.42) và (1.43) ta thấy trong trường hợp này tốc độ chuyển động của các hạt nước đạt cực đại khi mực nước cao nhất hoặc thấp nhất, tức lúc nước lớn hoặc nước ròng. Tương quan giữa dao động của tốc độ dòng triều và dao động mực nước (*công thức Comoa*) bằng

$$u = \sqrt{\frac{g}{D}} \zeta. \quad (1.44)$$

Lúc nước lớn và nước ròng tốc độ dòng triều bằng nhau nhưng ngược chiều, dòng triều luôn hướng theo trục kênh và đổi chiều tùy theo pha nước lên hoặc xuống – *dòng triều thuận nghịch*. Hình dạng mặt kênh

chuyển dịch dọc theo kênh với tốc độ truyền sóng C . Chuyển động sóng trong trường hợp như vậy gọi là *sóng tiến*.

Nếu xét hai sóng truyền ngược chiều nhau, tức kể đến số hạng thứ hai trong biểu thức (1.40), thí dụ trường hợp hai dao động cùng biên độ truyền ngược chiều trong kênh, điều này xảy ra khi thủy triều truyền vào kênh kín một đầu và bị phản xạ toàn phần tại đầu kín, ta có:

$$\zeta = \zeta_0 \cos(nt - kx) + \zeta_0 \cos(nt + kx) = \zeta_0 \cos kx \cos nt, \quad (1.45)$$

và từ (1.37) suy ra:

$$u = -\frac{C}{D} \zeta_0 \sin kx \cos \left[nt - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (1.46)$$

Từ (1.46) thấy rằng tốc độ triều lưu sẽ bằng không khi $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$ (lúc nước lớn và nước ròng), nhưng đạt giá trị cực đại khi $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{3T}{4}$ (khi mực nước đi qua vị trí trung bình $\zeta = 0$). Dạng của sóng thủy triều không dịch chuyển trong không gian, tại những vị trí dọc kênh như

$$x = 0, \quad x = \frac{\lambda}{2}, \quad x = \lambda, \quad \dots$$

tức ở đầu kín của kênh và tại những khoảng cách một số nguyên lần nửa bước sóng dọc theo kênh mực nước dao động với biên độ cực đại. Những điểm đó gọi là *điểm bụng sóng*. Tại những điểm

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad x = \frac{3\lambda}{4}, \quad \dots$$

mặt nước luôn ở vị trí trung bình, *điểm nút sóng*. Chuyển động thủy triều trong trường hợp này gọi là *sóng đứng*. Trong trường hợp này dòng triều cũng thuộc loại thuận nghịch.

Trên cơ sở các biểu thức (1.43) hay (1.46) có thể tính các tốc độ triều lưu cực đại và khoảng dịch chuyển ngang cực đại của hạt nước trong một nửa chu kỳ triều ($\xi_{\max} = \int_0^{T/2} u dt = \frac{C}{n} \frac{\zeta_0}{D}$). Thí dụ ở bảng 1.1 tính cho trường hợp thủy triều bán nhật với biên độ mực nước 100 cm.

Bảng 1.1. Tốc độ triều lưu cực đại và khoảng dịch chuyển ngang của nước trong sóng triều

Độ sâu kênh (m)	100	500	1000	2000	4000
Tốc độ cực đại (hải lý/giờ)	0,61	0,27	0,19	0,14	0,10
Khoảng dịch chuyển (km)	4,4	2,0	1,4	1,0	0,7

Bây giờ xét những điều kiện thành tạo các sóng triều cường bức, tức xét hệ phương trình (1.36) và (1.37) dưới dạng đầy đủ có kể tới cả thế vị lực tạo triều, trong đó thế vị lực tạo triều được biểu diễn bằng biểu thức (xem công thức (1.6)):

$$\Omega = \frac{3}{2} \frac{kM\rho^2}{r^3} \left[\cos^2 Z - \frac{1}{3} \right].$$

Bây giờ ta biểu diễn khoảng thiên đỉnh của Mặt Trăng Z dưới dạng thuận tiện cho việc tích phân tiếp theo. Mặt Trăng chuyển động với tốc độ góc ω_2 quanh Trái Đất xấp xỉ trong mặt phẳng xích đạo, còn Trái Đất xoay quanh trục của nó với tốc độ góc ω . Kết quả là tốc độ góc của chuyển động tương đối của Mặt Trăng được xác định bằng hiệu giữa hai tốc độ góc ω_2 và ω [11]:

$$n = \omega_2 - \omega.$$

Trường hợp kênh hướng dọc theo xích đạo, khoảng thiên đỉnh Mặt Trăng biến thiên theo quy luật

$$Z = nt + \frac{x}{\rho} + e, \quad (1.47)$$

trong đó cung $\frac{x}{\rho}$ tính theo đường xích đạo về phía đông; còn e – khoảng thiên đỉnh Mặt Trăng tại thời điểm $t = 0$ cho một điểm tại đó $\frac{x}{\rho} = 0$. Đạo hàm

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= -\frac{3}{2} \frac{kM\rho^2}{r^3} \sin 2Z \frac{\partial Z}{\partial x} = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{kM\rho}{r^3} \sin 2 \left[nt + \frac{x}{\rho} + e \right] = -H \sin 2 \left[nt + \frac{x}{\rho} + e \right], \end{aligned}$$

trong đó ký hiệu $H = \frac{3}{2} \frac{kM\rho}{r^3}$.

Phương trình sóng (1.38) bây giờ trở thành

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - H \sin 2 \left[nt + \frac{x}{\rho} + e \right]. \quad (1.48)$$

Ta tìm tích phân của phương trình này dưới dạng

$$\zeta = A \cos 2 \left[nt + \frac{x}{\rho} + e \right].$$

Hằng số tích phân A xác định bằng cách lấy đạo hàm hai lần biểu thức này theo t và theo x rồi thế vào (1.48), nhận được

$$A = \frac{1}{4} \frac{H\rho^2}{C^2 - \rho^2 n^2}.$$

Cuối cùng ta có các biểu thức của dao động mực và dòng triều

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{DH\rho}{C^2 - \rho^2 n^2} \cos 2 \left[nt + \frac{x}{\rho} + e \right], \quad (1.49)$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{DH\rho}{C^2 - \rho^2 n^2} \cos 2 \left[nt + \frac{x}{\rho} + e \right]. \quad (1.50)$$

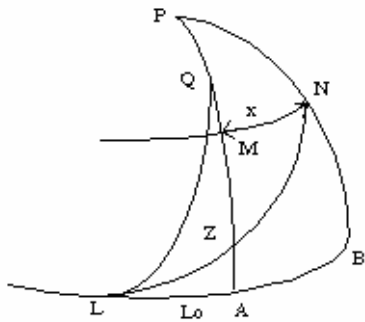
Chu kỳ dao động của mặt nước đại dương – chu kỳ thủy triều – bằng nửa ngày. Điều này tương ứng với quy luật đơn giản (1.47) của biến thiên khoảng thiên đỉnh Mặt Trăng. Phương trình (1.49) xác định sóng cường độ bức chạy trong kênh đui theo Mặt Trăng. Hiệu $\rho^2 n^2 - C^2$ trong điều kiện tự nhiên tùy thuộc độ sâu của kênh có thể mang dấu âm, do đó có thể trong lúc Mặt Trăng đi qua thiên đỉnh, tức khi biểu thức dưới dấu hàm cosin bằng không, vẫn có thể thấy nước ròng tại vị trí quan trắc [11].

Cũng thấy rằng tốc độ chuyển động của các hạt nước sẽ đạt cực đại vào những lúc nước lớn hoặc nước ròng.

Kênh hướng theo vĩ tuyến tại vĩ độ φ . Giả sử kênh hướng theo đường MN trên hình (1.10). Cũng như trong trường hợp trước ta giả sử độ xích vĩ Mặt Trăng bằng không. Khi đó tâm Mặt Trăng vào thời điểm t nào đó sẽ có hình chiếu trên đường xích đạo trùng với điểm L . Tại thời điểm Mặt Trăng đứng ở thiên đỉnh trên điểm L_0 , từ đó tính khoảng cách dọc theo kênh xích đạo theo điều kiện (1.47). Như vậy cung $L_0A = e$ (theo 1.47) và $LA = nt + e$.

Nếu khoảng cách giữa các điểm M và N đo theo cung vòng tròn lớn bằng x , thì đoạn MN biểu thị bằng radian là $\frac{x}{\rho}$. Theo các tương quan của lượng giác cầu ta có

$$AB = \frac{MN}{\cos \varphi} = \frac{x}{\rho \cos \varphi}.$$



Hình 1.10. Sơ đồ vị trí các kênh trên Trái Đất

Do đó

$$LB = nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e.$$

Mặt khác, xét tam giác cầu LNB , ta có

$$\cos Z = \cos LN = \cos \varphi \cos \left[nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e \right]. \quad (1.51)$$

Thế (1.51) vào (1.6), lấy đạo hàm hàm thế vị nhận được theo x

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -H \cos \varphi \sin 2 \left[nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e \right]. \quad (1.52)$$

Với biểu thức lực tạo triều (1.52) phương trình sóng nhận được nhờ biến đổi hệ (1.36) và (1.37) sẽ có dạng

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - H \cos \varphi \sin 2 \left[nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e \right]. \quad (1.53)$$

Thực hiện tích phân phương trình này giống như trường hợp kênh xích đạo ta nhận được kết quả cuối cùng như sau

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{DH\rho}{C^2 - \rho^2 n^2 \cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi \cos 2 \left[nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e \right]. \quad (1.54)$$

Đó là quy luật diễn biến của thủy triều trong kênh dọc vĩ tuyến tại vĩ độ φ . Trong biểu thức này, tùy thuộc vĩ độ mà hiệu giữa tốc độ truyền sóng tự do và sóng cưỡng bức $\rho^2 n^2 \cos^2 \varphi - C^2$ có thể là hiệu dương, nước lớn có thể xảy ra khi Mặt Trăng thượng đỉnh.

Các quy luật (1.49) và (1.54) tương ứng với giả thiết độ xích vĩ Mặt Trăng bằng không. Nếu kể đến độ xích vĩ bất kỳ của Mặt Trăng thì quy luật biến thiên của khoảng thiên đỉnh xác định bằng biểu thức

$$\cos Z = \cos \varphi \cos \delta \cos \left[nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e \right] + \sin \varphi \sin \delta$$

và biểu thức đầy đủ hơn của độ cao thủy triều sẽ là

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{DH\rho}{C^2 - \rho^2 n^2 \cos^2 \varphi} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos \left[nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e \right] + \frac{1}{2} \frac{DH\rho}{C^2 - \rho^2 n^2 \cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi \sin^2 \delta \cos 2 \left[nt + \frac{x}{\rho \cos \varphi} + e \right]. \quad (1.55)$$

Biểu thức này cho thấy rằng dao động mực nước trong kênh vĩ tuyến gồm ba hợp phần với chu kỳ khác nhau: thủy triều bán nhật đặc trưng bởi số hạng thứ hai về phải (1.55) có biên độ tỷ lệ với bình phương của cosin độ xích vĩ; thủy triều toàn nhật đặc trưng bởi số hạng thứ nhất về phải, biên độ tỷ lệ với sin hai lần độ xích vĩ. Khi độ xích vĩ lớn số hạng này có giá trị đáng kể. Dạng dao động thứ ba liên quan tới biến đổi chu kỳ nửa tháng của độ xích vĩ làm biến thiên biên độ của cả số hạng toàn nhật lẫn bán nhật.

Kênh hướng theo kinh tuyến. Giả sử kênh hướng theo đường AQ hình (1.10). Trong trường hợp này khoảng thiên đỉnh $Z = LQ$ tính được từ tam giác cầu LAQ

$$\cos Z = \cos \frac{x}{\rho} \cos(nt + e)$$

và biểu thức độ cao thủy triều có dạng

$$\zeta = \frac{DH\rho}{4C^2} \cos \frac{2x}{\rho} + \frac{DH\rho}{4(C^2 - \rho^2 n^2)} \cos \frac{2x}{\rho} \cos 2(nt + e). \quad (1.56)$$

Phương trình độ cao thủy triều như trên cho thấy mực triều trung bình liên tục biến đổi khi xa dần xích đạo, còn dao động bán nhật triều xảy ra xung quanh mực trung bình này và biên độ của bán nhật triều cũng liên tục biến đổi dọc theo kênh. Ở vùng dưới 45° nước ròng xảy ra khi Mặt Trăng thượng đỉnh, còn ở trên 45° , ngược lại, khi Mặt Trăng thượng đỉnh thì xảy ra nước lớn.

1.8. BƯỚC SÓNG VÀ NĂNG LƯỢNG SÓNG THỦY TRIỀU

Trong mục trước đã thấy rằng sóng thủy triều lan truyền với tốc độ C theo công thức (1.39). Bước sóng, chu kỳ và tốc độ truyền sóng liên hệ với nhau theo công thức

$$\lambda = CT. \quad (1.57)$$

Như vậy tốc độ truyền sóng và bước sóng hoàn toàn bị quy định bởi độ sâu. Từ (1.57) có thể tính được các giá trị của tốc độ truyền sóng bán nhật triều và bước sóng của nó ứng với những độ sâu khác nhau trong biển (xem bảng 1.2).

Tỷ số giữa bước sóng và độ sâu rất lớn. Với những tương quan như vậy giữa bước sóng và độ sâu biển, thì các điều kiện động lực tại mọi tầng sâu là như nhau: áp suất trong các phương trình chuyển động có thể xem như thuần túy thủy tĩnh. Sự chuyển động của các hạt nước trong phương thẳng đứng lẫn phương ngang diễn ra như nhau tại mọi điểm của đường thẳng đứng và năng lượng của chuyển động tính được một cách

đơn giản.

Bảng 1.2. Tốc độ truyền và bước sóng thủy triều phụ thuộc độ sâu kênh [11]

Độ sâu biển (m)	10	50	100	500	1000	5000
Tốc độ sóng (m/s)	10	21	31	70	99	210
Bước sóng (km)	444	992	1400	3130	4440	9920

Để tính thế năng của sóng thủy triều, trước hết xác định công thực hiện để nâng khối nước nguyên tố dọc trục kênh $\gamma b \zeta dx$ lên độ cao $\frac{1}{2} \zeta$, (γ – mật độ nước; b – độ rộng của khối nước nguyên tố) tức lên độ cao tâm trọng lực của lớp nước dâng cao trên mực không nhiễu động.

Từ khối lượng nguyên tố này chuyển sang vùng trái dọc theo hướng x một bước sóng

$$E_{bLp} = \frac{1}{2} \gamma g b \int_0^L \zeta^2 dx. \quad (1.58)$$

Động năng của khối nước nguyên tố tính theo tốc độ của các hạt nước theo phương ngang. Đối với vùng độ rộng b và độ dài L động năng sẽ là tích phân

$$E_{bLk} = \frac{1}{2} \gamma D b \int_0^L u^2 dx. \quad (1.59)$$

Thế các giá trị của ζ và u vào các tích phân trên và tính

$$E_{bLk} = \frac{1}{2} \gamma \frac{C^2}{D} b \int_0^L \zeta^2 dx = \frac{1}{2} \gamma g b \int_0^L \zeta^2 dx = E_{bLp}. \quad (1.60)$$

Như vậy động năng E_{bLk} của sóng thủy triều bằng thế năng E_{bLp} , và cùng tính cho diện tích bLx . Tổng hai phần này là năng lượng toàn

phần tính cho diện tích đó. Ta viết tương quan

$$E_{bLp} = E_{bLk} = \frac{1}{2} E_{bL} \quad (1.61)$$

cho bất kỳ hình dạng sóng nào. Phần lớn trường hợp dạng sóng là đường cong điều hoà đơn giản

$$\zeta = a \cos \frac{2n}{L} x,$$

trong đó a – biên độ dao động. Khi đó thế năng tính cho diện tích bL bằng

$$E_{bLp} = \frac{1}{4} \gamma g a^2, \quad (1.62)$$

hay nếu tính cho một đơn vị diện tích mặt biển (mật độ thế năng), bằng

$$E_{bLp} = \frac{1}{4} \gamma g a^2. \quad (1.63)$$

Theo (1.61) mật độ năng lượng toàn phần của sóng thủy triều E sẽ bằng

$$E = \frac{1}{2} \gamma g a^2. \quad (1.64)$$

1.9. ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC CORIOLIS TỚI CHUYỂN ĐỘNG THỦY TRIỀU

Như vậy trong trường hợp đơn giản chuyển động thủy triều trong kênh hẹp chỉ kể đến ba lực chính, đó là lực tạo triều, lực áp suất ngang do độ nghiêng mặt nước thủy triều và lực quán tính, thì với kênh định hướng theo vĩ tuyến sự truyền thủy triều có dạng sóng dài tiến, còn trong những kênh định hướng theo kinh tuyến - sóng đứng. Tuy nhiên trong cả hai trường hợp, sự truyền thủy triều trong kênh có dạng các *sóng phẳng*, tức

không có sự chênh mực nước trong phương vuông góc với hướng truyền triều.

Lực Coriolis tác dụng vuông góc với hướng chuyển động sẽ tạo nên sự quay phải (ở Bắc bán cầu) và sự quay trái (ở Nam bán cầu) của dòng chảy. Bây giờ để nghiên cứu ảnh hưởng của lực Coriolis ta khảo sát các phương trình chuyển động dưới một dạng đơn giản khác – chỉ xét đến các lực quán tính, gradien áp suất và lực Coriolis (xem [8]). Trong kênh hẹp, giả sử chuyển động chỉ xảy ra trong hướng dọc trục kênh (trục x), không có thành phần tốc độ theo hướng trục y , hệ phương trình chuyển động sẽ có dạng

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ fu &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Phương trình thứ nhất cho thấy tính chất của chuyển động dọc kênh vẫn giống như trong trường hợp không có lực Coriolis, tức tương quan giữa dòng chảy dọc kênh và độ nghiêng mực dọc kênh vẫn như trong sóng phẳng. Phương trình thứ hai biểu diễn sự cân bằng tĩnh giữa lực Coriolis và gradien áp suất gây bởi độ nghiêng ngang của mực nước. Từ phương trình này có hệ thức địa chuyển

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{2\omega \sin \varphi u}{g}. \quad (1.66)$$

Như vậy sóng tiến trong kênh hẹp không thể giữ nguyên là sóng phẳng, nó phải có độ chênh mực nước ngang kênh để cân bằng lực Coriolis và độ chênh mực nước ngang kênh này tỷ lệ thuận với vận tốc dòng chảy dọc kênh. Nếu nhìn theo hướng truyền sóng tiến thì ở bắc bán cầu mực nước ở *đỉnh sóng* phải nâng cao dần từ trái sang phải, còn ở chân sóng – phải hạ thấp dần từ trái sang phải (quy tắc địa chuyển), làm

tăng biên độ triều ở bờ phải của kênh và giảm biên độ ở bờ trái mặc dù trong hướng trục x sóng vẫn có hình sin. Nhưng sự tỷ lệ giữa mực ζ và độ lớn dòng chảy trong sóng tiến có nghĩa là dòng chảy dọc ở bờ phải cũng lớn hơn ở bờ trái, do đó độ dốc của chênh mực nước ngang $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ theo (1.66) cũng tăng dần từ trái sang phải (hình 1.11 (trên hình này mũi tên lớn là hướng truyền sóng)).

Tất cả những tính chất trên của sóng thể hiện bởi nghiệm giải tích của hệ (1.65) gọi là *sóng Kelvin*:

$$\zeta = He^{-my} \cos(\sigma - kx) \quad (1.67)$$

$$u = (g/D)^{1/2} He^{-my} \cos(\sigma - kx)$$

trong đó $m = \frac{f}{C}$, $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ – tốc độ góc của dao động; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – số sóng (λ – bước sóng); H – biên độ mực nước.

Từ nghiệm (1.67) thấy rằng: Tốc độ truyền sóng dọc kênh giữ nguyên như trường hợp không có lực Coriolis. Tương quan giữa tốc độ dòng chảy và mực nước:

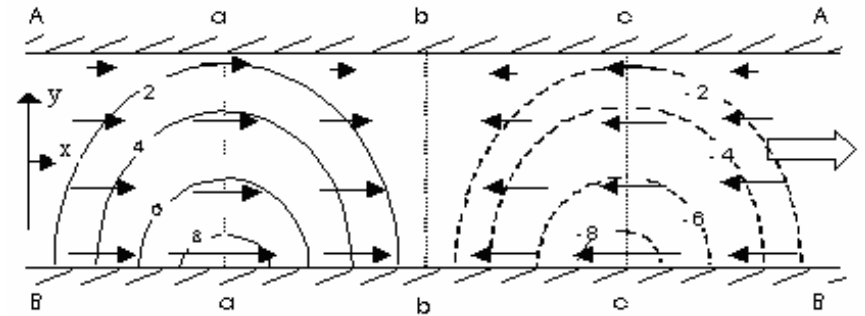
$$u = (g/D)^{1/2} \zeta .$$

Biên độ của ζ và u tăng từ trái sang phải (theo chiều âm của trục y) theo quy luật hàm mũ.

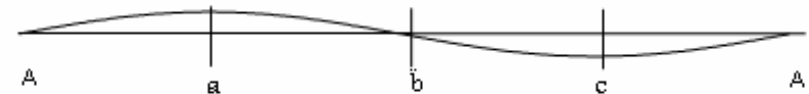
Sự giao thoa của hai sóng Kelvin truyền ngược chiều nhau sẽ giải thích sự hình thành của các *điểm vô triều Taylor*: Nếu gốc toạ độ đặt ở điểm trên trục kênh, nơi hai sóng nghịch pha nhau, tức điểm nút sóng, thì mỗi sóng được viết dưới dạng:

$$\zeta^+ = He^{-my} \cos(\sigma - kx) \quad (1.68)$$

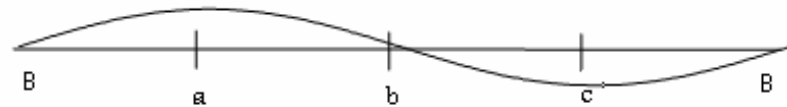
$$\zeta^- = -nHe^{+my} \cos(\sigma + kx)$$



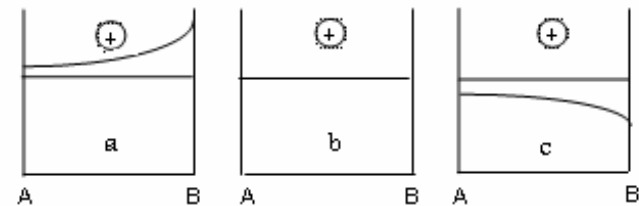
a) Những vectơ dòng triều và đường đẳng độ cao mực nước trong kênh



b) Biến thiên mực nước dọc bờ trái của kênh



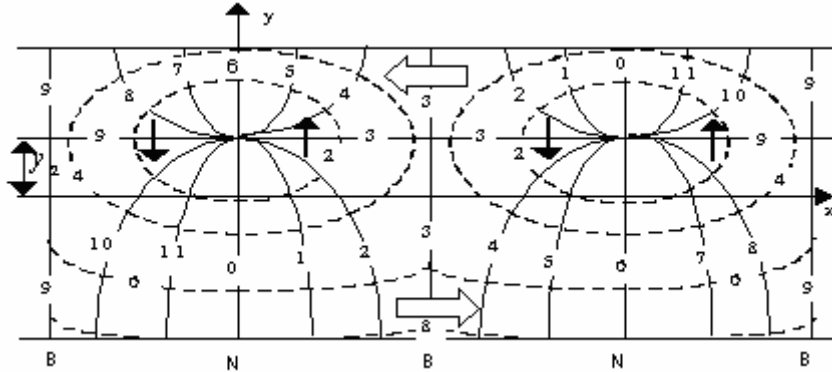
c) Biến thiên mực nước dọc bờ phải của kênh



d) Biến thiên mực nước trên các mặt cắt ngang kênh

Hình 1.11. Những đặc điểm của sóng Kelvin (theo [8])

(n – tỷ số biên độ của hai sóng truyền ngược chiều nhau). Các biểu thức tương tự cũng thể viết cho dòng chảy u^+ và u^- . Chuyển động tổng cộng sẽ là $\zeta^+ + \zeta^-$ và $u^+ + u^-$. Dòng chảy vẫn có tính chất thuận nghịch và hướng dọc theo trục x .



Hình 1.12. Hệ các điểm vô triêu trong kênh có hai sóng truyền ngược chiều
(các điểm B - bụng sóng, N - nút sóng) (theo [8])

Trên kênh hình thành một loạt các hệ thống điểm vô triêu (hình 1.12), các phương trình của các đường đồng dao động mực nước và dòng chảy nhận được bằng cách khảo sát cực trị của các biểu thức mực và dòng theo thời gian như sau

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \sigma_{NL} &= \frac{e^{-my} + ne^{my}}{e^{-my} - ne^{my}} \operatorname{tg} kx \\ \operatorname{tg} \sigma_{\max U} &= \frac{e^{-my} - ne^{my}}{e^{-my} + ne^{my}} \operatorname{tg} kx \end{aligned} \quad (1.69)$$

trong đó t_{NL} – thời gian nước lớn; $t_{\max U}$ – thời gian dòng triều cực đại.

Hoành độ của điểm vô triêu (x_a) xác định từ điều kiện nghịch pha

của các sóng chạy ngược nhau, tức cho

$$\cos(\sigma - kx) = \cos(\sigma + kx) \rightarrow x_a = 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \lambda, \dots$$

Tung độ (y_a) xác định từ điều kiện bằng nhau của các biên độ của các sóng chạy ngược nhau gặp nhau nghịch pha:

$$He^{-my_a} = nHe^{my_a} \rightarrow y_a = -\frac{\ln n}{2m} = -\frac{\sqrt{gD} \ln n}{4\omega \sin \varphi}. \quad (1.70)$$

Thấy rằng trong kênh xuất hiện hàng loạt điểm vô triêu với hệ thống các đường đồng dao động triều (các đường liền nét trên hình 1.12) cùng quay ngược chiều kim đồng hồ.

Biên độ dao động (các đường gạch nổi trên hình 1.12) tăng dần từ điểm vô triêu ra phía các cạnh của kênh, đạt lớn nhất ở các góc kênh.

Nếu nhìn theo hướng truyền sóng lớn (mũi tên lớn trên hình 1.12) thì thấy điểm vô triêu dịch về bên trái khỏi trục giữa kênh (ở bắc bán cầu), nếu $n = 1$ điểm vô triêu nằm trên trục giữa kênh; nếu $n = 0$ thì không có điểm vô triêu; khi $n \ll 1$ tồn tại điểm vô triêu tương tự ở trên lục địa bờ trái, các đường đồng dao động triều tỏa tia quạt từ phía bờ trái. Từ biểu thức (1.70), nếu biết D , φ và y_a có thể ước lượng tương quan biên độ n của hai sóng truyền ngược nhau trong kênh.

Ảnh hưởng của lực Coriolis đến chuyển động triều còn được khảo sát lý thuyết cho một trường hợp thủy vực phẳng rộng vô tận trên Trái Đất quay. Trong trường hợp này lực Coriolis tác động lên sóng tiến truyền dọc trục x sẽ dẫn tới dòng chảy ngang, nhưng không gặp cản trở bởi bờ nên nó không tạo thành chênh mực nước theo phương ngang với phương lan truyền sóng và các đỉnh sóng triều vẫn giữ nằm ngang (phẳng) dọc trục y . Hệ phương trình có dạng:

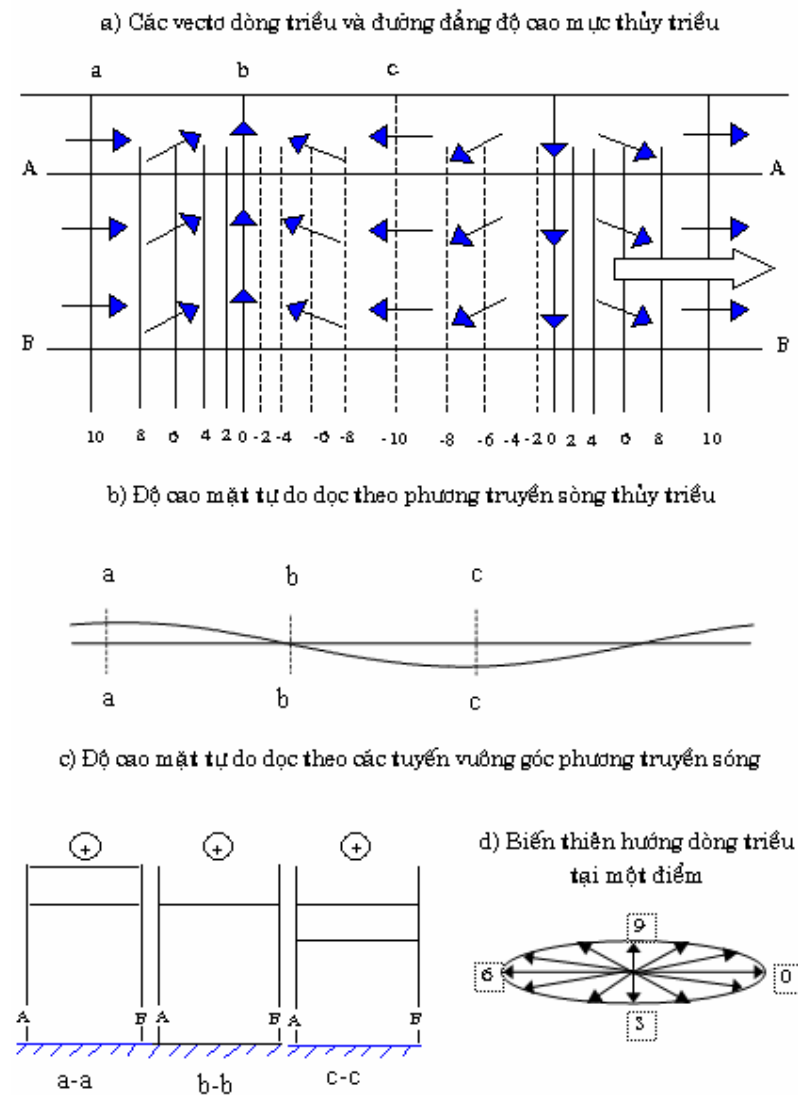
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0 \end{aligned} \quad (1.71)$$

Nghiệm của hệ phương trình này, được gọi là *sóng Sverdrup*, có dạng

$$\begin{aligned} \zeta &= H_s \cos(\sigma t - k_s x) \\ u &= \sqrt{\frac{g}{D}} \sqrt{\frac{1}{1-s^2}} H_s \cos(\sigma t - k_s x); \\ v &= -\sqrt{\frac{g}{D}} \sqrt{\frac{s^2}{1-s^2}} H_s \sin(\sigma t - k_s x), \end{aligned} \quad (1.72)$$

trong đó $s = \frac{f}{\sigma}$, $k_s = \sqrt{\frac{\sigma^2 - f^2}{gD}}$.

Những đặc điểm chính của sóng Sverdrup: Các thành phần tốc độ u và v lệch pha nhau một phần tư chu kỳ, tỷ số biên độ của chúng bằng $\frac{V}{U} = s$. Dòng chảy quay theo chiều kim đồng hồ (ở bắc bán cầu), đường bao nổi các đầu mút vectơ dòng triều có dạng hình ellip với các bán trục U và V , trục lớn của ellip định hướng theo phương truyền sóng. Mặt phẳng quỹ đạo hạt nước nghiêng so với mặt phẳng thẳng đứng.



Hình 1.13. Những đặc điểm của sóng Sverdrup [8]

Tương quan pha của u và ζ vẫn giống như trong trường hợp không có lực Coriolis (cũng như trong sóng Kelvin). Nhưng tương quan biên độ của u và ζ bây giờ phụ thuộc không những vào độ sâu mà cả tần số của sóng và vĩ độ địa lý thông qua thông số s . Tại xích đạo, $s = 0$, sóng Sverdrup suy thoái thành sóng phẳng bình thường (quỹ đạo thẳng đứng), $s = 1$ tại vĩ độ tới hạn φ_{th}

$$\varphi_{th} = \pm \arcsin \frac{\sigma}{2\omega}$$

sóng Sverdrup chỉ tồn tại trong vùng $\varphi < \varphi_{th}$, tức khi $s < 1$.

Tốc độ pha của sóng Sverdrup không chỉ phụ thuộc độ sâu biển mà vào thông số s , tức phụ thuộc vào tần số:

$$C_s = \frac{\sigma}{k_s} = \sqrt{gD} \left[\frac{1}{1-s^2} \right]^{1/2} = (gD)^{1/2} \left[\frac{\sigma}{\sigma^2 - f^2} \right]^{1/2}.$$

Hình 1.13 thể hiện một số đặc điểm phân bố mực nước và dòng chảy trong sóng Sverdrup. Mũi tên lớn chỉ hướng truyền sóng. Các mũi tên nhỏ là vector vận tốc dòng triều.

1.10. ẢNH HƯỞNG CỦA MA SÁT TỚI CHUYỂN ĐỘNG TRIỀU

Trong trường hợp tính tới lực ma sát đáy tác động tới sự chuyển động của sóng triều người ta xét hệ phương trình (xem [8]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - r_* u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - r_* v \end{aligned} \quad (1.73)$$

trong đó các số hạng ma sát tuyến tính biểu diễn bằng $r_* u$, $r_* v$, r_* – hệ

số trở kháng ($r_* = 2,4 \times 10^{-3} (V_0 / D)$ khi $D > 25$ m, V_0 – mô đun vận tốc dòng triều trung bình theo phương thẳng đứng).

Loại trừ u và v từ các phương trình chuyển động trên và phương trình liên tục trong điều kiện độ sâu không đổi ta nhận được phương trình sóng

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = r_* \frac{\partial \zeta}{\partial t} + gD \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right]. \quad (1.74)$$

Nếu chỉ xét chuyển động một chiều dọc theo trục x thì nghiệm của phương trình này có thể viết dưới dạng

$$\zeta = A e^{-\mu x} \cos(\sigma t - k_* x) + B e^{\mu x} \cos(\sigma t + k_* x), \quad (1.75)$$

trong đó

$$k_* = \sqrt{k^2 + \mu^2}, \quad \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{gD}} \sqrt{\frac{\sqrt{\sigma^2 + r_*^2} - \sigma}{2\sigma}}. \quad (1.76)$$

Khi không có ma sát ($r_* = 0$) ta có $k_* = \sigma \sqrt{gD} = k$ và $\mu = 0$. Hai số hạng ở vế phải (1.75) thể hiện hai sóng truyền ngược chiều nhau với vận tốc pha

$$C_* = \frac{\sigma}{k_*} = \sqrt{gD} \sqrt{\frac{2\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + r_*^2} + \sigma}}, \quad (1.77)$$

tức là chậm hơn một ít so với trường hợp không có ma sát. Vì vận tốc pha phụ thuộc vào tần số σ nên điều này có nghĩa rằng lực ma sát tuyến tính tương tự như lực Coriolis làm cho sóng thủy triều trở thành sóng tán mạn.

Đặc điểm chính của nghiệm nhận được khác so với những nghiệm trước đây thể hiện ở hệ số $e^{\mp \mu x}$, chỉ ra rằng biên độ của mỗi sóng suy

giảm theo quy luật hàm mũ khi truyền trong kênh. Tốc độ suy giảm được đặc trưng bởi hệ số μ phụ thuộc vào ma sát r_* . Về mặt vật lý, sự tắt dần của sóng như vậy là do tản mát năng lượng sóng do các lực ma sát đáy. Sự tắt dần theo quy luật hàm mũ chứng tỏ rằng tốc độ tản mát tỷ lệ với năng lượng của sóng.

Các đại lượng r_* và μ liên hệ với nhau theo biểu thức thứ hai của (1.76), từ đó ta có

$$r_* = 2\mu \sqrt{gD} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{k^2}}. \quad (1.78)$$

Biểu thức của tốc độ dòng triều trong sóng tiến tắt dần nhận được bằng cách thế công thức (1.75) (cho một sóng) vào phương trình liên tục một chiều, sau đó tích phân theo x

$$u = U e^{-\mu x} \cos(\sigma t - k_* x + \alpha), \quad (1.79)$$

trong đó $U = A (g/D)^{1/2} \frac{k}{(\mu^2 + k_*^2)^{1/2}}$, A – biên độ mực nước của

sóng, $\alpha = \arctg \frac{\mu}{k_*}$.

Thấy rằng ma sát gây nên sự trễ pha dao động giữa mực nước và dòng triều một lượng α tỉ lệ với cường độ tắt dần, cực đại dòng chảy luôn luôn xảy ra sớm hơn cực đại mực nước. Khi lan truyền sóng dọc kênh, biên độ dòng triều cũng giảm dần cùng với biên độ mực nước. Hơn nữa tại mọi điểm trong sóng tiến dòng chảy luôn nhỏ hơn so với trường hợp truyền sóng không ma sát, vì nhân tử $\frac{k}{\sqrt{\mu^2 + k_*^2}}$ nhỏ hơn một.

Nếu biết độ trễ pha α từ quan trắc có thể ước lượng hệ số trở kháng r_* xuất phát từ (1.76)

$$r_* = \sigma \operatorname{tg}(2\alpha) \quad (1.80)$$

với điều kiện sóng thủy triều được quan trắc là sóng tiến thuần túy.

Thủy triều cảm ứng trong biển ven kiểu vịnh có thiết diện ngang không đổi có thể xem như tổng của hai sóng tiến tắt dần truyền ngược chiều nhau, có cùng hệ số tắt dần μ và số sóng k_* . Nếu góc toạ độ đặt ở đỉnh vịnh và sự phản xạ tại đó là toàn phần, thì biên độ của cả hai sóng tại $x = 0$ phải bằng nhau và dao động tổng cộng trong vịnh có dạng:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^+ + \zeta^- = H \left[e^{-\mu x} \cos(\sigma t - k_* x) + e^{\mu x} \cos(\sigma t + k_* x) \right] \\ u &= u^+ + u^- = U \left[e^{-\mu x} \cos(\sigma t - k_* x) + e^{\mu x} \cos(\sigma t + k_* x + \alpha) \right] \end{aligned} \quad (1.81)$$

trong đó $U = H \sqrt{\frac{g}{D}} \frac{k}{\sqrt{\mu^2 + k_*^2}}$, H – biên độ mực nước của sóng tới

và sóng phản xạ tại đỉnh vịnh. Bằng cách biến đổi lượng giác có thể nhận được những biểu thức mô tả phân bố biên độ (η_0) và pha (thời gian nước lớn t_{NL}) của thủy triều dọc theo kênh như Ippen và Harleman đã nhận được

$$\begin{aligned} \eta_0(x) &= 2H \sqrt{\frac{\cos 2k_* x + \operatorname{ch} 2\mu x}{2}} \\ t_{NL} &= \frac{1}{\sigma} \arctg k_* x \operatorname{ch} 2\mu x \end{aligned} \quad (1.82)$$

Thủy triều tổng cộng bây giờ không còn là dao động đứng thuần túy thậm chí với sự hiện diện của phản xạ toàn phần tại đỉnh vịnh, vì do sự tắt dần bởi ma sát, sóng phản xạ tại mọi điểm trừ điểm phản xạ ở đỉnh vịnh, yếu hơn sóng tới. Xa dần đỉnh vịnh, tỷ số các biên độ n của các sóng này giảm, tức chuyển động thủy triều về cấu trúc dần dần giống với sóng tiến truyền từ ngoài vào trong vịnh. Hiệu ứng này càng biểu lộ mạnh nếu sự tắt dần càng mạnh. Khảo sát các công thức này sẽ thấy rằng khi tăng ma

sát tuyến nút với giá trị bằng không của η_0 bị thay thế bởi một đới biên độ nhỏ nhưng không bằng không và đới này dịch về phía đỉnh vịnh (do tăng số sóng k_*). Sự thay đổi pha khi $r_* = 0$ xảy ra nhảy vọt, nhưng đã trở nên trơn đều hơn với r_* lớn dần. Như vậy là tác động của ma sát đường như làm giảm bớt những nét đột biến của bức tranh triều.

1.11. ẢNH HƯỞNG ĐỒNG THỜI CỦA LỰC CORIOLIS VÀ MA SÁT

Khi đồng thời có mặt lực Coriolis và lực ma sát, thì các phương trình chuyển động viết cho tốc độ trung bình độ sâu sẽ có dạng [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - r_* u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - r_* v \end{aligned} \quad (1.83)$$

Trường hợp chuyển động tuần hoàn và độ sâu thủy vực không đổi, dùng các phương trình (1.83) để loại u và v ra khỏi phương trình liên tục (xem phương trình (1.28)) nhận được phương trình sóng viết cho mực nước có dạng dưới đây

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\sigma [(\sigma + ir_*)^2 - f^2]}{gD (\sigma + ir_*)} \zeta = 0. \quad (1.84)$$

Nghiệm của phương trình này trong điều kiện chuyển động triều trong kênh, tức không xét dòng chảy ngang ($v = 0$), bằng

$$\zeta = H [e^{-\mu x - \mu_1 y} \cos(\sigma t - k_* x) + e^{\mu x + \mu_1 y} \cos(\sigma t + k_* x)], \quad (1.85)$$

trong đó: $m_1 = \frac{f}{c_*} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + r_*^2}}$, μ và k_* có giá trị như (1.76).

Biểu thức (1.85) mô tả sóng Kelvin tắt dần. Bước sóng và tốc độ truyền của sóng này biến đổi với ma sát như trong sóng phẳng mô tả bởi (1.75). Độ nghiêng mực nước dọc trục y được mô tả bởi thừa số $e^{\mp \mu_1 y}$, nó giống như trong sóng Kelvin thông thường, nhưng ít dốc hơn, vì các tốc độ chảy dọc kênh bị yếu đi bởi ma sát, và để cân bằng lực Coriolis xuất hiện tại từng thời điểm chỉ cần độ nghiêng nhỏ hơn so với trường hợp sóng Kelvin thông thường. Với $r_* = 0$ hay $f = 0$ biểu thức (1.85) tuần tự chuyển thành biểu thức sóng Kelvin (1.67) hay biểu thức sóng phẳng có ma sát (1.75).

Các sóng Kelvin tắt dần có lẽ là điển hình đối với phần lớn các biển ven có dạng vịnh. Cơ chế hình thành thủy triều cảm ứng ở các biển như vậy là cơ chế sóng triều từ ngoài cửa xâm nhập vào và từ trong phản xạ ra. Dao động tổng cộng ở phần lớn biển bao gồm hai sóng Kelvin tắt dần. Chúng ta có thể nhận được những nét chung của bức tranh thủy triều bằng cách xét sự giao thoa hai sóng Kelvin biên độ khác nhau truyền ngược hướng đối với nhau. Đặc điểm đặc trưng nhất của bức tranh thủy triều tổng cộng là sự dịch chuyển các điểm vô triều từ trục biển về phía trái của hướng truyền sóng đi vào (sóng tới), độ dịch chuyển y_a liên hệ với đại lượng n trong biểu thức (1.70). Khi dần xa khỏi đỉnh vịnh về phía đại dương đại lượng n sẽ giảm do tăng sóng tới và giảm sóng phản xạ, và như vậy, sự dịch chuyển ngang của điểm vô triều sẽ càng lớn khi vị trí của điểm vô triều càng xa đỉnh vịnh.

Tương tự ta có thể xác định các sóng Sverdrup tắt dần, khác với các sóng Sverdrup thông thường bởi thừa số $e^{\pm \mu x}$ và nhận được trong điều kiện:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$$

Sự hiện diện của lực Coriolis và ma sát, sự giao thoa làm mỗi liên hệ

giữa dao động mực nước và dòng chảy trở nên phức tạp hơn nhiều so với trường hợp sóng phẳng. Nếu xét các dòng chảy và độ nghiêng mực nước tại hai thời điểm cách nhau một phần tư chu kỳ triều, thì từ (1.83) nhận được

$$\begin{aligned} u_1 &= -A \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + B \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} + C \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + D \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \\ u_2 &= -B \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - A \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - D \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + C \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \\ v_1 &= -C \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - D \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - A \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + B \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \\ v_2 &= D \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - C \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} - B \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} - A \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.86)$$

trong đó

$$\begin{aligned} A &= p r_* (\sigma^2 + f^2 + r_*^2) \\ B &= p \sigma (\sigma^2 - f^2 + r_*^2) \\ C &= p f (\sigma^2 - f^2 - r_*^2) \\ D &= 2 p \sigma f r \\ p &= \frac{g}{(\sigma^2 - f^2 - r_*^2)^2 - 4 \sigma^2 f^2} \end{aligned}$$

Với những giá trị cho trước của σ , f , r_* những biểu thức liên hệ tuyến tính (1.86) về nguyên tắc cho phép tính được dòng chảy nếu biết các độ nghiêng mặt nước và ngược lại.

1.12. HIỆU ỨNG PHI TUYẾN TRONG KÊNH MA SÁT

Xét chuyển động sóng thủy triều trong kênh hẹp với các phương

trình chuyển động và liên tục phi tuyến dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - r_* u; \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -(D + \zeta) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.88)$$

ở đây r_* – hệ số ma sát. Giả thiết rằng ở điểm $x = 0$ kênh tiếp xúc với biển và thủy triều tại đó dao động theo quy luật điều hoà đơn giản:

$$\zeta = H \sin \frac{2\pi}{T_0} t, \quad (1.89)$$

trong đó H – biên độ mực nước, T_0 – chu kỳ dao động.

Để khảo sát bài toán này, người ta sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp [9]: Đầu tiên phải giải hệ phương trình vi phân (1.87), (1.88) với điều kiện biên (1.89) với giả thiết biên độ thủy triều vô cùng nhỏ (sóng triều trong kênh sâu):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - r_* u; \quad (1.90)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.91)$$

nghiệm nhận được cho trường hợp này được thế vào hệ ban đầu (1.87) và (1.88) và giải tiếp hệ này cho trường hợp biên độ hữu hạn (biên độ thủy triều có thể so sánh được với độ sâu của kênh).

Trường hợp truyền sóng tiến trong kênh sâu (phép xấp xỉ bậc nhất) (1.90), (1.91), ta viết lại phương trình sóng đối với mực nước dưới dạng trường tự (1.74):

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + r \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (1.92)$$

với nghiệm phản ánh sự tắt dần biên độ dọc theo kênh và giảm tốc độ truyền sóng tương tự (1.75):

$$\zeta = He^{-mx} \sin \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right]. \quad (1.93)$$

Thế (1.93) vào (1.92) và cho bằng không các hệ số đứng trước các hàm

$$\sin \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] \quad \text{và} \quad \cos \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right]$$

sẽ nhận được các giá trị của n và m như sau:

$$n = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{T_0^2}{\pi^2} r_*^2 \right]^{1/2} + \frac{1}{2} \right\}^{1/2}; \quad (1.94)$$

$$m = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{T_0^2}{\pi^2} r_*^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \right\}. \quad (1.95)$$

Từ nghiệm (1.93) thấy rằng tốc độ góc của sóng thủy triều trong kênh ma sát $\sigma = \frac{2\pi}{T_0}$ và số sóng $k = \frac{2\pi}{T_0} \frac{n}{C_0}$, do đó tốc độ truyền sóng

$$C = \frac{\sigma}{k} = \frac{C_0}{n} = \frac{C_0}{\left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{T_0^2}{\pi^2} r_*^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \right\}^{1/2}}. \quad (1.96)$$

Thấy rằng chu kỳ sóng càng lớn thì ảnh hưởng ngăn cản của ma sát đến tốc độ truyền sóng càng nhiều như kết luận của Sverdrup và Makkaveev.

Những giá trị của n và m có thể biểu diễn qua các hàm hyperbolic. Ta đặt

$$\frac{1}{2} r_* \frac{T_0}{\pi} = \text{sh } 2v,$$

sẽ nhận được

$$v = \frac{1}{2} \text{arsh } \frac{1}{2} r_* \frac{T_0}{\pi};$$

$$n = \text{ch } v; \quad (1.97)$$

$$m = \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{sh } v. \quad (1.98)$$

Tiếp tục giải hệ (1.90), (1.91) người ta tìm được tốc độ dòng chảy

$$u = \frac{gH}{C_0} \frac{e^{-mx}}{s} \left\{ n \sin \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] + r \cos \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] \right\}, \quad (1.99)$$

trong đó dùng các ký hiệu

$$s = \left[1 + \frac{1}{4} \frac{T_0^2}{\pi^2} r_*^2 \right]^{1/2} = \text{ch } 2v; \quad (1.100)$$

$$r = \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{T_0^2}{\pi^2} r_*^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \right\}^{1/2} = \left[\frac{1}{2} (s-1) \right]^{1/2} = \text{sh } v. \quad (1.101)$$

Tích phân phương trình (1.99) theo t ta nhận được quỹ đường xê dịch ngang của các hạt nước

$$\xi = \frac{T_0 \sqrt{g}}{2\pi} \frac{H}{\sqrt{D}} \frac{e^{-mx}}{s} \left\{ -n \cos \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] + r \sin \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] \right\}. \quad (1.102)$$

Xét cực trị của biểu thức (1.102), ta tìm được khoảng cách lớn nhất mà các hạt nước có thể dao động ra xa khỏi vị trí cân bằng

$$\xi_{\max} = \frac{T_0 \sqrt{g} H}{2\pi \sqrt{D} s} e^{-mx}. \quad (1.103)$$

Các phương trình (1.93) và (1.102) xác định hình dạng quỹ đạo thẳng đứng của các hạt nước. Sau khi biến đổi quỹ đạo này có dạng

$$\frac{\left[\xi - \frac{T_0 \sqrt{g} r}{2\pi \sqrt{D} s} \right]^2}{\left[\frac{T_0 \sqrt{g} H n}{2\pi \sqrt{D} s} e^{-mx} \right]^2} + \frac{\zeta^2}{[He^{-mx}]^2} = 1. \quad (1.104)$$

Biểu thức này là phương trình của đường elip. Nó có thể dẫn đến dạng chuẩn trong hệ tọa độ hướng theo các trục elip

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (1.105)$$

$$a = \frac{1}{2} He^{-mx} \left\{ \left[1 + \frac{T_0 \sqrt{g} n}{\pi \sqrt{D} s} + \frac{T_0^2 g}{4\pi^2 D s} \right]^{1/2} + \left[1 - \frac{T_0 \sqrt{g} n}{\pi \sqrt{D} s} + \frac{T_0^2 g}{4\pi^2 D s} \right]^{1/2} \right\} \quad (1.106)$$

$$b = \frac{1}{2} He^{-mx} \left\{ \left[1 + \frac{T_0 \sqrt{g} n}{\pi \sqrt{D} s} + \frac{T_0^2 g}{4\pi^2 D s} \right]^{1/2} - \left[1 - \frac{T_0 \sqrt{g} n}{\pi \sqrt{D} s} + \frac{T_0^2 g}{4\pi^2 D s} \right]^{1/2} \right\} \quad (1.107)$$

Góc nghiêng của trục lớn của elip so với trục kênh x bằng

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4\pi \lambda_0 D r}{\lambda_0^2 - 4\pi^2 D^2 s}. \quad (1.108)$$

Dưới tác dụng của lực ma sát trục lớn của quỹ đạo ellip nghiêng với đường nằm ngang một góc, kết quả là thời điểm mặt nước đi qua mực trung bình xảy ra trước thời điểm thay đổi dòng chảy. Bây giờ ta xác định khoảng thời gian vượt trước này. Muốn vậy cần viết lại phương trình (1.99) thành:

$$u = R \sin \frac{2\pi}{T_0} (t - \varepsilon), \quad (1.109)$$

trong đó

$$\varepsilon = \frac{x}{C} - \gamma; \quad (1.110)$$

$$R = u_{\max} = \frac{gH}{C_0} \frac{e^{-mx}}{\sqrt{s}}; \quad (1.111)$$

$$\gamma = \frac{T_0}{2\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{th} v). \quad (1.112)$$

Xác định thời điểm thay đổi dòng chảy t_c bằng cách cho biểu thức (1.109) bằng không, từ đó có

$$t_c = \varepsilon = \frac{x}{C} - \frac{T_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r}{n} = \frac{x}{C} - \frac{T_0}{2\pi} \operatorname{arctg}(\operatorname{th} v). \quad (1.113)$$

Thời điểm mặt nước đi qua mực trung bình xác định bằng cách cho (1.93) bằng không, từ đó có

$$t_m = \frac{x}{C}. \quad (1.114)$$

Vậy khoảng thời gian vượt trước của thời điểm mực nước trung bình so với thời điểm thay đổi dòng chảy bằng

$$\Delta t = t_m - t_c = \frac{T_0}{2\pi} \arctg \frac{r}{n} = \frac{T_0}{2\pi} \arctg(\text{th } v). \quad (1.115)$$

Thời gian vượt trước càng lớn nếu chu kỳ dao động càng lớn và hệ số ma sát càng lớn.

Trong thực hành để tiện lợi khi tích phân các phương trình triều, người ta hay thay mỗi liên hệ bình phương của lực ma sát bằng mỗi liên hệ tuyến tính. Bây giờ ta xét cách tính hệ số ma sát tuyến tính sao cho tối ưu trong việc thay thế gần đúng trên. Để cho sai số khi thay thế mỗi phụ thuộc bình phương bằng mỗi phụ thuộc tuyến tính chúng ta phải chọn hệ số ma sát tuyến tính r_* sao cho công cản trở chuyển động trong liên hệ tuyến tính và trong liên hệ bình phương bằng nhau, tức

$$\int_0^t r_* u u dt = \int_0^t k u^2 u dt, \quad (1.116)$$

ở đây k – hệ số ma sát trong liên hệ bình phương, bằng $k = \frac{g}{\chi^2 D}$, χ – hằng số Chezi. Thế biểu thức của u vào (1.116), tính các tích phân, ta được công thức xác định r_*

$$r_* = kR \frac{\int_{\frac{T_0+\varepsilon}{4}}^{\frac{T_0+\varepsilon}{4}} \sin^3 \frac{2\pi}{T_0} (t-\varepsilon) dt}{\int_{\frac{T_0+\varepsilon}{4}}^{\frac{T_0+\varepsilon}{4}} \sin^2 \frac{2\pi}{T_0} (t-\varepsilon) dt} = \frac{8}{3} \frac{k}{\pi} u_{\max} = 0,85 k u_{\max}. \quad (1.117)$$

Tính hệ số r_* theo công thức này cho độ sâu 10 và 20 m, $u_{\max} = 1$ m/s. Hằng số Chezi xác định theo công thức $\chi \approx \frac{1}{n_0} D^{0,167}$, hệ số gồ ghề

$n_0 = 0,025$ (trường hợp tường đất):

$$\text{với } D = 10 \text{ m} \quad r_* = 2,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{với } D = 20 \text{ m} \quad r_* = 0,96 \cdot 10^{-4}.$$

Từ công thức (1.117) thấy rằng hệ số ma sát r_* không phải là đại lượng không đổi dọc theo chiều dài kênh vì tốc độ u_{\max} giảm theo quy luật hàm mũ dọc kênh. Vậy lấy r_* không đổi chỉ là ước lượng gần đúng trên một đoạn kênh đang xét.

Bây giờ đặt các biểu thức của ζ và u vào các số hạng phi tuyến trong các phương trình (1.87) và (1.88) ta sẽ khảo sát trường hợp truyền sóng đứng trong kênh độ sâu hữu hạn:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial u}{\partial x} + r_* u &= \frac{\pi g H^2 n}{\lambda_0 D s} e^{-mx} \sin \frac{4\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] \\ &+ \frac{\pi g H^2 r}{\lambda_0 D s} e^{-2mx} \cos \frac{4\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] + \frac{\pi g H^2 n}{\lambda_0 D s} e^{-2mx} \end{aligned} \quad (1.118)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + D \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\pi g H^2}{C_0 \lambda_0} e^{-2mx} \sin \frac{4\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] + \frac{1}{2} \frac{g H^2}{C_0^2 s} r_* e^{-2mx} \quad (1.119)$$

Loại u ra khỏi hai phương trình trên, nhận được phương trình sóng

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + r_* \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 12 \frac{\pi^2 g H^2}{\lambda_0^2} e^{-2mx} \cos \frac{4\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] \\ + \frac{2\pi g H^2}{C_0 \lambda_0} r_* e^{-2mx} \sin \frac{4\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] &+ \frac{1}{2} \frac{g H^2 r_*}{C_0^2} \frac{1+0,5s}{n^2 s} e^{-2mx}. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Tích phân phương trình này với điều kiện biên (1.89) tìm được

$$\zeta = H \left\{ e^{-2mx} \sin \frac{2\pi}{T_0} (t - nx / C_0) + \frac{3\pi H}{r_* D T_0} \left[e^{-px} \sin \frac{4\pi}{T_0} (t - qx / C_0) - e^{-2mx} \sin \frac{4\pi}{T_0} (t - nx / C_0) \right] - \frac{1}{2} \frac{H}{D} \left[e^{-px} \cos \frac{4\pi}{T_0} (t - qx / C_0) - e^{-2mx} \cos \frac{4\pi}{T_0} (t - nx / C_0) \right] + \frac{1}{2} \frac{H}{D} \frac{1+0,5s}{s} (1 - e^{-2mx}) \right\} \quad (1.121)$$

trong đó dùng các ký hiệu:

$$l = \left[1 + \frac{1}{16} \frac{T_0^2}{\pi_0^2} r_*^2 \right]^{1/2}$$

$$p = \frac{4\pi}{\lambda_0} \left[\frac{1}{2} (l - 1) \right]^{1/2}$$

$$q = \left[\frac{1}{3} (l - 1) \right]^{1/2}$$

hay có thể biểu diễn những đại lượng này qua các hàm hyperbolic:

$$w = \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \frac{1}{4} r_* \frac{T_0}{\pi}$$

$$l = \operatorname{ch} 2w$$

$$p = \frac{4\pi}{\lambda_0} \operatorname{sh} w$$

$$q = \operatorname{ch} w.$$

Từ (1.118) tính được tốc độ

$$u = \frac{gH}{C_0} \left\{ \frac{e^{-mx}}{s} \left[n \sin \frac{2\pi}{T_0} (t - nx / C_0) + r \cos \frac{2\pi}{T_0} (t - nx / C_0) \right] + \frac{\pi H}{r_* D T_0} \left[\frac{q(1+2l)}{l} e^{-px} \sin \frac{4\pi}{T_0} (t - qx / C_0) + \frac{n(1+2s)}{s} e^{-2mx} \sin \frac{4\pi}{T_0} (t - nx / C_0) \right] + \frac{H}{2D} \left[\frac{(s-0,5)}{sn} e^{-2mx} \cos \frac{4\pi}{T_0} (t - nx / C_0) - \frac{0,5(l-0,5)}{lq} e^{-px} \cos \frac{4\pi}{T_0} (t - qx / C_0) \right] - \frac{1}{2} \frac{Hn}{Ds} e^{-2mx} \right\} \quad (1.122)$$

Chúng ta sẽ tìm hiểu bản chất của những số hạng không tuần hoàn xuất hiện trong các công thức dao động mực nước và vận tốc. Nếu trong các phương trình (1.121) và (1.122) cho hệ số ma sát $r_* = 0$ thì biểu thức (1.121) sẽ trở thành giống như biểu thức mà Airy đã nhận được, còn trong biểu thức của u xuất hiện thêm một số hạng không đổi mang giá trị âm $-\frac{gH^2}{2C_0D}$. Số hạng này nói nên rằng khi sóng thủy triều truyền trong

kênh nông tốc độ dòng triều xuống lớn hơn tốc độ dòng triều lên. Các biểu thức nhận được của ζ và u thỏa mãn các phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\pi g^2 H^2}{C_0^2 \lambda_0} \sin 4\pi \left[\frac{t}{T_0} - \frac{x}{\lambda_0} \right]; \quad (1.123)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -D \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\pi g H^2}{C_0 \lambda_0} \sin 4\pi \left[\frac{t}{T_0} - \frac{x}{\lambda_0} \right], \quad (1.124)$$

mà ta sẽ nhận được nếu nghiên cứu sóng triều trong kênh nông không ma sát. Số hạng âm không đổi $-\frac{gH^2}{2C_0D}$ có lẽ là hằng số tích phân mà trong

khi tìm u từ phương trình (1.124) đã bị cho bằng không.

Tính giá trị lưu lượng nước qua thiết diện kênh với chiều rộng đơn vị, dùng các công thức:

$$\zeta = H \left\{ \sin 2\pi \left[\frac{t}{T_0} - \frac{x}{\lambda_0} \right] + \frac{3\pi H}{2D} \frac{x}{\lambda_0} \sin 4\pi \left[\frac{t}{T_0} - \frac{x}{\lambda_0} \right] \right\}; \quad (1.125)$$

$$u = \frac{gH}{C_0} \left\{ \sin 2\pi \left[\frac{t}{T_0} - \frac{x}{\lambda_0} \right] + \frac{3\pi H}{2D} \frac{x}{\lambda_0} \sin 4\pi \left[\frac{t}{T_0} - \frac{x}{\lambda_0} \right] + \frac{H}{8D} \cos 4\pi \left[\frac{t}{T_0} - \frac{x}{\lambda_0} \right] \right\} \quad (1.126)$$

– nghiệm của các phương trình triều trong kênh không ma sát (1.123), (1.124) và giả thiết tốc độ ngang như nhau ở khắp thiết diện kênh:

$$Q = (H + \zeta)u. \quad (1.127)$$

Lấy tích phân (1.127) trong khoảng

$$\frac{x}{C_0} \text{ đến } T_0 + \frac{x}{C_0},$$

ta sẽ xác định được dòng kết quả đi qua thiết diện này sau thời gian một chu kỳ T_0 :

$$\int_{x/C_0}^{T_0+x/C_0} Q dt = \frac{1}{2} \frac{gD^2}{C_0} T_0. \quad (1.128)$$

Trong kết quả này người ta đã bỏ qua những thành phần bậc cao. Biểu thức (1.128) chứng tỏ rằng ngoài chuyển động dao động của các hạt

nước, nhất thiết phải có chuyển động tịnh tiến của chất lỏng theo hướng truyền sóng mà tốc độ trung bình của sự di chuyển ấy sẽ bằng giá trị dòng kết quả (1.128) chia cho chu kỳ sóng T_0 và độ sâu trung bình D :

$$v = \frac{1}{2} \frac{gH^2}{gD}.$$

Đối với trường hợp bài toán có ma sát bằng cách tương tự người ta cũng nhận được

$$v = \frac{1}{2} \frac{gH^2}{C_0D} \frac{n}{s} e^{-2mx}.$$

Tuy nhiên, trong thực tế sự chuyển dịch tịnh tiến của chất lỏng không xảy ra, vì trong quá trình truyền sóng dài trong nước nông, khi giá trị của trở nên đáng kể, thì xuất hiện một dòng chảy "bồi thường" với vận tốc bằng và hướng ngược lại.

Bản chất vật lý của hiện tượng này như sau [9]: Giá trị tốc độ ngang của các hạt nước trên quỹ đạo tỷ lệ thuận với độ sâu kênh. Trong quá trình truyền sóng thủy triều vào nước nông, khi độ cao của sóng tương đương với độ sâu, vận tốc dòng triều dâng giảm đi do có sự tăng độ sâu trong lúc dâng nước, và ngược lại, vận tốc dòng triều rút tăng lên do có sự giảm độ sâu trong lúc nước rút. Kết quả vận tốc dòng triều rút vượt vận tốc dòng triều dâng, các dòng kết quả đi qua thiết diện cho trước của kênh sau nửa chu kỳ thứ nhất và nửa chu kỳ thứ hai cân bằng nhau, dòng kết quả sau cả chu kỳ bằng không, tức là dịch chuyển tịnh tiến không xảy ra. Để kiểm tra người ta tính lưu lượng nước và dòng kết quả sau một chu kỳ dựa trên giá trị u theo phương trình (1.126) chú ý tới thành phần

mang dấu âm không đổi $-\frac{gH^2}{2C_0D}$. Thấy rằng

$$\int_{x/C_0}^{T_0+x/C_0} Q dt = 0.$$

Zubov (1947) đã dẫn một công thức sau đây cho trường hợp vận tốc ngang của hạt nước khi sóng thủy triều chuyển động trên nước nông:

$$u = H \left[\frac{g}{D \pm H} \right]^{1/2}, \quad (1.129)$$

trong đó dấu cộng ứng với ngọn sóng, còn dấu trừ ứng với đáy sóng. Nghiên cứu công thức này Zubov đi đến kết luận rằng tốc độ lúc triều lên nhỏ hơn tốc độ lúc triều rút. Khai triển biểu thức (1.129) thành đa thức, lấy đến số hạng bậc hai, ta tìm được

$$u = \frac{gH}{C_0} \left[1 \mp \frac{1}{2} \frac{H}{D} \right],$$

trong đó dấu trừ ứng với ngọn sóng và dấu cộng ứng với đáy sóng. Số hạng thứ hai của đa thức biểu thị đặc điểm thành phần ngang của tốc độ quỹ đạo hạt nước bằng thành phần mang dấu âm không đổi trong biểu thức (1.122).

Được biết rằng sự truyền sóng ổn định (sóng truyền về phía trước một cách đều đặn không có sự thay đổi hình dạng sóng) kèm theo sự di chuyển tịnh tiến một khối lượng chất lỏng theo hướng truyền sóng. Krurlov (1949) đã thiết lập một công thức cho sự dịch chuyển tịnh tiến (gọi là dòng lưu sóng) cho sóng dài và dùng nó để xác định tốc độ dòng lưu sóng khi truyền sóng triều trên nước nông. Peresupkin cho rằng việc sử dụng công thức này là không phù hợp vì cơ sở để rút ra công thức là sóng phải ổn định. Kết quả nghiên cứu của Peresupkin [9] mà chúng ta xét ở trên cho phép ông khẳng định rằng trong quá trình truyền sóng dài không có sự dịch chuyển tịnh tiến của nước, nghĩa là chỉ có các dao động tuần hoàn xung quanh vị trí cân bằng.

Thành phần không tuần hoàn trong biểu thức dao động mực nước hoàn toàn là hệ quả của tác dụng của các lực ma sát và sẽ triệt tiêu khi $\beta = 0$.

Cần lưu ý rằng trong phương pháp xấp xỉ liên tiếp được dùng để giải bài toán truyền sóng triều trong kênh nông việc chứng minh tính hội tụ chưa được giải quyết. Những kết quả nhận được trong quá trình giải mới chỉ phản ánh gần đúng diễn biến thực sự của hiện tượng, bài toán đòi hỏi nghiên cứu tiếp.

Để tính các quỹ đạo thẳng đứng của chuyển động của các hạt nước người ta chỉ sử dụng các thành phần tuần hoàn trong các biểu thức ζ và u . Trong trường hợp này công thức (1.121) có thể biến đổi thành dạng

$$\zeta = H e^{mx} \sin \frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{n}{C_0} x \right] + D \sin \left[\frac{2\pi}{T_0} t - \rho \right], \quad (1.130)$$

trong đó:

$$D = \frac{1}{2} \frac{H^2}{D} \operatorname{cosec} \tau \left[e^{-4mx} - 2e^{-(2m+p)x} \cos \frac{4\pi}{\lambda_0} (n-q)x + e^{-2px} \right]^{1/2}, \quad (1.131)$$

$$\tau = \arctg \frac{1}{6} \beta \frac{T_0}{\pi}, \quad (1.132)$$

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sin \left[\frac{4\pi}{\lambda_0} qx + \tau \right] - e^{-(2m-p)x} \sin \left[\frac{4\pi}{\lambda_0} qx + \tau \right]}{\cos \left[\frac{4\pi}{\lambda_0} qx + \tau \right] - e^{-(2m-p)x} \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda_0} qx + \tau \right]}. \quad (1.133)$$

Tích phân phần tuần hoàn của phương trình (1.122), người ta xác định được giá trị của dao động ngang của các hạt nước:

$$\xi = \frac{T_0 \sqrt{g}}{2\pi} \frac{H}{\sqrt{D}} \left\{ \frac{e^{-mx}}{s} \left[-n \cos \frac{2\pi}{T_0} (t - nx / C_0) + r \sin \frac{2\pi}{T_0} (t - nx / C_0) \right] + \frac{1}{2} \frac{\pi H}{\beta D T_0} \left[\frac{n(1+2s)}{s} e^{-2mx} \cos \frac{4\pi}{T_0} (t - nx / C_0) - \frac{q(1+2l)}{l} e^{-px} \cos \frac{4\pi}{T_0} (t - qx / C_0) \right] + \frac{1}{4} \frac{H}{D} \left[\frac{s-0,5}{sn} e^{-2mx} \sin \frac{4\pi}{T_0} (t - nx / C_0) - \frac{0,5(l-0,5)}{lq} e^{-px} \sin \frac{4\pi}{T_0} (t - qx / C_0) \right] \right\}. \quad (1.134)$$

CHƯƠNG 2 – NHỮNG PHƯƠNG PHÁP SỐ TRỊ TÍNH THỦY TRIỀU

Trong chương 1 đã xét những khái niệm cơ bản về hiện tượng thủy triều trong đại dương và những lý thuyết giải thích sự hình thành những đặc điểm cơ bản, chung nhất của hiện tượng triều xảy ra trong biển thực. Tuy nhiên như đã nhận xét, những thuyết này chưa thể cung cấp những công thức, những phương pháp để tính toán những đặc trưng thủy triều với độ chính xác cần thiết trong thực tiễn. Điều này chủ yếu do ở biển và đại dương thực các sóng thủy triều lan truyền trong những điều kiện vật lý, điều kiện hình học đường bờ và địa hình đáy biển phức tạp hơn nhiều so với những sơ đồ đã xét bằng giải tích. Do đó, trong chương này, chúng ta sẽ xem xét những phương pháp thủy động số trị để giải các phương trình chuyển động thủy triều nhằm tính tới được những điều kiện gần thực ở biển.

2.1. PHƯƠNG PHÁP DEFANT

Xét chuyển động thủy triều trong kênh nửa kín. Giả sử kênh rất hẹp, có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực Coriolis. Ma sát ở đáy và thành kênh không có. Chuyển động ngang của các hạt nước không đổi trong mặt phẳng vuông góc với phương truyền thủy triều, tức trong thiết diện ngang kênh. Tốc độ thành phần ngang u có thể là một hàm số chỉ theo hướng x và thời gian t [3].

Bây giờ chúng ta sẽ nhận các phương trình thuận tiện cho việc tích phân bằng số. Đặt gốc toạ độ lên mặt phẳng đáy, trục x hướng dọc theo kênh, trục z thẳng đứng hướng lên trên.

Phương trình chuyển động theo hướng trục x (1.19) và phương trình liên tục (1.28) sẽ có dạng đơn giản sau đây:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -D \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Nếu sử dụng đại lượng di chuyển ngang ξ của hạt nước liên hệ với tốc độ u theo định nghĩa

$$\xi = \int_0^t u dt, \quad (2.3)$$

thì phương trình chuyển động (2.1) được viết lại thành

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (2.4)$$

và phương trình liên tục (2.2) thành

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t}. \quad (2.5)$$

Giả sử dao động thủy triều của mực nước và di chuyển ngang là các hàm điều hoà thời gian dạng:

$$\zeta = \bar{\zeta} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$\xi = \bar{\xi} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

trong đó $\bar{\zeta}$ và $\bar{\xi}$ tuần tự là các biên độ của dao động mực nước và quãng đường dịch chuyển ngang của hạt nước trong chuyển động triều.

Ký hiệu diện tích mặt cắt ngang kênh là S , chiều rộng kênh là b và $D = S/b$.

Khi đó các phương trình (2.4) và (2.5) sẽ dẫn đến dạng các phương trình cho biên độ các dao động [6]:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dx} = \frac{1}{g} \left[\frac{2\pi}{T} \right]^2 \bar{\xi}; \quad (2.6)$$

$$\frac{d[S(x)\bar{\xi}]}{dx} = \bar{\zeta} b(x). \quad (2.7)$$

Dùng điều kiện triệt tiêu chuyển động ngang ở đầu kín của kênh ($x = 0$) làm điều kiện biên theo x :

$$\bar{\xi} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.8)$$

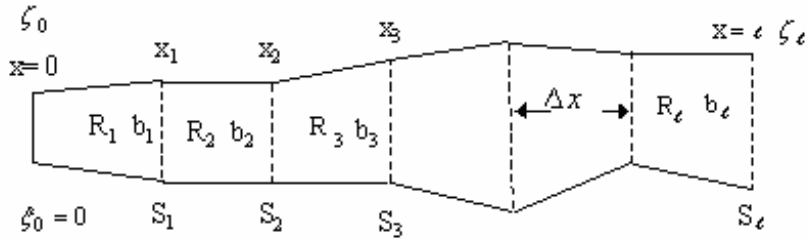
và cho trước dao động thẳng đứng của mực nước ở cửa mở của kênh ($x = \ell$):

$$\bar{\zeta} \Big|_{x=\ell} = \bar{\zeta}_\ell. \quad (2.9)$$

Như vậy hệ phương trình (2.6), (2.7) và các điều kiện biên (2.8) và (2.9) hoàn toàn xác định trường dao động triều trong kênh.

Bây giờ ta chia kênh ra làm nhiều đoạn bằng một loạt các thiết diện thẳng đứng vuông góc với trục dọc kênh (hình 2.1). Khoảng cách giữa hai thiết diện liền nhau bằng Δx . Ký hiệu $\Delta \bar{\zeta}$ là số gia biên độ mực nước qua khoảng Δx . Từ phương trình (2.6) sẽ nhận được

$$\Delta \bar{\zeta} = \frac{4\pi^2}{gT^2} \bar{\xi} \Delta x. \quad (2.10)$$



Hình 2.1. Sơ đồ kênh trong phương pháp tích phân từng bước

Dịch chuyển ngang $\bar{\xi}$ được tìm nhờ phương trình (2.7). Tích phân phương trình này theo từ 0 đến x và dùng điều kiện biên (2.8) ta được

$$\bar{\xi} = - \int_0^x \frac{b}{S} \bar{\xi} dx. \quad (2.11)$$

Bây giờ ta tích phân hệ phương trình (2.10), (2.11) được thực hiện bằng phương pháp số “từng bước về phía trước”. Đối với trường hợp sóng triều là sóng đứng, các công thức (2.10), (2.11) chuyển thành dạng:

$$\bar{\xi}_j = \bar{\xi}_{j-1} + a \frac{\bar{\xi}_j + \bar{\xi}_{j-1}}{2}; \quad (2.12)$$

$$\bar{\xi}_j = - \frac{1}{S_j \left[1 - \frac{aR_j^2}{4S_j} \right]} \left\{ \bar{q}_{j-1} + \left[\bar{\xi}_{j-1} + a \frac{\bar{\xi}_{j-1}}{4} \right] \right\}, \quad (2.13)$$

trong đó

$$a = \frac{4\pi^2}{gT^2} \Delta x,$$

R_j – diện tích mặt kênh giữa hai thiết diện; \bar{q} – lưu lượng của dòng

triều, tính theo công thức

$$\bar{q}_j = \bar{q}_{j-1} + \frac{\bar{\xi}_j + \bar{\xi}_{j-1}}{2} R_j,$$

với $\bar{q}_j = 0$ ở đầu kín của kênh $j = 0$ theo điều kiện (2.8).

Sternec và Defant khi mới xây dựng phương pháp này, năm 1915-1919, đã dùng nó để tính thủy triều cho Đại Tây Dương, biển Adriatic, Địa Trung Hải và nhiều biển khác. Kết quả tương đối thoả mãn khi tính dao động trung bình theo thiết diện ngang của kênh. Tuy nhiên phương pháp vừa trình bày không tính đến lực Coriolis, nên không thể áp dụng đối với những biển không có dạng kênh hẹp. Ngày nay sơ đồ tính toán trên với những cải tiến nhất định có thể sử dụng để tính sự truyền triều trong các vùng cửa sông, các sông. Về sau này Hansen (năm 1949, 1952) và sau nữa là Polukarov (năm 1956, 1957, 1960) [10] đã đưa ra những mô hình số trị đầy đủ hơn, tránh được những thiếu sót của phương pháp Defant. Chúng ta sẽ tìm hiểu các phương pháp này qua việc xem xét mô hình số trị của Hansen ở mục tiếp theo.

2.2. PHƯƠNG PHÁP HANSEN

2.2.1. Các phương trình và điều kiện biên

Hansen đã xuất phát từ hệ phương trình chuyển động sóng dài có kể đến ma sát rối thẳng đứng, trong đó các ứng suất ma sát rối tại đáy được xấp xỉ bằng quy luật tuyến tính (xem [6]). Trong trường hợp này hệ các phương trình chuyển động và phương trình liên tục có dạng (xem các phương trình (1.31), (1.32) và (1.28))

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - ru; \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - rv; \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial uD}{\partial x} + \frac{\partial vD}{\partial y} = 0. \quad (2.16)$$

Khi hệ số ma sát được cho trước thì các phương trình (2.14)–(2.16) liên hệ ba hàm số cần tìm: các thành phần tốc độ u , v và độ cao ζ của mặt biển so với mực trung bình.

Cũng như trong mục trước, các đại lượng u , v và ζ biến thiên với thời gian theo quy luật điều hoà đơn giản, viết dưới dạng phức như sau

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\zeta} \end{Bmatrix} \cdot e^{-i\sigma t}, \quad (2.17)$$

trong đó σ – tốc độ góc của dao động triều; \bar{u} , \bar{v} , $\bar{\zeta}$ – những biên độ phức của các hàm tương ứng.

Thế (2.17) vào hệ các phương trình (2.14)–(2.16) và giản ước thừa số $e^{-i\sigma t}$ ta được hệ phương trình viết cho các biên độ

$$\delta \bar{u} - f \bar{v} = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}; \quad (2.18)$$

$$\delta \bar{v} + f \bar{u} = -g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}; \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \bar{u}D}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}D}{\partial y} - i\sigma \bar{\zeta} = 0. \quad (2.20)$$

ở đây $\delta = r - i\sigma$.

Bây giờ ta biến đổi các phương trình này để nhận được một phương trình cho một ẩn là hàm $\bar{\zeta}$.

Trước hết nhân hai phương trình chuyển động với D . Sau đó lấy đạo hàm phương trình (2.18) theo x , lấy đạo hàm phương trình (2.19) theo y rồi cộng hai phương trình lại (thực hiện toán tử phân kỳ ngang), nhận được:

$$\delta \left[\frac{\partial \bar{u}D}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}D}{\partial y} \right] - f \left[\frac{\partial \bar{v}D}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}D}{\partial y} \right] = -gD \nabla^2 \bar{\zeta} - g \left[\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right]. \quad (2.21)$$

Lấy đạo hàm phương trình (2.18) theo y , phương trình (2.19) theo x rồi lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất (thực hiện toán tử xoáy), nhận được

$$\delta \left[\frac{\partial \bar{v}D}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}D}{\partial y} \right] + f \left[\frac{\partial \bar{u}D}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}D}{\partial y} \right] = -g \left[\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right]. \quad (2.22)$$

Trong các biểu thức nhận được $\bar{u}D$ và $\bar{v}D$ là những thành phần dòng toàn phần của triều lưu. Bây giờ nếu loại xoáy vận chuyển toàn phần ra khỏi hai phương trình vừa nhận được (bằng cách nhân phương trình thứ nhất với δ , phương trình thứ hai với f rồi cộng hai phương trình lại), ta có

$$(\delta^2 + f^2) \left[\frac{\partial \bar{u}D}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}D}{\partial y} \right] = -g \delta D \nabla^2 \bar{\zeta} - g \delta I(D, \bar{\zeta}) - g f J(D, \bar{\zeta}) \quad (2.23)$$

với các ký hiệu

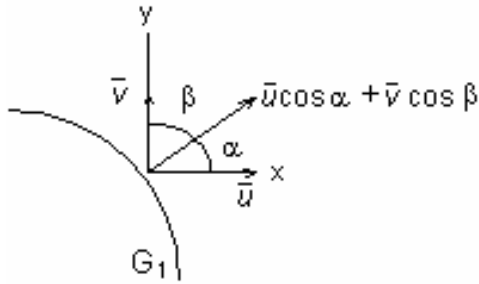
$$I(D, \bar{\zeta}) = \left[\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right]$$

$$J(D, \bar{\zeta}) = \left[\frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \right]$$

Dùng phương trình (2.20) để loại biểu thức phân kỳ dòng toàn phần ra khỏi phương trình (2.23), giả thiết $(\delta^2 + f^2)$ khác không, cuối cùng ta nhận được phương trình vi phân mô tả dao động mặt biển

$$\nabla^2 \bar{\zeta} + \frac{I(D, \bar{\zeta})}{D} + \frac{f}{\delta D} J(D, \bar{\zeta}) + \frac{i\sigma}{gD\delta} (\delta^2 + f^2) \bar{\zeta} = 0. \quad (2.24)$$

Phương trình (2.24) là phương trình vi phân đạo hàm riêng dạng *elliptic* với các hệ số phức của hàm phức $\bar{\zeta}$.



Hình 2.2. Biên cứng

Hansen (1952) đã chứng minh rằng đối với trường hợp vùng nghiên cứu có hệ số ma sát không bằng không, nghiệm của phương trình (2.24) khi cho trước *điều kiện biên hỗn hợp* sẽ xác định đơn trị. Vì vậy nếu vùng biển giới hạn bởi đường biên kín G , một phần G_1 của nó là đường bờ, phần còn lại G_2 là biên lỏng, thì hàm $\bar{\zeta}$ được xác định đơn trị trong khắp vùng biển khi ở biên cứng G_1 cho trước điều kiện không chảy xuyên qua biên

$$(\bar{u} \cos \alpha + \bar{v} \cos \beta)|_{G_1} = 0, \quad (2.25)$$

còn ở biên lỏng G_2 biết trước giá trị mực nước

$$\bar{\zeta}(x, y)|_{G_2} = \varphi(x, y), \quad (2.26)$$

ở đây α và β – các góc giữa pháp tuyến trong của bờ với các trục x và y (hình 2.2). Bài toán này gọi là *bài toán biên hỗn hợp*.

Tính đơn trị của nghiệm cũng tồn tại cả trong trường hợp khi các giá trị của hàm $\bar{\zeta}$ được biết trước trên khắp vòng biên vùng biển nghiên cứu:

$$\bar{\zeta}(x, y)|_G = \psi(x, y), \quad (2.27)$$

(tức *bài toán toán biên loại một*) [6].

Sự khác nhau giữa bài toán biên loại một và bài toán biên hỗn hợp là ở chỗ trong bài toán biên loại một các giá trị của hàm mực nước được cho trước trên toàn đường biên, khi giải phương trình (2.24) cho hàm mực nước ta chỉ cần tính giá trị của hàm này cho những điểm bên trong của miền tính. Với bài toán biên loại hỗn hợp cần ít thông tin đầu vào hơn vì điều kiện biên (2.25) thực chất là điều kiện lý thuyết thuần túy, không yêu cầu dữ liệu thực. Song với bài toán này khi giải phương trình (2.24) ta cần tính hàm mực nước cho cả các điểm bên trong miền tính và các điểm trên biên cứng và do đó về phương diện kỹ thuật giải số bài toán này sẽ khó khăn hơn.

Nhiệm vụ tiếp theo là tìm các biểu thức tính biên độ tốc độ dòng triều theo mực nước. Muốn vậy sử dụng các phương trình (2.18) và (2.19). Nhân phương trình (2.18) với δ , nhân phương trình (2.19) với f rồi cộng hai kết quả với nhau ta sẽ được biểu thức của \bar{u} và trừ hai kết quả cho nhau ta sẽ được biểu thức của \bar{v} :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -\frac{g}{\delta^2 + f^2} \left[\delta \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + f \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right] \\ \bar{v} &= \frac{g}{\delta^2 + f^2} \left[f \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \delta \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \right]\end{aligned}\quad (2.28)$$

Nếu bên trong vùng nghiên cứu và trên các biên của nó đã tính được hoặc cho trước các giá trị hàm $\bar{\zeta}$, thì theo các biểu thức (2.28) dễ dàng tính được \bar{u} và \bar{v} .

2.2.2. Sơ đồ sai phân hữu hạn giải các phương trình

Vùng biên được chia bằng mạng lưới đều (hình 2.3). Đối với bài toán loại một, theo các điều kiện biên (2.27) ta xác định các giá trị hàm $\bar{\zeta}$ ở đây nút ngoài của vùng lưới G' :

$$\bar{\zeta}(x, y)|_{G'} = \psi'(x, y). \quad (2.29)$$

Ở các nút trong của lưới phương trình vi phân (2.24) được được thay bằng tương tự sai phân hữu hạn của nó

$$\nabla_P^2 \bar{\zeta} + \frac{1}{4D} \left[I_P(D, \bar{\zeta}) + \frac{f}{\delta} J_P(D, \bar{\zeta}) \right] + \mu \bar{\zeta} = 0, \quad (2.30)$$

trong đó $\nabla_P^2 \bar{\zeta}$, $I_P(D, \bar{\zeta})$, $J_P(D, \bar{\zeta})$ – tuần tự là các tương tự sai phân của các toán tử Laplacian, $I(D, \bar{\zeta})$ và $J(D, \bar{\zeta})$ nhận được bằng phép xấp xỉ sai phân hữu hạn trung tâm:

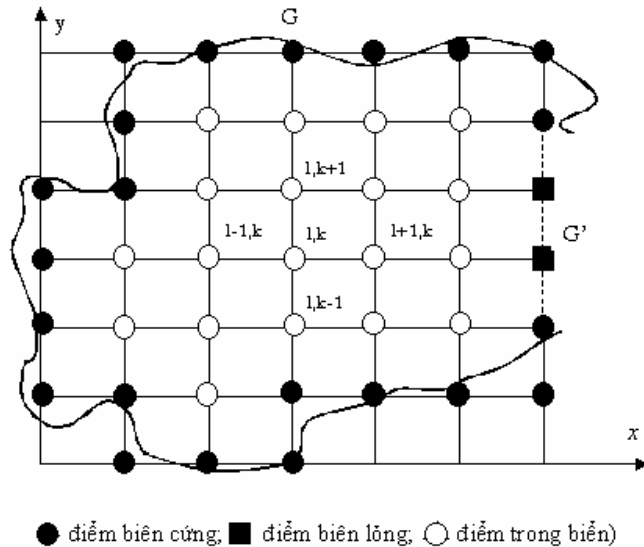
$$\nabla^2 \bar{\zeta} \cong \frac{1}{h^2} (\bar{\zeta}_{l+1,k} + \bar{\zeta}_{l,k+1} + \bar{\zeta}_{l-1,k} + \bar{\zeta}_{l,k-1} - 4\bar{\zeta}_{l,k}) \cong \frac{\nabla_P^2 \bar{\zeta}}{h^2}$$

$$\begin{aligned}I(D, \bar{\zeta}) &= \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \cong \\ &\frac{1}{4h^2} [(D_{l+1,k} - D_{l-1,k})(\bar{\zeta}_{l+1,k} - \bar{\zeta}_{l-1,k}) + (D_{l,k+1} - D_{l,k-1})(\bar{\zeta}_{l,k+1} - \bar{\zeta}_{l,k-1})] \\ &\cong \frac{1}{4h^2} I_P(D, \bar{\zeta}) \\ J(D, \bar{\zeta}) &= \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \cong \\ &\frac{1}{4h^2} [(D_{l+1,k} - D_{l-1,k})(\bar{\zeta}_{l,k+1} - \bar{\zeta}_{l,k-1}) - (D_{l,k+1} - D_{l,k-1})(\bar{\zeta}_{l+1,k} - \bar{\zeta}_{l-1,k})] \\ &\cong \frac{1}{4h^2} J_P(D, \bar{\zeta})\end{aligned}$$

μ – thông số không thứ nguyên, bằng $\frac{i\sigma h^2}{gD\delta}(\delta^2 + f^2)$; h – bước lưới;

các chỉ số l, k xác định vị trí của từng nút bên trong vùng lưới.

Nếu l biến thiên từ 0 đến N , và k từ 0 đến M , thì lưới sẽ chứa $(N-1)(M-1)$ nút trong. Giá trị của hàm $\bar{\zeta}$ ở mỗi nút trong là những giá trị cần tìm. Vậy nếu viết phương trình (2.30) cho từng điểm trong l, k của lưới thì ta sẽ có một hệ phương trình đại số gồm $(N-1)(M-1)$ phương trình chứa đúng $(N-1)(M-1)$ ẩn số. Như vậy giải bài toán biên loại một dẫn đến giải hệ $(N-1)(M-1)$ phương trình đại số tuyến tính.



Hình 2.3. Sơ đồ vùng tính và lưới sai phân trong phương pháp Hansen

Khi giải bài toán biên loại hỗn hợp hàm $\bar{\zeta}$ ở từng nút trong của vùng lưới cũng cần phải thỏa mãn phương trình sai phân (2.30). Tuy nhiên, khác với trường hợp đã xét ở trên, các giá trị của hàm ở các nút trên vòng biên cứng bây giờ lại phải xác định dựa theo điều kiện biên (2.25).

Kết hợp các phương trình (2.28) và điều kiện biên (2.25) có thể nhận được các phương trình tính $\bar{\zeta}$ cho những điểm trên biên cứng như sau:

$$\delta \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + f \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = 0 \quad \text{cho biên kinh tuyến}$$

$$f \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \delta \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} = 0 \quad \text{cho biên vĩ tuyến.}$$

Cách đơn giản nhất để xấp xỉ sai phân các phương trình này cho những điểm biên là thay các đạo hàm bằng sai phân hữu hạn một chiều.

Kết hợp những phương trình sai phân vừa nhận được cho các điểm nút biên với các phương trình sai phân cho những nút bên trong lưới ta sẽ được một hệ phương trình đại số tuyến tính trong đó số phương trình bằng số điểm nút bên trong cộng với số nút ở biên cứng.

Hệ phương trình đại số tuyến tính nhận được sẽ có nghiệm đơn trị chỉ trong trường hợp định thức các hệ số của hệ khác không [6]. Nếu điều kiện này thỏa mãn thì có thể giải hệ phương trình đại số tuyến tính bằng phương pháp thế hoặc phương pháp ma trận. Cũng có thể giải hệ đó bằng phương pháp lặp, nhưng mỗi lần giải phải kiểm tra tính hội tụ của phương pháp. Hansen cho biết rằng khi định thức có trị số nhỏ tính hội tụ của nghiệm bài toán bị phá vỡ.

2.2.3. Nhận xét về phương pháp Hansen qua thực tế tính thủy triều

Những công trình tính thủy triều ở Đại Tây Dương (Hansen, 1949; Boris, 1961) và Thái Bình Dương (Bogdanov, Kim, Magaric, 1964) và ở các biển khác như Bắc Hải (Hansen, 1952), Hoàng Hải (Boris, 1958), biển Na uy và biển Grinlen (Nhecrasov, 1962, 1965)... xác nhận rằng phương pháp Hansen không những cho bức tranh chung, mà cả những nét chi tiết trong sự phân bố thủy triều trên các biển này. Các nhà khoa học Việt Nam như Nguyễn Ngọc Thụy (1969) [18], Đặng Công Minh (1975) [14] cũng đã sử dụng phương pháp Hansen để nghiên cứu đặc điểm truyền sóng thủy triều ở biển Đông.

Tuy nhiên phương pháp này có những thiếu sót sau:

a) Không thể tính thủy triều cho những biển sâu nằm gần vùng vĩ tuyến "tới hạn", nơi tốc độ góc của phân triều cần tính xấp xỉ bằng thông

số Coriolis; b) Cách đánh giá ứng suất ma sát đáy trong mô hình rất thô. Hansen khi tính toán đã cho hệ số ma sát tỉ lệ với độ sâu biển và tốc độ triều lưu. Nhưng bản thân tốc độ dòng triều là đại lượng chưa biết cần tìm trong khi giải bài toán và trong thực tế hệ số ma sát phải xem như đã được biết trước (theo kết quả đo triều lưu cục đại).

Những nghiên cứu lý thuyết và thử nghiệm (Kagan, 1968) [6] chỉ ra rằng ma sát rối thẳng đứng chỉ góp phần ảnh hưởng tới sự phân bố thẳng đứng theo độ sâu của tốc độ dòng triều ở lớp biên gần đáy biển. Trong toàn bề dày còn lại của biển với độ sâu lớn có thể bỏ qua lực ma sát rối. Điều này làm cho phương pháp Hansen không áp dụng được cho các vùng vĩ độ "tới hạn". Một trong những cách khắc phục nhược điểm này là đề xuất của Nhecrasov và Kagan (1965, 1966) đưa thành phần ma sát rối ngang vào các phương trình chuyển động [6].

Trong các mô hình tính thủy triều hiện đại người ta có thể tính tới cả những số hạng phi tuyến trong các phương trình chuyển động, sử dụng những phương trình đầy đủ dưới dạng (1.31)–(1.32), tính toán thủy triều có kể tới sự tương tác của nó với những dao động mực nước tổng cộng, ngoài dao động thủy triều có thể tính tới những dao động nguồn gốc do gió, nước dâng, ảnh hưởng của các dòng nước lục địa...

2.3. MÔ HÌNH DAO ĐỘNG MỰC NƯỚC TỔNG CỘNG TRONG BIỂN VEN

Trong mô hình này chuyển động của nước trong thủy vực cũng tuân theo hệ phương trình chuyển động sóng dài trong nước nông và phương trình cân bằng thể tích nước (gọi là hệ phương trình sóng dài trong nước nông) nhưng có tính tới khá đầy đủ các lực gây dao động mực nước. Như đã thấy, khi xây dựng các phương trình chuyển động thủy triều (1.31) và (1.32) ở mục 1.5 chương 1, chúng ta đã cho điều kiện triệt tiêu ứng suất

ma sát trên mặt tự do (điều kiện (1.25)) và cho áp suất khí quyển trên mặt tự do $P_0 = \text{const}$. Bây giờ nếu tính tới hiệu ứng ma sát do gió tác động lên mặt nước

$$k \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{T^x}{\rho} \quad \text{và} \quad k \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{T^y}{\rho} \quad (2.31)$$

và khi tích phân phương trình thủy tĩnh chú ý tới sự biến đổi của áp suất khí quyển theo các phương ngang (xem phương trình (1.18)), thì hệ phương trình chuyển động sóng dài sẽ được bổ sung bằng các số hạng chứa ứng suất gió và gradien khí áp như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^a}{\partial x} + \frac{T^x}{\rho(D+\zeta)} - \frac{r}{D+\zeta} \sqrt{u^2 + v^2} u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^a}{\partial y} + \frac{T^y}{\rho(D+\zeta)} - \frac{r}{D+\zeta} \sqrt{u^2 + v^2} v \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial(D+\zeta)u}{\partial x} - \frac{\partial(D+\zeta)v}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Trong các phương trình trên bây giờ ta dùng ký hiệu T^x, T^y – ứng suất gió lên mặt nước tuân tự theo các trục x và y , P^a – áp suất khí quyển trên mặt biển. Khi cho trước điều kiện biên ở cửa biển là dao động thủy triều, thì hệ này sẽ mô tả sự lan truyền thủy triều từ đại dương vào thủy vực đang xét dưới ảnh hưởng của trường gió và trường khí áp, tức có thể khảo sát được hiệu ứng tổng cộng của thủy triều và các quá trình khí quyển.

Khi đó điều kiện tại biên lỏng (phía biển) là cho trước dao động thực tổng cộng của mực nước

$$\zeta = \zeta(x, y, t), \quad (2.33)$$

hoặc cho biến thiên mực nước bằng phương trình độ cao mực nước thủy

triều (xem chương 3) nêu chỉ khảo sát dao động thủy triều:

$$\zeta_t = \sum_{i=1}^n f_i H_i \cos[q_i t + (V_0 + u)_i - g_i]. \quad (2.34)$$

Các điều kiện tại biên cứng (bờ biển) vẫn tương tự như trong trường hợp bài toán Hansen.

Khi muốn tính tới hiệu ứng của dòng nước sông thì tại các điểm biên gắn với cửa sông cho trước lưu lượng sông hoặc tốc độ dòng chảy sông.

Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ cho các trường mực nước và vận tốc bằng không.

Giải hệ phương trình với các điều kiện biên sẽ tìm được dòng chảy và độ cao mực nước tổng cộng tại mỗi điểm của vùng biển theo thời gian.

Cần nhận xét rằng hệ phương trình (2.32) ngoài những bổ sung đã nêu trên đây, nó còn tính tới hiệu ứng phi tuyến khá đầy đủ nhờ các số hạng phi tuyến dạng $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $v \frac{\partial v}{\partial y}$... và cho dao động mực nước cùng bậc với độ sâu biển nhờ sự thay thế độ sâu trung bình biển bằng $D + \zeta$.

Khi tích phân bằng số hệ phương trình này người ta hay sử dụng hệ lưới sai phân so le, trong đó các điểm tính ζ , u , v dịch chuyển so với nhau một nửa bước tính. Trị số của độ cao mực nước ζ được tính tại tâm của ô chữ nhật, các trị số của u và v được tính tại các điểm giữa của các cạnh ô chữ nhật (hình 2.4). Trong hệ lưới này các đạo hàm theo trục x và y trong các phương trình vi phân cũng được xấp xỉ bằng sai phân hữu hạn trung tâm đối với những điểm tính bên trong vùng tính, sai phân hữu hạn một chiều (tiền hoặc lùi) đối với các điểm trên biên cứng hoặc biên lỏng. Còn đạo hàm thời gian được xấp xỉ bằng sai phân hữu hạn một chiều tiến. Ở các điểm thuộc biên cứng kinh tuyến $u = 0$ và ở các điểm thuộc biên cứng vĩ tuyến $v = 0$ theo điều kiện biên tương tự (2.25).

Trong thực hành tích phân số hệ phương trình trên máy tính có nhiều cách khác nhau để hiện thực các thủ tục sai phân hoá các phương trình và điều kiện biên vừa nhận xét. Dưới đây là thí dụ các công thức sai phân tổng quát đơn giản viết cho trường hợp bỏ qua các số hạng phi tuyến không gian trong các phương trình chuyển động của (2.32):

$$\begin{aligned} \zeta'_{i,j} &= \zeta_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{D}_{i,j} u_{i,j} - \tilde{D}_{i,j-1} u_{i,j-1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{L}_{i,j} v_{i,j} - \tilde{L}_{i-1,j} v_{i-1,j}); \\ u'_{i,j} &= \frac{u_{i,j} + f \Delta t \tilde{K}_{i,j} - \frac{g \Delta t}{\Delta x} (\zeta'_{i,j+1} - \zeta'_{i,j}) + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{T_{i,j}^x}{D_{i,j}} - \frac{P_{i,j+1}^a - P_{i,j}^a}{\rho \Delta x}}{1 + \frac{r \Delta t}{\tilde{D}_{i,j}} (u_{i,j}^2 + \tilde{K}_{i,j}^2)^{1/2}}; \\ v'_{i,j} &= \frac{v_{i,j} + f \Delta t \tilde{S}'_{i,j} - \frac{g \Delta t}{\Delta y} (\zeta'_{i+1,j} - \zeta'_{i,j}) + \frac{\Delta t}{\rho} \frac{T_{i,j}^y}{\tilde{L}_{i,j}} - \frac{P_{i+1,j}^a - P_{i,j}^a}{\rho \Delta y}}{1 + \frac{r \Delta t}{\tilde{L}_{i,j}} (v_{i,j}^2 + \tilde{S}_{i,j}^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

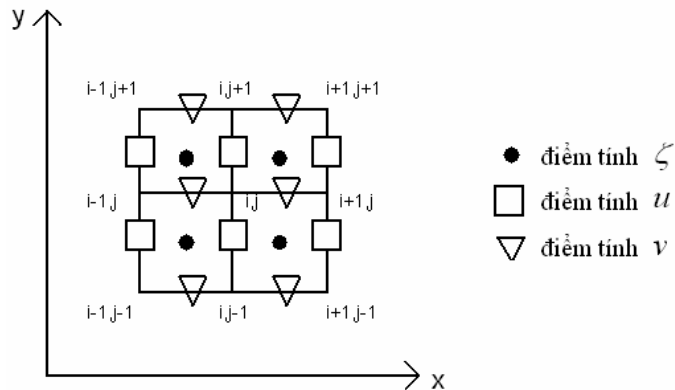
trong đó dùng các ký hiệu

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{i,j} &= \frac{D_{i,j} + D_{i,j+1} + \zeta_{i,j} + \zeta_{i,j+1}}{2} \\ \tilde{L}_{i,j} &= \frac{D_{i,j} + D_{i+1,j} + \zeta_{i,j} + \zeta_{i+1,j}}{2} \\ \tilde{K}_{i,j} &= \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i-1,j-1}}{4} \\ \tilde{S}_{i,j} &= \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1}}{4} \end{aligned}$$

các dấu phẩy phía trên đại lượng chỉ trị số ở bước tính tiếp sau một thời

gian Δt (bước thời gian) của đại lượng tương ứng.

Trên đây mới chỉ giới thiệu một phương pháp giải số trị đơn giản nhất đối với hệ phương trình sóng dài trong nước nông dựa trên phương pháp sai phân hữu hạn và sử dụng sơ đồ hiện. Tính đơn giản của sơ đồ giải này chủ yếu là ở chỗ những trị số của các hàm cần tìm tại mỗi điểm tính ở bước thời gian sau được tính chỉ dựa theo những trị số đã tính được của chúng ở bước tính trước và những trị số trên biên, chứ không phụ thuộc vào chính những trị số cần tính tại bước tính đang xét của những điểm xung quanh. Do đó không đòi hỏi phải lập và giải hệ phương trình đại số tuyến tính để tính đồng thời các trị số của các hàm chưa biết.



Hình 2.4. Vị trí các điểm tính ζ , u , và v trên lưới so le

Hiện nay mô hình dao động mực nước tổng cộng trên đây với những sơ đồ giải số trị khác nhau là công cụ chủ yếu dùng để tính toán thủy triều, nước dâng, dao động dâng rút do gió hoặc dao động tổng cộng của mực nước trong các biển ven, những thủy vực nước nông ven biển và vùng cửa sông (xem German, Levikov (1988), Koutitas (1988) [7]) trong khuôn khổ bài toán truyền sóng dài hai chiều. Trong những năm gần đây

các tác giả Việt Nam cũng chủ yếu sử dụng mô hình này để nghiên cứu những dạng dao động mực nước nguồn gốc khác nhau cho các vùng của biển Đông. Thí dụ, bằng mô hình này Đỗ Ngọc Quỳnh (1982) [15] đã nghiên cứu đặc điểm nước dâng trong bão ở biển Đông, Bùi Hồng Long (1987) [13] và Nguyễn Thọ Sáo (1988) [17] khảo sát những đặc điểm dao động triều ở vịnh Bắc Bộ và toàn biển Đông nói chung, Phạm Văn Huân (1991) [12] khảo sát dao động tự do và dao động mùa do gió mùa của mực nước ở biển Đông. Trong khuôn khổ đề tài cấp nhà nước "Thủy triều và sự dâng lên của mực nước biển Đông" (1991-1995) do Nguyễn Ngọc Thụy làm chủ nhiệm, tập thể các tác giả như Đỗ Ngọc Quỳnh, Phạm Văn Ninh, Nguyễn Việt Liên, Đinh Văn Mạnh [16], Lê Trọng Đào, Nguyễn Thọ Sáo cũng sử dụng mô hình vừa giới thiệu với những sơ đồ giải số trị khác nhau để nghiên cứu thủy triều và dòng triều chi tiết cho vùng biển này.

CHƯƠNG 3 - NHỮNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THỦY TRIỀU VÀ MỰC NƯỚC

3.1. LÝ THUYẾT PHÂN TÍCH ĐIỀU HÈA THỦY TRIỀU

Như đó thấy, những lý thuyết về thủy triều đó giải thích được những nét cơ bản nhất trong hiện tượng thủy triều ở đại dương. Mặc dù những lý thuyết này không cung cấp những công thức tính toán chính xác để dự tính thủy triều thực tế, nhưng những tư tưởng của chúng đó chỉ ra những cách hữu hiệu để giải quyết vấn đề dự tính thủy triều. Laplace đó sử dụng cùng thức độ cao thủy triều tĩnh học của Newton (1.11), đưa thêm vào những hiệu đính về biên độ và pha để nhận công thức bán thực nghiệm dự tính thủy triều như sau

$$\bar{\zeta} = \frac{3}{2} \frac{kM\rho^2}{gr^3} \left\{ \frac{(1-3\sin^2 \delta)(1-3\sin^2 \varphi)}{6} + \frac{P_1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(A - \phi_1) + \frac{P_2}{2} \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos(2A - \phi_2) \right\},$$

trong đó P_1, P_2, ϕ_1, ϕ_2 - những hiệu đính được xác định từ quan trắc

thực tế. Nếu ở trạm nào đó ngự trị thành phần triều bán nhật và ở đó có chuỗi số liệu quan trắc thờ cú thể tính những trị số chính xác của các hiệu đính trên và sau đó dùng công thức bán thực nghiệm để dự tính thủy triều trong tương lai. Tư tưởng trên đây của Laplace được Thomson và Darwin phát triển tiếp thành *phương pháp phân tích điều hòa thủy triều*. Thực chất của phương pháp này là biểu thức hàm thế vị của thủy triều tĩnh học của Newton (1.6), trong đó các đại lượng Z - góc thiên đỉnh của Mặt Trăng và r - khoảng cách từ tâm Trái Đất đến Mặt Trăng, là những hàm phụ thuộc phức tạp vào thời gian thông qua một số đặc trưng thiên văn, được khai triển thành dạng tổng của chuỗi những hàm điều hòa đơn giản dạng

$$\sum C \cos V,$$

trong đó C - biên độ; V - pha dao động; ở đây C và V về phía mơnh lại phụ thuộc vào một số đặc trưng thiên văn, nhưng có thể coi là thực tế không đổi trong một khoảng thời gian nào đó và có thể tính trước được như những giá trị trung bình của chúng trong khoảng thời gian đó. Mỗi một dao động đơn $C \cos V$, gọi là *phần triều*, được xem như một thủy triều độc lập gây bởi tác động của một tinh tú giả định quay theo quỹ đạo tròn trong mặt phẳng xích đạo, mỗi tinh tú ấy có tốc độ góc q của riêng nó. Mức độ chi tiết của khai triển nhằm đáp ứng yêu cầu sao cho biên độ C và pha V của mỗi phần triều có thể xem là những đại lượng thực tế không biến đổi trong một khoảng thời gian nào đó, thí dụ một ngày, một năm. Tuy theo phương pháp khai triển mà số lượng các hàm điều hòa đơn giản có thể khác nhau. Trong công thức khai triển đầy đủ gồm cả thế vị của Mặt Trăng và thế vị Mặt Trời người ta thường đánh số thứ tự của mỗi số hạng khai triển [2] và những số hạng nào có trị số của biên độ C lớn đáng kể, tức có tỷ trọng tương đối lớn trong tổng, thờ được đặt tên, ký hiệu bằng một vài chữ cỏi hay chữ cỏi cứng với chữ số. Thờ dụ trong bảng 3.1 (theo [4]) dẫn một số số hạng khai triển quan trọng nhất được

gọi là những phân triều chính. Từ bảng 3.1 thấy rằng biên độ và pha của các hàm điều hòa đơn phụ thuộc vào các tham số thiên văn, những tham số thiên văn này là những đại lượng phụ thuộc thời gian nhưng có thể tính trước như là trị số trung bình trong một khoảng thời gian nào đó.

$$z_t = A_0 + \sum_{i=1}^r f_i H_i \cos(V_i + u_i - k_i), \quad (3.1)$$

Theo lý thuyết phân tích điều hòa hiện đại, độ cao thủy triều thực tại trạm quan trắc trên số không độ sâu vào thời điểm t cũng có thể biểu diễn bằng tổng của các phân triều qua biểu thức tổng quát như sau:

trong đó A_0 – độ cao của mực trung bình trên số khụng trạm (hoặc số khụng độ sâu); f_i – những hệ số phụ thuộc các yếu tố thiên văn, gọi là những hệ số suy biến; H_i – những giá trị trung bình của biên độ phân triều; $V_i + u_i$ – những phân pha thiên văn của các phân triều biểu diễn các góc giờ của những tinh tú giả định tại thời điểm t ; k_i – những góc vị đặc trưng cho hiệu giữa pha phân triều và pha của lực tạo triều.

Thấy rằng trong công thức (3.1) đối với phần biên độ của mỗi phân triều người ta bổ sung đại lượng H đặc trưng cho biên độ trung bình và đối với đối số của mỗi phân triều đó bổ sung đại lượng k đặc trưng hiệu pha giữa lực tạo triều và thủy triều thực tại điểm quan trắc cụ thể.

Những đối số thiên văn của các phân triều chứa hai số hạng: số hạng V_i , mà góc giờ của nó biến thiên hoàn toàn tỷ lệ thuận thời gian với tốc độ bằng tốc độ góc của phân triều q_i , và số hạng u_i , mà giá trị biến thiên tuần hoàn phụ thuộc vào kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng N . Do đó

$$V_i = V_{0i} + q_i t, \quad (3.2)$$

trong đó V_{0i} ứng với thời điểm đầu quan trắc, tức thời điểm $t = 0$, và phương trình (3.1) có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos[q_i t + (V_0 + u)_i - k_i]. \quad (3.3)$$

Những góc vị k_i có thể được tính theo thời gian địa phương trung bình hay thời gian mặt trời trung bình. Người ta thường ký hiệu: K – góc vị theo thời gian địa phương trung bình; K' – góc vị theo thời gian mặt trời trung bình. Các đại lượng này liên hệ với nhau bằng công thức:

$$K' = K + p dS^\circ, \quad (3.4)$$

trong đó $dS^\circ = \lambda^\circ - S^\circ$; λ° – kinh độ trạm quan trắc tính bằng độ (kinh độ tính từ Greenwich, phía tây với dấu cộng, phía đông với dấu trừ); S° – kinh độ tính bằng độ của kinh tuyến trung tâm của múi giờ quan trắc được thực hiện; p – số chu kỳ của phân triều chứa trong một ngày đêm (với nhật triều $p = 1$, bán nhật triều $p = 2$, triều một phần tư ngày $p = 4$ v.v...).

Tùy thuộc thời gian thực hiện quan trắc, biểu thức độ cao mực nước thủy triều (3.3) có thể viết dưới dạng:

a) Khi quan trắc theo thời gian địa phương trung bình:

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos \left[q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i + \left[\frac{q_i}{15} - p_i \right] \lambda^\circ - K_i \right],$$

b) Khi quan trắc theo thời gian mặt trời trung bình:

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos \left[q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i + \left[\frac{q_i}{15} - p_i \right] S^\circ - p_i dS^\circ - K_i \right],$$

hay

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos \left[q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i + \left[\frac{q_i}{15} - p_i \right] S^\circ - K'_i \right],$$

trong đó $\text{Gr.}(V_0 + u)$ – góc giờ của tinh tú giả định vào thời điểm đầu quan trắc trên kinh tuyến Greenwich.

Nếu không đưa vào những hiệu chỉnh cho kinh độ địa phương hay múi giờ, tức quy ước chấp nhận rằng các quan trắc được tiến hành theo thời gian Greenwich trung bình, thì góc vị nhận được trong trường hợp này của các phân triều được quy ước gọi là các góc vị đặc biệt và ký hiệu bằng chữ còi g° . Trong mọi trường hợp sử dụng các góc vị đặc biệt nhất thiết ta phải chỉ rõ thời gian mà góc vị đó tương ứng (kinh độ của kinh tuyến tính bằng độ).

Biểu thức của độ cao mực nước (3.3) trong trường hợp này có thể biểu diễn thành

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos[q_i t + (V_0 + u)_i - g_i^\circ]. \quad (3.5)$$

Ngày nay thường phổ biến việc dự tính thủy triều với việc sử dụng những góc vị đặc biệt, vờ khi đó không cần thiết phải dẫn đại lượng $Gr.(V_0 + u)_i$ tới kinh tuyến địa phương hoặc kinh tuyến múi giờ. Tiếp sau đây trong mọi trường hợp chúng ta sẽ sử dụng phương án này để biểu diễn độ cao thủy triều. Khi cần thiết có thể tính chuyển các góc vị đặc biệt sang các góc vị theo giờ địa phương hoặc múi giờ theo những công thức sau:

a) Khi quan trắc theo thời gian địa phương trung bình:

$$K = g^\circ - \left[p - \frac{q}{15} \right] \lambda^\circ,$$

b) Khi quan trắc theo thời gian mỳi giờ trung bình:

$$K = g^\circ - p d S^\circ - \left[p - \frac{q}{15} \right] S^\circ,$$

$$K' = g^\circ - \left[p - \frac{p}{15} \right] S^\circ.$$

Tốc độ góc của các phân triều không đổi và được xác định bằng lý thuyết, những phần thườn văn của biên độ và pha của các phân triều được

tính tự thuộc vào vị trí của Mặt Trăng và Mặt Trời. Các biên độ H và góc vị g , gọi là những hằng số điều hũa, chỉ phụ thuộc vào những điều kiện địa phương của địa điểm quan trắc và được xác định từ kết quả quan trắc thủy triều. Việc xác định những đại lượng này từ trong hệ các phương trình (3.5) chính là nhiệm vụ của *phân tích điều hũa thủy triều*. Số lượng các phương trình là do độ dài quan trắc quy định.

Khi những hằng số điều hũa thủy triều H và g đó được xác định đối với từng phân triều cho một địa điểm hay một cảng cụ thể, thì việc *dự tính thủy triều* chính là tính độ cao mực nước thủy triều cho từng giờ t của ngày bất kỳ trong tương lai theo biểu thức độ cao mực nước thủy triều (3.5). Khi tính theo biểu thức (3.5) những giá trị của các đại lượng thiên văn như f , V_0 và u , là những hàm đã biết của thời gian, có thể tra bảng hoặc tính trước theo các công thức đã biết (xem mục 3.4). Rừ ràng độ chính xác của dự tính thủy triều phụ thuộc vào hai yếu tố, đó là những hằng số điều hũa đã được tính chính xác không và số lượng các phân triều có mặt trong công thức tổng quát của mực nước (3.5) có đầy đủ không. Cả hai yếu tố này phụ thuộc vào độ dài chuỗi quan trắc mực nước đó để từ đó phân tích ra các hằng số điều hũa thủy triều.

Những hằng số điều hũa thủy triều H_i và g_i chính xác nhất có thể được xác định từ hệ các phương trình (3.5) bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Việc sử dụng phương pháp này đòi hỏi một khối lượng lớn các tính toán phức tạp, vờ vậy trước đây người ta hay sử dụng các phương pháp tổ hợp sóng như phương pháp Darwin và phương pháp Doodson. Những phương pháp này cho phép xác định gần đúng các hằng số điều hũa thủy triều, nhưng đủ đáp ứng yêu cầu thực tiễn về dự báo mực nước và nhiều tính toán khác. Phương pháp Darwin đòi hỏi chuỗi quan trắc độ dài nửa tháng hoặc một tháng để phân tích ra các hằng số điều hũa của 8 hoặc 11 sóng, phương pháp Doodson phân tích được bốn sóng trên cơ sở chuỗi quan trắc độ dài một ngày đêm. Ngày nay những

phương pháp này vẫn cũn được ứng dụng, nhất là đối với những quan trắc đưng triều. Trong cóc mục tiếp sau sẽ giới thiệu nguyên lý của những phương pháp này. Do quy trình tóh toán phõn tóh thủy triều thường phức tạp, nên trong thực tiễn phân tích điều hũa, người ta đó xõy dựng những sơ đồ chuyên dụng tiện ích cho các tính toán.

Bảng 3.1. Hệ số và đối số của một số phân triều chính (trích từ [4])

Ký hiệu sóng	Tên phân triều	Hệ số gồm phần chung bằng $\frac{3}{2} \frac{M}{E} \left[\frac{a}{c} \right]^3 a$ nhân với phần riêng của từng phân triều	Giá trị trung bình của hệ số
M_2	Mặt Trăng chính	$\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{4} e^2 \right] \cos^4 \frac{I}{2}$	0,4543
N_2	Mặt Trăng đường elliptic lớn	$\frac{7}{4} e^2 \cos^4 \frac{I}{2}$	0,0880
S_2	Mặt Trời chính	$\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{4} e_1^2 \right] G \cos \frac{\omega}{2}$	0,2120
K_1	Mặt Trăng – Mặt Trời độ thiên	Xem chỳ thớch 1	0,0576
O_1	Mặt Trăng chính	$\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{4} e_1^2 \right] \sin I \cos^2 \frac{I}{2}$	0,1886
Q_1	Mặt Trăng đường elliptic lớn	$\frac{7}{4} e \sin I \cos^2 \frac{I}{2}$	0,0365
P_1	Mặt Trời chính	$\left[\frac{1}{2} - \frac{5}{4} e_1^2 \right] G \sin \omega \cos^2 \frac{\omega}{2}$	0,0880
K_2	Mặt Trăng – Mặt Trời độ thiên	Xem chú thích 2	0,2655

Ký hiệu sóng	Đối số V gồm phần (v) và (u)		Tốc độ góc trong 1 giờ q
	(v)	(u)	
M_2	$2t + 2h - 2s$	$+2\xi - 2\nu$	28,98410°
N_2	$2t + 2h - 3s + p$	$+2\xi - 2\nu$	28,43973°
S_2	$2t$	-	30,00000°
K_1	$2t + 2h$	$2\nu''$	30,08214°
O_1	$t + h - 2s - 90^\circ$	$+2\xi - \nu$	13,94304°
Q_1	$t + h - 3s + p - 90^\circ$	$+2\xi - \nu$	13,39867°
P_1	$t - h - 90^\circ$	-	14,95893°
K_2	$t - h + 90^\circ$	$-\nu'$	15,04107°

Chú thích 1:

$$K_2 = [(1/4 + 3/8e^2) \sin^4 I + (1/4 + 3/8e_1^2) G^2 \sin^4 \omega + 2(1/4 + 3/8e^2)^2 (1/4 + 3/8e_1^2) G \sin^2 I \sin^2 \omega \cos 2\nu]^{1/2}$$

Chú thích 2:

$$K_1 = [(1/4 + 3/8e^2)^2 \sin^2 2I + (1/4 + 3/8e_1^2) G^2 \sin^2 \omega + 2(1/4 + 3/8e^2)^2 (1/4 + 3/8e_1^2) G \sin 2I \sin 2\omega \cos \nu]^{1/2}$$

$$\text{Các ký hiệu trong bảng: } G = \frac{S}{M} \left[\frac{c}{c_1} \right]^2$$

M – khối lượng Mặt Trăng, E – khối lượng Trái Đất, S – khối lượng Mặt Trời, ρ – bán kính trung bõnh Trõi Đất, a – khoảng cõch trung bõnh từ Trõi Đất đến Mặt Trăng, c_1 – khoảng cách trung bình từ Trõi Đất đến Mặt Trời, e – độ lệch tâm quỹ đạo Mặt Trăng, e_1 – độ lệch tâm quỹ đạo Trái Đất, ω – góc nghiêng mặt phẳng hoàng đạo so với mặt phẳng xích đạo, I – góc nghiêng của quỹ đạo Mặt Trăng so với mặt phẳng xích đạo, ξ – kinh độ giao điểm quỹ đạo

Mặt Trăng với mặt phẳng xích đạo, ν – kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng, h – kinh độ trung bình của Mặt Trời; s – kinh độ trung bình của Mặt Trăng; p – kinh độ trung bình cận điểm quỹ đạo Mặt Trăng.

3.2. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÈA THỦY TRIỀU BẰNG PHƯƠNG PHÁP DARWIN

Nếu quy ước sử dụng các góc vị đặc biệt, công thức độ cao thủy triều (3.5) được viết gọn lại dưới dạng

$$z_t = A_0 + \sum f_i H_i \cos[q_i t + (V_0 + u)_i - g_i]. \quad (3.6)$$

Nếu dùng các ký hiệu

$$R = fH; \quad -\zeta = (V_0 + u) - g,$$

ta viết lại (3.6) dưới dạng

$$z_t = A_0 + \sum R_i \cos(q_i t - \zeta_i). \quad (3.7)$$

Như vậy nếu có chuỗi quan trắc mực nước z_t nhiệm vụ của phân tích điều hòa là xác định R và ζ trong công thức (3.8) và sau đó tính H và g theo các biểu thức (3.7), cụ thể là

$$H = \frac{R}{f}; \quad g = \zeta + (V_0 + u). \quad (3.8)$$

Mỗi phần tử (sóng thành phần) trong dao động thủy triều có thể biểu thị như sau:

$$R \cos(qt - \zeta) = R \cos qt \cos \zeta + R \sin qt \sin \zeta.$$

Nếu quy ước

$$R \cos \zeta = A; \quad R \sin \zeta = B, \quad (3.9)$$

ta có

$$R \cos(qt - \zeta) = A \cos qt + B \sin qt, \quad (3.10)$$

trong đó A và B là những đại lượng chưa biết có chứa R và ζ .

Việc tìm những đại lượng chưa biết ζ và R quy về xác định các đại lượng A và B cho tất cả các sóng triều. Khi đó biết A và B , tìm ζ và R theo các công thức:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{B}{A}; \quad \sqrt{R = A^2 + B^2} = A \operatorname{sec} \zeta = B \operatorname{cosec} \zeta. \quad (3.11)$$

Nếu xem xét chu kỳ của các sóng thủy triều có thể nhận thấy rằng chỉ có một số ít các sóng, thí dụ như $M_2, M_4, M_6, K_1, K_2, \dots$ có chu kỳ là bội số của nhau. Mặt khác có những *nhóm sóng* có chu kỳ rất gần nhau và hầu như trùng với các chu kỳ một ngày, nửa ngày, một phần tư ngày. Việc tách những sóng riêng rẽ ra khỏi các nhóm này là một việc khá khó khăn. Darwin đó đề xuất một phương pháp lọc sóng đặc biệt cho phép loại trừ tất cả những sóng khác có chu kỳ gần với chu kỳ của sóng cần quan tâm từ đường cong biển triều mực nước.

Người ta giải thích nguyên lý của phương pháp Darwin phân tích thủy triều như sau [2]:

Quy ước gọi khoảng thời gian bằng $1/24$ ngày sóng là một *giờ sóng*. Khi đó *ngày sóng* đối với các sóng triều toàn nhật sẽ bằng chu kỳ của chúng, đối với các sóng triều bán nhật sẽ bằng chu kỳ nhân đôi, đối với các sóng một phần tư ngày sẽ bằng chu kỳ nhân bốn... Với chu kỳ các sóng triều khác nhau, nờn giờ sóng cũng giống nhau. Thử dụ, sóng triều S_2 có chu kỳ bằng 12 giờ, ngày sóng của nó sẽ là 24 giờ, cữn giờ sóng của nó sẽ là 1 giờ trung bình. Sóng M_2 có chu kỳ bằng 12,42 giờ, ngày sóng sẽ bằng 24,84 giờ và giờ sóng sẽ là 1,035 giờ trung bình.

Có thể viết lại phương trình độ cao mực nước (3.8) dưới dạng:

$$z_t = A_0 + R_{M_2} \cos(q_{M_2} t - \zeta_{M_2}) + R_{S_2} \cos(q_{S_2} t - \zeta_{S_2}) + \dots$$

hoặc

$$z_t = A_0 + R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{2q} \cos(2qt - \zeta_{2q}) + \dots$$

Bây giờ giả sử tốc độ góc của sóng triều mà ta cần xét là q . Số hạng đầu của chuỗi trên đây ứng với sóng này. Số hạng thứ hai là những sóng có tốc độ góc là bội số của q , thứ tự $m q$, và số hạng thứ ba là sóng với tốc độ góc khác q và khụng là bội số của q , ta ký hiệu tốc độ góc đó bằng q' . Khi đó độ cao mực nước thủy triều ứng với thời điểm t biểu diễn bằng tổng

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't - \zeta_{q'}).$$

Nếu từ đường cong độ cao mực nước trong n ngày sụng, bắt đầu từ giờ t tùy ý nào đó thuộc ngày sụng thứ nhất, ta lấy còc tung độ ứng với những thời điểm

$$t, \quad t + \frac{360}{q}, \quad t + 2\frac{360}{q}, \quad \dots, \quad t + (n-1)\frac{360}{q}$$

cách nhau đúng một chu kỳ sụng, thờ trị số của còc tung độ ấy được biểu thị tuần tự như sau:

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't - \zeta_{q'}),$$

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't + q' \frac{360}{q} - \zeta_{q'}),$$

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't + 2q' \frac{360}{q} - \zeta_{q'}),$$

.....

Cộng các tung độ này, ta sẽ được

$$nR_q \cos(qt - \zeta_q) + nR_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + \sum_{n=0}^{n=n-1} R_{q'} \cos\left[q't + n \frac{360}{q} q' - \zeta_{q'}\right]$$

hay

$$nR_q \cos(qt - \zeta_q) + nR_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}) + R_{q'} \cos(q't - \zeta_{q'}) \sum_{n=0}^{n=n-1} \cos nq' \frac{360}{q} - R_{q'} \sin(q't - \zeta_{q'}) \sum_{n=0}^{n=n-1} \sin nq' \frac{360}{q}.$$

Những biểu thức trong dấu \sum ở hai số hạng cuối cùng về phải là tổng của các cosin và sin của các cung trong cấp số cộng, và được biết rằng các tổng này sẽ bằng không nếu $\frac{nq'}{q}$ bằng số nguyên. Do đó, nếu ta

chọn số n ngày sụng sao cho $\frac{nq'}{q}$ là số nguyên, thì hai số hạng cuối

cùng này sẽ bằng không. Trung bình của tất cả các tung độ đã lấy bằng tổng hai số hạng đầu chia cho n

$$R_q \cos(qt - \zeta_q) + R_{mq} \cos(mqt - \zeta_{mq}),$$

sẽ là tung độ trung bình của sóng triều đang xét với tốc độ góc q gộp với các tung độ của các sóng với tốc độ góc là bội số của q . Tập hợp những sóng này gọi là *loạt sóng* (thí dụ loạt M , loạt S v.v...).

Bằng cách cộng các độ cao mực nước như trên ta đã loại trừ được một sóng triều có tốc độ góc khác với q , nhưng trong biểu thức của độ cao thủy triều z có một chuỗi các sóng triều khác nhau, có tốc độ khác với tốc độ q , vậy là ứng với mỗi q' sẽ có một giá trị n riêng biệt, được xác định bằng điều kiện $\frac{nq'}{q}$ là số nguyên. Vì vậy, không thể chọn được

n sao cho trong tung độ trung bình loại trừ ảnh hưởng của tất cả các sóng. Trong thực hành, người ta hạn chế ở việc loại trừ sóng nào có biên độ lớn nhất. Về điều này có thể nhận định dựa theo trị số của các hệ số các sóng triều riêng biệt. Như vậy thu được tung độ của sóng triều cần tìm có cộng thêm với các tung độ của những sóng triều với tốc độ góc là bội số, hoặc như người ta nói, tung độ của *loạt sóng triều* tại thời điểm t .

Chia ngày sóng của từng sóng triều cho 24, người ta nhận được một đại lượng gọi là giờ sóng:

$$\frac{360}{24q} = \frac{15}{q}.$$

Trong tính toán thủy triều người ta coi gốc thời gian của *ngày trung bình* và ngày sóng bất kỳ là *nửa đêm trung bình* của ngày quan trắc đầu tiên; vào thời điểm này $t = 0$ giờ. Bây giờ cho t những giá trị

$$0; \frac{15}{q}, \frac{2.15}{q}, \dots, \frac{23.15}{q},$$

ta có thể lấy từ đường cong những tung độ ứng với từng giờ sóng trong vòng n ngày sóng.

Bây giờ ta xét cách chọn số ngày n khi xác định tung độ của các sóng triều chính nhằm mục đích loại trừ ảnh hưởng của các sóng khác.

Sau một chu kỳ ($\frac{360^\circ}{q}$ giờ) sóng cần tìm dịch chuyển về pha $q \frac{360^\circ}{q}$, còn sóng bị loại dịch chuyển pha $q' \frac{360^\circ}{q}$, do đó, trong thời gian này các sóng dịch chuyển tương đối so với nhau một khoảng $(q - q') \frac{360^\circ}{q}$. Khi khoảng dịch chuyển đạt 360° , sóng có tốc độ góc q' đi qua tất cả các vị trí có thể có so với sóng có tốc độ góc q . Nếu điều này diễn ra trong n ngày (hay chu kỳ) của sóng có tốc độ góc q , thì

$$n(q - q') \frac{360^\circ}{q} = 360^\circ,$$

từ đó

$$n = \frac{q}{q - q'}. \quad (3.12)$$

Đại lượng n nhận được theo công thức này sẽ cho số chu kỳ sóng tối thiểu cần tìm của sóng với tốc độ q , nhưng để loại trừ tốt hơn sự ảnh hưởng của các sóng khác (tốc độ q'' , q''' ...) người ta cần lấy n lớn hơn nếu có thể, chỉ cần là bội của giá trị n nhỏ nhất. Vì vậy nếu ký hiệu m là số nguyên bất kỳ, nhận được

$$n = \frac{q}{q - q'} m,$$

hay đối với các sóng triều toàn nhật

$$(q - q') n = q m$$

và đối với các sóng triều bán nhật

$$(q - q') n = \frac{q m}{2}.$$

Cũng có thể lý giải phương pháp trên đây của Darwin theo cách hình học như sau. Giả sử độ cao mực nước thủy triều z_t chỉ gồm hai sóng triều (M_2 và S_2) có chu kỳ gần bằng nhau và có biên độ H và g khác nhau, ta viết

$$z_t = z_t^{M_2} + z_t^{S_2} = H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}) + H_{S_2} \cos(q_{S_2} t - g_{S_2}).$$

Do sự chênh lệch về chu kỳ dao động, hiệu pha giữa hai sóng triều bất kỳ sẽ tăng dần từ ngày triều này sang ngày triều khác. Nếu ở ngày thứ nhất hiệu pha giữa sóng S_2 và M_2 là φ_1 (xem hình 3.1), thì ở ngày thứ hai hiệu đó sẽ bằng φ_2 , ngày thứ ba - φ_3 ... Sau một số ngày nhất định hiệu pha đạt 360° , tức hai sóng lại trùng nhau về pha. Khi khoảng dịch chuyển đạt 360° , sóng có tốc độ góc S_2 đi qua tất cả các vị trí có thể có so với sóng có tốc độ góc M_2 .

Ta sẽ sử dụng những khái niệm trên đây để tách từ độ cao mực nước tổng cộng

$$z_t = z_t^{M_2} + z_t^{S_2} = H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}) + H_{S_2} \cos(q_{S_2} t - g_{S_2})$$

những sóng triều

$$\begin{aligned} z_t^{M_2} &= H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}), \\ z_t^{S_2} &= H_{S_2} \cos(q_{S_2} t - g_{S_2}). \end{aligned}$$

Muốn vậy phải cộng các độ cao từng giờ z_t lấy ở cùng một giờ sóng M_2 ở mỗi ngày sóng trong n ngày. Trên hình 3.1 thấy rằng các tung độ của sóng triều M_2 tại cùng một giờ sóng ở tất cả các ngày đều như nhau. Trong khi tại chính những giờ đó tung độ của sóng triều S_2 khác nhau cả về trị số lẫn dấu. Dễ nhận thấy rằng tổng của tất cả các tung độ của sóng triều S_2 trong n ngày sóng sẽ bằng không.

Như vậy đối với một giờ bất kỳ của sóng M_2 đẳng thức

$$\sum_1^n z_t = \sum_1^n z_t^{M_2} + \sum_1^n z_t^{S_2}$$

sẽ trở thành

$$\sum_1^n z_t = \sum_1^n z_t^{M_2} = n z_t^{M_2}$$

vì $\sum_1^n z_t^{S_2} = 0$ và tung độ sóng triều M_2 không đổi. Từ đó ta có

công thức tính độ cao mực nước của sóng triều M_2 :

$$z_t^{M_2} = \frac{1}{n} \sum_1^n z_t.$$

Công thức trên đúng cho bất kỳ giờ sóng nào của sóng triều M_2 ,

vậy nó cho phép tách 24 tung độ của sóng triều M_2 ra khỏi tung độ tổng cộng của đường cong mực nước tổng cộng quan trắc z_t .

Nếu thực hiện cộng các tung độ z_t theo các ngày sóng của sóng triều S_2 thì sóng triều M_2 sẽ bị loại và ta cũng được 24 trị số tung độ của sóng triều S_2 .

Kết quả là cho mỗi sóng triều ta có 24 phương trình dạng:

$$z_t^{M_2} = H_{M_2} \cos(q_{M_2} t - g_{M_2}).$$

Biến đổi cosin hiệu hai góc và quy ước ký hiệu

$$H_{M_2} \cos g_{M_2} = A_{M_2}; \quad H_{M_2} \sin g_{M_2} = B_{M_2},$$

ta có 24 phương trình (cho từng giờ nguyên từ 0 đến 23 giờ) dạng

$$z_t^{M_2} = A_{M_2} \cos q_{M_2} t + B_{M_2} \sin q_{M_2} t.$$

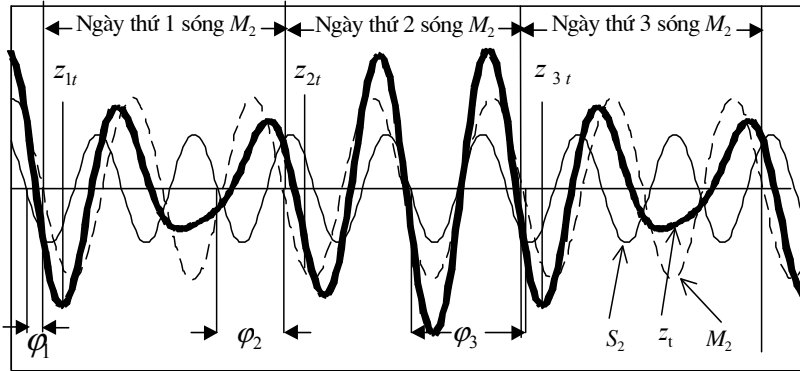
để xác định hai ẩn số A và B theo phương pháp bình phương nhỏ nhất:

$$\begin{aligned} A_{M_2} &= \frac{1}{12} \sum_0^{23} z_t^{M_2} \cos q_{M_2} t, \\ B_{M_2} &= \frac{1}{12} \sum_0^{23} z_t^{M_2} \sin q_{M_2} t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Để xác định A và B cho mỗi sóng triều có thể chỉ cần hai phương trình cũng đủ nếu như tung độ tách ra hoàn toàn “tinh khiết”. Tuy nhiên, độ cao thủy triều tổng cộng không phải chỉ gồm hai, mà nhiều sóng triều. Khi thực hiện cộng các tung độ của đường cong mực nước theo phương pháp Darwin, rõ ràng ta chỉ loại trừ một cách hoàn toàn được một sóng triều, các sóng triều khác chưa loại hết, ảnh hưởng đến sóng triều cần tách ra, mục đích sử dụng các công thức dạng (3.13) của phương pháp bình phương nhỏ nhất là để giảm bớt sai số khi phân tích sóng triều.

Bằng cách tương tự ta xác định các hệ số A và B cho những sóng

triều khác. Theo nguyên tắc trên, người ta xây dựng những *biểu mẫu chuyên dụng* tiện lợi trong khi phân tích thủy triều.



Hình 3.1. Giải thích phương pháp phân tích thủy triều của Darwin

Bảng 3.2. Số ngày triều cần thiết để áp dụng sơ đồ Darwin

Sóng triều				Số ngày cần quan trắc	
Được tính		Bị loại		Chuỗi nửa tháng	Chuỗi một tháng
Ký hiệu	q (°/giờ)	Ký hiệu	q (°/giờ)		
S_2	30,000000	M_2	28,984104	15	30
M_2	28,984104	S_2	30,000000	14	29
K_2	30,082137	M_2	28,984104	14	27
N_2	28,439730	M_2	28,984104	–	26
O_1	13,943036	K_1	15,041069	13	25
P_1	14,958931	O_1	13,943036	15	29
Q_1	13,398661	K_1	15,041069	13	25
K_1	15,041069	O_1	13,943036	14	27
MS_4	58,984104	M_4	57,968208	–	29

Các công thức (3.12) xác định số ngày triều tối thiểu cần thiết n phải quan trắc để thực hiện phân tích thủy triều theo sơ đồ Darwin. Trong bảng 3.2 dẫn số ngày triều tối thiểu phải quan trắc ứng với một số cặp sóng triều chính. Số ngày triều tối thiểu cần thiết là 15 ngày, tức cần chuỗi nửa tháng. Muốn xác định độc lập các hằng số điều hòa của các cặp sóng triều $N_2 - K_2$, $P_1 - Q_1$ người ta lấy chuỗi quan trắc triều dài gấp đôi, bằng 30 ngày.

3.3. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÒA BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀNG HẢI

Doodson và Warburg, những người đề xuất phương pháp phân tích này, cho rằng những đặc điểm chính của thủy triều được quy định bởi bốn sóng chính M_2, S_2, K_1, O_1 . Những hằng số điều hòa của chúng chịu ảnh hưởng của các điều kiện địa lý mạnh hơn so với những sóng khác. Những sóng N_2, P_1, K_2, Q_1 ít chịu ảnh hưởng của các điều kiện địa phương và chúng có thể được xác định một cách gần đúng theo bốn sóng chính nhờ những hệ thức rút ra từ lý thuyết phân tích điều hòa thủy triều. Do đó, nếu gộp các sóng N_2, P_1, K_2, Q_1 vào các sóng M_2, S_2, K_1, O_1 thì công thức độ cao mực nước thủy triều (3.6) sẽ có dạng

$$\begin{aligned}
 z = & A_0 + H_{S_2} B_S C_S \cos[q_{S_2} t - (b_S + c_S + g_{S_2})] + \\
 & + H_{M_2} B_M C_M \cos[q_{M_2} t - (b_M + c_M + g_{M_2})] + \\
 & + H_{K_1} B_K C_K \cos[q_{K_1} t - (b_K + c_K + g_{K_1})] + \\
 & + H_{O_1} B_O C_O \cos[q_{O_1} t - (b_O + c_O + g_{O_1})].
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Trong công thức trên những hiệu chỉnh B, C và b, c thực chất là những hệ số hiệu chỉnh cho biên độ (gọi là hệ số suy biến) và những phần pha thiên văn để tính tới sự cộng gộp các sóng N_2, P_1, K_2, Q_1 vào các sóng chính M_2, S_2, K_1, O_1 . Hiệu chỉnh B, b phụ thuộc vào năm và ngày quan trắc; C phụ thuộc vào thị sai ngang của Mặt Trăng và c phụ thuộc

vào thời điểm thượng đỉnh Mặt Trăng tại kinh tuyến Greenwich. Doodson đã lập những bảng chuyên dụng để tra những hiệu chỉnh này trong khi phân tích điều hòa và dự tính thủy triều theo phương pháp của mình.

Để tính các hằng số điều hòa công thức (3.14) được rút gọn hơn nữa bằng cách gộp bốn sóng vào thành hai: sóng chu kỳ nửa ngày q_2 và sóng chu kỳ ngày q_1 . Được biết khi gộp các sóng có cùng chu kỳ nhưng khác biên độ và pha ta cần đưa vào những hiệu chỉnh cho biên độ và pha. Giả sử cần gộp hai sóng $M \cos(nt - m)$ và $S \cos(nt - s)$ thành một sóng, ta viết:

$$M \cos(nt - m) + S \cos(nt - s) = ES \cos[nt - (s + e)]$$

trong đó E và e là những hiệu chỉnh tuần tự cho biên độ và pha. Biến đổi tiếp hệ thức này để xác định các hiệu chỉnh E và e :

$$S \left[\cos(nt - s) + \frac{M}{S} \cos(nt - m - s + s) \right] = ES \cos[nt - (s + e)].$$

Nếu dùng ký hiệu

$$nt' = nt - s; \quad D = \frac{M}{S}; \quad d = m - s,$$

ta có

$$S [\cos nt' + D \cos(nt' - d)] = ES \cos(nt' - e)$$

hay

$$\cos nt' + D \cos(nt' - d) = E \cos(nt' - e) \Rightarrow$$

$$\cos nt' + D \cos nt' \cos d + D \sin nt' \sin d =$$

$$= E \cos nt' \cos e + E \sin nt' \sin e \Rightarrow$$

$$\cos nt' (1 + D \cos d - E \cos e) = \sin nt' (E \sin e - D \sin d).$$

Muốn đẳng thức này luôn thực hiện cần điều kiện:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + D \cos d - E \cos e = 0 \\ E \sin e - D \sin d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + D \cos d = E \cos e \\ D \sin d = E \sin e \end{array} \right\}.$$

Từ đó ta có các biểu thức để xác định các hiệu chỉnh pha và biên độ của sóng gộp:

$$\begin{aligned} \operatorname{tge} &= \frac{D \sin d}{1 + D \cos d}; \\ E &= \sqrt{(1 + D \cos d)^2 + (D \sin d)^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Áp dụng phương pháp gộp sóng như vậy, công thức (3.14) có thể viết thành

$$\begin{aligned} z &= A_0 + H_{S_2} B_S C_S E_2 \cos[q_2 t - (b_S + c_S + e_2 + g_{S_2})] + \\ &H_{K_1} B_K C_K E_1 \cos[q_{K_1} t - (b_K + c_K + e_1 + g_{K_1})]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

trong đó E_2, e_2 - các hiệu chỉnh cho sóng gộp chu kỳ nửa ngày và E_1, e_1 - các hiệu chỉnh cho sóng gộp chu kỳ ngày, được xác định theo các công thức (3.15) theo các đại lượng tương đối D và d . Cụ thể:

- Đối với sóng chu kỳ nửa ngày:

$$D_2 = \frac{H_{M_2} B_M C_M}{H_{S_2} B_S C_S}; \quad d_2 = (b_M + c_M + g_{M_2}) - (b_S + c_S + g_{S_2}); \quad (3.17)$$

- Đối với sóng chu kỳ ngày:

$$D_1 = \frac{H_{O_1} B_O C_O}{H_{K_1} B_K C_K}; \quad d_1 = (b_O + c_O + g_{O_1}) - (b_K + c_K + g_{K_1}); \quad (3.18)$$

Như vậy nếu biết tương quan biên độ và hiệu pha của hai cặp sóng chu kỳ bán nhật và toàn nhật (3.17), (3.18) thì có thể xác định các hiệu chỉnh E và e theo các biểu thức (3.15) và độ cao mực nước thủy triều được biểu diễn qua hai sóng S_2 và K_1 bằng phương trình (3.16). Ta tiếp

tục biến đổi phương trình này để dẫn tới dạng thuận tiện cho việc xác định các hằng số điều hòa. Nếu dùng các ký hiệu:

$$\begin{aligned} B_S C_S E_2 = F_2; \quad b_s + c_s + e_2 = f_2; \\ B_K C_K E_1 = F_1; \quad b_k + c_k + e_1 = f_1; \end{aligned} \quad (3.19)$$

phương trình (3.16) có thể viết lại thành

$$z = A_0 + H_{S_2} F_2 \cos[q_2 t - (f_2 + g_{S_2})] + H_{K_1} F_1 \cos[q_1 t - (f_1 + g_{K_1})] \quad (3.20)$$

hay

$$\begin{aligned} z = A_0 + R_2 \cos r_2 \cos q_2 t + R_2 \sin r_2 \sin q_2 t + \\ + R_1 \cos r_1 \cos q_1 t + R_1 \sin r_1 \sin q_1 t, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} R_2 = F_2 H_{S_2}; \quad R_1 = F_1 H_{K_1}; \\ r_2 = f_2 + g_{S_2}; \quad r_1 = f_1 + g_{K_1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Cho gần đúng trị số tốc độ góc của sóng bán nhật bằng $q_2 = 30^\circ/\text{giờ}$, sóng toàn nhật bằng $q_1 = 15^\circ/\text{giờ}$, và ký hiệu

$$\begin{aligned} R_2 \cos r_2 = X_2; \quad R_2 \sin r_2 = Y_2; \\ R_1 \cos r_1 = X_1; \quad R_1 \sin r_1 = Y_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

phương trình độ cao mực nước thủy triều có dạng rút gọn

$$z = A_0 + X_2 \cos 30t + Y_2 \sin 30t + X_1 \cos 15t + Y_1 \sin 15t \quad (3.23)$$

Nếu biết độ cao mực nước từng giờ thì trong phương trình (3.23) các ẩn số sẽ là A_0, X_2, Y_2, X_1, Y_1 . Trị số mực nước trung bình A_0 xác định bằng cách lấy trung bình cộng của 24 độ cao mực nước trong ngày. Để xác định các đại lượng X_2, Y_2, X_1, Y_1 Doodson đề xuất một phương pháp cộng 24 độ cao mực nước từng giờ với những dấu khác nhau của các độ cao đó, sao cho sau khi thực hiện phép cộng (tổ hợp sóng) thì các tổng độ cao của ba sóng triệt tiêu, chỉ còn lại một tổng, tức biên độ của

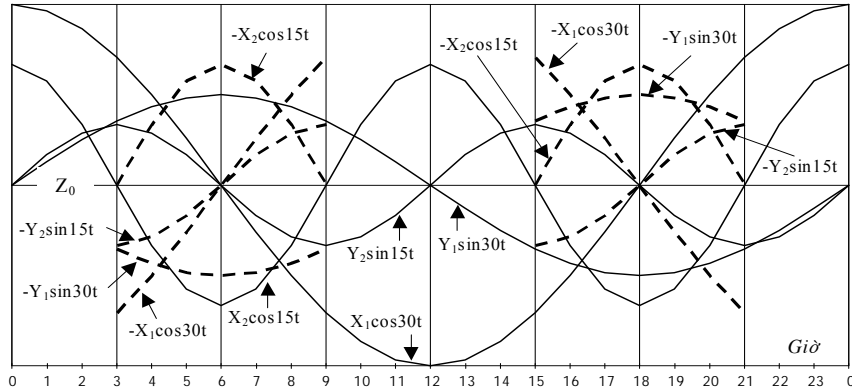
một sóng. Thí dụ, nếu lấy các độ cao mực nước từ 0 đến 2 giờ, từ 9 đến 14 giờ và từ 21 đến 23 giờ với dấu dương, còn các độ cao mực nước từ 3 đến 8 giờ và từ 15 đến 20 giờ với dấu âm, rồi cộng các độ cao đó trong 24 giờ của ngày thì các tổng của sóng thứ nhất, thứ hai và thứ tư trong phương trình (3.23) bằng không, còn tổng của sóng thứ ba sẽ bằng X_1 (xem hình 3.2). Trên hình này những đoạn đường cong gạch nối biểu thị những độ cao mực nước của các sóng triều lấy với dấu ngược lại, tức nhân với -1 . Tương tự, có thể chọn ra những hệ số $+1$ hoặc -1 dùng để nhân với mỗi độ cao mực nước quan trắc trước khi cộng 24 độ cao để nhận được biên độ của tất cả các sóng khác trong phương trình (3.23). Những hệ số đó gọi là nhân tử Doodson (xem bảng 3.3).

Bảng 3.3. Các nhân tử Doodson dùng để tổ hợp sóng

Đại lượng cần tìm	Giờ trong ngày																							
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
X_0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
X_2	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
Y_2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
X_1	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+
Y_1	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-

Như vậy, phương pháp của Doodson và Warburg cho phép xác định gần đúng những hằng số điều hòa của bốn sóng chính với giả thiết rằng các yếu tố của những sóng chính này với những sóng khác được gộp vào chúng tuân theo những quan hệ lý thuyết, không phụ thuộc vào điều kiện địa phương tại địa điểm quan trắc. Ngoài ra phải chấp nhận tương quan giữa các sóng bán nhật M_2, S_2 và toàn nhật K_1, O_1 tại địa điểm quan

trắc cũng phải biết trước để có thể tính được các biểu thức (3.17), (3.18). Trong thực tế những tương quan này thường được lấy dựa vào những hằng số điều hòa đã biết của trạm gần nhất với tính chất của thủy triều tương tự như tính chất thủy triều của điểm đang xét.



Hình 3.2. Giải thích nguyên lý tổ hợp sóng của Doodson

Việc xác định các hằng số điều hòa theo chuỗi quan trắc ngày phải thực hiện rất cẩn thận. Muốn có các hằng số điều hòa tin cậy nên sử dụng hai, ba chuỗi quan trắc; các kết quả lấy trung bình. Chuỗi quan trắc nên lấy vào thời kỳ không có những nhiễu động phi tuần hoàn, xa vùng dị thường triều, xa các điểm vô triều, tránh những ngày độ xích vĩ Mặt Trăng bằng không và kỳ triều trực thế, nếu phân tích với chuỗi dòng chảy triều thì tránh những ngày có dòng dư không ổn định...

3.4. PHÂN TÍCH CHUỖI DÒNG CHẢY MỘT NGÀY BẰNG PHƯƠNG PHÁP MAXIMOV

Các phương pháp Darwin và Doodson áp dụng cho cả các chuỗi đo mực nước thủy triều và dòng chảy triều. Đối với các chuỗi dòng chảy, khi

không đủ những thông tin về quan hệ giữa các phân triều để thực hiện phân tích điều hòa và nhận các hằng số điều hòa dòng triều riêng biệt cho từng phân triều thì có thể sử dụng phương pháp Maximov để phân tích các dao động của dòng chảy triều thành các thành phần chính: chu kỳ toàn nhật, bán nhật và một phần tư ngày dựa trên giả thiết về sự không đổi của dòng dư trong chu kỳ quan trắc.

Vì phân triều cơ bản trong nhóm các phân triều bán nhật là phân triều Mặt Trăng chính M_2 , ngày sóng bằng 24,84 giờ (24 giờ 50 ph), còn phân triều toàn nhật cơ bản là K_1 , chu kỳ bằng 23,93 giờ (23 giờ 56 ph), nên dòng toàn nhật sẽ xô dịch so với dòng bán nhật 54 phút sau một ngày. Sau hai ngày hiệu này bằng 1 giờ 40 phút, sau ba ngày – 2 giờ 30 phút; sau 7 ngày triều Mặt Trăng chậm so với triều Mặt Trời khoảng 6 giờ và vào thời điểm này cực đại của triều Mặt Trăng sẽ trùng với cực tiểu của triều Mặt Trời vì khoảng thời gian 6 giờ bằng một nửa chu kỳ của phân triều chính Mặt Trời. Sau khoảng 7 ngày nữa sự tương ứng giữa các cực đại của triều Mặt Trăng và Mặt Trời sẽ lại được khôi phục.

Tại các vùng với thành phần toàn nhật nhỏ dòng triều thực tế gần như đồng nhất với dòng triều bán nhật. Khi thành phần toàn nhật đáng kể triều thực sẽ khác với triều bán nhật một lượng bằng độ lớn của dòng triều toàn nhật.

Từ đó rút ra kết luận thực tế quan trọng là khoảng thời gian quan trắc và phương pháp tính các dòng chảy tuần hoàn từ dòng chảy tổng cộng phải được quy định bởi đặc điểm của sự tương quan giữa các dòng bán nhật và toàn nhật làm thành dòng triều thực.

Trong các vùng có thành phần toàn nhật đáng kể thì chuỗi quan trắc phải dài 25 giờ.

Để thuận tiện phân tích các vectơ dòng chảy tổng cộng quan trắc được phân thành các thành phần hướng theo kinh tuyến (hướng lên bắc)

U và thành phần theo vĩ tuyến (hướng sang đông) V .

Một dao động tuần hoàn bất kỳ có thể có thể khai triển thành một số hữu hạn hoặc vô hạn những dao động hình sin đơn giản với chu kỳ 1, 2, 3 và k – bội số và với dịch pha ban đầu φ_k . Mỗi thành phần của dòng tổng cộng có thể biểu diễn dưới dạng

$$S = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} R_k \cos(kt - \varphi_k), \quad (3.24)$$

trong đó: $A_0/2$ phần không đổi của đường cong dao động, tức thành phần dòng dư; R_k – nửa biên độ, φ_k – pha, k – tốc độ góc của mỗi dao động đơn thành phần, t – thời gian.

Áp dụng công thức cosin của hiệu, ta có:

$$S = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k (\cos kt \cos \varphi_k + \sin kt \sin \varphi_k). \quad (3.25)$$

Ký hiệu:

$$R_k \sin \varphi_k = A_k, \quad R_k \cos \varphi_k = B_k,$$

ta có

$$S = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kt + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos kt. \quad (3.26)$$

Công thức để xác định những hệ số A_k và B_k theo phương pháp phân tích điều hòa có dạng:

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{12} \sum_{t=0}^{23} S_t \sin \left(k \frac{2\pi}{24} t \right), \\ B_k &= \frac{1}{12} \sum_{t=0}^{23} S_t \cos \left(k \frac{2\pi}{24} t \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

trong đó t – các giờ nguyên trong một ngày sóng từ 0 giờ đến 23 giờ của thang giờ quy ước; S – những giá trị của một thành phần dòng chảy tổng

cộng theo kinh hoặc vĩ tuyến tương ứng những giờ đó.

Thang giờ quy ước thường dùng là thang giờ Mặt Trăng và thang giờ con nước. Gốc 0 của thang giờ Mặt Trăng là thời điểm thượng đỉnh trên hoặc dưới của Mặt Trăng tại kinh tuyến Greenwich trong ngày quan trắc. Trường hợp dùng thang giờ con nước thì gốc 0 được lấy bằng thời điểm nước lớn xảy ra ở vùng quan trắc. Mỗi giờ trên thang giờ quy ước bằng 1 giờ 2 phút giờ Mặt Trời trung bình. Muốn chuyển từ thời gian Mặt Trời trung bình sang thời gian của thang giờ quy ước và xác định những trị số mực nước ứng với những giờ nguyên của thang giờ quy ước ta có thể dựng đồ thị biến trình của các hình chiếu của dòng chảy quan trắc, trên đó các trục ngang đồng thời biểu diễn thời gian Mặt Trời trung bình và thời gian quy ước. Trên đồ thị này cũng có thể thực hiện các chỉnh lý sơ bộ như loại trừ sai số ngẫu nhiên, làm trơn các đường cong... (hình 3.3).

Vận tốc góc của dao động toàn nhật bằng $\frac{2\pi}{24} = 15^\circ$ khi $k=1$, vận tốc góc của dao động bán nhật bằng $\frac{2\pi}{12} = 30^\circ$ khi $k=2$ và vận tốc góc của dao động một phần tư ngày bằng $\frac{2\pi}{6} = 60^\circ$ khi $k=4$.

Khi các trị số A_k và B_k đã biết, các nửa biên độ và pha được tính theo những công thức:

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}, \quad R_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}. \quad (3.28)$$

Ở đây góc φ_k được xác định có tính tới quy tắc dấu của A_k và B_k .

Như vậy nhiệm vụ cơ bản của phân tích điều hòa dòng triều là:

– Tính các nửa biên độ R_x và R_y của các hình chiếu lên kinh tuyến và vĩ tuyến của dòng triều toàn nhật ($k=1$), bán nhật ($k=2$) và khi cần

thiết có thể cả dòng triều chu kỳ 1/4 ngày ($k = 4$);

– Tính các pha φ_x và φ_y .

1) Những đại lượng R và φ cho phép tìm các thành phần theo kinh tuyến và vĩ tuyến riêng biệt của các phân triều toàn nhật, bán nhật và chu kỳ 1/4 ngày. Đối với dòng toàn nhật các phương trình tương ứng với thành phần kinh tuyến và vĩ tuyến tuần tự là:

$$\begin{aligned} u_1 &= R'_y \cos(t - \varphi'_y), \\ v_1 &= R'_x \cos(t - \varphi'_x). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Đối với dòng triều bán nhật:

$$\begin{aligned} u_2 &= R''_y \cos(t - \varphi''_y), \\ v_2 &= R''_x \cos(t - \varphi''_x). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Trong những biểu thức trên t tương ứng với giờ của thời gian Mặt Trăng (từ 0 đến 23 giờ) tính bằng độ, với dòng toàn nhật một giờ ứng với 15° , dòng bán nhật -30° và dòng 1/4 ngày -60° .

2) Tổng hợp các thành phần kinh tuyến và vĩ tuyến ta tìm được hướng và tốc độ các dòng triều chu kỳ khác nhau trong từng giờ của ngày Mặt Trăng, từ đó vẽ các elip của từng dòng triều.

3) Tính pha, hướng và tốc độ của dòng triều lên và dòng triều xuống cực đại theo công thức A. Vedemeier:

– Pha dòng triều lên cực đại tính theo công thức:

$$2\tau^\circ = N + (\varphi_y + \varphi_x). \quad (3.31)$$

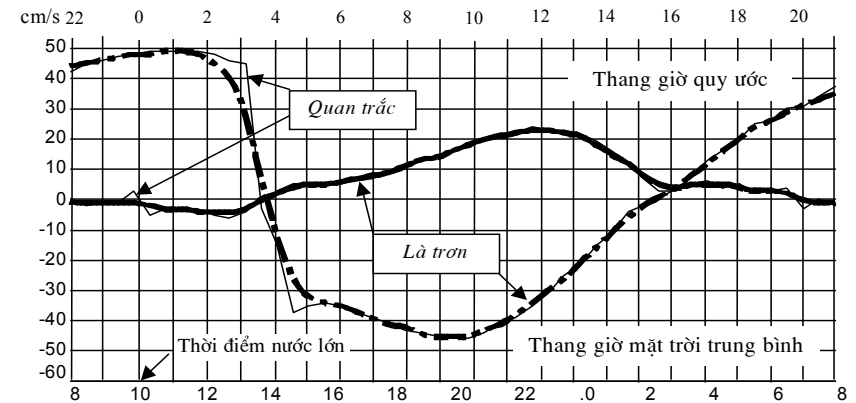
trong đó:

$$\operatorname{tg} N = \cos 2\mu \operatorname{tg} (\varphi_y - \varphi_x);$$

$$\cos \mu = \frac{R_y}{m};$$

$$\sin \mu = \frac{R_x}{m};$$

$$m = \sqrt{R_y^2 + R_x^2}.$$



Quan trắc từ 8 giờ ngày 30 đến 8 giờ ngày 31/12/1994, tọa độ $108^\circ 59' 86\text{E}$ -
 $16^\circ 39' 75\text{N}$, tầng 30m

Hình 3.3. Biến trình thành phần kinh tuyến (1) và vĩ tuyến (2) của dòng chảy quan trắc

Trong những biểu thức này R_y, φ_y tuần tự là nửa biên độ và pha của thành phần dòng theo kinh tuyến; R_x, φ_x – theo vĩ tuyến. Pha τ° tính bằng độ; muốn chuyển thành giờ thời gian Mặt Trăng phải đem chia nó cho tốc độ góc của sóng tương ứng ($\frac{\tau^\circ}{15} = \tau^h$ với sóng toàn nhật, $\frac{\tau^\circ}{30} = \tau^h$ với sóng bán nhật...).

Hướng của dòng triều lên hoặc xuống cực đại được xác định bằng biểu thức:

$$\operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\mu \cos(\varphi_y - \varphi_x), \quad (3.32)$$

còn môđun tốc độ của dòng triều lên hoặc xuống cực đại bằng

$$V_{\max} = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (3.33)$$

trong đó: $X = R_x \cos(\tau - \varphi_x)$; $Y = R_y \cos(\tau - \varphi_y)$; τ và γ tuần tự là pha và hướng của dòng triều lên cực đại hoặc dòng triều xuống cực đại. Muốn nhận được đại lượng này hoặc đại lượng kia cần thêm 180° vào τ và γ . Giá trị nào trong số những giá trị tìm được ứng với dòng triều lên, còn giá trị nào ứng với triều xuống được xác định tùy thuộc vào hướng truyền sóng thủy triều đã biết tại vùng quan trắc.

Tính toán các dòng triều và dòng dư theo phương pháp Maximov nên thực hiện theo những sơ đồ chuyên dụng.

Việc tính pha, hướng và tốc độ các dòng triều cực đại phải đồng thời với việc dựng các elip dòng triều. Các elip dòng triều được dựng dựa theo các số liệu về các hình chiếu của dòng triều đã tính được theo các công thức (3.29) cho dòng toàn nhật hoặc (3.30) cho dòng bán nhật. Các elip giúp biểu thị trực quan các dòng triều đã tính được và kiểm tra các kết quả tính. Cần nhớ rằng hướng của dòng triều cực đại tương ứng với hướng của trục lớn của elip dòng chảy, tốc độ dòng cực đại nhân đôi thì bằng độ dài của trục lớn của elip (trong tỷ lệ của đồ thị), pha của dòng triều lên hay xuống cực đại tương ứng với các thời điểm của giao điểm giữa trục lớn của elip với đường elip (đường bao của nó). Hướng và độ dài của trục nhỏ của elip biểu diễn các yếu tố của dòng triều tại thời điểm đổi dòng.

3.5. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÒA BẰNG PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT

Các phương pháp phân tích điều hòa của Darwin và Doodson đã xét ở các mục trên thực chất là những phương pháp gần đúng. Trong cơ sở lý thuyết cũng như những sơ đồ phân tích thực tế của chúng chứa đựng nhiều giả thiết liên quan tới tương quan biên độ và pha của các phân triều chính. Để áp dụng các sơ đồ phân tích này các quan trắc phải thỏa mãn những yêu cầu chặt chẽ về độ dài chuỗi: liên tục một ngày, nửa tháng hoặc một tháng, quan trắc phải thực hiện từng giờ... Ngoài ra trong khi phân tích điều hòa, các đại lượng thiên văn như hệ số suy biến biên độ f và pha ban đầu ($V_0 + u$) của các phân triều phải được coi là không đổi trong suốt thời kỳ quan trắc, do đó dẫn đến sai số.

Các phương tiện tính toán hiện đại cho phép sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất để phân tích quan trắc thủy triều tránh khỏi những nhược điểm đã nêu trên. Phân tích điều hòa theo phương pháp bình phương nhỏ nhất còn cho phép sử dụng những chuỗi quan trắc thực hiện ở những thời kỳ khác nhau tại một điểm, tận dụng độ phân giải trong khi quan trắc, nhất là đối với những chuỗi đo dòng chảy. Trong sơ đồ chi tiết của phương pháp này tính tới cả sự biến đổi liên tục với thời gian của các tham số thiên văn, do đó nâng cao độ chính xác của các hằng số điều hòa và số lượng phân triều được phân tích không hạn chế. Những người nghiên cứu áp dụng phương pháp này vào phân tích thủy triều là Imbert, Cartwright và Catton..., những sơ đồ phân tích chi tiết được Peresipkin đề xuất trong công trình [9].

Ta biến đổi công thức độ cao mực nước triều (3.6) tới dạng thuận tiện cho sơ đồ phân tích điều hòa bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Nhóm những đại lượng biến thiên với thời gian và đưa ra những ký hiệu [9]:

$$a_i = f_i \cos[q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i]; \quad (3.34)$$

$$b_i = f_i \sin[q_i t + \text{Gr.}(V_0 + u)_i];$$

$$X_i = H_i \cos g_i; \quad Y_i = H_i \sin g_i \quad (3.35)$$

các phương trình độ cao mực nước (3.6) ứng với thời gian t sẽ có dạng sau:

$$z_t = A_0 + \sum_{i=1}^r [(a_i)_t X_i + (b_i)_t Y_i]. \quad (3.36)$$

Nhiệm vụ là ở chỗ từ một hệ các phương trình (3.36), số phương trình là n bằng số các số đo gián đoạn mực nước z_t trong chu kỳ quan trắc, phải tìm các ẩn A_0 , X_i và Y_i để từ đó tính những hằng số điều hòa của các phân triều:

$$H_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}, \quad g_i = \arctg \frac{Y_i}{X_i}. \quad (3.37)$$

Việc giải hệ n phương trình tuyến tính (3.36) thực hiện bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất. Phương pháp bình phương nhỏ nhất đảm bảo tìm các ẩn A_0 , X_i và Y_i sao cho về phải của các phương trình (3.36) phù hợp tốt nhất với các giá trị mực nước z_t thực đo, tức làm cho tổng các bình phương của hiệu mực nước quan trắc và mực nước mô tả bằng phương trình (3.36) trong tất cả các quan trắc trở thành cực tiểu

$$\sum_{t_1}^{t_n} \left\{ z_t - A_0 + \sum_{i=1}^r [(a_i)_t X_i + (b_i)_t Y_i] \right\}^2 = \min.$$

Khảo sát điều kiện cực tiểu của biểu thức này theo các biến A_0 , X_i và Y_i sẽ giúp ta rút ra một hệ gồm $2r+1$ phương trình đại số tuyến tính (hệ phương trình chuẩn tắc), trong đó r – số các phân triều được phân tích (từ M_2 đến phân triều cuối cùng được quy ước ký hiệu là W):

$$AX - N = 0$$

hay dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} n & [a_{M_2}] & [b_{M_2}] & [a_{S_2}] & \dots & [b_W] \\ [a_{M_2}] & [a_{M_2} a_{M_2}] & [a_{M_2} b_{M_2}] & [a_{M_2} a_{S_2}] & \dots & [a_{M_2} b_W] \\ [b_{M_2}] & [a_{M_2} b_{M_2}] & [b_{M_2} b_{M_2}] & [b_{M_2} a_{S_2}] & \dots & [b_{M_2} b_W] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [b_W] & [a_{M_2} b_W] & [b_{M_2} b_W] & [a_{S_2} b_W] & \dots & [b_W b_W] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ X_{M_2} \\ Y_{M_2} \\ \dots \\ Y_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [z] \\ [a_{M_2} z] \\ [b_{M_2} z] \\ \dots \\ [b_W z] \end{bmatrix}$$

trong đó ký hiệu [] dùng để chỉ phép lấy tổng theo thời gian từ t_1 đến t_n .

Việc giải hệ các phương trình chuẩn tắc được thực hiện bằng một trong các sơ đồ của phương pháp tính, thí dụ sơ đồ đảo ma trận

$$X = NA^{-1}$$

hoặc sơ đồ lặp Siedel.

Khi biến đổi phương trình độ cao mực nước (3.6) thành dạng (3.36) các đại lượng f và $(V_0 + u)$ không bị đưa vào trong các ẩn số như đã làm trong phương pháp Darwin và Doodson (xem biểu thức (3.7) và (3.8)), mà được đưa vào trong các hệ số a_i và b_i . Điều này cho phép ta tính đến những biến đổi theo thời gian của các đại lượng này, vì chúng được tính trước cho mọi thời điểm ta muốn, thậm chí cho từng thời điểm của số đo mực nước rồi đưa vào các phương trình chuẩn tắc. Do các đại lượng f và u biến thiên khá chậm, người ta thường làm tròn trị số của chúng trong một khoảng thời gian nhỏ nào đó (10, 15 hay 20 ngày tùy thuộc độ chính xác tính toán) và những trị số này được tính thống nhất cho giữa mỗi khoảng và xem là không đổi trong cả khoảng đó. Khi các quan trắc được thực hiện ở những thời gian rất khác nhau, thí dụ với

trường hợp dòng triều, người ta muốn gộp những chuỗi quan trắc trong những năm khác nhau vào để phân tích, thì f và $(V_0 + u)$ phải được tính tại từng thời gian của số đo mực nước z_i . Chương trình phân tích điều hòa CART được xây dựng tại Bộ môn hải dương học Trường đại học khoa học tự nhiên có tính năng đó.

3.6. TÍNH CÁC YẾU TỐ THIÊN VĂN VÀ CÁC HỆ SỐ SUY BIẾN

Những trị số của V_0 được tính cho thời điểm đầu quan trắc t_0 theo các yếu tố thiên văn h, s, p và p_1 , trong đó h – kinh độ chí tuyến trung bình của Mặt Trời; s – kinh độ trung bình của Mặt Trăng; p – kinh độ trung bình của cận điểm quỹ đạo Mặt Trăng; p_1 – kinh độ chí tuyến trung bình của cận điểm Mặt Trời.

Những trị số của u được tính cho thời điểm t theo những đại lượng phụ trợ v, ξ, v' và phụ thuộc vào kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng N .

Những công thức để tính các trị số của V_0 và u dẫn trong nhiều sách hướng dẫn; trong bảng 3.4 trích những công thức tương tự cho 30 phân triều lấy trong [3].

Những yếu tố ứng với thời điểm đầu quan trắc tính theo các biểu thức:

$$h = 279,696678^\circ + 0,9856473354^\circ d_b;$$

$$s = 270,434164^\circ + 13,1763965268^\circ d_b;$$

$$p = 334,329556^\circ + 0,1114040803^\circ d_b;$$

$$p_1 = 281,22083^\circ + 0,0000470684^\circ d_b,$$

trong đó d_b – số ngày Julian kể từ đại cơ sở (1900, 0 tháng giêng, 12 giờ).

Bảng 3.4. Công thức tính V_0 và u của một số phân triều

Phân triều	V_0	u	Tốc độ góc qua một giờ trung bình q
M_2	$2h_0 - 2s_0$	$2\xi - 2v$	$28,9841042^\circ$
S_2	0	0	$30,0000000^\circ$
N_2	$2h_0 - 3s_0 + p_0$	$2\xi - 2v$	$28,4397295^\circ$
K_2	$2h_0$	$-2v''$	$30,0821373^\circ$
K_1	$h_0 + 90^\circ$	$-v'$	$15,0410682^\circ$
O_1	$h_0 - 2s_0 + 270^\circ$	$2\xi - v$	$13,9430356^\circ$
P_1	$-h_0 + 270^\circ$	0	$14,9589314^\circ$
Q_1	$h_0 - 3 * s_0 + p_0 + 270$	$2\xi - v$	$13,3986609^\circ$
M_4	$4h_0 - 4s_0$	$4\xi - 4v$	$57,9682084^\circ$
MS_4	$2h_0 - 2s_0$	$2\xi - 2v$	$58,9841042^\circ$
M_6	$6h_0 - 6s_0$	$6\xi - 6v$	$86,9523127^\circ$
Sa	h_0	0	0,041069
SSa	$2h_0$	0	0,082137
J_1	$15^\circ t + h_0 + s_0 - p_0 + 90^\circ$	$-v$	15,585443
S_1	$15^\circ t$	0	15,000000
v_2	$30^\circ t + 4h_0 - 3s_0 + p_0$	$2\xi - 2v$	28,512583
μ_2	$30^\circ t + 4h_0 - 4s_0$	$2\xi - 2v$	27,968208
L_2	$30^\circ t + 2h_0 - s_0 + 180^\circ$	xem f_{L_2}	29,528479
T_2	$30^\circ t + h_0 + p'_0$	0	29,958933
$2N_2$	$30^\circ t + 2h_0 - 4s_0 + 2p_0$	$2\xi - 2v$	27,895353
$2SM_2$	$2(\arg S_2) - (\arg M_2)$		31,015900
MO_3	$(\arg M_2) + (\arg O_1)$		42,382765
MK_3	$(\arg M_2) + (\arg K_1)$		44,025173

S_4	$2(\arg S_2)$		60,000000
MN_4	$(\arg M_2) + (\arg N_2)$		57,423834
$2MS_6$	$2(\arg M_2) + (\arg S_2)$		87,968208
$2MN_6$	$2(\arg M_2) + (\arg N_2)$		86,407938
Mm	$s_0 - p_0$	0	0,544375
MSf	$-2h_0 + 2s_0$	$-2\xi + 2\nu$	1,015896
Mf	$2s_0$	-2ξ	1,098038

Khoảng d_b có thể tính bằng *niên lịch thiên văn*:

$$d_b = ID_b - 2415020,0$$

trong đó ID_b – thời điểm đầu quan trắc tính thành ngày Julian (chọn từ niên lịch thiên văn), 2415020,0 – ID của đại 1900, 0 tháng giêng, 12 giờ.

Khoảng thời gian này có thể trực tiếp tính trên máy tính. Đối với thời kỳ đến năm 2000 việc tính toán có thể thực hiện bằng một trong hai phương án sau:

Phương án 1:

Những dữ liệu xuất phát đưa vào máy tính: yy , ddd , hhh , trong đó yy – hai con số sau cùng của năm đầu quan trắc; ddd – số ngày trôi qua kể từ đầu năm đến ngày quan trắc thứ nhất; hhh – thời gian tính bằng giờ (tính đến một phần mười giờ) kể từ 0 giờ ngày quan trắc thứ nhất đến thời điểm bắt đầu quan trắc.

Trước hết cần xác định số năm nhuận trong thời kỳ từ đầu đại cho tới năm đầu quan trắc: $\frac{yy-1}{4} \rightarrow \ell$ phần nguyên và η phần dư.

Khoảng thời gian d_b tính bằng ngày Julian được tính theo công thức

$$d_b = 365 yy + \ell + ddd + \frac{1}{24} hhh + 0,5.$$

Phương án 2:

Những dữ liệu xuất phát đưa vào máy tính: yy , mm , dd , hhh , trong đó mm – tháng đầu quan trắc; dd – ngày quan trắc đầu tiên.

Số năm nhuận ℓ trong thời kỳ từ đầu đại tới năm đầu quan trắc được xác định như trong phương án 1. Ngoài ra còn phải xác định năm đầu quan trắc có phải là năm nhuận hay không. Nếu $\eta = 3$ thì năm đầu quan trắc là năm nhuận.

Theo số hiệu tháng mm tính số ngày trôi qua kể từ đầu năm cho tới đầu tháng

$$mm - 1 \rightarrow d'd'd'.$$

Số ngày trong tháng hai lấy bằng 28 hay 29 tùy thuộc kết quả xét năm nhuận ở trên (nếu $\eta = 3$ lấy 29 ngày). Khoảng thời gian d_b tính theo công thức

$$d_b = 365 yy + \ell + d'd'd' + (dd - 1) + \frac{1}{24} hhh + 0,5.$$

Các đại lượng $\nu, \xi, \nu', 2\nu''$ được tính cho thời điểm t thông qua kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng N theo các công thức:

$$\nu = 12,94^\circ \sin N - 1,34^\circ \sin 2N + 0,19^\circ \sin 3N;$$

$$\xi = 11,87^\circ \sin N - 1,34^\circ \sin 2N + 0,19^\circ \sin 3N;$$

$$\nu' = 8,86^\circ \sin N - 0,68^\circ \sin 2N + 0,07^\circ \sin 3N;$$

$$2\nu'' = 17,74^\circ \sin N - 0,68^\circ \sin 2N + 0,04^\circ \sin 3N.$$

Những hệ số suy biến của tất cả các phân triều Mặt Trời bằng 1. Những hệ số suy biến của các phân triều Mặt Trăng phụ thuộc vào kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng và được tính theo những công thức có trong các sách hướng dẫn. Dưới đây là những công thức tính f

đối với 30 phân triều:

$$f_{M_2} = 1,00035 - 0,03733 \cos N + 0,00017 \cos 2N + 0,00001 \cos 3N ;$$

$$f_{S_2} = 1; \quad f_{N_2} = f_{M_2}$$

$$f_{K_2} = 1,0241 - 0,2863 \cos N + 0,0083 \cos 2N - 0,0015 \cos 3N ;$$

$$f_{K_1} = 1,0060 + 0,1160 \cos N - 0,0088 \cos 2N + 0,0006 \cos 3N ;$$

$$f_{O_1} = 1,0089 + 0,1871 \cos N - 0,0147 \cos 2N + 0,0014 \cos 3N ;$$

$$f_R = 1; \quad f_{O_1} = f_{O_1}; \quad f_{M_4} = f_{M_2}^2; \quad f_{MS_4} = f_{M_2};$$

$$f_{M_6} = f_{M_2}^3; \quad f_{S_a} = 1; \quad f_{SS_a} = 1;$$

$$f_{J_1} = 1,013 + 0,168 \cos N - 0,017 \cos 2N ;$$

$$f_{S_1} = 1; \quad f_{V_2} = f_{M_2}; \quad f_{\mu_2} = f_{M_2};$$

f_{L_2} xác định từ 2 phương trình dưới đây:

$$f \cos u = 1,00 - 0,25 \cos 2p - 0,11 \cos(2p - N) - 0,02 \cos(2p - 2N) - 0,04 \cos N$$

$$f \sin u = -0,25 \sin 2p - 0,11 \sin(2p - N) - 0,02 \sin(2p - 2N) - 0,04 \sin N ;$$

$$f_{T_2} = 1; \quad f_{2N_2} = f_{M_2}; \quad f_{2SM_2} = f_{M_2};$$

$$f_{MO_3} = f_{M_2} f_{O_1}; \quad f_{MK_3} = f_{M_2} f_{K_1}; \quad f_{S_4} = f_{M_2};$$

$$f_{MN_4} = f_{M_2}^2; \quad f_{2MS_4} = f_{M_2}^2; \quad f_{2MN_4} = f_{M_2}^3;$$

$$f_{Mm} = 1,000 - 0,130 \cos N; \quad f_{MSf} = f_{M_2};$$

$$f_{Mf} = 1,043 - 0,414 \cos N .$$

Kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng N được tính cho thời điểm đang xét theo công thức

$$N = 259,183275^\circ - 0,0529539222^\circ d ,$$

trong đó d – khoảng thời gian tính bằng ngày Julian kể từ đầu đại cho

tới thời điểm t .

3.7. ĐỘ GIÁN ĐOẠN VÀ ĐỘ DÀI CHUỖI QUAN TRẮC

Có thể đưa vào sử lý bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất cả những quan trắc liên tục lẫn những quan trắc với độ dài khác nhau thực hiện ở những thời gian khác nhau, thậm chí ở những năm khác nhau. Tuy nhiên không nên cùng xử lý những chuỗi quan trắc cách biệt nhau quá dài làm ảnh hưởng tới tính ổn định thời gian của các hằng số điều hòa.

Để phân tích điều hòa được đạt nhất những chuỗi quan trắc phải đảm bảo việc lựa chọn dữ liệu mực nước với khoảng gián đoạn nhất định đặc trưng cho khoảng thời gian cực đại cho phép giữa những số đo mực nước. Những khoảng được quy định bởi các điều kiện của định lý Kotelnhicov nói rằng một hàm bất kỳ $F(t)$ gồm các tần số từ 0 đến ω_0 có thể biểu diễn với độ chính xác bất kỳ nhờ những số nối tiếp nhau qua những khoảng thời gian $\frac{1}{2\omega_0}$. Như vậy có nghĩa là nếu chúng ta muốn trong

quá trình phân tích phát hiện được những hài định trước thì cần phải sao cho những khoảng thời gian giữa các quan trắc Δt không vượt quá nửa chu kỳ T_0 của hài cao tần nhất trong chúng:

$$\Delta t_0 \leq \frac{1}{2} T_0 . \quad (3.38)$$

Khoảng cách giữa các số đo mực không nhất thiết phải bằng nhau, nhưng phương pháp quan trắc mực nước hiện nay cho phép dễ dàng chọn những tập dữ liệu với độ gián đoạn xác định, làm đơn giản công việc xử lý tiếp sau. Độ gián đoạn chuẩn bằng 1 giờ của nhiều trạm quan trắc mực nước hiện nay đảm bảo phân tích tất cả các phân triều có ý nghĩa thực tiễn (cho đến tận những phân triều với chu kỳ 2 giờ). Nếu ở trạm nào đó những phân triều nước nông tần cao ít có ý nghĩa thực tế, thì độ gián

đoạn quan trắc giữa các số đo mực nước có thể lớn hơn. Từ điều kiện (3.38) suy ra rằng có thể phân tích với độ chính xác cao những quan trắc mực nước với khoảng gián đoạn giữa các số đo bằng 4 giờ.

Khi thực hiện phân tích bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất thì độ dài các quan trắc mực nước cần thiết để tách các phân triều với tần số gần nhau phụ thuộc rất nhiều vào chất lượng quan trắc và sự có mặt của các nhiễu. Độ chính xác hạn chế và các nhiễu do sóng gió, dao động lắc setsi và những nguyên nhân khác sẽ làm giảm khả năng phân giải của phương pháp và đòi hỏi phải tăng chu kỳ quan trắc.

Độ dài tổng cộng của các chuỗi mực nước đảm bảo chắc chắn tách được các phân triều với tần số gần nhau có thể xác định dựa vào các điều kiện mà Darwin đã thiết lập. Những điều kiện này đòi hỏi sao cho hai phân triều được phân tách với các tần số ω_i và ω_j qua thời khoảng quan trắc sẽ dịch chuyển tương đối so với nhau không ít hơn một chu kỳ triều.

Điều kiện này có thể biểu diễn như sau:

$$n(\omega_i - \omega_j) \geq 1,$$

trong đó n – độ dài chuỗi quan trắc từng giờ của mực nước tính bằng giờ; ω_i và ω_j – các tần số của các phân triều tính bằng 1/giờ, hay:

$$n(q_i - q_j) \geq 360^\circ,$$

trong đó q_i và q_j – các tốc độ góc của các phân triều tính bằng độ/giờ.

Từ đó

$$n \geq \frac{1}{\omega_i - \omega_j} \quad \text{hay} \quad n \geq \frac{360}{q_i - q_j}. \quad (39)$$

Trong thực hành có thể tách các phân triều một cách đủ chắc chắn mà chỉ dùng độ dài chuỗi nhỏ hơn nhiều so với điều kiện trên. Kinh nghiệm [9] cho thấy rằng hoàn toàn có thể sử dụng điều kiện

$$n(\omega_i - \omega_j) \geq 0,8 \quad \text{hay} \quad n(q_i - q_j) \geq 288^\circ$$

từ đó

$$n \geq \frac{0,8}{\omega_i - \omega_j} \quad \text{hay} \quad n \geq \frac{288^\circ}{q_i - q_j}. \quad (3.40)$$

Khi cần thiết có thể xử lý những chuỗi quan trắc ngắn hơn nữa. Tuy nhiên, trong trường hợp đó phải tin chắc về sự ổn định của các kết quả phân tích, muốn vậy nên thực hiện tính toán một số lần, mỗi lần thử giảm độ dài chuỗi đi một ngày. Nếu các hằng số điều hòa nhận được không biến đổi một cách đáng kể thì có thể xem kết quả là ổn định.

3.8. PHÂN TÍCH ĐIỀU HÒA THỦY TRIỀU VỚI NHỮNG CHUỖI QUAN TRẮC NGẮN

Khi tính các hằng số điều hòa theo những chuỗi ngắn, không đủ để tách những phân triều cơ bản, thì một số phân triều có thể được xác định gần đúng dựa trên cơ sở các mối tương quan lý thuyết giữa các phân triều có tần số gần bằng nhau.

Trong mỗi cặp các phân triều với tần số dao động gần nhau ($K_2 - S_2, P_1 - K_1, Q_1 - O_1, N_2 - M_2$) mà để tách được chúng đáng lẽ cần phải có chuỗi quan trắc dài, người ta có thể biểu diễn một phân triều (ít quan trọng hơn) theo các yếu tố của phân triều kia xuất phát từ những mối tương quan lý thuyết giữa chúng. Như vậy tùy thuộc vào độ dài quan trắc có thể biểu diễn được từ một đến bốn phân triều và kết quả là số ẩn trong hệ các phương trình (3.36) sẽ giảm đi 2, 4, 6 hoặc 8 ẩn. Khi thay thế tất cả bốn phân triều (từ đây về sau trường hợp này gọi là "phương án 1") độ dài chuỗi quan trắc theo điều kiện (3.39) phải không ít hơn 15 ngày, còn theo điều kiện (3.40) - không ít hơn 12 ngày; khi thay thế các phân triều trong hai cặp $K_2 - S_2$ và $P_1 - K_1$ ("phương án 2") - tuần tự độ

dài chuỗi không ít hơn 30 và 24 ngày. Trong trường hợp đầu có thể phân tích các hằng số điều hòa của 10 phân triều cơ bản ($M_2, S_2, K_2, K_1, O_1, P_1, Q_1, M_4, M_6$) trong trường hợp thứ hai – 11 phân triều (tính thêm được phân triều MS_4). Trên thực tế với những chuỗi quan trắc ngắn hơn nữa vẫn nhận được những kết quả đủ thoả mãn [9].

Những tương quan lý thuyết giữa các hằng số điều hòa của các phân triều với tần số gần nhau dựa trên những lập luận sau [9]: Tỷ số của các biên độ trung bình của các phân triều được chấp nhận bằng tỷ số của các hệ số trung bình của các phân triều đó trong khai triển chuỗi hàm thế vị lực tạo triều. Các góc vị của các phân triều tần số gần nhau chấp nhận là bằng nhau:

$$\begin{aligned} H_{K_2} &= \frac{1}{3,67} H_{S_2}, \quad g_{K_2} = g_{S_2}, \\ H_{P_1} &= \frac{1}{3} H_{K_1}, \quad g_{P_1} = g_{K_1}, \\ H_{Q_1} &= \frac{1}{5} H_{O_1}, \quad g_{Q_1} = g_{O_1}, \\ H_{N_2} &= \frac{1}{5} H_{M_2}, \quad g_{N_2} = g_{M_2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Với những tương quan này, biểu thức độ cao thủy triều dạng (3.36) gồm 11 phân triều có thể viết lại cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} z_t &= A_0 + (a_{M_2N_2})_t X_{M_2} + (b_{M_2N_2})_t Y_{M_2} + \\ &+ (a_{S_2K_2})_t X_{S_2} + (b_{S_2K_2})_t Y_{S_2} + \\ &+ (a_{K_1P_1})_t X_{K_1} + (b_{K_1P_1})_t Y_{K_1} + \\ &+ (a_{O_1Q_1})_t X_{O_1} + (b_{O_1Q_1})_t Y_{O_1} + \\ &+ (a_{M_4})_t X_{M_4} + (b_{M_4})_t Y_{M_4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (a_{M_6})_t X_{M_6} + (b_{M_6})_t Y_{M_6} + \\ &+ (a_{MS_4})_t X_{MS_4} + (b_{MS_4})_t Y_{MS_4}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

với các ký hiệu

$$\begin{aligned} a_{M_2N_2} &= f_{M_2} \cos[q_{M_2}t + (V_0 + u)_{M_2}] + \\ &+ \frac{1}{5} f_{N_2} \cos[q_{N_2}t + (V_0 + u)_{N_2}]; \\ b_{M_2N_2} &= f_{M_2} \sin[q_{M_2}t + (V_0 + u)_{M_2}] + \\ &+ \frac{1}{5} f_{N_2} \sin[q_{N_2}t + (V_0 + u)_{N_2}]; \\ a_{S_2K_2} &= f_{S_2} \cos[q_{S_2}t + (V_0 + u)_{S_2}] + \\ &+ \frac{1}{3,67} f_{K_2} \cos[q_{K_2}t + (V_0 + u)_{K_2}]; \\ b_{S_2K_2} &= f_{S_2} \sin[q_{S_2}t + (V_0 + u)_{S_2}] + \\ &+ \frac{1}{3,67} f_{K_2} \sin[q_{K_2}t + (V_0 + u)_{K_2}]; \\ a_{K_1P_1} &= f_{K_1} \cos[q_{K_1}t + (V_0 + u)_{K_1}] + \\ &+ \frac{1}{3} f_{P_1} \cos[q_{P_1}t + (V_0 + u)_{P_1}]; \\ b_{K_1P_1} &= f_{K_1} \sin[q_{K_1}t + (V_0 + u)_{K_1}] + \\ &+ \frac{1}{3} f_{P_1} \sin[q_{P_1}t + (V_0 + u)_{P_1}]; \\ a_{O_1Q_1} &= f_{O_1} \cos[q_{O_1}t + (V_0 + u)_{O_1}] + \\ &+ \frac{1}{5} f_{Q_1} \cos[q_{Q_1}t + (V_0 + u)_{Q_1}]; \end{aligned}$$

$$b_{O_1 Q_1} = f_{O_1} \sin[q_{O_1} t + (V_0 + u)_{O_1}] + \frac{1}{5} f_{Q_1} \sin[q_{Q_1} t + (V_0 + u)_{Q_1}];$$

Việc giải hệ phương trình (3.42) được thực hiện theo phương pháp bình phương tối thiểu. Những hằng số điều hòa của các phân triều K_2, P_1, Q_1 và N_2 được tính theo các công thức (3.41). Khi thay thế các hằng số điều hòa ít hơn bốn cặp phân triều (thí dụ khi xử lý theo phương án 2) những hệ số a_i và b_i của các phân triều nào không sử dụng các tương quan (3.41) thì vẫn được tính bình thường theo các công thức (3.37). Những hệ số của các phân triều nước nông ($a_{M_4}, b_{M_4}, \dots, b_{M_6}$) cũng được tính bằng cách như vậy.

Trong các sách hướng dẫn hiện hành có chỉ dẫn rằng những tương quan sau đây sẽ là có cơ sở hơn về phương diện lý thuyết và thực tiễn:

$$\begin{aligned} g_{K_2} &= g_{S_2} + 0,081(g_{S_2} - g_{M_2}), \\ g_{P_1} &= g_{K_1} - 0,075(g_{K_1} - g_{O_1}), \\ g_{N_2} &= g_{S_2} - 1,536(g_{S_2} - g_{M_2}), \\ g_{Q_1} &= g_{K_1} - 1,496(g_{K_1} - g_{O_1}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Những tương quan này dựa trên những giả thiết xuất phát từ kinh nghiệm quan trắc thực tiễn rằng tỷ số giữa các hiệu các góc vị của những phân triều gần nhau về tần số xấp xỉ tương ứng với tỷ số các hiệu vận tốc góc của chúng. Thí dụ từ quan trắc người ta xác lập được rằng hiệu trung bình của các góc vị các phân triều S_2 và M_2 bằng 43° , còn hiệu các phân triều M_2 và N_2 bằng 23° . Các hiệu của những vận tốc góc những phân triều này tuân tự bằng $1,016^\circ$ và $0,544^\circ$ /giờ trung bình. Những tỷ số của các hiệu này xấp xỉ bằng

$$\frac{g_{M_2} - g_{N_2}}{g_{S_2} - g_{M_2}} = \frac{23^\circ}{43^\circ} \approx 0,53; \quad \frac{q_{M_2} - q_{N_2}}{q_{S_2} - q_{M_2}} = \frac{0,544}{1,016} \approx 0,53.$$

Do đó, những tương quan giữa các góc vị của các phân triều gần tần số có thể được xác định từ những biểu thức dưới đây (các tốc độ góc có dẫn trong các bảng 3.1 hoặc 3.5):

$$\begin{aligned} \frac{g_{S_2} - g_{N_2}}{g_{S_2} - g_{M_2}} &= \frac{q_{S_2} - q_{N_2}}{q_{S_2} - q_{M_2}} = \frac{1,56027}{1,01590} = 1,536; \\ \frac{g_{S_2} - g_{K_2}}{g_{S_2} - g_{M_2}} &= \frac{q_{S_2} - q_{K_2}}{q_{S_2} - q_{M_2}} = -\frac{0,08214}{1,01590} = -0,081; \\ \frac{g_{K_1} - g_{P_1}}{g_{K_1} - g_{O_1}} &= \frac{q_{K_1} - q_{P_1}}{q_{K_1} - q_{O_1}} = \frac{0,08214}{1,098033} = 0,075; \\ \frac{g_{K_1} - g_{Q_1}}{g_{K_1} - g_{O_1}} &= \frac{q_{K_1} - q_{Q_1}}{q_{K_1} - q_{O_1}} = -\frac{1,642408}{1,098033} = -1,496. \end{aligned}$$

Từ đây dễ dàng nhận được các công thức (3.43).

Ta sẽ biến đổi công thức (3.43) cho các phân triều N_2 và phân triều Q_1 :

$$\begin{aligned} g_{N_2} &= g_{M_2} - 0,536(g_{S_2} - g_{M_2}), \\ g_{Q_1} &= g_{O_1} - 0,496(g_{K_1} - g_{O_1}), \end{aligned} \quad (3.44)$$

và viết lại biểu thức độ cao thủy triều tại thời điểm t có tính tới những tương quan biên độ (3.41) và góc vị (3.43), (3.44):

$$\begin{aligned} z_t &= A_0 + (a'_{M_2 N_2})_t X_{M_2} + (b'_{M_2 N_2})_t Y_{M_2} + \\ &+ (a'_{S_2 K_2})_t X_{S_2} + (b'_{S_2 K_2})_t Y_{S_2} + \\ &+ (a'_{K_1 P_1})_t X_{K_1} + (b'_{K_1 P_1})_t Y_{K_1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (a'_{O_1Q_1})_t X_{O_1} + (b'_{O_1Q_1})_t Y_{O_1} + \\
& + (a_{M_4})_t X_{M_4} + (b_{M_4})_t Y_{M_4} + \\
& + (a_{M_6})_t X_{M_6} + (b_{M_6})_t Y_{M_6} + \\
& + (a_{MS_4})_t X_{MS_4} + (b_{MM_4})_t Y_{MS_4}, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
a'_{M_2N_2} &= f_{M_2} \cos[q_{M_2}t + (V_0 + u)_{M_2}] + \\
& + \frac{1}{5} f_{N_2} \cos[q_{N_2}t + (V_0 + u)_{N_2} + 0,536\alpha_1] \\
b'_{M_2N_2} &= f_{M_2} \sin[q_{M_2}t + (V_0 + u)_{M_2}] + \\
& + \frac{1}{5} f_{N_2} \sin[q_{N_2}t + (V_0 + u)_{N_2} + 0,536\alpha_1] \\
a'_{S_2K_2} &= f_{S_2} \cos[q_{S_2}t + (V_0 + u)_{S_2}] + \\
& + \frac{1}{3,67} f_{K_2} \cos[q_{K_2}t + (V_0 + u)_{K_2} + 0,081\alpha_1] \\
b'_{S_2K_2} &= f_{S_2} \sin[q_{S_2}t + (V_0 + u)_{S_2}] + \\
& + \frac{1}{3,67} f_{K_2} \sin[q_{K_2}t + (V_0 + u)_{K_2} + 0,081\alpha_1] \\
a'_{K_1P_1} &= f_{K_1} \cos[q_{K_1}t + (V_0 + u)_{K_1}] + \\
& + \frac{1}{3} f_{P_1} \cos[q_{P_1}t + (V_0 + u)_{P_1} + 0,075\alpha_2] \\
b'_{K_1P_1} &= f_{K_1} \sin[q_{K_1}t + (V_0 + u)_{K_1}] + \\
& + \frac{1}{3} f_{P_1} \sin[q_{P_1}t + (V_0 + u)_{P_1} + 0,075\alpha_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a'_{O_1Q_1} &= f_{K_1} \cos[q_{O_1}t + (V_0 + u)_{O_1}] + \\
& + \frac{1}{5} f_{Q_1} \cos[q_{Q_1}t + (V_0 + u)_{Q_1} - 0,496\alpha_2] \\
b'_{O_1Q_1} &= f_{K_1} \sin[q_{O_1}t + (V_0 + u)_{O_1}] + \\
& + \frac{1}{5} f_{Q_1} \sin[q_{Q_1}t + (V_0 + u)_{Q_1} - 0,496\alpha_2] \\
\alpha_1 &= g_{S_2} - g_{M_2}, \quad \alpha_2 = g_{K_1} - g_{O_1}.
\end{aligned}$$

Việc giải hệ phương trình (3.45) được thực hiện theo phương pháp bình phương tối thiểu bằng những bước xấp xỉ liên tiếp. Trong bước xấp xỉ thứ nhất các hiệu những góc vị α có thể chấp nhận bằng không hoặc bằng trị số trung bình của chúng ($\alpha_1 = 43^\circ$, $\alpha_2 = 20^\circ$). Trong mỗi bước xấp xỉ tiếp theo chúng được biểu diễn qua các góc vị g_{M_2} , g_{S_2} , g_{K_1} và g_{O_1} nhận được từ phép xấp xỉ trước đó. Thông thường có thể chỉ cần giới hạn ở lần xấp xỉ thứ hai. Những biên độ của các phân triều K_2 , N_2 , P_1 và Q_1 được tính theo những công thức (3.41), những góc vị – theo những công thức (3.43) và (3.44).

Khi sự thay thế các hằng số điều hòa thực hiện với ít hơn bốn cặp phân triều, những hệ số a_i và b_i của những phân triều, mà với chúng không sử dụng các tương quan (3.41) và (3.43), sẽ được tính như những hệ số của các phân triều nước nông bình thường theo các công thức (3.37).

3.9. ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC PHÂN TÍCH THỦY TRIỀU THEO PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT

Việc đánh kết quả phân tích có thể thực hiện bằng cách so sánh các mực nước dự tính và thực đo. Có thể so sánh như vậy cho một chu kỳ nhất định hoặc tốt nhất nên so sánh cho toàn chu kỳ quan trắc đã dùng

trong phân tích điều hòa.

Độ chính xác của dự tính thủy triều được đặc trưng bởi độ lệch bình phương trung bình giữa mực nước từng giờ dự tính và mực nước quan trắc

$$m_z = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n}}, \quad (3.46)$$

trong đó v – các hiệu giữa mực nước dự tính và mực nước quan trắc; n – số lượng quan trắc; $[]$ – dấu lấy tổng theo thời gian từ t_1 đến t_n .

Với số n đủ lớn giá trị m_z sẽ chính là sai số bình phương trung bình của dự tính thủy triều.

Nếu việc so sánh mực nước dự tính và mực nước thực đo thực hiện cho toàn bộ chu kỳ quan trắc đã được dùng để phân tích điều hòa, thì tổng các bình phương của độ lệch $[vv]$ có thể tính qua các hệ số của những phương trình chuẩn tắc theo một trong các công thức sau đây:

$$[vv] = [zz] - nA_0^2 - [a_{M_2}z]X_{M_2} - [b_{M_2}z]Y_{M_2} - [a_{S_2}z]X_{S_2} - \dots - [b_wz]Y_w$$

hoặc

$$[vv] = [zz] - nA_0^2 + \frac{[a_{M_2}z1]}{[a_{M_2}a_{M_2}1]} + \frac{[b_{M_2}z2]}{[b_{M_2}b_{M_2}2]} + \frac{[a_{S_2}z3]}{[a_{S_2}a_{S_2}3]} + \dots + \frac{[b_wz.2r]}{[b_wb_w.2r]},$$

trong đó

$$\begin{aligned} [a_{M_2}z1] &= [a_{M_2}z] - \frac{[a_{M_2}][z]}{n}; \\ [a_{M_2}a_{M_2}1] &= [a_{M_2}a_{M_2}] - \frac{[a_{M_2}][a_{M_2}]}{n}; \\ [b_{M_2}z2] &= [b_{M_2}z1] - \frac{[a_{M_2}b_{M_2}1][a_{M_2}z1]}{[a_{M_2}a_{M_2}1]}; \\ [b_{M_2}z1] &= [b_{M_2}z] - \frac{[a_{M_2}b_{M_2}][a_{M_2}z]}{[a_{M_2}a_{M_2}]}; \\ [a_{M_2}b_{M_2}1] &= [a_{M_2}b_{M_2}] - \frac{[a_{M_2}][b_{M_2}]}{n}; \\ [b_{M_2}b_{M_2}2] &= [b_{M_2}b_{M_2}1] - \frac{[a_{M_2}b_{M_2}1][a_{M_2}b_{M_2}1]}{[a_{M_2}a_{M_2}1]}; \\ [b_{M_2}b_{M_2}1] &= [b_{M_2}b_{M_2}] - \frac{[a_{M_2}b_{M_2}][a_{M_2}b_{M_2}]}{[a_{M_2}a_{M_2}]}; \\ [a_{S_2}z3] &= [a_{S_2}z2] - \frac{[b_{M_2}a_{S_2}2][b_{M_2}z2]}{[b_{M_2}b_{M_2}2]} \dots \end{aligned}$$

Sử dụng thủ thuật của phương pháp bình phương tối thiểu, có thể ước lượng độ chính xác của mực nước trung bình và các hằng số điều hòa thủy triều:

$$\left. \begin{aligned} m_{A_0}^2 &= -f_{11}m_0^2; \\ m_{M_2}^2 &= -(f_{22} \cos^2 g_{M_2} + f_{23} \sin 2g_{M_2} + f_{33} \sin^2 g_{M_2})m_0^2; \\ m_{S_2}^2 &= -(f_{44} \cos^2 g_{S_2} + f_{45} \sin 2g_{S_2} + f_{55} \sin^2 g_{S_2})m_0^2; \\ &\dots \\ m_W^2 &= -(f_{2r2r} \cos^2 g_W + f_{2r(2r+1)} \sin 2g_W + f_{(2r+1)(2r+1)} \sin^2 g_W)m_0^2, \end{aligned} \right\}$$

$$(3.47) \left. \begin{aligned} m_{g_{M_2}}^2 &= \frac{-1}{H_{M_2}^2 (f_{22} \sin^2 g_{M_2} - f_{23} \sin 2g_{M_2} + f_{33} \cos^2 g_{M_2}) m_0^2}; \\ m_{g_{S_2}}^2 &= \frac{-1}{H_{S_2}^2 (f_{44} \sin^2 g_{S_2} - f_{45} \sin 2g_{S_2} + f_{55} \cos^2 g_{S_2}) m_0^2}; \\ \dots\dots\dots \\ m_{g_W}^2 &= \frac{-1}{H_W^2 (f_{2r2r} \sin^2 g_W - f_{2r(2r+1)} \sin 2g_W + f_{(2r+1)(2r+1)} \cos^2 g_W) m_0^2}, \end{aligned} \right\} (3.48)$$

trong đó m_0 – sai số bình phương trung bình của một số đo, được xác định từ biểu thức

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n - 2r - 1}},$$

$f_{11}, f_{22}, f_{23}, f_{33}, \dots, f_{(2r+1)(2r+1)}$ – những hệ số tỷ trọng, được tính từ các phương trình tỷ trọng.

Những phương trình tỷ trọng được thiết lập theo kiểu các phương trình chuẩn tắc và có cùng những hệ số. Khác với những phương trình chuẩn tắc, những số hạng tự do của các phương trình tỷ trọng bằng không hoặc bằng đơn vị. Để tính được tất cả các hệ số tỷ trọng phải thiết lập và giải $2r + 1$ nhóm các phương trình tỷ trọng, mỗi nhóm đó lại gồm $2r + 1$ phương trình. Trong mỗi nhóm có một phương trình (tuần tự) có số hạng tự do bằng đơn vị, còn các phương trình khác có các số hạng tự do bằng không.

Nhóm phương trình tỷ trọng thứ nhất:

$$\begin{aligned} nf_{11} + [a_{M_2}]f_{12} + [b_{M_2}]f_{13} + [a_{S_2}]f_{14} + \dots + [b_W]f_{1(2r+1)} + 1 &= 0; \\ [a_{M_2}]f_{11} + [a_{M_2}a_{M_2}]f_{12} + [a_{M_2}b_{M_2}]f_{13} + [a_{M_2}a_{S_2}]f_{14} + \dots + [a_{M_2}b_W]f_{1(2r+1)} &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ [b_W]f_{11} + [a_{M_2}b_W]f_{12} + [b_{M_2}b_W]f_{13} + [a_{S_2}b_W]f_{14} + \dots + [b_Wb_W]f_{1(2r+1)} &= 0; \end{aligned}$$

Nhóm phương trình tỷ trọng thứ hai:

$$\begin{aligned} nf_{12} + [a_{M_2}]f_{22} + [b_{M_2}]f_{23} + [a_{S_2}]f_{24} + \dots + [b_W]f_{2(2r+1)} &= 0; \\ [a_{M_2}]f_{12} + [a_{M_2}a_{M_2}]f_{22} + [a_{M_2}b_{M_2}]f_{23} + [a_{M_2}a_{S_2}]f_{24} + \dots + [a_{M_2}b_W]f_{2(2r+1)} + 1 &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ [b_W]f_{12} + [a_{M_2}b_W]f_{22} + [b_{M_2}b_W]f_{23} + [a_{S_2}b_W]f_{24} + \dots + [b_Wb_W]f_{2(2r+1)} &= 0; \end{aligned}$$

Nhóm phương trình tỷ trọng thứ $2r + 1$:

$$\begin{aligned} nf_{1(2r+1)} + [a_{M_2}]f_{2(2r+1)} + [b_{M_2}]f_{3(2r+1)} + \dots + [b_W]f_{(2r+1)(2r+1)} &= 0; \\ [a_{M_2}]f_{1(2r+1)} + [a_{M_2}a_{M_2}]f_{2(2r+1)} + [a_{M_2}b_{M_2}]f_{3(2r+1)} + \dots + [a_{M_2}b_W]f_{(2r+1)(2r+1)} &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ [b_W]f_{1(2r+1)} + [a_{M_2}b_W]f_{2(2r+1)} + [b_{M_2}b_W]f_{3(2r+1)} + \dots + [b_Wb_W]f_{(2r+1)(2r+1)} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Trong quá trình giải các hệ phương trình tỷ trọng những hệ số tỷ trọng không bình phương được xác định mỗi hệ số hai lần (từ hai nhóm phương trình). Việc lập và giải các phương trình trên máy tính không có gì khó khăn vì ở đây thực ra là lặp lại nhiều lần việc giải các phương trình chuẩn tắc với các số hạng tự do không đổi.

Việc ước lượng độ chính xác các hằng số điều hòa có thể thực hiện gần đúng bằng một phương pháp đơn giản hơn. Người ta luôn luôn có thể chọn một thời kỳ quan trắc mực nước sao cho qua khoảng thời gian đó tất cả các phân triều thay đổi một số nguyên lần chu kỳ triều. Trong trường hợp này biểu thức của các hệ số của những phương trình chuẩn tắc và các hệ số tỷ trọng tương ứng sẽ đơn giản đi nhiều. Ngoài ra nếu chấp nhận các hệ số suy biến của tất cả các phân triều bằng đơn vị, các hệ số tỷ

trọng có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$f_{11} = -\frac{1}{n};$$

$$f_{22} = f_{33} = \dots = f_{(2r+1)(2r+1)} = -\frac{2}{n};$$

$$f_{12} = f_{13} = f_{23} = \dots = f_{2r(2r+1)} = 0.$$

Tương ứng biểu thức đối với sai số bình phương trung bình của mực nước trung bình và các hằng số điều hòa cũng sẽ đơn giản hơn:

$$m_{A_0} = \pm \frac{m_0}{\sqrt{n}};$$

$$m_{M_2} = m_{S_2} = \dots = m_W = \pm \sqrt{\frac{2}{n}} m_0;$$

$$m_{g_i} = \pm \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{m_0}{H_i}.$$

Từ đây thấy rằng những biên độ các phân triều tính được theo phương pháp bình phương tối thiểu có độ chính xác như nhau, còn độ chính xác khi tính các góc vị phụ thuộc vào biên độ của phân triều: đối với những phân triều với biên độ lớn hơn thì các góc vị tính được sẽ chính xác hơn. Tất cả những điều trình bày trên đây về sự đánh giá độ chính xác tính các hằng số điều hòa chỉ đúng đắn trong trường hợp nếu như chu kỳ quan trắc mực nước thoả mãn các điều kiện (3.39) hoặc (3.40).

3.10. SỬ DỤNG BỘ LỌC TẦN THẤP TRONG PHÂN TÍCH CHUỖI QUAN TRẮC

Trước khi phân tích điều hòa các chuỗi mực nước đều cần được là tron bước đầu để loại trừ những dao động ngẫu nhiên do những lỗi khi đo

hoặc do ảnh hưởng của gió và dao động lắc. Kết quả của sự là tron này là loại trừ được những nhiễu tần cao.

Độ chính xác tính các phân triều cơ bản cũng có thể nâng lên bằng cách loại trừ từ quan trắc những dao động phi tuần hoàn của mực nước và những dao động tần thấp nguyên nhân khí tượng. Tại thời điểm của từng số đo mực nước Z_t tính mực nước tức thời trung bình z_{0t} và lập các hiệu

$$z'_t = z_t - z_{0t}, \quad (3.49)$$

và những hiệu này chính là những số liệu xuất phát để tiếp tục xử lý bằng phương pháp bình phương tối thiểu. Kết quả của sự sử dụng bộ lọc tần thấp các mực nước z'_t sẽ chứa những phân triều là bội của một ngày Mặt Trăng và ngày Mặt Trời là chủ yếu.

Mực trung bình A_{00} được xác định như là trị số trung bình của những mực nước tức thời trung bình qua chu kỳ quan trắc

$$A_{00} = \frac{1}{n} \sum_0^n z_{0t}.$$

Đại lượng A_0 có mặt trong các biểu thức (3.36), (3.42) và (3.45) trong trường hợp này sẽ là hiệu chỉnh thêm cho mực nước trung bình A_{00} và khi tính ra sẽ gần bằng không, đó là điều chứng tỏ về chất lượng cao của bộ lọc.

Bộ lọc tần thấp đơn giản nhất là phép lấy trung bình các số đo từng giờ của mực nước qua chu kỳ gần bằng một ngày của các sóng cơ bản. Khi đó sẽ xác định mực nước trung bình trượt ngày, thông thường được tính bằng trị số trung bình của 24 số đo từng giờ liên tiếp và quy về thời điểm giữa của khoảng thời gian đó. Tuy nhiên bộ lọc này chỉ được xem là tốt khi độ lớn thủy triều không lớn lắm. Trường hợp ngược lại các thành phần triều Mặt Trăng sẽ ảnh hưởng nhiều đến mực tức thời trung bình tính được. Chẳng hạn bộ lọc như vậy sẽ cho qua 8,2% phân triều O_1 ,

5,4% N_2 , 3,5% M_2 ...

Khi xử lý những quan trắc từng giờ về mực nước những bộ lọc tần thấp sau đây được coi là rất hiệu quả

$$\frac{A_{24}}{24} \frac{A_{25}^2}{25^2}, \quad (3.50)$$

hay

$$\frac{A_{24}^2}{24^2} \frac{A_{25}}{25}. \quad (3.51)$$

Nếu sử dụng bộ lọc (3.50) việc lấy trung bình tiến hành với 72 giờ, nếu sử dụng bộ lọc (3.51) – 71 giờ. Những mực nước tức thời trung bình tính được sẽ ứng với thời điểm giữa của những thời khoảng đó.

Bộ lọc (3.51) thuận tiện hơn, vì mực nước trung bình sẽ ứng với giờ nguyên (ứng với 36 giờ của chu kỳ lấy trung bình).

Trong thực tế việc lấy trung bình chuỗi số đo từng giờ của mực nước sẽ thực hiện với bộ lọc này theo công thức

$$z_{0t} = \frac{I_0}{14400},$$

trong đó

$$I_0 = \sum_{\ell=1}^{\ell=25} I_{\ell};$$

$$I_{\ell} = \sum_{k=0}^{k=23} h_{k+\ell} \quad (\ell = 1, 2, 3, \dots, 25);$$

$$h_k = \sum_{j=0}^{j=23} z_{j+k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 48).$$

Liên tiếp dịch chuyển chuỗi các số đo đã lấy trung bình đi một giờ ta tính được những mực tức thời trung bình cho từng giờ quan trắc. Nhược

điểm của bộ lọc này là ở chỗ không sử dụng được 35 số đo từng giờ ở đầu và 35 số đo ở cuối chuỗi quan trắc, vì trên các đoạn ấy không tính được mực tức thời trung bình. Vậy tổng cộng ta bỏ mất ba ngày quan trắc, điều này đáng kể đối với những chuỗi ngắn hoặc những chuỗi quan trắc đứt đoạn. Để khắc phục nhược điểm này có thể làm như sau: đối với đoạn đầu và cuối của chuỗi quan trắc hãy dùng mực trượt trung bình ngày làm mực tức thời trung bình, còn đối với 12 giờ đầu và 12 giờ cuối của quan trắc phải chấp nhận giá trị trung bình của 24 số đo đầu hay 24 số đo cuối tương ứng.

3.11. TÍNH CÁC ĐỘ CAO CỰC TRỊ CỦA THỦY TRIỀU

Trong nhiều nhiệm vụ thực tiễn, mực nước lý thuyết thấp nhất được chấp nhận làm số không độ sâu ở các biển có triều. Mực nước này được tính bằng cách lấy độ cao mực trung bình xuất phát trừ đi giá trị cực đại có thể có của biên độ triều xuống theo các điều kiện thiên văn. ở một số nước giá trị này được xác định bằng cách phân tích độ cao triều trong chuỗi độ cao nhiều năm (lý tưởng nhất là 18 năm) dự tính theo các hằng số điều hòa, tức người ta chọn lấy độ cao mực nước ròng thấp nhất trong số tất cả những độ cao dự tính trong những năm đó. ở Nga mực nước lý thuyết thấp nhất được xác định bằng phương pháp Vladimirsky.

Phương pháp Vladimirsky cho phép giải chính xác bài toán theo các hằng số điều hòa của 8 phân triều. Những phân triều khác chỉ được tính đến một cách gần đúng. Ngày nay những thao tác tính toán có thể thực hiện nhanh trên máy điện toán, việc tính các độ cao cực trị của thủy triều có thể thực hiện theo những sơ đồ chi tiết hơn và có khả năng nâng cao độ chính xác bằng cách đưa vào tính toán một số lượng bất kỳ các phân triều. Dưới đây sẽ trình bày cơ sở của phương pháp này do Peresupkin [9] phát triển.

Độ cao thủy triều so với mực biển trung bình (3.1) có thể viết gọn lại thành

$$z_t = \sum f_i H_i \cos \varphi_i, \quad (3.52)$$

trong đó f_i là các hệ số suy biến, phụ thuộc vào kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng N ; H_i là những trị số trung bình của biên độ các phân triều; φ_j là pha của các phân triều.

Tuỳ thuộc vào tính chất thủy triều, độ cao triều có thể đạt các cực trị khi kinh độ tiết điểm lên của quỹ đạo Mặt Trăng $N = 0^\circ$ (đối với nhật triều) hoặc $N = 180^\circ$ (đối với bán nhật triều). Trong những điều kiện này ($N = 0^\circ, 180^\circ$) pha của các phân triều biểu diễn qua các yếu tố thiên văn như trong bảng 3.5.

Trong bảng 3.5 t là thời gian múi giờ trung bình tính từ nửa đêm; h – kinh độ trung bình của Mặt Trời; s – kinh độ trung bình của Mặt Trăng; p – kinh độ trung bình của cận điểm quỹ đạo Mặt Trăng; g_i – góc vị đặc biệt ứng với kinh tuyến Greenwich.

Những độ cao cực trị của thủy triều có thể xác định từ biểu thức (3.52) nếu như biết các trị số của các yếu tố thiên văn t, h, s và p mà tổ hợp đồng thời của chúng ứng với điều kiện cực trị. Nếu khảo sát cực trị hàm $z(t, h, s, p)$ từ biểu thức (3.52), người ta nhận được hệ bốn phương trình với bốn ẩn số t, h, s và p mà trị số của chúng quyết định điều kiện cực trị độ cao:

$$\left. \begin{aligned} &2M_2 \sin \varphi_{M_2} + 2S_2 \sin \varphi_{S_2} + 2N_2 \sin \varphi_{N_2} + 2K_2 \sin \varphi_{K_2} + \\ &K_1 \sin \varphi_{K_1} + O_1 \sin \varphi_{O_1} + P_1 \sin \varphi_{P_1} + Q_1 \sin \varphi_{Q_1} + \\ &4M_4 \sin \varphi_{M_4} + 4MS_4 \sin \varphi_{MS_4} + 6M_6 \sin \varphi_{M_6} = 0 \\ &2M_2 \sin \varphi_{M_2} + 2N_2 \sin \varphi_{N_2} + 2K_2 \sin \varphi_{K_2} + K_1 \sin \varphi_{K_1} + \\ &O_1 \sin \varphi_{O_1} + P_1 \sin \varphi_{P_1} + Q_1 \sin \varphi_{Q_1} + 4M_4 \sin \varphi_{M_4} + \\ &4MS_4 \sin \varphi_{MS_4} + 6M_6 \sin \varphi_{M_6} + Sa \sin \varphi_{Sa} + 2SSa \sin \varphi_{SSa} = 0 \\ &2M_2 \sin \varphi_{M_2} + 3N_2 \sin \varphi_{N_2} + 2O_1 \sin \varphi_{O_1} + 3Q_1 \sin \varphi_{Q_1} + \\ &4M_4 \sin \varphi_{M_4} + 2MS_4 \sin \varphi_{MS_4} + 6M_6 \sin \varphi_{M_6} = 0 \\ &N_2 \sin \varphi_{N_2} + Q_1 \sin \varphi_{Q_1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

trong đó:

$$M_2 = f_{M_2} H_{M_2}, \quad S_2 = f_{S_2} H_{S_2}, \dots, \quad SSa = f_{SSa} H_{SSa}.$$

Nếu biết những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn ứng với điều kiện cực trị (t', h', s', p') thì có thể dẫn các phương trình (3.53) tới dạng tuyến tính nhờ khai triển thành chuỗi Taylor. Nếu những trị số gần đúng của các ẩn số đủ gần những trị số thực thụ (t_o, h_o, s_o, p_o) thì khi khai triển có thể giới hạn bởi những số hạng bậc nhất.

Nếu ký hiệu những hiệu chỉnh cần tìm cho những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_o - t'; & \Delta s &= s_o - s'; \\ \Delta h &= h_o - h'; & \Delta p &= p_o - p', \end{aligned}$$

thì theo kết quả khai triển người ta nhận được hệ gồm bốn phương trình tuyến tính với ma trận các hệ số đối xứng theo đường chéo:

$$AX + \lambda = 0, \quad (3.54)$$

với

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ & b_2 & c_2 & d_2 \\ & & c_3 & d_3 \\ & & & d_4 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} \Delta t \\ \Delta h \\ \Delta s \\ \Delta p \end{bmatrix}; \quad \lambda = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 4M_2 \cos \varphi'_{M_2} + 4S_2 \cos \varphi'_{S_2} + 4N_2 \cos \varphi'_{N_2} + 4K_2 \cos \varphi'_{K_2} + K_1 \cos \varphi'_{K_1} + O_1 \cos \varphi'_{O_1} + P_1 \cos \varphi'_{P_1} + Q_1 \cos \varphi'_{Q_1} + 16M_4 \cos \varphi'_{M_4} + 16MS_4 \cos \varphi'_{MS_4} + 36M_6 \cos \varphi'_{M_6};$$

$$b_1 = 4M_2 \cos \varphi'_{M_2} + 4N_2 \cos \varphi'_{N_2} + 4K_2 \cos \varphi'_{K_2} + K_1 \cos \varphi'_{K_1} + O_1 \cos \varphi'_{O_1} - P_1 \cos \varphi'_{P_1} + Q_1 \cos \varphi'_{Q_1} + 16M_4 \cos \varphi'_{M_4} + 8MS_4 \cos \varphi'_{MS_4} + 36M_6 \cos \varphi'_{M_6};$$

$$c_1 = -4M_2 \cos \varphi'_{M_2} - 6N_2 \cos \varphi'_{N_2} - 2O_1 \cos \varphi'_{O_1} - 3Q_1 \cos \varphi'_{Q_1} - 16M_4 \cos \varphi'_{M_4} - 8MS_4 \cos \varphi'_{MS_4} - 36M_6 \cos \varphi'_{M_6};$$

$$d_1 = 2N_2 \cos \varphi'_{N_2} + Q_1 \cos \varphi'_{Q_1};$$

$$l_1 = 2M_2 \sin \varphi'_{M_2} + 2S_2 \sin \varphi'_{S_2} + 2N_2 \sin \varphi'_{N_2} + 2K_2 \sin \varphi'_{K_2} + K_1 \sin \varphi'_{K_1} + O_1 \sin \varphi'_{O_1} + P_1 \sin \varphi'_{P_1} + Q_1 \sin \varphi'_{Q_1} + 4M_4 \sin \varphi'_{M_4} + 4MS_4 \sin \varphi'_{MS_4} + 6M_6 \sin \varphi'_{M_6};$$

$$b_2 = 4M_2 \cos \varphi'_{M_2} + 4N_2 \cos \varphi'_{N_2} + 4K_2 \cos \varphi'_{K_2} + K_1 \cos \varphi'_{K_1} + O_1 \cos \varphi'_{O_1} + P_1 \cos \varphi'_{P_1} + Q_1 \cos \varphi'_{Q_1} + 16M_4 \cos \varphi'_{M_4} + 4MS_4 \cos \varphi'_{MS_4} + 36M_6 \cos \varphi'_{M_6} + Sa \cos \varphi'_{Sa} + 4SSa \cos \varphi'_{SSa};$$

$$c_2 = -4M_2 \cos \varphi'_{M_2} - 6N_2 \cos \varphi'_{N_2} - 2O_1 \cos \varphi'_{O_1} - 3Q_1 \cos \varphi'_{Q_1} - 16M_4 \cos \varphi'_{M_4} - 4MS_4 \cos \varphi'_{MS_4} - 36M_6 \cos \varphi'_{M_6};$$

$$d_2 = 2N_2 \cos \varphi'_{N_2} + Q_1 \cos \varphi'_{Q_1};$$

Bảng 3.5. Biểu thức tính pha và trị số các hệ số suy biến của một số phân triều [9]

Ký hiệu phân triều	Biểu thức pha, φ	Hệ số suy biến, f	
		$N = 0^\circ$	$N = 180^\circ$
M_2	$2t + 2h - 2s - g_{M_2}$	0,963	1,038
S_2	$2t - g_{S_2}$	1,000	1,000
N_2	$2t + 2h - 3s + p - g_{N_2}$	0,963	1,037
K_2	$2t + 2h - g_{K_2}$	1,317	0,748
K_1	$t + h + 90^\circ - g_{K_1}$	1,113	0,882
O_1	$t + h - 2s - 90^\circ - g_{O_1}$	1,183	0,806
P_1	$t - h - 90^\circ - g_{P_1}$	1,000	1,000
Q_1	$t + h - 3s + p - 90^\circ - g_{Q_1}$	1,183	0,806
M_4	$4t + 4h - 4s - g_{M_4}$	0,928	1,077
MS_4	$4t + 2h - 2s - g_{MS_4}$	0,963	1,038
M_6	$6t + 6h - 6s - g_{M_6}$	0,894	1,118
Sa	$h - g_{Sa}$	1,000	1,000
SSa	$2h - g_{SSa}$	1,000	1,000

$$l_2 = 2M_2 \sin \varphi'_{M_2} + 2N_2 \sin \varphi'_{N_2} + 2K_2 \sin \varphi'_{K_2} + K_1 \sin \varphi'_{K_1} + O_1 \sin \varphi'_{O_1} - P_1 \sin \varphi'_{P_1} + Q_1 \sin \varphi'_{Q_1} + 4M_4 \sin \varphi'_{M_4} + 2MS_4 \sin \varphi'_{MS_4} + 6M_6 \sin \varphi'_{M_6} + Sa \sin \varphi'_{Sa} + 2SSa \sin \varphi'_{SSa};$$

$$c_3 = 4M_2 \cos \varphi'_{M_2} + 9N_2 \cos \varphi'_{N_2} + 4O_1 \cos \varphi'_{O_1} + 9Q_1 \cos \varphi'_{Q_1} + 16M_4 \cos \varphi'_{M_4} + 4MS_4 \cos \varphi'_{MS_4} + 36M_6 \cos \varphi'_{M_6};$$

$$d_3 = -3N_2 \cos \varphi'_{N_2} - 3Q_1 \cos \varphi'_{Q_1};$$

$$l_3 = -2M_2 \sin \varphi'_{M_2} - 3N_2 \sin \varphi'_{N_2} - 2O_1 \sin \varphi'_{O_1} - 3Q_1 \sin \varphi'_{Q_1} \\ - 4M_4 \sin \varphi'_{M_4} - 2MS_4 \sin \varphi'_{MS_4} - 6M_6 \sin \varphi'_{M_6};$$

$$d_4 = N_2 \cos \varphi'_{N_2} + Q_1 \cos \varphi'_{Q_1};$$

$$l_4 = N_2 \sin \varphi'_{N_2} + Q_1 \sin \varphi'_{Q_1};$$

φ'_i – pha của các phân triều tính theo các trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn t', h', s', p' .

Việc tìm nghiệm của hệ phương trình (3.54) $X = -\lambda A^{-1}$ có thể thực hiện theo một sơ đồ chuẩn nào đó của phương pháp tính.

Bảng 3.6. Những trị số của các yếu tố thiên văn xấp xỉ thoả mãn điều kiện cực trị [9]

B á n n h ậ t t r i ề u		
Yếu tố thiên văn	Điều kiện mực cực tiểu	Điều kiện mực cực đại
t'	$t'_1 = 90^\circ + \frac{1}{2} g_{S_2}$	$t'_1 = 180^\circ + \frac{1}{2} g_{S_2}$
	$t'_2 = 270^\circ + \frac{1}{2} g_{S_2}$	$t'_2 = \frac{1}{2} g_{S_2}$
h'	$\frac{1}{2}(g_{K_2} - g_{S_2})$	
s'	$\frac{1}{2}(g_{K_2} - g_{M_2})$	
p'	$\frac{1}{2}(g_{K_2} - 3g_{M_2} + 2g_{N_2})$	

Để tính những trị số của các yếu tố thiên văn ứng với điều kiện cực

trị (t_o, h_o, s_o, p_o) với độ chính xác cho trước nào đó có thể sử dụng phương pháp lặp đơn. Nếu một hiệu chỉnh nào đó trong số các hiệu chỉnh $(\Delta t, \Delta h, \Delta s, \Delta p)$ nhận được do giải hệ phương trình (3.54) mà vượt về trị tuyệt đối một trị số cho trước $|\delta|$ thì việc giải sẽ lặp lại và khi đó để tính các hệ số và số hạng tự do của các phương trình (3.54) sẽ sử dụng các pha φ''_i tính theo những trị số được chính xác hoá của các yếu tố thiên văn:

$$t'' = t' + \Delta t'; \quad s'' = s' + \Delta s'; \quad h'' = h' + \Delta h'; \quad p'' = p' + \Delta p'.$$

Chu trình được lặp cho đến khi tất cả các hiệu chỉnh $(\Delta t, \Delta h, \Delta s, \Delta p)$ nhận được trong bước giải thứ k của hệ phương trình (3.54) nhỏ hơn về trị tuyệt đối so với trị số cho trước $|\delta|$:

$$|\Delta t^{(k)}|, |\Delta h^{(k)}|, |\Delta s^{(k)}|, |\Delta p^{(k)}| < |\delta|.$$

Nếu các trị xấp xỉ ban đầu của các yếu tố thiên văn (t', h', s', p') khá gần với những trị thực thụ (t_o, h_o, s_o, p_o) thì quá trình lặp hội tụ rất nhanh. Những trị số xấp xỉ như vậy của các yếu tố thiên văn ứng với điều kiện cực trị có thể tính theo bốn phân triều toàn nhật hay bán nhật tùy thuộc tính chất của thủy triều. Những điều kiện cực trị đối với bốn phân triều bán nhật và toàn nhật được xác định theo các biểu thức sau:

– Đối với bán nhật triều:

$$\varphi_{M_2} = \varphi_{S_2} = \varphi_{N_2} = \varphi_{K_2} = \varphi.$$

– Đối với nhật triều:

$$\varphi_{K_1} = \varphi_{O_1} = \varphi_{P_1} = \varphi_{Q_1} = \varphi,$$

trong đó

$$\varphi = 180^\circ + 2\pi n - \text{đối với mực nước thấp nhất};$$

$$\varphi = 360^\circ + 2\pi n - \text{đối với mực nước cao nhất}.$$

Từ những biểu thức này có thể suy ra các công thức xác định các trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn (t', h', s', p') thoả mãn các điều kiện cực trị (bảng 3.6–3.9).

$$\left. \begin{aligned} B &= O_1 \cos \alpha_1 + P_1 \cos \alpha_2 + Q_1 \cos \alpha_3 + K_1 \cos \alpha_4 \\ C &= O_1 \sin \alpha_1 + P_1 \sin \alpha_2 + Q_1 \sin \alpha_3 + K_1 \sin \alpha_4 \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= g_{M_2} - \frac{1}{2} g_{K_2} - g_{O_1} - 90^\circ; & \alpha_3 &= g_{N_2} - \frac{1}{2} g_{K_2} - g_{Q_1} - 90^\circ; \\ \alpha_2 &= g_{S_2} - \frac{1}{2} g_{K_2} - g_{P_1} - 90^\circ; & \alpha_4 &= \frac{1}{2} g_{K_2} - g_{K_1} + 90^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Để tính trị xấp xỉ của thời gian múi giờ trung bình t' có hai biểu thức cho mỗi điều kiện cực tiểu và cực đại, vì trong bán nhật triều trong một ngày đêm có hai nước lớn và hai nước ròng. Chọn công thức nào trong từng trường hợp cụ thể phải căn cứ vào dấu của các hệ số phụ trợ B và C (bảng 3.7). Các hệ số B và C tính theo các công thức dưới đây:

Bảng 3.7. Những điều kiện mực thấp nhất và cao nhất [9]

Các điều kiện mực thấp nhất	Các điều kiện mực cao nhất
t'_1 khi $C > 0$	t'_1 khi $B < 0$
t'_2 khi $C < 0$	t'_2 khi $B > 0$

Việc chọn các hệ số suy biến để tính các đại lượng fH thực hiện tùy thuộc vào tính chất thủy triều:

1) Với bán nhật triều, nếu tỷ số $(H_{K_1} + H_{O_1}) / H_{M_2} < 0,5$ thì f chọn theo $N = 180^\circ$;

2) Với nhật triều, nếu tỷ số $(H_{K_1} + H_{O_1}) / H_{M_2} > 1,5$ thì f chọn theo $N = 0^\circ$;

3) Với triều hỗn hợp, nếu tỷ số $0,5 < (H_{K_1} + H_{O_1}) / H_{M_2} < 1,5$ thì cần sử dụng các trị số của các yếu tố thiên văn cả của triều bán nhật (bảng 3.6) và của triều toàn nhật (bảng 3.8). Khi tính với các yếu tố thiên văn của nhật triều chọn f theo $N = 0^\circ$, khi tính với các yếu tố thiên văn của bán nhật triều chọn f theo $N = 0^\circ$ và $N = 180^\circ$. Sẽ chấp nhận mực cao nhất và mực thấp nhất nhận được qua ba phương án tính làm những cực trị.

Bảng 3.8. Những trị số của các yếu tố thiên văn xấp xỉ thoả mãn điều kiện cực trị [9]

N h ậ t t r i ề u		
Yếu tố thiên văn	Điều kiện mực cực tiểu	Điều kiện mực cực đại
t'	$\frac{1}{2}(g_{K_1} + g_{P_1})$	$\frac{1}{2}(g_{K_1} + g_{P_1}) + 180^\circ$
h'	$\frac{1}{2}(g_{K_1} - g_{P_1}) + 90^\circ$	
s'	$\frac{1}{2}(g_{K_1} - g_{O_1}) + 90^\circ$	
p'	$\frac{1}{2}(g_{K_1} - 3g_{O_1} + 2g_{Q_1}) + 90^\circ$	

Cũng có thể nhận được những trị gần đúng của các yếu tố thiên văn thoả mãn các điều kiện cực trị dựa theo phương pháp Vladimirsky, là phương pháp áp dụng khi tính đến tám phân triều. Những độ cao cực trị thủy triều theo phương pháp Vladimirsky tìm được bằng cách chọn liên tiếp các trị số φ_{K_1} trong khoảng từ 0° đến 360° :

$$\left. \begin{aligned} H &= K_1 \cos \varphi_{K_1} + K_2 \cos (2\varphi_{K_1} + a_4) + |R_1 + R_2 + R_3| \\ L &= K_1 \cos \varphi_{K_1} + K_2 \cos (2\varphi_{K_1} + a_4) - |R_1 + R_2 + R_3| \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

trong đó

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{M_2^2 + O_1^2 + 2M_2O_1 \cos \tau_1}; \\ R_2 &= \sqrt{S_2^2 + P_1^2 + 2S_2P_1 \cos \tau_2}; \\ \tau_1 &= \varphi_{K_1} + a_1; \quad \tau_2 = \varphi_{K_1} + a_2; \quad \tau_3 = \varphi_{K_1} + a_3; \\ a_1 &= g_{K_1} + g_{O_1} - g_{M_2}; \quad a_2 = g_{K_1} + g_{P_1} - g_{S_2}; \\ a_3 &= g_{K_1} + g_{Q_1} - g_{N_2}; \quad a_4 = 2g_{K_1} + g_{K_2} - 180^\circ. \end{aligned}$$

Việc chọn những hệ số suy biến để tính các đại lượng fH cũng thực hiện như đã nêu trên, tức là với bán nhật triều hệ số suy biến lấy theo $N = 180^\circ$, với nhật triều theo $N = 0^\circ$. Với thủy triều hỗn hợp thì tính với các hệ số suy biến khi $N = 180^\circ$ và $N = 0^\circ$ rồi chấp nhận mực thấp nhất và cao nhất trong hai phương án đó làm các mực cực trị.

Nếu như tính các mực cực trị thực hiện theo tám phân triều thì từ các biểu thức (3.57) có thể nhận ngay được kết quả cuối cùng. Trong trường hợp cần tính đến những phân triều khác, phải dựa vào các đại lượng $(\varphi_{K_1})_{\min}$ và $(\varphi_{K_1})_{\max}$ khi phân tích (3.57) để tính các trị số thiên văn ứng với các điều kiện cực trị t, h, s, p và sử dụng chúng như là các những xấp xỉ để tính các hệ số và số hạng tự do của các phương trình (3.54).

Những điều kiện mực thấp nhất:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}[(\varepsilon_2)_{\min} + g_{S_2}] + 90^\circ; \\ h &= (\varphi_{K_1})_{\min} + g_{K_1} - \frac{1}{2}[(\varepsilon_2)_{\min} + g_{S_2}] - 180^\circ; \end{aligned}$$

$$s = (\varphi_{K_1})_{\min} + g_{K_1} - \frac{1}{2}[(\varepsilon_1)_{\min} + g_{M_2}] - 180^\circ;$$

$$p = (\varphi_{K_1})_{\min} + g_{K_1} - \frac{3}{2}[(\varepsilon_1)_{\min} + g_{M_2}] + [(\varepsilon_3)_{\min} - g_{N_2}] - 180^\circ;$$

và những điều kiện mực cao nhất:

$$t = \frac{1}{2}[(\varepsilon_2)_{\max} + g_{S_2}];$$

$$h = (\varphi_{K_1})_{\max} + g_{K_1} - \frac{1}{2}[(\varepsilon_2)_{\max} + g_{S_2}] - 90^\circ;$$

$$s = (\varphi_{K_1})_{\max} + g_{K_1} - \frac{1}{2}[(\varepsilon_1)_{\max} + g_{M_2}] - 90^\circ;$$

$$p = (\varphi_{K_1})_{\max} + g_{K_1} - \frac{3}{2}[(\varepsilon_1)_{\max} + g_{M_2}] + [(\varepsilon_3)_{\max} + g_{N_2}] - 90^\circ;$$

trong đó

$$(\varepsilon_1)_{\min, \max} = \arctg \frac{O_1 \sin(\tau_1)_{\min, \max}}{M_2 + Q_1 \cos(\tau_1)_{\min, \max}};$$

$$(\varepsilon_2)_{\min, \max} = \arctg \frac{P_1 \sin(\tau_2)_{\min, \max}}{S_2 + P_1 \cos(\tau_2)_{\min, \max}};$$

$$(\varepsilon_3)_{\min, \max} = \arctg \frac{Q_1 \sin(\tau_3)_{\min, \max}}{N_2 + Q_1 \cos(\tau_3)_{\min, \max}};$$

$$(\tau_1)_{\min, \max} = (\varphi_{K_1})_{\min, \max} + a_1;$$

$$(\tau_2)_{\min, \max} = (\varphi_{K_1})_{\min, \max} + a_2;$$

$$(\tau_3)_{\min, \max} = (\varphi_{K_1})_{\min, \max} + a_3.$$

Những trị số độ cao cực trị cuối cùng của thủy triều với số phân triều bất kỳ được tìm từ phương trình (3.52) theo những trị số của các yếu tố thiên văn t_o, h_o, s_o, p_o được chính xác hoá bằng phương pháp lặp.

Tuy nhiên phải nhận xét rằng việc tính những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn t', h', s', p' theo những công thức trong các bảng 3.6 và 3.9 đơn giản hơn nhiều so với phương pháp Vladimirsky. Dĩ nhiên điều này chỉ có ý nghĩa khi chúng ta tính đến hơn tám phân triêu, còn trong trường hợp chỉ tính đến tám phân triêu thì phương pháp Vladimirsky là phương pháp giải chính xác.

Như vậy việc tính các mực nước cực trị có thể thực hiện theo một trong hai sơ đồ như sau:

1) Bất kể số phân triêu là bao nhiêu, theo các công thức trong các bảng 3.6 và 3.9 xác định những trị xấp xỉ của các yếu tố thiên văn ứng với điều kiện cực trị, sau đó làm chính xác những trị số bằng phương pháp lặp. Những mực cực trị tính theo phương trình (3.52);

2) Những mực cực trị theo tám phân triêu tính theo phương pháp Vladimirsky. Nếu số phân triêu lớn hơn tám thì tính những trị số xấp xỉ của các yếu tố thiên văn ứng với điều kiện cực trị theo tám phân triêu theo phương pháp Vladimirsky nhưng tiếp theo chính xác hoá bằng phương pháp lặp. Những mực cực trị tính theo phương trình (3.52);

Trong một số trường hợp những phân triêu nước nông có biên độ lớn đến mức làm cho những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn tính theo các công thức ở bảng 3.6 và 3.9 hoặc theo phương pháp Vladimirsky có thể không đủ gần xấp xỉ với những trị số thực thụ (t_o, h_o, s_o, p_o) để đảm bảo sự hội tụ của quá trình lặp khi giải hệ phương trình 3.52. Nếu một số cho trước các bước lặp (thí dụ 8 hoặc 10 bước) mà không đảm bảo sự hội tụ của kết quả, thì có thể sử dụng phương pháp xấp xỉ liên tiếp.

Từng phân triêu nước nông có biên độ lớn được phân tách thành một số phân triêu có các biên độ nhỏ hơn:

$$f_i H_i \cos \varphi_i = n \frac{1}{n} f_i H_i \cos \varphi_i. \quad (3.58)$$

Số n được chỉ định tùy thuộc vào biên độ các phân triêu. Việc giải được thực hiện thành một số giai đoạn (các bước xấp xỉ), mỗi bước trong số đó bao hàm đầy đủ các tính toán để chính xác hoá những trị số của các yếu tố thiên văn, tức là lập và giải hệ phương trình (3.54) cũng như thực hiện phương pháp lặp để chính xác hoá các trị số của các yếu tố thiên văn ứng với điều kiện cực trị tại bước đang xét. Để giải ở bước xấp xỉ thứ nhất các yếu tố thiên văn được tính theo các công thức ở bảng 3.6 và bảng 3.8 hoặc theo phương pháp Vladimirsky; tiếp theo những trị số của chúng nhận được trong từng bước xấp xỉ lại được dùng làm trị số xuất phát cho bước xấp xỉ sau. Biên độ của các phân triêu nước nông từ bước xấp xỉ này tới bước xấp xỉ tiếp theo liên tiếp tăng lên cho tới biên độ đầy đủ (thí dụ ở bước xấp xỉ thứ nhất biên độ lấy bằng $\frac{1}{n} f_i H_i$, ở bước xấp xỉ thứ hai – lấy $\frac{2}{n} f_i H_i$, bước thứ $n - 1$ lấy $f_i H_i$).

Dưới đây sẽ xét một số thí dụ tính toán mực nước thủy triều cực trị theo phương pháp vừa trình bày. Bất kể số phân triêu bằng bao nhiêu, chúng ta sẽ áp dụng sơ đồ tính toán thống nhất như sau: xác định các trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn theo những công thức trong bảng 3.6 và bảng 3.8, sau đó chính xác hoá thêm bằng phương pháp lặp. Khi giải hệ phương trình (3.54) quá trình lặp được xem là hội tụ khi tất cả các hiệu đỉnh của các yếu tố thiên văn $\leq 0,5'$. Để so sánh trong mỗi thí dụ còn dẫn cả kết quả tính theo phương pháp Vladimirsky.

Thí dụ 1: Các hằng số điều hòa của một trạm được cho trong bảng dưới đây:

Phân triêu	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1	Q_1
g°	226	288	205	288	229	192	228	186
H cm	122	45	17	12	52	35	17	7

a) Xác định tính chất thủy triều $H_{K_1} + H_{O_1} / H_{M_2} = 0,71$ – thủy triều hỗn hợp. Do đó thực hiện tính với những hệ số suy biến cả theo $N = 180^\circ$ lẫn $N = 0^\circ$.

b) Muốn chọn công thức tính t' trong bảng 3.6 cần xác định và phân tích dấu của các hệ số B và C theo quy tắc bảng 3.7 với $N = 180^\circ$ và $N = 0^\circ$.

$$f_i \text{ đối với } N = 180^\circ : C = +15,0\text{cm}, B = -2,3\text{cm};$$

$$f_i \text{ đối với } N = 0^\circ : C = +22,2\text{cm}, B = -4,9\text{cm};$$

Do đó trong cả hai trường hợp $N = 180^\circ$ lẫn $N = 0^\circ$ những trị số gần đúng của giờ múi trung bình sẽ được tính theo công thức t'_1 .

c) Những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn tính theo các công thức trong bảng 3.6 cho bán nhật triều (các hệ số suy biến $N = 180^\circ$ và $N = 0^\circ$):

	Điều kiện mực thấp nhất	Điều kiện mực cao nhất
t'	234°00'	324°00'
h'	0°00'	0°00'
s'	31°00'	31°00'
p'	10°00'	10°00'

d) Những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn tính theo các công thức trong bảng 3.8 cho nhật triều (các hệ số suy biến $N = 180^\circ$):

	Điều kiện mực thấp nhất	Điều kiện mực cao nhất
t'	228°30'	48°30'
h'	90°30'	90°30'

s'	108°30'	108°30'
p'	102°30'	102°30'

e) Để tính những giá trị chính xác hoá của các yếu tố thiên văn và những độ cao triều cực trị ứng với chúng theo các phương trình (3.54) và (3.52) phải thực hiện ba phương án tính:

1/ theo những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn với bán nhật triều và f cho $N = 180^\circ$;

2/ theo những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn với bán nhật triều và f cho $N = 180^\circ$;

3/ theo những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn với nhật triều và f cho $N = 0^\circ$; sau đó lấy các mực cao nhất và thấp nhất nhận được từ ba phương án làm những cực trị độ cao.

Mực thấp nhất nhận được khi tính theo những yếu tố thiên văn gần đúng của nhật triều với f ứng với $N = 0^\circ$:

$$t_0 = 230^\circ 18'; \quad s_0 = 99^\circ 53'; \quad h_0 = 72^\circ 25'; \quad p_0 = 83^\circ 49';$$

mực thấp nhất $L = -288\text{cm}$.

Sự hội tụ nhận được sau bốn lần lặp. Mực cao nhất nhận được khi tính theo những yếu tố thiên văn gần đúng của bán nhật triều với f ứng với $N = 180^\circ$:

$$t_0 = 321^\circ 44'; \quad s_0 = 19^\circ 33'; \quad h_0 = 351^\circ 40'; \quad p_0 = 2^\circ 41';$$

mực cao nhất $H = +202\text{cm}$.

Sự hội tụ diễn ra sau ba lần lặp. Vì tính với tám phân triều nên kết quả tính theo phương pháp Vladimírsky cũng đúng như vậy.

Thí dụ 2: Các hằng số điều hòa của một trạm cho trong bảng dưới đây:

Phân triều	M_2	S_2	N_2	K_2	K_1	O_1	P_1	Q_1	M_4	MS_4
g°	93	201	93	201	218	48	218	48	127	223
H cm	134	24	27	7	8	10	3	2	54	20

a) Xác định tính chất thủy triều $H_{K_1} + H_{O_1} / H_{M_2} = 0,13$ – thủy triều bán nhật. Do đó thực hiện tính với những hệ số suy biến cả theo $N = 180^\circ$.

b) Muốn chọn công thức tính t' trong bảng 3.6 cần xác định và phân tích dấu của hệ số C theo quy tắc bảng 3.7: $C = -7,4\text{cm}$, do đó tính theo công thức t'_2 .

c) Những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn tính theo các công thức trong bảng 3.6 bằng:

$$t' = 10^\circ 30'; \quad s' = 54^\circ 00'; \quad h' = 0^\circ 00'; \quad p' = 54^\circ 00'.$$

Vì có mặt các phân triều nước nông biên độ lớn đáng kể nên ở đây phải dùng phương pháp xấp xỉ liên tiếp. Cho n trong công thức (3.58) bằng 2, tức mỗi phân triều nước nông M_4 và MS_4 bị tách thành hai nửa, mỗi nửa có biên độ bằng một nửa biên độ ban đầu.

$$\text{– Bước xấp xỉ thứ nhất: } f_{M_4} H_{M_4} = 0; \quad f_{MS_4} H_{MS_4} = 0.$$

Những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn tính theo các công thức trong bảng 3.6. Các trị số chính xác hoá theo ba lần lặp:

$$t'' = 14^\circ 00'; \quad s'' = 19^\circ 34'; \quad h'' = 322^\circ 40'; \quad p'' = 19^\circ 34'.$$

– Bước xấp xỉ thứ hai: biên độ các phân triều nước nông lấy bằng $\frac{1}{2} f_{M_4} H_{M_4}$ và $\frac{1}{2} f_{MS_4} H_{MS_4}$. Những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn nhận được ở bước xấp xỉ thứ nhất được chấp nhận là xuất phát. Các trị số chính xác hoá theo bốn lần lặp:

$$t''' = 24^\circ 21'; \quad s''' = 15^\circ 03'; \quad h''' = 320^\circ 35'; \quad p''' = 349^\circ 52'.$$

– Bước xấp xỉ thứ ba: biên độ các phân triều nước nông lấy đầy đủ bằng $f_{M_4} H_{M_4}$ và $f_{MS_4} H_{MS_4}$. Những trị số gần đúng của các yếu tố thiên văn nhận được ở bước xấp xỉ 2 được chấp nhận là xuất phát. Các trị số chính xác hoá cuối cùng theo bốn lần lặp là:

$$t_0 = 28^\circ 27'; \quad s_0 = 12^\circ 26';$$

$$h_0 = 320^\circ 14'; \quad p_0 = 334^\circ 40'.$$

Mực thấp nhất lý thuyết tính theo công thức (3.52): $L = -235\text{cm}$. Theo phương pháp Vladimirsky các kết quả tương ứng sẽ là:

$$t_0 = 29^\circ; \quad s_0 = 20,1^\circ;$$

$$h_0 = 322,7^\circ; \quad p_0 = 19,6^\circ; \quad L = -228\text{cm}.$$

3.12. TÍNH VÀ ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC CỦA CÁC TRỊ SỐ TRUNG BÌNH MỰC NƯỚC

Mực biển trung bình nhiều năm được xác định bằng trị số trung bình số học từ chuỗi nhiều năm các mực trung bình năm. Ở các sông các mực trung bình được tính bằng trung vị từ chuỗi nhiều năm. Những mực trung bình xuất phát chọn cho từng năm được xếp thành chuỗi giảm dần và từ đó xác định trị số trung vị như là trị số nằm giữa, hay trị số có độ đảm bảo 50%, trị số này sẽ là trung bình cần tìm. Trong lý thuyết xác suất và thống kê toán học đã xây dựng những phương pháp ước lượng trung bình số học cho phép giải quyết bài toán đánh giá độ chính xác và độ tin cậy của việc tính các mực biển trung bình nhiều năm cũng như xác định chu kỳ quan trắc cần thiết để nhận được mực trung bình nhiều năm với độ chính xác định trước.

Đánh giá độ chính xác của trung bình số học khi số lượng quan trắc hạn chế được thực hiện trên cơ sở phân bố Stewdent. Mực trung bình nhiều năm \bar{x}_0 xác định từ biểu thức

$$\bar{x}_o = \frac{\sum x_i}{n}, \quad (3.59)$$

trong đó x_i – các mực trung bình năm; n – số năm quan trắc.

Những trị số x_i trong biểu thức (3.32) có thể xem như tập hợp ngẫu nhiên lấy ra từ tập hợp tổng những trị số mực trung bình năm có thể có. Trong trường hợp này với bất kỳ $n \geq 2$ đại lượng quy chuẩn

$$t = \frac{\bar{x}_o - X}{\sigma_{\bar{x}}}$$

sẽ có mật độ xác suất

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \quad (3.60)$$

trong đó

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_o)^2}{n-1}}$$

và X – mực trung bình cần tìm.

Chính trên cơ sở biểu thức (3.60) là mật độ xác suất trong phân bố Stewdent có thể ước lượng độ chính xác của trị số mực biến trung bình nhiều năm. Phân bố Stewdent áp dụng chính xác đối với các tập hợp lấy từ phân bố chuẩn. Nhưng nhiều nghiên cứu cho thấy rằng nó cũng áp dụng được cho trường hợp các tập hợp được lấy ra từ những tập tổng có phân bố ít nhiều khác với phân bố chuẩn. Nếu biết mật độ xác suất $\varphi(t)$ có thể tìm xác suất α của sự kiện đại lượng t nằm trong giới hạn $-t_\alpha < t < t_\alpha$:

$$\alpha = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} \varphi(t) dt = 2 \int_0^{t_\alpha} \varphi(t) dt.$$

Đây cũng là xác suất của sự kiện mực trung bình cần tìm X nằm trong giới hạn khoảng tin cậy

$$\bar{x}_o - t_\alpha \sigma_{\bar{x}} < X < \bar{x}_o + t_\alpha \sigma_{\bar{x}}.$$

Bảng 3.9. Những trị số t_α thoả mãn đẳng thức $\alpha = 2 \int_0^{t_\alpha} \varphi(t) dt$ [9]

n	α				
	0,5	0,7	0,95	0,99	0,999
2	1,000	1,963	12,706	63,657	636,619
4	0,765	1,250	3,182	5,841	12,941
6	0,727	1,156	2,571	4,032	6,859
8	0,711	1,119	2,365	3,499	5,405
10	0,703	1,100	2,262	3,250	4,781
12	0,697	1,088	2,201	3,106	4,487
14	0,694	1,079	2,160	3,012	4,221
16	0,691	1,074	2,131	2,947	4,073
18	0,689	1,069	2,110	2,898	3,965
20	0,688	1,066	2,093	2,861	3,883
22	0,686	1,063	2,080	2,831	3,819
24	0,685	1,060	2,069	2,807	3,767
26	0,684	1,058	2,060	2,787	3,725
28	0,684	1,057	2,052	2,771	3,690
30	0,683	1,055	2,045	2,756	3,659
41	0,681	1,050	2,021	2,704	3,551
61	0,679	1,046	2,000	2,660	3,460
121	0,677	1,041	1,980	2,617	3,373
∞	0,674	1,036	1,960	2,576	3,291

Đại lượng t_α theo trị số của xác suất α và n cho trước có thể được xác định theo các bảng chuyên dụng của Stewdent - Fisher. Bảng 3.9

trích một phần từ các bảng trên đối với những giá trị xác suất $\alpha = 0,5$ (ứng với xác suất của sai số xác suất), $\alpha = 0,7$ (gần bằng xác suất của sai số bình phương trung bình) và $\alpha = 0,95; 0,99; 0,999$ (mức tin cậy).

Thí dụ ứng dụng: Theo số liệu mực nước trung bình năm trạm CO trong 10 năm (1965–1974) ta tính được $\bar{x}_o = 219\text{cm}$ và $\sigma = 3,3\text{cm}$. Từ đó $\sigma_{\bar{x}} = 1,0$. Với $\alpha = 0,99$ và $n = 10$ tra theo bảng 3.9 được $t_\alpha = 3,250$. Vậy với xác suất 0,99 trị số mực trung bình sẽ nằm trong khoảng 216–222 cm.

Phương pháp ước lượng khoảng tin cậy cũng cho phép giải bài toán về chọn số năm quan trắc cần thiết n để tính mực trung bình với độ chính xác định trước. Khi cho trước đại lượng lệch tuyệt đối ε_α của mực trung bình nhiều năm x_o khỏi trị số thực thụ X của nó với xác suất α , có thể viết

$$\varepsilon_\alpha = t_\alpha \sigma_{\bar{x}} = p\sigma,$$

trong đó

$$p = \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}.$$

Giá trị p ở đây được xác định theo đại lượng \mathcal{E}_α đã cho và độ lệch chuẩn σ (tính được từ chuỗi quan trắc) theo công thức:

$$p = \frac{\varepsilon_\alpha}{\sigma}. \quad (3.61)$$

Chu kỳ quan trắc n cần thiết để tính mực trung bình với độ chính xác cho trước có thể xác định theo bảng 3.10, bảng này xây dựng cho n trong giới hạn $2 < n < 30$.

Đương nhiên, nếu đối với trạm nào đó chúng ta có chuỗi quan trắc rất ngắn thì việc xác định chu kỳ quan trắc n cần thiết để tính mực trung bình nhiều năm với độ chính xác định trước sẽ ít tin cậy, vì khi đó trị số

thực thụ của độ lệch chuẩn σ ta không biết mà phải phải dùng ước lượng của nó theo chuỗi quan trắc ngắn hiện có.

Thí dụ ứng dụng: Ta đặt bài toán muốn xác định mực trung bình với sai số không quá 2cm ở trạm CO (thí dụ trước) thì cần quan trắc bao nhiêu năm. Theo thí dụ trước ta có độ lệch chuẩn $\sigma = 3,3\text{cm}$. Theo công thức (3.61) ta tính $p = \varepsilon_\alpha / \sigma = 2\text{cm} / 3,3\text{cm} = 0,6$. Dùng $p = 0,6$ theo bảng 3.10 với xác suất 0,95 cần 12–14 năm, với xác suất 0,99 cần 20–26 năm. (Bây giờ thay vì độ lệch chuẩn $\sigma = 3,3$ ta dùng $\sigma = 4$ (theo số liệu 30 năm) thì kết quả tương ứng sẽ là 15–21 năm và 27–30 năm).

Trung vị như đã nói ở trên, là giá trị nằm giữa trong chuỗi biến thiên, trong đó tổng các độ lệch tuyệt đối của đối số x so với trung vị nhỏ hơn tổng các độ lệch tuyệt đối so bất kỳ đại lượng khác.

Ước lượng trung vị đối với phân bố bất kỳ kiểu liên tục, không phụ thuộc vào dạng phân bố của tập tổng, có thể thực hiện trên cơ sở kết luận của Fishe rằng xác suất của sự kiện trung vị trong n quan trắc sẽ lớn hơn r trong số những quan trắc và nhỏ hơn $n - r$ trong số chúng bằng

$$P_{rn} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.62)$$

nếu như quan trắc được thực hiện đối với phân bố kiểu liên tục. Từ đây suy ra rằng xác suất vị trí trung vị me của phân bố đang xét nằm giữa các trị x_r và x_{n-r+1} của tập sắp xếp $x_1 \leq x_2 \dots \leq x_n$ bằng $\sum_r^{n-r+1} P_{rn}$. Nếu chọn xác suất tin cậy α và tìm số r_α từ biểu thức

$$\sum_{r_\alpha}^{n-r_\alpha+1} P_{rn} \geq \alpha, \quad (3.63)$$

ta sẽ nhận được khoảng tin cậy với độ tin cậy lớn hơn hoặc bằng α :

$$x_{r_\alpha} < me > x_{n-r_\alpha+1}.$$

Để xác định khoảng tin cậy với độ tin cậy cho trước người ta có thể dùng bảng (3.12), là bảng tính sẵn theo các công thức (3.62) và (3.63) đối với $5 \leq n \leq 25$. Những biên giới tin cậy đối với những giá trị xác suất trong khoảng trung gian giữa những trị số trong bảng có thể xác định gần đúng bằng cách nội suy.

Bảng 3.10. Để xác định số năm quan trắc n theo độ chính xác cho trước p [9]

p	α				
	0,5	0,7	0,95	0,99	0,999
6,0				3	4
5,0				3	5
4,0				4	5
3,0				4	6
2,0			3	5	7
1,9			3	5	8
1,8			3	5	8
1,7			3	6	9
1,6			4	6	9
1,5			4	6	10
1,4		2	4	7	11
1,3		2	5	7	12
1,2		2	5	8	13
1,1		2	6	9	14-15
1,0		3	6	10-11	16-17
0,9		3	7	12-13	18-20
0,8		3	8-9	14-15	21-24
0,7	2	4	10-11	16-19	25-30
0,6	3	4	12-14	20-26	
0,5	3	5-6	15-21	27-30	
0,4	4	7-8	22-30		
0,3	5-7	9-18			
0,2	8-20	19-30			
0,1	21-30				

Bảng 3.11 (theo [9])

r	$n-r+1$	α	r	$n-r+1$	α	r	$n-r+1$	α
$n = 5$			$n = 6$			$n = 7$		
1	5	0,9375	1	6	0,9688	1	7	0,9844
2	4	0,6250	2	5	0,7812	2	6	0,8750
			3	4	0,3125	3	5	0,5468
$n = 8$			$n = 9$			$n = 10$		
1	8	0,9922	1	9	0,9962	1	10	0,9981
2	7	0,9298	2	8	0,9610	2	9	0,9785
3	6	0,7110	3	7	0,8204	3	8	0,8907
4	5	0,2734	4	6	0,4922	4	7	0,6563
						5	6	0,2461
$n = 11$			$n = 12$			$n = 13$		
1	11	0,9991	1	12	0,9995	1	13	0,9998
2	10	0,9883	2	11	0,9936	2	12	0,9966
3	9	0,9346	3	10	0,9614	3	11	0,9775
4	8	0,7735	4	9	0,8540	4	10	0,9077
5	7	0,4512	5	8	0,6123	5	9	0,7332
			6	7	0,2256	6	8	0,4189
$n = 14$			$n = 15$			$n = 16$		
1	14	0,9999	1	15	0,9999	1	16	0,99997
2	13	0,9982	2	14	0,9990	2	15	0,9995
3	12	0,9871	3	13	0,9926	3	14	0,9958
4	11	0,9426	4	12	0,9648	4	13	0,9787
5	10	0,8204	5	11	0,8815	5	12	0,9232
6	9	0,5761	6	10	0,6982	6	11	0,7899
7	8	0,2095	7	9	0,3928	7	10	0,5455
						8	9	0,1964

Bảng 3.11 (tiếp)

r	$n-r+1$	α	r	$n-r+1$	α	r	$n-r+1$	α
$n = 17$			$n = 18$			$n = 19$		
1	17	0,99998	1	18	0,99999	1	19	0,999996
2	16	0,9997	2	17	0,9999	2	18	0,9999
3	15	0,9977	3	16	0,9987	3	17	0,9993
4	14	0,9873	4	15	0,9925	4	16	0,9956
5	13	0,9510	5	14	0,9691	5	15	0,9808
6	12	0,8565	6	13	0,9037	6	14	0,9364
7	11	0,6677	7	12	0,7621	7	13	0,8329
8	10	0,3709	8	11	0,5193	8	12	0,6407
			9	10	0,1855	9	11	0,3524
$n = 20$			$n = 21$			$n = 22$		
1	20	0,999998	1	21	0,999999	1	22	0,999999
2	19	0,99996	2	20	0,99998	2	21	0,99999
3	18	0,9996	3	19	0,9998	3	20	0,9999
4	17	0,9974	4	18	0,9985	4	19	0,9991
5	16	0,9882	5	17	0,9928	5	18	0,9957
6	15	0,9586	6	16	0,9734	6	17	0,9831
7	14	0,8847	7	15	0,9216	7	16	0,9475
8	13	0,7368	8	14	0,8108	8	15	0,8662
9	12	0,4966	9	13	0,6167	9	14	0,7137
10	11	0,1762	10	12	0,3364	10	13	0,4765
						11	12	0,1682
$n = 23$			$n = 24$			$n = 25$		
1	23	0,999999	1	24	0,999999	1	25	0,999999
2	22	0,99999	2	23	0,999996	2	24	0,999998
3	21	0,9999	3	22	0,99996	3	23	0,99997
4	20	0,9995	4	21	0,9997	4	22	0,9998
5	19	0,9974	5	20	0,9985	5	21	0,9991
6	18	0,9894	6	19	0,9934	6	20	0,9959
7	17	0,9653	7	18	0,9773	7	19	0,9854
8	16	0,9069	8	17	0,9361	8	18	0,9567
9	15	0,7900	9	16	0,8484	9	17	0,8922
10	14	0,5951	10	15	0,6925	10	16	0,7705
11	13	0,3224	11	14	0,4587	11	15	0,5756
			12	13	0,1612	12	14	0,3100

Bảng 3.12

Năm	X_i cm	X_i tăng dần	me
1960	11	-7	11
1961	16	10	
1961	13	11	
1963	10	13	
1964	-7	16	

Thí dụ ứng dụng: Giả sử phải xác định với xác suất $\alpha = 0,9$ trị số trung bình của mực thấp nhất trong chuỗi mực nước tại trạm mực nước ký hiệu HDL với độ chính xác ± 5 cm, tức khoảng tin cậy khi $\alpha = 0,9$ không vượt quá 10cm.

Ta sẽ thử tính mực thấp nhất trung bình qua số liệu 5 năm (1960–1964) và đánh giá độ chính xác của kết quả này (bảng 3.12).

Theo bảng 3.11: $\alpha = 0,9375 \quad -7 < me < 16$; $\alpha = 0,6250 \quad 10 < me < 13$. Nội suy với $\alpha = 0,9$ được $-5 < me < 16$. Vậy khoảng tin cậy bằng 21cm. Như vậy chu kỳ quan trắc 5 năm không đủ đảm bảo khoảng tin cậy ≤ 10 cm.

Bây giờ ta tính mực thấp nhất trung bình trong chu kỳ quan trắc 15 năm (1960–1974) và đánh giá độ chính xác của nó và ghi vào bảng 3.13.

Với $\alpha = 0,9648 \quad 7 < me < 16$; $\alpha = 0,8815 \quad 9 < me < 14$. Vậy nội suy cho $\alpha = 0,9$ ta được $8 < me < 14$ cm. Khoảng tin cậy bằng 6cm. Như vậy chu kỳ 15 năm trong trường hợp này hoàn toàn đủ để tính mực thấp nhất trung bình với yêu cầu độ chính xác đã định.

Bảng 3.13

Năm	x_j	x_j tăng dần	m_e	Năm	x_j	x_j tăng dần	m_e
1960	11	-7		1968	6	13	
1961	16	-4		1969	7	13	
1962	13	6		1970	11	14	
1963	10	7		1971	16	16	
1964	-7	9		1972	14	16	
1965	-4	10		1973	21	19	
1966	9	11		1974	19	21	
1967	13	11	11				

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tham khảo chính

1. Альтшулер В.М.
Практические вопросы анализа и расчета морских приливов.
Гидрометеоиздат., 1966
2. Березкин В.А.
Динамика моря. Гидрометеоиздат., 1947
3. Defant A.
Physical oceanography. Vol. 2, London, 1961
4. Дуванин А.И.
Приливы в море. Гидрометеоиздат., 1960
5. Герман В.С., Левиков С. П.
Вероятностный анализ и моделирование колебания уровня моря.
Гидрометеоиздат., 1988
6. Каган Б.А.
Гидродинамические модели приливных движений моря. Гидрометеоиздат., 1968
7. Koutitas C. G.
Mathematical models in coastal engineering. Pentech Press, London, 1988
8. Некрасов А. В.
Приливные волны в окраинных морях. Гидрометеоиздат., 1975
9. Пересыпкин В.И.

Аналитические методы расчета колебаний уровня моря.

Гидрометеиздат., 1961

10. Полукаров Г.В.

Интегрирование приливных уравнений. Труды ГОИН, 57.

Гидрометеиздат., 1961

11. Шулейкин В.В.

Физика океана. Гидрометеиздат., 1964

Tài liệu tham khảo bổ sung

12. Phạm Văn Huân

Dao động tự do ở biển Đông. Tạp chí các khoa học Trái Đất, số 4, 1991

13. Буй Хонг Лонг

Исследование приливных явлений Тонкинского залива. Канд. диссертация,

ЛГМИ, Ленинград, 1987

14. Данг Конг Минь

Распространение приливных волн и приливных колебаний уровня Южно-китайского моря. Океанология, 4, Москва, 1975

15. До Нгок Куинь

Особенности штормового нагона в Южно-китайском море (по

результатам численного моделирования). Канд. диссертация, ЛГМИ,

Ленинград, 1982

16. Đỗ Ngọc Quỳnh, Phạm Văn Ninh, Nguyễn Việt Liên, Đinh Văn Mạnh

Về mô hình số trị bài toán thủy triều trong vùng biển nông. Tóm tắt báo cáo

khoa học. Hội nghị khoa học toàn quốc về biển lần thứ III, Hà Nội, 1991

17. Нгуиен Тхо Шао

Моделирование приливных явлений и баланса энергии приливов Южно-

китайского моря. Канд. диссертация, ЛГМИ, Ленинград, 1988

18. Нгуиен Нгок Тви

Особенности формирования приливных явлений Южно-китайского моря.

Океанология, 2, Москва, 1969