ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Đ. I. KAZAKEVITS

CƠ SỞ LÝ THUYẾT HÀM NGẪU NHIÊN VÀ ỨNG DỤNG TRONG KHÍ TƯỢNG THỦY VĂN

Người dịch: Phan Văn Tân
Phạm Văn Huấn
Nguyễn Thanh Sơn
Hiệu đính: Nguyễn Văn Tuyên

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Д. И. КАЗАКЕВИЧ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРРИМЕНЕНИЕ В ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД - 1971

MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Lý thuyết xác suất và toán học thống kê nói chung và lý thuyết các hàm ngẫu nhiên nói riêng là công cụ toán học quan trọng được sử dụng rất rộng rãi và hiệu quả trong các khoa học khí tượng, thủy văn và hải dương học.

Trong chương trình đào tạo chuyên ngành khí tượng, thủy văn và hải dương học việc ứng dụng các phương pháp thống kê và lý thuyết các quá trình ngẫu nhiên có mặt trong nhiều môn học và thể hiện dưới những hình thức khác nhau. Tuy nhiên, cho đến nay ở nước ta chưa có một tài liệu giảng dạy dùng chuyên cho ngành khí tượng thủy văn, trong đó những cơ sở của lý thuyết xác suất, toán học thống kê được trình bày đầy đủ, hệ thống nhưng dễ hiểu đối với trình độ toán tương ứng của những sinh viên nhóm ngành này.

Cuốn “Cơ sở lý thuyết hàm ngẫu nhiên và ứng dụng trong khí tượng thủy văn” của Đ. I. Kazakevits, người đã từng giảng dạy toán học cao cấp và lý thuyết xác suất thống kê nhiều năm tại Trường đại học khí tượng thủy văn Lêningrat, tỏ ra đáp ứng tốt nhất những yêu cầu trên đây. Ngoài ra, tác giả cuốn giáo trình này cũng am hiểu và có công tổng quan những ứng dụng công cụ của lý thuyết hàm ngẫu nhiên trong nghiên cứu khí tượng, thủy văn, hải dương học, chỉ ra trong những vấn đề nào và khi nào những phương pháp này áp dụng sẽ hợp lý và hiệu quả, những đặc thù khi thao tác với những dữ liệu khí tượng thủy văn trong khi tính toán... Như vậy cuốn sách vừa có tính chất giáo khoa vừa là một chuyên khảo rất có ích không những cho sinh viên trong học tập mà còn là tài liệu tham khảo cho nghiên cứu sinh và những người nghiên cứu. Hội đồng khoa học của Khoa Khí tượng thủy văn và hải dương học quyết định dịch nguyên bản cuốn sách này làm giáo trình giảng dạy môn học “Lý thuyết các quá trình ngẫu nhiên” của chuyên ngành này trong Trường đại học khoa học tự nhiên.

Bản dịch chắc chắn sẽ còn những thiếu sót liên quan đến dịch thuật và in ấn. Rất mong được các thầy giáo và bạn đọc góp ý.

Những người dịch

LỜI NÓI ĐẦU

Trong hai chục năm gần đây người ta thấy rằng các công cụ toán học về lý thuyết hàm ngẫu nhiên được sử dụng rộng rãi trong khí tượng học và thuỷ văn học. Cơ sở của điều này là ý tưởng xem xét các giá trị tức thời ghi được của các quá trình và các trường không gian khí tượng thuỷ văn như những thể hiện riêng biệt của một quá trình ngẫu nhiên hay một trường ngẫu nhiên nào đó. Cách tiếp cận như vậy cho phép không cần xét những đặc điểm của các giá trị tức thời riêng rẽ của trường khí tượng thuỷ văn với mối phụ thuộc vào toạ độ không gian và biến trình thời gian rất phức tạp và không rõ nét và chuyển sang nghiên cứu một số tính chất trung bình của tập hợp thống kê các thể hiện ứng với một tập các điều kiện bên ngoài cụ thể nào đó.

Quan điểm lý thuyết xác suất nghiên cứu các hiện tượng trong khí tượng và thuỷ văn học có sử dụng công cụ lý thuyết hàm ngẫu nhiên tỏ ra rất hiệu quả trong các lĩnh vực: lý thuyết rối, khi xây dựng các phương pháp dự báo thời tiết hạn dài, phân tích khách quan các trường khí tượng, đánh giá tính đại diện của số liệu quan trắc, độ chính xác của các dụng cụ đo, giải quyết các vấn đề hợp lý hoá sự phân bố mạng lưới trạm khí tượng, xây dựng các phương pháp dự báo dòng chảy sông và các đặc trưng khí tượng thuỷ văn, cũng như trong nhiều vấn đề khác.

Đóng góp to lớn vào hướng này là các công trình đặt nền móng của A.N. Kolmogorov cũng như các kết quả nghiên cứu của A.M. Obukhov, A.S. Monin, A.M. Iaglom, M.I. Iuđin, L.S. Ganđin, N.A. Bagrov, O.A. Đrozđov, E.P. Borisenkov, N.A. Kartvelishvili, I.M. Alekhin và các nhà khoa học khí tượng thuỷ văn hàng đầu của nước ta.

Từ đó dẫn đến phải mở rộng giáo trình lý thuyết xác suất trong các trường khí tượng thuỷ văn và đưa ra những khoá chuyên đề về cơ sở lý thuyết các hàm ngẫu nhiên và điều này được thực hiện lần đầu tiên vào năm 1961 tại Trường khí tượng thuỷ văn Leningrat.

Cuốn sách này được viết trên cơ sở giáo trình về lý thuyết hàm ngẫu nhiên mà tác giả đã giảng dạy trong nhiều năm cho sinh viên chuyên ngành dự báo thời tiết bằng phương pháp số trị của Trường khí tượng thuỷ văn Leningrat, và là giáo trình học tập cho sinh viên và nghiên cứu sinh các trường đại học khí tượng thuỷ văn và các khoa tương ứng trong các trường đại học tổng hợp cũng như cho rộng rãi các chuyên gia khí tượng thuỷ văn. Cuốn sách cũng có thể được sử dụng như là tài liệu học tập cho sinh viên và kỹ sư các chuyên ngành khác quan tâm đến lý thuyết hàm ngẫu nhiên và ứng dụng của nó.

Lý do biên soạn một cuốn sách như vậy xuất phát từ chỗ hiện nay chưa có các tài liệu giáo khoa về lý thuyết hàm ngẫu nhiên đáp ứng một cách đầy đủ nhu cầu của các chuyên gia và sinh viên ngành khí tượng thuỷ văn. Hơn nữa, sự thâm nhập ngày càng tăng của lý thuyết hàm ngẫu nhiên vào khí tượng học và thuỷ văn học đòi hỏi các chuyên gia khí tượng, thuỷ văn phải nhanh chóng và chủ động chiếm lĩnh nó.

Lý thuyết các hàm ngẫu nhiên, một bộ phận của lý thuyết xác suất, đã phát triển nhanh chóng trong mấy thập niên gần đây và được ứng dụng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Trước hết phải kể đến các ứng dụng của lý thuyết hàm ngẫu nhiên trong kỹ thuật vô tuyến, đặc biệt trong lý thuyết điều khiển tự động mà các nhu cầu của chúng, đến lượt mình, lại thúc đẩy sự phát triển của chính lý thuyết này. Sự ứng dụng rộng rãi của lý thuyết hàm ngẫu nhiên trong khí tượng thuỷ văn muộn hơn một chút. Do đó hiện nay có hai loại giáo trình về lý thuyết hàm ngẫu nhiên.

Tài liệu loại thứ nhất trình bày chặt chẽ lý thuyết quá trình xác suất dựa trên nền toán học ở trình độ cao (thí dụ như J. Dub "Các quá trình xác suất", I. A. Rozanov "Các quá trình ngẫu nhiên dừng"). Những cuốn sách này dùng cho các chuyên gia về toán nên rất khó đối với sinh viên các trường khí tượng thuỷ văn cũng như đối với các kỹ sư chưa được trang bị toán học đầy đủ. Loại thứ hai là các chuyên khảo và sách giáo khoa trong đó trình bày cơ sở lý thuyết hàm ngẫu nhiên tương ứng với nhu cầu của lý thuyết điều khiển tự động và kỹ thuật vô tuyến. Việc sử dụng các sách loại này đối với các chuyên gia khí tượng thuỷ văn bị khó khăn vì trong đó lý thuyết hàm ngẫu nhiên và các phương pháp của lý thuyết điều khiển tự động hay kỹ thuật vô tuyến gắn chặt với nhau, khó tách biệt ra được. Ngoài ra, ở đây chưa phản ánh được những khía cạnh hết sức quan trọng khi ứng dụng lý thuyết này vào khí tượng thuỷ văn học.

Cuốn sách này nhằm những độc giả với kiến thức toán được trang bị ở mức giáo trình toán cao cấp dành các trường đại học chuyên ngành khí tượng thuỷ văn. Trong khi trình bày, nếu buộc phải dùng đến những phương pháp và khái niệm ít quen thuộc, thì chúng sẽ được diễn giải một cách ngắn gọn (ví dụ, một số dẫn liệu từ lý thuyết các phương trình tích phân, một vài khái niệm của đại số tuyến tính, hàm delta v.v...).

Vì một số chuyên gia khí tượng thuỷ văn chưa có đủ kiến thức về lý thuyết xác suất, trong chương 1 sẽ khái quát những một số kiến thức cơ bản từ lý thuyết xác suất mà sau này dùng đến khi trình bày lý thuyết hàm ngẫu nhiên. Việc trình bày chi tiết các vấn đề này đã có trong các sách giáo khoa về lý thuyết xác suất, chẳng hạn trong cuốn giáo trình nổi tiếng của E.S. Ventxel [4]. Độc giả nào đã quen với lý thuyết xác suất có thể bỏ qua chương này.

Nội dung trình bày trong sách không nhằm bao quát đầy đủ lý thuyết hàm ngẫu nhiên, mà chủ yếu chỉ xét những khía cạnh nào của lý thuyết có ứng dụng rộng rãi trong khí tượng thuỷ văn học. Ngoài ra, tác giả chủ yếu tập trung trình bày sao cho đơn giản và dễ hiểu, không bị gò bó bởi yêu cầu về sự chặt chẽ toàn diện về mặt toán học.

Cuốn sách gồm hai phần. Phần thứ nhất trình bày cơ sở lý thuyết hàm ngẫu nhiên, trong đó bên cạnh việc xét các quá trình ngẫu nhiên một chiều, đã chú ý nhiều đến các trường ngẫu nhiên không gian. Phần thứ hai xét một số bài toán khí tượng, thuỷ văn được giải bằng các phương pháp của lý thuyết hàm ngẫu nhiên. Tuy nhiên hoàn toàn không đặt ra mục tiêu tổng quan hệ thống tất cả những công trình nghiên cứu giải đã quyết các bài toán khí tượng thuỷ văn bằng phương pháp lý thuyết hàm ngẫu nhiên. Những tổng quan như vậy về ứng dụng lý thuyết hàm ngẫu nhiên trong khí tượng thuỷ văn có thể tìm thấy trong nhiều công trình của các tác giả trong và ngoài nước [5,18,20, 14,45,9,57...].

Trong cuốn sách này chỉ lựa chọn một số bài toán khí tượng và thuỷ văn tiêu biểu cho phép minh hoạ sự ứng dụng các phương pháp cơ bản của lý thuyết hàm ngẫu nhiên đã trình bày trong phần đầu của cuốn sách. Và ở đây tập trung chủ yếu vào các vấn đề phương pháp luận.

Tác giả hy vọng cuốn sách sẽ giúp đông đảo các nhà khí tượng thuỷ văn lĩnh hội những ý tưởng và phương pháp cơ bản của lý thuyết các hàm ngẫu nhiên và ứng dụng chúng vào thực tiễn của khí tượng thủy văn học.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới N.A. Bagrov, O.A. Đrozđov và M.I. Iuđin đã có những góp ý quý giá về nội dung và cấu trúc cuốn sách. Tác giả đặc biệt cảm ơn L.S. Ganđin đã đọc toàn văn bản thảo và nêu ra nhiều nhận xét giúp tác giả lưu ý khi chuẩn bị xuất bản.

PHẦN 1 - CƠ SỞ LÝ THUYẾT HÀM NGẪU NHIÊN

CHƯƠNG 1: MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT XÁC SUẤT

1.1. Đại lượng ngẫu nhiên và luật phân bố

Đại lượng ngẫu nhiên là đại lượng mà khi tiến hành một loạt phép thử trong cùng một điều kiện như nhau có thể mỗi lần nhận được giá trị này hoặc giá trị khác hoàn toàn không biết trước được.

Người ta chia đại lượng ngẫu nhiên thành hai dạng là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc và đại lượng ngẫu nhiên liên tục. Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc là đại lượng ngẫu nhiên mà mọi giá trị có thể của nó có thể liệt kê ra được, tức là có thể đánh số thứ tự bằng tập số tự nhiên. Còn đại lượng ngẫu nhiên liên tục là đại lượng ngẫu nhiên mà mọi giá trị có thể của nó phủ đầy một đoạn của trục số, và do đó không thể đánh số được.

Ví dụ về đại lượng ngẫu nhiên rời rạc là số điểm khi gieo con xúc xắc. Đại lượng ngẫu nhiên này với mỗi lần thí nghiệm có thể nhận một trong sáu giá trị: 1, 2, 3, 4, 5 hoặc 6.

Đại lượng ngẫu nhiên sẽ được xem là rời rạc nếu nó có thể nhận hoặc chỉ các số nguyên, hoặc chỉ các số hữu tỷ. Khi đó tập các giá trị có thể của đại lượng ngẫu nhiên là vô hạn.

Đại lượng ngẫu nhiên liên tục là đại lượng ngẫu nhiên mà trong kết quả thí nghiệm có thể nhận bất kỳ giá trị số thực nào trên một khoảng hoặc một vài khoảng nào đó. Ví dụ nhiệt độ không khí, áp suất không khí hoặc độ lệch của chúng so với trung bình chuẩn nhiều năm, các thành phần của vectơ vận tốc gió có thể coi là đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

Sai số của các dụng cụ đo có thể xem là đại lượng ngẫu nhiên. Thông thường, các sai số này sẽ là đại lượng ngẫu nhiên dạng liên tục. Ta qui ước ký hiệu các đại lượng ngẫu nhiên bằng các chữ hoa: A, B, C, X, Y... còn các giá trị có thể của chúng là các chữ in thường tương ứng: a, b, c, x, y...

Giả sử đại lượng ngẫu nhiên rời rạc X có thể nhận các giá trị x_1, x_2,..., x_n với xác suất p_1, p_2,..., p_n.

Khi đã liệt kê được mọi giá trị mà đại lượng ngẫu nhiên có thể có và cho trước xác suất mà mỗi giá trị của nó nhận, ta hoàn toàn xác định được đại lượng ngẫu nhiên đó.

Hệ thức xác lập mối liên hệ giữa các giá trị có thể của đại lượng ngẫu nhiên và xác suất tương ứng của chúng gọi là luật phân bố của đại lượng ngẫu nhiên.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên rời rạc, luật phân bố có thể cho dưới dạng bảng mà một hàng là các giá trị có thể có của đại lượng ngẫu nhiên x_i, và một hàng khác là xác suất tương ứng p_i.

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$$

Khi đó số lượng các giá trị có thể của đại lượng ngẫu nhiên có thể là hữu hạn hoặc vô hạn, còn tổng các xác suất ở hàng thứ hai của bảng, giống như tổng các xác suất của nhóm đầy đủ các sự kiện xung khắc, bằng 1.

$$\sum p_i = 1.$$

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục không thể lập bảng tương tự như vậy, vì không thể liệt kê được các giá trị của nó. Ngoài ra, như chúng ta có thể thấy sau này, xác suất để cho đại lượng ngẫu nhiên liên tục nhận một giá trị cụ thể bằng không, mặc dù khi đó xác suất mà nó nhận một giá trị bất kỳ trong khoảng vô cùng bé xung quanh giá trị đó khác không.

Để đặc trưng đầy đủ cho đại lượng ngẫu nhiên, cả loại rời rạc lẫn loại liên tục, người ta sử dụng luật phân bố tích phân, cũng còn gọi là hàm phân bố.

Luật phân bố tích phân F(x) của đại lượng ngẫu nhiên X được định nghĩa là xác suất để cho đại lượng ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn một số x nào đó:

$$F(x) = P(X<x), \tag{1.1.1}$$

ở đây $P(X<x)$ là ký hiệu xác suất của sự kiện $X<x$.

Nếu xem đại lượng ngẫu nhiên X như là vị trí của điểm trên trục số, thì giá trị của hàm F(x) có nghĩa là xác suất để điểm này nằm bên trái điểm x. Sự lý giải hình học như vậy làm rõ các tính chất sau đây của hàm phân bố:

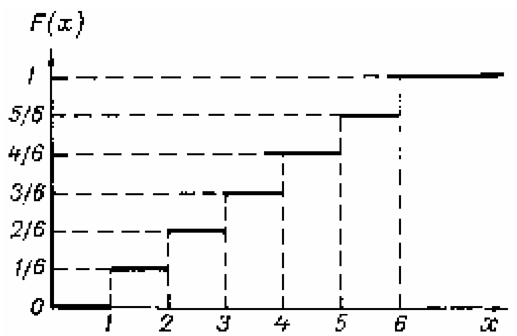
1) F(x) là hàm không giảm theo đối số, có nghĩa với $x_2>x_1$ thì $F(x_2)\geq F(x_1)$;

2) $F(-\infty) = 0$ như là xác suất của sự kiện bất khả;

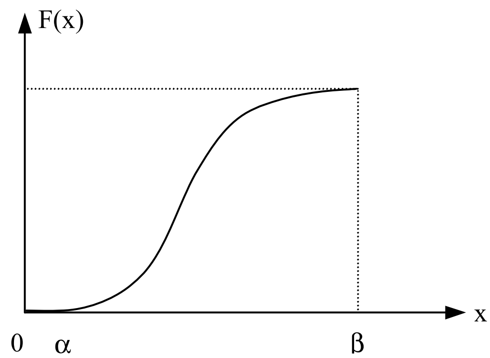
3) $F(+\infty) = 1$ như là xác suất của sự kiện tất yếu.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên rời rạc giá trị hàm phân bố F(x) là tổng xác suất p_i của mọi giá trị có thể x_i nhỏ hơn x, tức là:

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i) \tag{1.1.2}$$



Hình 1.1



Hình 1.2

Từ đó thấy rằng, đồ thị hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc là đường bậc thang có các điểm gián đoạn tại x_i, và giá trị đột biến ở các điểm đó bằng $p_i = P(X=x_i)$.

Trên hình 1.1 dẫn đồ thị hàm phân bố đại lượng ngẫu nhiên là số điểm xuất hiện khi gieo con xúc xắc. Trong trường hợp này mỗi một giá trị trong số các giá trị từ 1 đến 6 tương ứng với cùng xác suất p=1/6.

Đồ thị hàm phân bố đại lượng ngẫu nhiên liên tục mà các giá trị có thể của nó lấp đầy một khoảng [a, b] nào đó thường là một đường cong liên tục tăng từ 0 đến 1 (hình 1.2).

Tuy nhiên, có thể đưa ra những ví dụ về đại lượng ngẫu nhiên mà giá trị có thể của nó lấp đầy hoàn toàn một khoảng nào đó, nhưng đồ thị hàm phân bố lại có điểm gián đoạn. Đại lượng ngẫu nhiên như vậy gọi là đại lượng ngẫu nhiên dạng hỗn hợp. Đại lượng ngẫu nhiên dạng hỗn hợp trên thực tế hiếm khi gặp.

Sau này ta sẽ gọi đại lượng ngẫu nhiên mà hàm phân bố của nó liên tục và khả vi là đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

Khi đã biết hàm phân bố có thể xác định được xác suất để đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị trong khoảng cho trước.

Ta hãy xác định xác suất $P(a \le X < b)$ là xác suất mà đại lượng ngẫu nhiên X nhận giá trị lớn hơn hoặc bằng a và nhỏ hơn b.

Xác suất $P(X<b)$ để cho đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị nhỏ hơn b có thể coi như tổng xác suất của hai sự kiện xung khắc

$$P(X<b) = P(X<a) + P(a \le X < b). \qquad (1.1.3$$

Từ đó:

$$P(a \le X \le b) = P(X<b) - P(X<a) = F(b) - F(a). \qquad (1.1.4)$$

Như vậy, xác suất mà đại lượng ngẫu nhiên nhận giá trị trong khoảng cho trước, hoặc như người ta thường nói là đại lượng ngẫu nhiên rơi vào khoảng cho trước, bằng số gia hàm phân bố trên khoảng đó.

Bây giờ ta xét đại lượng ngẫu nhiên liên tục X và thu hẹp khoảng, cho b tiến đến a. Khi đó do tính liên tục của hàm phân bố, F(b) sẽ tiến đến F(a). Như vậy, khi lấy giới hạn đẳng thức (1.1.4) vế trái cho xác suất đại lượng ngẫu nhiên X nhận giá trị a, còn vế phải dần đến 0. Rõ ràng, đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục xác suất nhận một giá trị cụ thể bất kỳ nào đó bằng 0.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục có thể viết công thức (1.1.4) để tính xác suất rơi vào một khoảng của đại lượng ngẫu nhiên dưới dạng

$$P(a < X < b) = F(a) - F(b) \qquad (1.1.5)$$

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục, hàm phân bố của nó liên tục và khả vi, nên có thể sử dụng đạo hàm của hàm phân bố với tư cách là luật phân bố, được ký hiệu bằng f(x)

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \qquad (1.1.6)$$

và gọi được là luật phân bố vi phân hay là mật độ phân bố.

Mật độ phân bố là đạo hàm của hàm không giảm F(x) nên nó là hàm không âm, tức là $f(x) \ge 0$ với mọi x.

Biểu diễn hàm phân bố F(x) qua mật độ phân bố f(x) rồi lấy tích phân đẳng thức (1.1.6) trong khoảng từ $-\infty$ đến x, ta nhận được

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x) - F(-\infty) \qquad (1.1.7)$$

Vì $F(-\infty)= 0$, nên:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (1.1.8)$$

Từ các công thức (1.1.6) và (1.1.8) ta thấy rằng hàm phân bố và mật độ phân bố biểu diễn được qua nhau và do đó đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục chỉ cần một trong hai hàm phân bố hoặc hàm mật độ là đủ để đặc trưng cho nó.

Ta hãy biểu diễn xác suất rơi của đại lượng ngẫu nhiên vào khoảng cho trước (a,b) qua mật độ phân bố.

Sử dụng (1.1.5) và (1.1.8), ta được:

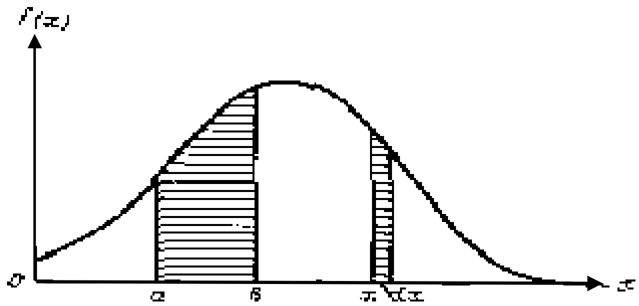
$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx . \qquad (1.1.9)$$

Từ đó thấy rằng, xác suất rơi của đại lượng ngẫu nhiên trong khoảng (a,b) cho trước bằng diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm f(x) (được gọi là đường cong phân bố), trục 0x và các đường thẳng x=a, x=b (hình 1.3).

Giả sử trong (1.1.9) đặt $a = -\infty$ và $b = +\infty$, ta nhận được:

$$P(-\infty < X < +\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx , \qquad (1.1.10)$$

tức là tổng diện tích nằm dưới đường cong phân bố bằng 1.



Hình 1.3

Để tích phân xác định trong (1.1.10) hội tụ, điều kiện cần là

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

và $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, có nghĩa là trong trường hợp đại lượng ngẫu nhiên X có thể nhận các giá trị trong khoảng vô hạn thì trục 0x phải là tiệm cận của đường cong phân bố về cả hai hướng.

Ta lấy một điểm x tuỳ ý và một đoạn phần tử dx kế cận nó (xem hình 1.3). Đại lượng f(x)dx gọi là xác suất phần tử, với độ chính xác đến vô cùng bé bậc cao hơn, nó xác định xác suất rơi của đại lượng ngẫu nhiên trên đoạn phần tử đó.

1.2. Các đặc trưng số của đại lượng ngẫu nhiên

Luật phân bố của đại lượng ngẫu nhiên là đặc trưng đầy đủ nhất của nó. Tuy nhiên, không phải lúc nào cũng có thể xác định được luật phân bố, thông thường người ta chỉ sử dụng một số đặc trưng số biểu thị những nét cơ bản của đường cong phân bố của đại lượng ngẫu nhiên. Đó là các mômen phân bố với bậc khác nhau.

Mômen gốc bậc k $m_k[X]$ của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc *X* là tổng dạng:

$$m_k[X] = \sum_i x_i^k p_i \tag{1.2.1}$$

với x_i là các giá trị có thể của đại lượng ngẫu nhiên, còn p_i là xác suất tương ứng của chúng.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục phép lấy tổng theo các giá trị rời rạc x_i được thay bằng phép lấy tích phân theo toàn bộ các giá trị của đối số liên tục x. Khi đó xác suất p_i được thay bằng xác suất phần tử f(x)dx.

Như vậy, đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$m_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \tag{1.2.2}$$

Mômen gốc bậc nhất $m_1[X]$ là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên X và được ký hiệu là M[X] hoặc m_x.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên rời rạc:

$$M[X] = \sum_i x_i p_i \tag{1.2.3}$$

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \tag{1.2.4}$$

Mômen gốc bậc k là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên luỹ thừa k, tức là:

$$m_k[X] = M[X^k] \tag{1.2.5}$$

Độ lệch của đại lượng ngẫu nhiên X khỏi kỳ vọng toán học của nó được gọi là đại lượng ngẫu nhiên qui tâm và ký hiệu bởi $\overset{o}{X}$

$$\overset{o}{X} = X - m_x \tag{1.2.6}$$

Mômen trung tâm bậc k $\mu_k[X]$ của đại lượng ngẫu nhiên X là mômen gốc bậc k của đại lượng ngẫu nhiên qui tâm:

$$\mu_k[X] = m_k[\overset{o}{X}] = M[\overset{o}{X}{}^k] = M[(X - m_x)^k]. \tag{1.2.7}$$

Mômen trung tâm bậc k là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên qui tâm luỹ thừa k.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên rời rạc:

$$M[X]=\sum_i (x_i - m_x)^k p_i \qquad (1.2.8)$$

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$\mu_k[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k f(x)dx \qquad (1.2.9)$$

Mômen trung tâm bậc nhất luôn luôn bằng không. Thật vậy, đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$\mu_1[X]=M[X-m_x]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx-m_x\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=m_x-m_x=0$$

Đối với đại lượng ngẫu nhiên rời rạc:

$$\mu_1[X]=\sum_i(x_i-m_x)p_i=\sum_i x_i p_i - m_x\sum_i p_i = m_x - m_x = 0$$

Các mômen gốc là các mômen của đường cong phân bố so với trục tung. Mômen trung tâm là mômen của đường cong phân bố so với trục đi qua trọng tâm của đường cong đó.

Mômen trung tâm bậc hai được gọi là phương sai của đại lượng ngẫu nhiên và ký hiệu là D[X] hay D_x.

$$D_x = \mu_2[X] = M[(X-m_x)^2] \qquad (1.2.10)$$

Phương sai là kỳ vọng toán học của bình phương độ lệch của đại lượng ngẫu nhiên khỏi kỳ vọng toán học của nó.

Đối với đại lượng ngẫu nhiên rời rạc:

$$D[X]=\sum_i (x_i - m_x)^2 p_i \qquad (1.2.11)$$

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx \qquad (1.2.12)$$

Phương sai của đại lượng ngẫu nhiên là đặc trưng cho sự phân tán, tản mạn của đại lượng ngẫu nhiên xung quanh kỳ vọng toán học. Phương sai có thứ nguyên là bình phương thứ nguyên của đại lượng ngẫu nhiên. Để có được đặc trưng phân tán cùng thứ nguyên với đại lượng ngẫu nhiên người ta sử dụng độ lệch bình phương trung bình, bằng căn bậc hai của phương sai và được ký hiệu là $\sigma[X]$ hoặc σ_x, $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Mômen trung tâm bậc ba dùng để đặc trưng cho tính bất đối xứng của phân bố. Nếu đường cong phân bố là đối xứng đối với kỳ vọng toán học thì mọi mômen trung tâm bậc lẻ bằng không. Thực vậy, ví dụ đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục, từ (1.2.9) ta có:

$$\mu_{2k+1}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{2k+1} f(x)dx.$$

Thay biến $y = x - m_x$ trong tích phân, khi đó:

$$\mu_{2k+1}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y + m_x)dy = \int_{-\infty}^{0} yf(y + m_x)dy + \int_{0}^{\infty} yf(y + m_x)dy.$$

Trong tích phân đầu tiên, khi thay $y = -z$, ta được:

$$\mu_{2k+1}[X] = -\int_{0}^{\infty} zf(m_x - z)dz + \int_{0}^{\infty} yf(y + m_x)dy =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} xf(m_x - x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x + m_x)dx = 0$$

vì hàm f(x) đối xứng đối với m_x:

$$f(m_x+x) = f(m_x-x)$$

Để đặc trưng cho tính bất đối xứng, người ta chọn một mômen đầu tiên trong số những mômen trung tâm bậc lẻ khác không, tức là μ_3. Ngoài ra, để có một đại lượng vô thứ nguyên đặc trưng cho tính bất đối xứng của phân bố, người ta dùng đại lượng:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \qquad (1.2.13)$$

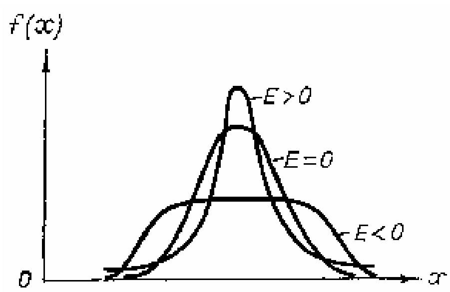
gọi là hệ số bất đối xứng.

Mômen trung tâm bậc bốn đặc trưng cho sự nhọn của đỉnh, sự dốc đứng của đường cong phân bố, đặc trưng đó gọi là độ nhọn và được xác định theo công thức:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (1.2.14)$$

Đối với loại phân bố thường gặp là phân bố chuẩn, như sẽ thấy trong mục 1.5, $\mu_4/\sigma_4 = 3$, có nghĩa là E=0.

Đối với các đường cong phân bố nhọn hơn đường cong phân bố chuẩn thì E > 0; còn tù hơn thì E < 0 (hình 1.4).



Hình 1.4

Giữa mômen gốc và mômen trung tâm có quan hệ sau:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2,$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3,$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4. \qquad (1.2.15)$$

Biểu thức thứ nhất thuận tiện cho việc tính phương sai, các biểu thức thứ hai và ba thuận tiện khi tính độ bất đối xứng và độ nhọn của phân bố.

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh đẳng thức thứ nhất trong (1.2.15) đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2m_x \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx +$$

$$+ m_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = m_2 - 2m_x^2 + m_x^2 = m_2 - m_1^2.$$

Ta hãy xét các luật phân bố và các đặc trưng số của chúng thường gặp nhất trong thực tế.

1.3. Luật phân bố Poatxông

Một trong những luật phân bố phổ biến nhất của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc là luật phân bố Poatxông.

Về phương diện toán học luật Poatxông được biểu diễn bởi:

$$P(X = m) = e^{-a}\frac{a^m}{m!}, \qquad (1.3.1)$$

ở đây P(X=m) là xác suất mà đại lượng ngẫu nhiên X nhận giá trị bằng số nguyên m. Có thể diễn giải về đại lượng ngẫu nhiên X tuân theo luật phân bố Poatxông như sau:

Giả sử theo thời gian một sự kiện A nào đó xảy ra nhiều lần. Ta sẽ xem số lần xuất hiện sự kiện này trong suốt khoảng thời gian cho trước $[t_0, t_0+T]$ như là một đại lượng ngẫu nhiên.

Đại lượng ngẫu nhiên này sẽ tuân theo luật phân bố Poatxông khi các điều kiện sau đây được thực hiện:

1. Xác suất rơi của số sự kiện cho trước vào khoảng thời gian đang xét phụ thuộc vào số sự kiện và độ dài của khoảng thời gian T, nhưng không phụ thuộc vào điểm đầu t_o của nó. Điều đó có nghĩa là các sự kiện phân bố theo thời gian với mật độ trung bình như nhau, tức là kỳ vọng toán học của số sự kiện trong một đơn vị thời gian bằng hằng số.

2. Xác suất của số lần xuất hiện sự kiện đã cho trong khoảng $[t_o, t_o+T]$ không phụ thuộc vào số lần và thời điểm xuất hiện sự kiện trước thời điểm t_o, điều đó có nghĩa là có sự độc lập tương hỗ giữa số lần xuất hiện sự kiện trong các khoảng thời gian không giao nhau.

3. Xác suất xuất hiện hai hay nhiều sự kiện trong khoảng thời gian yếu tố $[t, t+\Delta t]$ rất bé so với xác suất xuất hiện một sự kiện trong đó.

Ta xác định kỳ vọng toán học và phương sai đại lượng ngẫu nhiên X phân bố theo luật Poatxông.

Theo (1.2.3) kỳ vọng toán học được xác định dưới dạng:

$$m_x = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m e^{-a}\frac{a^m}{m!} = ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!} \qquad (1.3.2)$$

Chuỗi số trong (1.3.2) là chuỗi Macloren đối với hàm e^a, do đó:

$$m_x = ae^{-a}e^a = a. \qquad (1.3.3)$$

Như vậy, tham số a trong công thức (1.3.1) là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật Poatxông.

Theo (1.2.15), phương sai của đại lượng ngẫu nhiên X được xác định dưới dạng:

$$D_x = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 p_m - a^2 = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 e^{-a}\frac{a^m}{m!} - a^2 =$$

$$= ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{a^{m-1}}{(m-1)!} - a^2 = ae^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}[(m-1)+1]\frac{a^{m-1}}{(m-1)!} - a^2 =$$

$$= ae^{-a}[\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{a^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}] - a^2 \qquad (1.3.4)$$

Mỗi thành phần trong tổng vô hạn (1.3.4) là chuỗi Macloren đối với hàm e^a, nó có thể được viết dưới dạng $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$, từ đó (1.3.4) trở thành:

$$D_x = ae^{-a}(ae^a + e^a) - a^2 = a. \qquad (1.3.5)$$

Do đó, phương sai của đại lượng ngẫu nhiên phân bố theo luật Poatxông bằng chính kỳ vọng toán học của nó.

1.4. Luật phân bố đều

Đại lượng ngẫu nhiên liên tục được gọi là có phân bố đều nếu mọi giá trị có thể của nó nằm trong một khoảng nào đó và mật độ phân bố trên khoảng ấy không đổi.

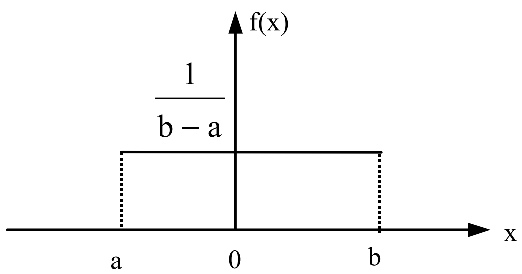
Mật độ phân bố đều được cho bởi công thức:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{khi } a < x < b \\ 0 & \text{khi } x < a \text{ hoặc } x > b \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

Đường cong phân bố có dạng như trên hình 1.5.

Hàm f(x) có các tính chất của mật độ phân bố. Thật vậy, $f(x) \geq 0$ với mọi x, và:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{dx}{b-a} = 1.$$



Hình 1.5

Ta xác định hàm phân bố F(x):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0 \ \text{khi} \ \ x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \ \ \text{khi} \ \ a<x<b \\ 1 \ \text{khi} \ \ x>b \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Đồ thị hàm phân bố được dẫn trên hình 1.6.

Ta xác định các đặc trưng số của phân bố đều. Kỳ vọng toán học bằng

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{a+b}{2}. \tag{1.4.3}$$

Mômen trung tâm bậc k bằng:

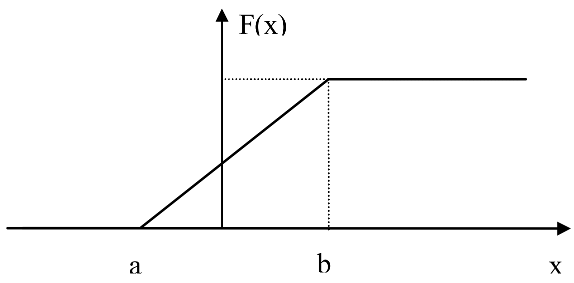
$$\mu_k=\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^k dx. \tag{1.4.4}$$

Thay biến $x-\dfrac{a+b}{2}=t$ trong tích phân (1.4.4) ta nhận được:

$$\mu_k=\frac{1}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^k dt \tag{1.4.5}$$

Từ đó nhận thấy rằng, tất cả các mômen trung tâm bậc lẻ bằng không: $\mu_{2l-1}=0$, l=1,2,... giống như tích phân của hàm lẻ trong khoảng đối xứng.

Mômen trung tâm bậc chẵn bằng:



Hình 1.6

$$\mu_{2l}=\frac{2}{b-a}\int_0^{\frac{b-a}{2}} t^{2l}dt=\frac{(b-a)^{2l}}{2^{2l}(2l-1)}, \quad l=1,2,... \tag{1.4.6}$$

Với l = 1, ta nhận được giá trị của phương sai:

$$D_x=\mu_2=\frac{(b-a)^2}{12}. \tag{1.4.7}$$

Từ đó độ lệch bình phương trung bình là:

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{1.4.8}$$

Độ bất đối xứng của phân bố S=0, vì μ_3=0. Độ nhọn của phân bố bằng

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{(b-a)^4.144}{80(b-a)^4} - 3 = -1{,}2 \qquad (1.4.9)$$

1.5. Luật phân bố chuẩn

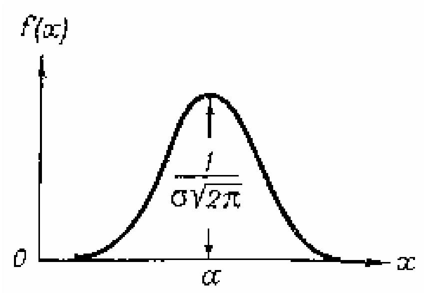
Trên thực tế thường gặp nhất là các đại lượng ngẫu nhiên mà mật độ phân bố của chúng có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (1.5.1)$$

Luật phân bố đặc trưng bởi (1.5.1) rất phổ biến, nên được gọi là luật phân bố chuẩn, còn đại lượng ngẫu nhiên có mật độ phân bố đó được gọi là đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn.

Trong nhiều hiện tượng tự nhiên và kỹ thuật, một quá trình đang xét là kết quả tác động tổng hợp của hàng loạt các nhân tố ngẫu nhiên. Khi đó đại lượng ngẫu nhiên đặc trưng bằng số của quá trình đang xét là tổng của một chuỗi các đại lượng ngẫu nhiên mà mỗi một trong chúng tuân theo một luật phân bố nào đó. Nếu đại lượng ngẫu nhiên là tổng của một số lớn các đại lượng ngẫu nhiên độc lập hoặc phụ thuộc yếu, và mỗi một trong các đại lượng ngẫu nhiên thành phần có tỷ trọng đóng góp không lớn lắm so với tổng chung, thì luật phân bố của đại lượng ngẫu nhiên tổng là chuẩn hoặc gần chuẩn, không phụ thuộc vào phân bố của các đại lượng ngẫu nhiên thành phần.

Điều này rút ra từ định lý nổi tiếng của Liapunov: nếu đại lượng ngẫu nhiên X là tổng của các đại lượng ngẫu nhiên độc lập $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ và thoả mãn điều kiện:



Hình 1.7

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_3[|X_i|]}{\sigma^3[X]} = 0, \qquad (1.5.2)$$

thì khi $n\to\infty$ luật phân bố của đại lượng ngẫu nhiên X tiến vô hạn đến luật chuẩn.

Điều kiện (1.5.2) phản ánh sự tiến dần đến không của tỷ số giữa tổng các mômen trung tâm tuyệt đối bậc ba $\mu_3[|X_i|]$ của các đại lượng ngẫu nhiên X_i và lập phương độ lệch bình phương trung bình của đại lượng ngẫu nhiên tổng cộng X khi tăng dần số các số hạng, và đặc trưng cho sự nhỏ tương đối của từng số hạng ngẫu nhiên trong tổng chung.

Đường cong phân bố của luật phân bố chuẩn dẫn ra trên hình 1.7 có tên là lát cắt Ơle, hay đường cong Gauxơ.

Đường cong phân bố đối xứng qua đường thẳng x=a và có cực đại bằng $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ tại điểm x=a.

Để xác định ý nghĩa của các tham số a và σ, ta tính kỳ vọng toán học và phương sai của đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn:

$$m_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (1.5.3)$$

Thay biến trong tích phân (1.5.3):

$$\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t \qquad (1.5.4)$$

ta được:

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2}\sigma t + a) e^{-t^2} dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt. \qquad (1.5.5)$$

Tích phân thứ nhất trong (1.5.5) bằng không vì đó là tích phân của hàm lẻ trên miền giới hạn đối xứng, tích phân thứ hai là tích phân Poatxông đã biết, bằng $\sqrt{\pi}$. Từ đó m_x=a, tức là tham số a trong hàm (1.5.1) là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên.

Tiếp theo:

$$D_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \qquad (1.5.6)$$

Thực hiện việc đổi biến (1.5.4) trong tích phân (1.5.6) ta được:

$$D_x = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt. \qquad (1.5.7)$$

Lấy tích phân từng phần (1.5.7) ta được:

$$D_x = \sigma^2 \qquad (1.5.8)$$

Do đó, tham số σ là độ lệch bình phương trung bình của đại lượng ngẫu nhiên. Tham số a chỉ vị trí tâm đối xứng của đường cong phân bố, thay đổi a có nghĩa là dịch chuyển tâm này dọc theo trục 0x. Tham số σ xác định tung độ đỉnh đường cong phân bố, bằng $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Trị số σ càng nhỏ thì đỉnh càng cao, tức là đường cong phân bố càng nhọn.

Như vậy, mật độ xác suất của luật phân bố chuẩn được xác định bởi hai tham số là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên và độ lệch bình phương trung bình hoặc phương sai của nó.

Ta tính mômen trung tâm của phân bố chuẩn:

$$\mu_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \qquad (1.5.9)$$

Sử dụng phép thay biến (1.5.4) vào tích phân ta nhận được:

$$\mu_k = \frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt\,, \tag{1.5.10}$$

Lấy tích phân từng phần ta có:

$$\mu_k = \frac{(k-1)\left(\sigma\sqrt{2}\right)^k}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{k-2} e^{-t^2} dt\,, \tag{1.5.11}$$

Vì:

$$\mu_{k-2} = \frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^{k-2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{k-2} e^{-t^2} dt\,, \tag{1.5.12}$$

nên ta nhận được công thức truy hồi:

$$\mu_k = (k-1)\sigma^2\mu_{k-2}, \tag{1.5.13}$$

Vì $\mu_o=1$ và $\mu_1=0$ đối với bất kỳ đại lượng ngẫu nhiên nào, nên tất cả các mômen trung tâm bậc lẻ của phân bố chuẩn bằng không. Đối với các mômen trung tâm bậc chẵn ta có:

$$\mu_2=\sigma^2;\ \ \mu_4=3\sigma^4;\ \ \ldots\ \ \mu_{2l} = (2l-1)!!\sigma^{2l}$$

Từ đó thấy rằng, đối với phân bố chuẩn độ bất đối xứng và độ nhọn bằng không:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0, \quad E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0,$$

Ta hãy tính xác suất rơi của đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn vào khoảng (α,β). Theo (1.1.5) ta có

$$P(\alpha<X<\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{1.5.14}$$

Thay (1.5.4) vào ta được:

$$P(\alpha<X<\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \tag{1.5.15}$$

Hàm

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dx \tag{1.5.16}$$

được gọi là hàm Laplas.

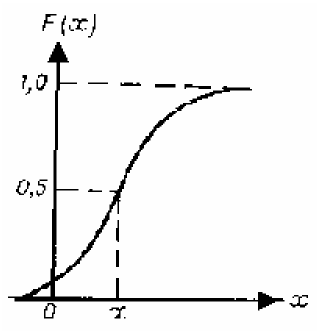
Từ đẳng thức (1.5.15) có thể biểu diễn xác suất rơi vào khoảng $(\alpha;\beta)$ qua hàm Laplas:

$$P(\alpha<X<\beta) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{1.5.17}$$

Hàm Laplas có các tính chất sau:

1. $\Phi(0) = 0$;
2. $\Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = 1$;
3. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.



Hình 1.8

Thực vậy:

$$\Phi(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-x} e^{-t^2}dt$$

Thay t = –u ta có:

$$\Phi(-x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-u^2}du = -\Phi(x)$$

Nếu tính xác suất rơi trong khoảng đối xứng qua kỳ vọng toán học (a-h, a+h), thì

$$P(a-h<X<a+h) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a+h-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-h-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{h}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(-\frac{h}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] = \Phi\left(\frac{h}{\sigma\sqrt{2}}\right) \tag{1.5.18}$$

Hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên X phân bố chuẩn được xác định dưới dạng:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] \tag{1.5.19}$$

Đồ thị của F(x) được biểu diễn trên hình 1.8. Điểm x=α tương ứng với F(x)=1/2.

1.6. Luật phân bố Rơle và Macxoen

Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo luật phân bố Rơle nếu hàm mật độ phân bố có dạng:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{khi } x\ge 0\\ 0 & \text{khi } x<0\end{cases} \tag{1.6.1}$$

Trong mục 1.11 sẽ chỉ ra rằng modul của vectơ ngẫu nhiên phân bố chuẩn hai chiều có các độ lệch bình phương trung bình của các thành phần bằng nhau và các kỳ vọng bằng không là đại lượng ngẫu nhiên có luật phân bố Rơle. Đồ thị hàm (1.6.1) có dạng như trên hình 1.9. Theo (1.1.8), hàm phân bố (hình 1.10) bằng:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{khi } x\ge 0\\ 0 & \text{khi } x<0\end{cases} \tag{1.6.2}$$

Ta hãy xác định đặc trưng số của phân bố Rơ le:

$$m_x=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \tag{1.6.3}$$

Sau khi lấy tích phân từng phần ta nhận được:

$$m_x=-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \tag{1.6.4}$$

Số hạng thứ nhất trong (1.6.4) bằng 0, số hạng thứ hai sau khi thay biến $x=\sqrt{2}\sigma t$ sẽ dẫn đến tích phân Poatxông. Từ đó:

$$m_x=\sqrt{2}\sigma\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \tag{1.6.5}$$

Theo (1.2.12), phương sai bằng:

$$D_x=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty\left(x-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\right)^2xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 \tag{1.6.6}$$

Tương tự, nếu sử dụng các đẳng thức thứ hai và thứ ba trong (1.2.15) và sau khi tính các tích phân tương ứng ta nhận được giá trị của mômen trung tâm bậc ba và bậc bốn của phân bố:

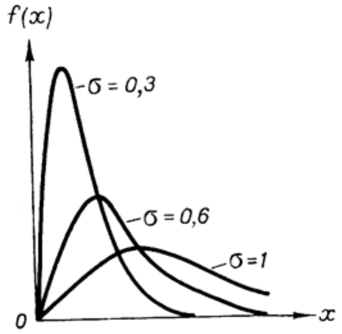
$$\mu_3=(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^3 \tag{1.6.7}$$

$$\mu_4=\left(8-\frac{3\pi^2}{4}\right)\sigma^4 \tag{1.6.8}$$

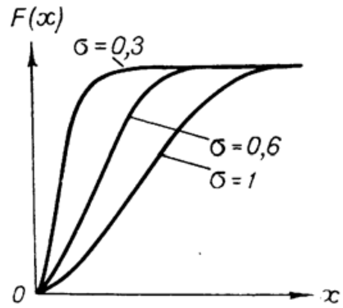
Từ (1.2.13) và (1.2.14) ta nhận được giá trị của độ bất đối xứng và độ nhọn đối với phân bố Rơle:

$$S = \frac{(\pi - 3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^3}{\sqrt{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)^3}\sigma^3} = 2\frac{\pi - 3}{4 - \pi}\sqrt{\frac{\pi}{4 - \pi}} \approx 0{,}63 \qquad (1.6.9)$$

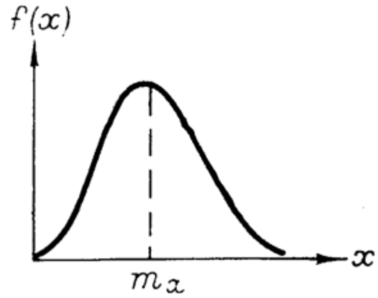
$$E = \frac{\left(32 - 3\pi^2\right)\sigma^4}{\left(4 - \pi^2\right)\sigma^4} - 3 \approx -0{,}3 \qquad (1.6.10)$$



Hình 1.9



Hình 1.10



Hình 1.11

Từ đây thấy rằng đường cong phân bố Rơle không đối xứng qua kỳ vọng toán học. Điểm cực đại gọi là mốt của phân bố, nằm phía trái kỳ vọng toán học. Giá trị âm của độ nhọn chỉ ra rằng đường cong phân bố Rơle có đỉnh bằng phẳng hơn so với phân bố chuẩn tương ứng (khi cùng giá trị σ).

Nếu vectơ ngẫu nhiên ba chiều tuân theo luật phân bố chuẩn có các độ lệch bình phương trung bình của các thành phần bằng nhau còn kỳ vọng toán học bằng không, thì có thể chỉ ra rằng modul của vectơ ấy là một đại lượng ngẫu nhiên có mật độ phân bố bằng:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sigma^2}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{khi } x \geq 0 \\ 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \qquad (1.6.11)$$

Hàm f(x) như trên được gọi là luật phân bố Măcxoen. Ví dụ, phân bố của vận tốc các phân tử khí tuân theo luật Măcxoen. Đồ thị hàm (1.6.11) dẫn trên hình 1.11.

Giống như phân bố Rơle, phân bố Măcxoen cũng được xác định bởi một tham số σ.

Tương tự như đã làm đối với phân bố Rơle, có thể nhận các biểu thức sau đối với hàm phân bố và đặc trưng số của phân bố Măcxoen:

$$F(x) = \begin{cases} 2\left[\Phi\left(\dfrac{x}{\sigma}\right) - \dfrac{x}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right] & \text{khi } x \geq 0 \\ 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \qquad (1.6.12)$$

$$m_x = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \qquad (1.6.13)$$

$$D_x = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right)\sigma^2 \qquad (1.6.14)$$

1.7. Hệ các đại lượng ngẫu nhiên và luật phân bố của chúng

Khi giải quyết nhiều bài toán người ta thường gặp tình huống là kết quả thí nghiệm được mô tả không phải chỉ bởi một, mà là một số đại lượng ngẫu nhiên. Ví dụ, hình thế synop phụ thuộc vào nhiều đại lượng ngẫu nhiên: nhiệt độ không khí, áp suất, độ ẩm...

Trong các trường hợp này ta sẽ nói rằng có một hệ các đại lượng ngẫu nhiên. Các tính chất của hệ đại lượng ngẫu nhiên không được mô tả hết bởi những tính chất của các đại lượng ngẫu nhiên riêng rẽ, chúng còn bao hàm cả những mối quan hệ tương hỗ giữa các đại lượng ngẫu nhiên của hệ.

Chúng ta sẽ xem hệ hai đại lượng ngẫu nhiên như là các toạ độ của điểm ngẫu nhiên trên mặt phẳng, còn hệ ba đại lượng ngẫu nhiên như là toạ độ của điểm ngẫu nhiên trong không gian ba chiều. Một cách tương tự, hệ n đại lượng ngẫu nhiên sẽ được xem như toạ độ của điểm ngẫu nhiên trong không gian n chiều.

Cũng có thể xét hệ đại lượng ngẫu nhiên như các thành phần của vectơ ngẫu nhiên trên mặt phẳng, trong không gian ba chiều hoặc n chiều. Tương ứng với điều này, các giá trị ngẫu nhiên x_i, y_i của hệ các đại lượng ngẫu nhiên X và Y sẽ được biểu diễn hoặc dưới dạng các điểm $N_{i,j}$ có các toạ độ (x_i, y_j), hoặc dưới dạng bán kính véctơ $r_{i,j}$ của các điểm đó (hình 1.12).

Ta xét các luật phân bố của hệ hai đại lượng ngẫu nhiên.

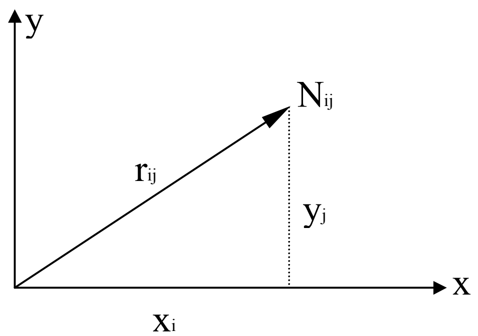
Hàm phân bố của hệ hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y là xác suất thực hiện đồng thời các bất đẳng thức X<x, Y<y

$$F(x,y) = P\,(X<x,\ Y<y) \qquad (1.7.1)$$

Về mặt hình học, F(x,y) là xác suất rơi của điểm ngẫu nhiên (X,Y) vào một hình vuông không giới hạn nằm ở góc trái bên dưới của đỉnh ở điểm (x,y) (hình 1.13).

Hàm phân bố có các tính chất sau đây:

1. F(x,y) là hàm không giảm, tức nếu $x_2>x_1$ thì $F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$, còn nếu $y_2>y_1$ thì $F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$.



Hình 1.12

Thực vậy, chẳng hạn khi dịch chuyển biên phải của hình vuông (tăng x) ta không thể giảm xác suất rơi vào nó.

2. Vì các sự kiện X<–∞ và Y<–∞ là những sự kiện bất khả, nên

$$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0.$$

3. Vì các sự kiện $X<+\infty$, $Y<+\infty$ là những sự kiện chắc chắn, nên

$$F(x,+\infty)=P(X<x,Y<+\infty) = P(X<x) = F_1(x),$$

với $F_1(x)$ là hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên X.

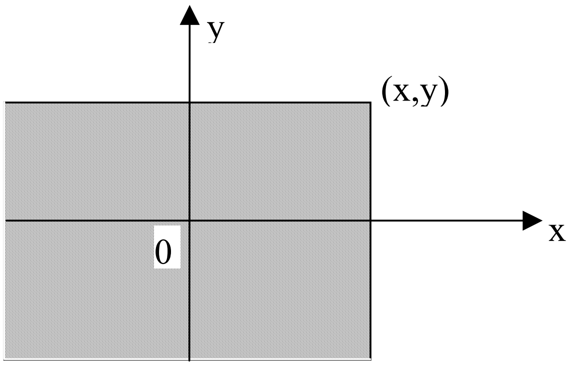
Một cách tương tự:

$$F(+\infty,y) = F_2(y),$$

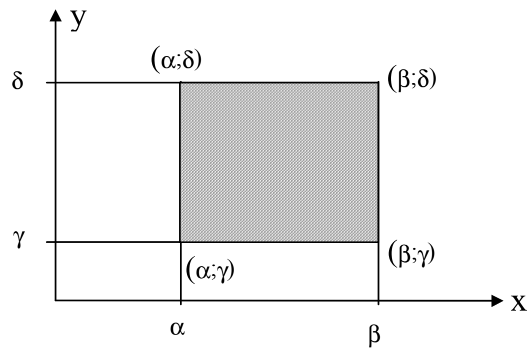
với $F_2(y)$ hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên Y.

4. $F(+\infty,+\infty) = 1$.

Ta hãy xác định xác suất rơi của điểm ngẫu nhiên vào một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục toạ độ.



Hình 1.13



Hình 1.14

Xét hình chữ nhật R giới hạn bởi các đường thẳng $x=\alpha$, $x=\beta$, $y=\gamma$, $y=\delta$

Các biên trái và dưới thuộc hình chữ nhật, còn các biến phải và trên thì không.

Sự kiện điểm ngẫu nhiên N(X,Y) rơi vào trong hình chữ nhật R, tức $N\in R$, tương đương với việc các sự kiện $\alpha\le X\le\beta$, $\gamma\le Y\le\delta$ đồng thời xảy ra.

Xác suất rơi vào trong hình chữ nhật R bằng xác suất rơi vào trong hình vuông có đỉnh (β, δ) trừ đi xác suất rơi vào hình vuông có đỉnh (α,δ), trừ đi xác suất rơi vào hình vuông đỉnh (β, γ), cộng với xác suất rơi vào hình vuông đỉnh (α, γ).

$$P(N\in R) = F(\beta,\delta)-F(\alpha,\delta)-(F\beta,\gamma)+F(\alpha,\gamma) \qquad (1.7.2)$$

Ta đưa vào khái niệm mật độ phân bố của hệ hai đại lượng ngẫu nhiên.

Giả sử có hệ hai đại lượng ngẫu nhiên liên tục X và Y. Lấy trên mặt phẳng điểm (x,y) và một hình chữ nhật nhỏ R_Δ kề sát nó có các cạnh là Δx và Δy.

Xác suất rơi của điểm ngẫu nhiên N (X,Y) vào trong hình vuông R_Δ, theo (1.7.2), bằng:

$$P(N\in R_\Delta) = F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)+F(x,y) \qquad (1.7.3)$$

Chia xác suất này cho diện tích hình chữ nhật $\Delta x\Delta y$ và lấy giới hạn khi $\Delta x\to 0$ và $\Delta y\to 0$, ta nhận được mật độ xác suất tại điểm (x,y).

Giả thiết rằng hàm F(x,y) khả vi hai lần, khi đó:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) + F(x,y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta y} \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\dfrac{\partial F(x, y+\Delta y)}{\partial x} - \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad (1.7.4)$$

Hàm

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad (1.7.5)$$

được gọi là mật độ phân bố của hệ. Về mặt hình học có thể biểu diễn hàm hai biến f(x,y) này như là một mặt trong không gian và được gọi là mặt phân bố. Hàm f(x,y) không âm vì nó là giới hạn của tỷ số giữa hai đại lượng không âm là xác suất rơi vào hình chữ nhật và diện tích hình chữ nhật. Biểu thức f(x,y)dxdy được gọi là yếu tố xác suất của hệ hai đại lượng ngẫu nhiên. Yếu tố xác suất là xác suất rơi vào trong hình chữ nhật yếu tố R_Δ tiếp giáp điểm (x,y).

Xác suất rơi của điểm N(X,Y) vào một miền D bất kỳ được xác định dưới dạng tích phân hai lớp:

$$P(N\in D) = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy \qquad (1.7.6)$$

Trong trường hợp nếu miền D là hình chữ nhật R, thì:

$$P(N\in R) = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(x,y)dxdy \qquad (1.7.7)$$

Khi sử dụng công thức (1.7.7) có thể biểu diễn hàm phân bố F(x,y) qua mật độ phân bố f(x,y)

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \qquad (1.7.8)$$

Vì xác suất rơi trên toàn mặt bằng 1, nên:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \qquad (1.7.9)$$

Về mặt hình học, xác suất rơi vào trong miền D là thể tích hình lăng trụ được giới hạn bởi miền D ở phía dưới, còn phía trên là mặt phân bố (hình 1.15)

Để cho tích phân xác định $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ hội tụ, thì cần thiết là mặt phân bố phải tiệm cận tới mặt x0y theo mọi hướng.

Khi biết hàm phân bố của hệ hai đại lượng ngẫu nhiên, có thể xác định hàm phân bố của mỗi đại lượng ngẫu nhiên trong đó:

$$F_1(x) = F(x,+\infty) \tag{1.7.10}$$

$$F_2(y) = F(+\infty,y) \tag{1.7.11}$$

Ta hãy biểu diễn mật độ phân bố của từng đại lượng ngẫu nhiên qua mật độ phân bố của hệ:

$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy \tag{1.7.12}$$

Nhưng mật độ phân bố là đạo hàm của hàm phân bố, khi đó

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \tag{1.7.13}$$

$$f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \tag{1.7.14}$$

Luật phân bố của một đại lượng ngẫu nhiên của hệ với điều kiện đại lượng ngẫu nhiên thứ hai nhận một giá trị xác định gọi là luật phân bố có điều kiện.

Luật phân bố có điều kiện sẽ được ký hiệu dưới dạng:

$f(x/y)$ – luật phân bố đại lượng ngẫu nhiên X với điều kiện Y=y

$f(y/x)$ – luật phân bố đại lượng ngẫu nhiên Y với điều kiện X=x.

Xác suất rơi trong hình chữ nhật yếu tố R_Δ, bằng $f(x,y)dxdy$, có thể biểu diễn như là tích xác suất rơi vào dải I, bằng $f_1(x)dx$ và xác suất rơi vào dải II, bằng $f(x/y)dy$, với điều kiện đã xảy ra sự kiện rơi vào dải I (hình 1.16).

Từ đó:

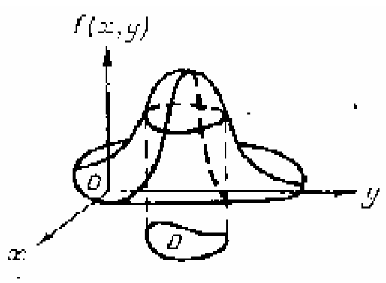
$$f(x,y)dxdy = f_1(x)dxf(y/x)dy \tag{1.7.15}$$

Giản ước cho dxdy, ta có:

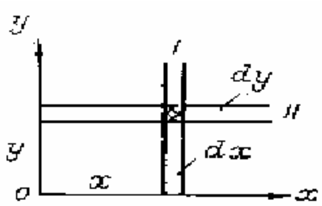
$$f(x,y) = f_1(x)f(y/x) \tag{1.7.16}$$

Tương tự có thể thu được đẳng thức:

$$f(x,y) = f_2(y)f(x/y) \tag{1.7.17}$$



Hình 1.15



Hình 1.16

Từ đó có thể biểu diễn luật phân bố có điều kiện qua mật độ phân bố của hệ dưới dạng:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx} \quad (1.7.18)$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy} \quad (1.7.19)$$

Các đại lượng ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập nếu luật phân bố của một trong chúng không phụ thuộc vào việc đại lượng ngẫu nhiên kia nhận giá trị nào.

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên độc lập:

$$f(x/y) = f_1(x) \quad (1.7.20)$$

$$f(y/x) = f_2(y) \quad (1.7.21)$$

Nếu X không phụ thuộc vào Y, thì Y cũng không phụ thuộc vào X.

Thật vậy, từ các đẳng thức (1.7.16) và (1.7.17) ta thấy rằng, nếu $f(x/y)=f_1(x)$ thì $f(y/x) = f_2(y)$.

Ta có định lý sau:

Để cho các đại lượng ngẫu nhiên X và Y là độc lập, điều kiện cần và đủ là đẳng thức sau được thực hiện:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y), \quad (1.7.22)$$

tức là mật độ phân bố của hệ bằng tích mật độ phân bố của các đại lượng ngẫu nhiên thành phần trong hệ.

Một cách tương tự, có thể xác định được luật phân bố của hệ n đại lượng ngẫu nhiên.

Hàm phân bố của hệ n đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2,..., X_n$ là xác suất để thực hiện đồng thời n bất đẳng thức $X_i<x_i$, i= 1,2,...,n.

$$F(x_1,x_2,...,x_n) = P(X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_n<x_n) \quad (1.7.23)$$

Nếu tồn tại đạo hàm riêng hỗn hợp của hàm $F(x_1,x_2,...,x_n)$ được lấy lần lượt theo từng đối số:

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{\partial^n F(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} \quad (1.7.24)$$

thì nó được gọi là mật độ phân bố của hệ các đại lượng ngẫu nhiên liên tục $(X_1, X_2,..., X_n)$.

Ta sẽ nhận được hàm phân bố của mỗi đại lượng ngẫu nhiên của hệ, nếu trong hàm phân bố của hệ ta đặt tất cả các biến còn lại bằng +∞.

$$F_1(x_1) = F(x_1,+\infty,...,+\infty) \quad (1.7.25)$$

Hàm phân bố của hệ con $(X_1, X_2,...,X_k)$ nhận được từ hệ có dạng:

$$F_{1,2,...,k}(x_1,x_2,...,x_k) = F(x_1, x_2,...,x_k,+\infty,...,+\infty) \quad (1.7.26)$$

Mật độ phân bố của mỗi đại lượng của hệ nhận được bằng cách tích phân mật độ của hệ trong khoảng vô hạn theo các biến còn lại.

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n \qquad (1.7.27)$$

Mật độ phân bố của hệ con (X_1, X_2,...,X_k) được xác định dưới dạng:

$$f_{1,2,\ldots,k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_{k+1} \ldots dx_n \qquad (1.7.28)$$

Luật phân bố có điều kiện của hệ con (X_1, X_2,...,X_k) là luật phân bố được tính với điều kiện các đại lượng còn lại (X_{k+1},..., X_n) đã nhận các giá trị xác định x_{k+1}, ..., x_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k / x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_{k+1,\ldots,n}(x_{k+1}, \ldots, x_n)} \qquad (1.7.29)$$

Các đại lượng ngẫu nhiên X_1, X_2,...,X_n được gọi là độc lập nếu luật phân bố của mỗi hệ con không phụ thuộc vào các đại lượng ngẫu nhiên còn lại nhận giá trị nào.

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên độc lập:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \qquad (1.7.30)$$

Hàm phân bố của hệ được biểu diễn qua mật độ phân bố dưới dạng:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \qquad (1.7.31)$$

Xác suất rơi của điểm ngẫu nhiên N(X_1, X_2,...,X_n) trong giới hạn miền D–n chiều được xác định dưới dạng:

$$P(N \in D) = \int_{(D)} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \qquad (1.7.32)$$

1.8. Các đặc trưng số của hệ các đại lượng ngẫu nhiên

Mômen gốc $m_{k,s}$ bậc k+s của hệ hai đại lượng ngẫu nhiên (X,Y) là kỳ vọng toán học của tích X^k và Y^s:

$$m_{k,s} = M[X^k Y^s] \qquad (1.8.1)$$

Mômen trung tâm $\mu_{k,s}$, bậc k+s là kỳ vọng toán học của tích $\overset{o}{X}{}^k . \overset{o}{Y}{}^s$, ở đây $\overset{o}{X}$ và $\overset{o}{Y}$ là các đại lượng ngẫu nhiên qui tâm.

$$\mu_{k,s} = M[\overset{o}{X}{}^k . \overset{o}{Y}{}^s] \qquad (1.8.2)$$

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc ta có:

$$m_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{i,j} \qquad (1.8.3)$$

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j \left(x_i - m_x\right)^k \left(y_j - m_y\right)^s p_{i,j} \tag{1.8.4}$$

trong đó $p_{i,j} = P(X=x_i, Y=y_j)$.

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$m_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y) dxdy \tag{1.8.5}$$

$$\mu_{k,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x\right)^k \left(y - m_y\right)^s f(x,y) dxdy \tag{1.8.6}$$

Số k+s được gọi là bậc của mômen. Cũng giống như đối với một đại lượng ngẫu nhiên, các mômen của hệ đại lượng ngẫu nhiên không phải là những đặc trưng bao quát đầy đủ, tuy nhiên chúng xác định một loạt các tính chất quan trọng của hệ.

Các mômen bậc nhất $m_{1,0}$ và $m_{0,1}$ là kỳ vọng toán học của các đại lượng ngẫu nhiên thành phần của hệ.

$$m_{1,0} = M[XY^o] = M[X] = m_x \tag{1.8.7}$$

$$m_{0,1} = M[X^oY] = M[X] = m_y \tag{1.8.8}$$

Về mặt hình học, đây là các toạ độ của điểm trung bình mà các điểm ngẫu nhiên N(X,Y) phân tán xung quanh nó.

Ta hãy xét các mômen trung tâm bậc hai của hệ:

$$\mu_{2,0} = M\left[\overset{o}{X}{}^2 \overset{o}{Y}{}^o\right] = M\left[\overset{o}{X}{}^2\right] = D[X] \tag{1.8.9}$$

$$\mu_{0,2} = M\left[\overset{o}{X}{}^o \overset{o}{Y}{}^2\right] = M\left[\overset{o}{Y}{}^2\right] = D[Y] \tag{1.8.10}$$

Đây là phương sai của các đại lượng ngẫu nhiên, chúng đặc trưng cho sự phân tán của các điểm ngẫu nhiên theo hướng các trục toạ độ.

Mômen trung tâm hỗn hợp bậc hai được gọi là mômen tương quan hay mômen liên hệ của các đại lượng ngẫu nhiên và bằng:

$$\mu_{1,1} = M\left[\overset{o}{X}{}^1 \overset{o}{Y}{}^1\right] = M[(X-m_x)(Y-m_y)] = R_{xy} \tag{1.8.11}$$

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên rời rạc:

$$R_{xy} = \sum_i \sum_j \left(x_i - m_x\right)\left(y_j - m_y\right) p_{i,j} \tag{1.8.12}$$

Đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x\right)\left(y - m_y\right) f(x,y) dxdy \tag{1.8.13}$$

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên độc lập $R_{x,y}$=0.

Thực vậy, từ (1.7.22):

$$R_{xy} = \iint\limits_{-\infty} (x - m_x)(y - m_y) f_1(x) f_2(y) dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = \mu_1[X]\mu_1[Y] = 0$$

Từ đó thấy rằng, nếu $R_{x,y} \neq 0$, thì X và Y là những đại lượng phụ thuộc.

Đại lượng:

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.8.14)$$

được gọi là hệ số tương quan của các đại lượng ngẫu nhiên X và Y.

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên độc lập thì r_{xy} = 0. Điều ngược lại sẽ không đúng, tức r_{xy} = 0 là điều kiện cần để X và Y độc lập, nhưng chưa phải là điều kiện đủ.

Các đại lượng ngẫu nhiên X và Y có r_{xy} = 0 được gọi là các đại lượng ngẫu nhiên không tương quan với nhau.

Từ tính độc lập của đại lượng ngẫu nhiên suy ra tính không tương quan của chúng.

Với tư cách là các đặc trưng số của hệ, từ n đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ ta nhận được n kỳ vọng toán học m_{x_i}, i = 1,2,...,n của các đại lượng ngẫu nhiên ban đầu, n phương sai D_{x_i} của chúng và n(n–1) mômen tương quan $R_{x_i x_j}$:

$$R_{x_i x_j} = M[(X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j})] \quad (1.8.15)$$

Phương sai D_{x_i} có thể xem như mômen tương quan của đại lượng ngẫu nhiên X_i với chính nó, có nghĩa là:

$$D_{x_i} = R_{x_i x_i} = M[(X_i - m_{x_i})^2] \quad (1.8.16)$$

Để thuận tiện ta sắp xếp các mômen tương quan dưới dạng ma trận vuông và gọi là ma trận tương quan của hệ các đại lượng ngẫu nhiên $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} = \left\| R_{ij} \right\| \quad (1.8.17)$$

Từ định nghĩa mômen tương quan ta thấy rằng:

$$R_{ij} = R_{x_i x_j} = M\left[\overset{o}{X}_i \overset{o}{X}_j\right] = M\left[\overset{o}{X}_j \overset{o}{X}_i\right] = R_{x_j x_i} = R_{ji} \quad (1.8.18)$$

Vì vậy có thể chỉ cần điền một nửa trên của ma trận tương quan tính từ đường chéo chính.

$$\left\|R_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & R_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.8.19}$$

Trong trường hợp khi các đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, \dots, X_n$ không tương quan, ma trận tương quan có dạng:

$$\left\|R_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & R_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots \\ & & & R_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.8.20}$$

Ma trận như vậy gọi là ma trận đường chéo.

Thay cho các mômen tương quan người ta thường sử dụng các hệ số tương quan

$$r_{ij} = r_{x_i x_j} = \frac{R_{x_i x_j}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} \tag{1.8.21}$$

và chúng lập thành ma trận tương quan chuẩn hoá mà các phần tử trên đường chéo chính của nó bằng đơn vị, $r_{x_i x_j} = 1$

$$\left\|r_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8.22}$$

1.9. Các định lý về đặc trưng số

Đối với các đặc trưng số của đại lượng ngẫu nhiên những định lý sau đây là đúng:

1. Kỳ vọng toán học của đại lượng không ngẫu nhiên bằng chính nó.

Đại lượng không ngẫu nhiên c có thể được coi như một đại lượng ngẫu nhiên có một giá trị có thể c, mà đại lượng ngẫu nhiên nhận nó với xác suất bằng 1.

Từ đó:

$$M[c] = c.1 = c \tag{1.9.1}$$

2. Phương sai của đại lượng không ngẫu nhiên bằng không.

$$D[c] = M[(c-m_c)^2] = M[(c-c) \tag{1.9.2}$$

3. Nếu c là đại lượng không ngẫu nhiên, thì:

$$M[cX] = cM[X], \tag{1.9.3}$$

$$D[cX] = c^2D[X], \tag{1.9.4}$$

tức là có thể đưa đại lượng không ngẫu nhiên ra ngoài dấu kỳ vọng toán học và có thể đưa đại lượng không ngẫu nhiên ra ngoài dấu phương sai nhưng sau đó lấy bình phương của nó.

Ta tiến hành phép chứng minh đối với đại lượng ngẫu nhiên liên tục.

$$M[cX] = \int_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = cM[X],$$

$$D[cX] = M\left[(cX - m_{cx})^2\right] = M\left[(cX - cm_x)^2\right] = c^2M\left[(X - m_x)^2\right] = c^2D[X]$$

Lấy căn bậc hai cả hai vế (1.9.4), đối với độ lệch bình phương trung bình ta nhận được:

$$\sigma[cX] = c\sigma[X] \tag{1.9.5}$$

tức là có thể đưa đại lượng không ngẫu nhiên ra ngoài dấu độ lệch bình phương trung bình.

4. Kỳ vọng toán học của tổng một số các đại lượng ngẫu nhiên bằng tổng các kỳ vọng toán học của chúng. Định lý này được gọi là định lý cộng của kỳ vọng toán học.

Ta sẽ chứng minh nó cho trường hợp hai đại lượng ngâu nhiên liên tục:

$$M[X+Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)dy = M[X]+M[Y] \tag{1.9.6}$$

5. Phương sai của tổng hai đại lượng ngẫu nhiên bằng tổng các phương sai của chúng cộng với hai lần mômen tương quan.

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2R_{xy} \tag{1.9.7}$$

Ta ký hiệu:

$$X + Y = Z,\ \overset{o}{Z} = \overset{o}{X} + \overset{o}{Y} = (X - m_x) + (Y - m_y), \tag{1.9.8}$$

khi đó:

$$D[X+Y] = M\left[\overset{o}{Z}{}^2\right] = M\left[\left(\overset{o}{X} + \overset{o}{Y}\right)^2\right] = M\left[\overset{o}{X}{}^2\right] + M\left[\overset{o}{Y}{}^2\right] + 2M\left[\overset{o}{X}\overset{o}{Y}\right] =$$

$$= D[X] + D[Y] + 2R_{xy}$$

Cũng có thể chứng minh công thức:

$$D[X-Y] = D[X] + D[Y] - 2R_{xy} \tag{1.9.9}$$

Tương tự, khi sử dụng công thức đối với bình phương của tổng nhiều số hạng, ta nhận được công thức tính phương sai của tổng n đại lượng ngẫu nhiên.

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + 2\sum_{i<j} R_{x_i x_j} \qquad (1.9.10)$$

Vì $D[X_i] = R_{x_i x_i}$ nên có thể viết công thức này dưới dạng:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{x_i x_j} \qquad (1.9.11)$$

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên không tương quan $R_{x_i x_j}=0$ khi $i \neq j$, nên công thức được viết lại như sau:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i], \qquad (1.9.12)$$

tức là phương sai của tổng các đại lượng ngẫu nhiên không tương quan bằng tổng các phương sai của chúng. Định lý này được gọi là định lý cộng phương sai.

6. Đối với kỳ vọng toán học của tích các đại lượng ngẫu nhiên công thức sau là đúng:

$$M[XY] = M[X].M[Y] + R_{xy}. \qquad (1.9.13)$$

Mômen tương quan có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$R_{xy} = M[(X-m_x)(Y-m_y)] = M[XY] - m_x M[Y] - m_y M[X] + m_x m_y$$
$$= M[XY] - M[X].M[Y], \qquad (1.9.14)$$

từ đó suy ra công thức (1.9.13).

Đối với các đại lượng ngẫu nhiên không tương quan $R_{xy} = 0$, từ (1.9.13) ta nhận được định lý tích kỳ vọng toán học

$$M[XY] = M[X].M[Y]. \qquad (1.9.15)$$

Tổng quát hoá định lý này cho n đại lượng ngẫu nhiên chỉ đúng khi chúng là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập.

1.10. Luật phân bố chuẩn của hệ các đại lượng ngẫu nhiên

Xét hệ hai đại lượng ngẫu nhiên – vectơ ngẫu nhiên hai chiều (X,Y).

Người ta nói rằng hệ này có luật phân bố chuẩn nếu mật độ phân bố có dạng:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \qquad (1.10.1)$$

Vì có thể xem (X,Y) như là một điểm ngẫu nhiên trên mặt phẳng, nên luật này được gọi là luật phân bố chuẩn trên mặt phẳng. Hàm (1.10.1) phụ thuộc vào 5 tham số: m_x, m_y, σ_x, σ_y, r.

Ta hãy làm sáng tỏ ý nghĩa của các tham số đó. Ta sẽ chỉ ra rằng m_x và m_y là các kỳ vọng toán học M[X] và M[Y] của các đại lượng ngẫu nhiên X và Y, σ_x và σ_y là độ lệch bình phương trung bình của chúng, còn r là hệ số tương quan của các đại lượng ngẫu nhiên X và Y, tức là $r = r_{xy}$.

Muốn vậy, ta tìm mật độ phân bố của từng đại lượng ngẫu nhiên của hệ.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\left(x-m_x\right)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{\left(y-m_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}dy \qquad (1.10.2)$$

Thực hiện phép đổi biến trong tích phân (1.10.2):

$$\frac{x-m_x}{\sqrt{2}\sigma_x} = u, \quad \frac{y-m_y}{\sqrt{2}\sigma_y} = v \qquad (1.10.3)$$

ta nhận được:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_x\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{1-r^2}\left(u^2-2ruv+v^2\right)\right\}dv \qquad (1.10.4)$$

Sau khi đưa vào các ký hiệu:

$$A = \frac{1}{1-r^2}, \; B = \frac{ru}{1-r^2}, \; C = \frac{u^2}{1-r^2} \qquad (1.10.5)$$

ta qui tích phân (1.10.4) về tích phân đã biết:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(Av^2-2Bv-C)}dv = \sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{AC-B^2}{A}} \qquad (1.10.6)$$

Kết quả ta nhận được:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (1.10.7)$$

Từ (1.10.7) ta thấy rằng đại lượng ngẫu nhiên X tuân theo luật phân bố chuẩn, hơn nữa:

$$m_x = M[X], \; \sigma_x = \sqrt{D[X]} \qquad (1.10.8)$$

Tương tự đối với $f_2(y)$ ta có:

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \qquad (1.10.9)$$

Tính mômen tương quan R_{xy}:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}dxdy \qquad (1.10.10)$$

Lấy tích phân biểu thức (1.10.10) ta nhận được:

$$R_{xy} = r\sigma_x\sigma_y \qquad (1.10.11)$$

Từ đó thấy rằng r chính là hệ số tương quan r_{xy}.

Như vậy, mật độ phân bố chuẩn của hệ hai đại lương ngẫu nhiên X và Y hoàn toàn được xác định bởi các kỳ vọng toán học m_x và m_y của các đại lượng ngẫu nhiên đã cho và ma trận tương quan

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} D_x & R_{xy} \\ & D_y \end{pmatrix} \qquad (1.10.12)$$

Như vậy, đối với phân bố chuẩn các đặc trưng số – kỳ vọng toán học và ma trận tương quan là các đặc trưng đầy đủ của hệ.

Nếu các đại lượng ngẫu nhiên của hệ có phân bố chuẩn (X,Y) không tương quan với nhau, tức là $r = r_{xy} = 0$, thì

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]} = f_1(x).f_2(y) \qquad (1.10.13)$$

và đây là điều kiện độc lập của hệ.

Như vậy, từ tính không tương quan của các đại lượng ngẫu nhiên của hệ có phân bố chuẩn suy ra tính độc lập của chúng. Đối với các đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn, điều kiện không tương quan và điều kiện độc lập là tương đương nhau.

Ta xét mặt được xác định bởi mật độ phân bố chuẩn:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}, \qquad (1.10.14)$$

cho trường hợp các đại lượng ngẫu nhiên X và Y độc lập. Mặt này có dạng đồi mà đỉnh nằm tại điểm (m_x,m_y) (hình 1.17).

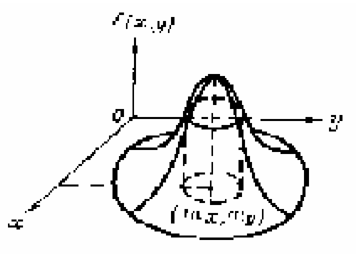
Cắt mặt phân bố này bởi các mặt phẳng song song với mặt x0y, ta nhận được các elip.

Thực vậy, khi cho f(x,y) = λ^2 = const, ta có:

$$\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}=\lambda^2 \tag{1.10.15}$$

Phương trình (1.10.15) là phương trình hình chiếu của elip trên mặt x0y. Đó là họ các elip đồng dạng có tâm tại điểm (m_x, m_y), có các trục đối xứng là các đường thẳng song song với các trục 0x và 0y. Tại mọi điểm của mỗi elip như vậy, mật độ phân bố không đổi, nên chúng được gọi là các elip mật độ phân bố đều hay là elip phân tán.

Có thể chỉ ra rằng, sẽ nhận được một bức tranh tương tự ngay cả đối với phân bố chuẩn trong trường hợp tổng quát, khi mà r≠0, nhưng trong trường hợp này các trục đối xứng của elip không song song với các trục toạ độ.



Hình 1.17

Các trục đối xứng này được gọi là các trục phân tán chính. Bằng cách chuyển gốc toạ độ tới điểm (m_x, m_y) và quay các trục toạ độ cho đến khi trùng với các trục phân tán chính có thể dẫn luật phân bố chuẩn với r ≠ 0 về dạng chính tắc.

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta}e^{-\left[\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}+\frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right]}, \tag{1.10.16}$$

trong đó σ_ξ, σ_η được gọi là độ lệch bình phương trung bình chính.

Như vậy, chúng ta đã thay thế vectơ ngẫu nhiên phân bố chuẩn có các thành phần (X,Y) phụ thuộc lẫn nhau bởi vectơ phân bố chuẩn khác (ξ,η) mà các thành phần của nó độc lập với nhau.

Thông thường, khi xét luật phân bố chuẩn trên mặt phẳng, ta cố gắng chọn trước các trục toạ độ 0x và 0y sao cho chúng trùng với các trục phân tán chính.

Khi đó xác suất rơi vào hình chữ nhật R (hình 1.14) có các cạnh song song với trục phân tán chính được xác định theo công thức (1.7.6) và sẽ bằng:

$$P(N\in R)=\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}dxdy=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx\,\frac{1}{2\pi\sigma_y}\int_\gamma^\delta e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}dy=$$

$$= \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)\right]\cdot\left[\Phi\left(\frac{\delta - m_y}{\sqrt{2}\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{\gamma - m_y}{\sqrt{2}\sigma_y}\right)\right] \qquad (1.10.17)$$

Bây giờ ta xét hệ n đại lượng ngẫu nhiên (X_1, X_2, ... X_n). Hệ này được gọi là có phân bố chuẩn nếu như mật độ phân bố của nó có dạng:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2...\sigma_n\sqrt{(2\pi)^n D}} e^{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ik}\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\cdot\frac{x_k - m_k}{\sigma_k}} \qquad (1.10.18)$$

trong đó D là định thức của ma trận tương quan chuẩn hoá:

$$\left\|r_{x_i x_k}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_n} \\ & 1 & \dots & r_{x_2x_n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 \end{vmatrix} \qquad (1.10.19)$$

D_{ik} là phần phụ đại số của phần tử $r_{x_i x_k}$ trong định thức D.

Từ (1.10.18) thấy rằng, mật độ phân bố n chiều đối với luật chuẩn phụ thuộc vào n kỳ vọng toán học, n độ lệch bình phương trung bình (phương sai) và $\frac{n(n-1)}{2}$ hệ số tương quan.

Nếu các đại lượng ngẫu nhiên X_1, X_2, ... , X_n độc lập thì mật độ phân bố bằng:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)...f_n(x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2...\sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - m_i}{\sigma_i}\right)^2} \qquad (1.10.20)$$

Công thức này nhận được từ công thức tổng quát (1.10.18) khi $r_{x_i x_k}$ =0 trong trường hợp i≠k và $r_{x_i x_k}$ = 1 với i = k. Khi đó D=1, D_{ik}=0 khi i≠k, D_{ik}=1 khi i=k.

Trường hợp riêng, khi n = 3 ta nhận được luật phân bố chuẩn trong không gian.

Trong trường hợp này ma trận tương quan có dạng:

$$\left\|r_{x_i x_k}\right\| = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} \\ & 1 & r_{x_2x_3} \\ & & 1 \end{vmatrix} \qquad (1.10.21)$$

Mật độ phân bố chuẩn ba chiều phụ thuộc vào 9 tham số m_1, m_2, m_3, σ_1, σ_2, σ_3, $r_{x_1x_2}, r_{x_1x_3}, r_{x_2x_3}$. Đối với phân bố chuẩn 3 chiều thay cho elíp phân tán là elipxôit phân tán. Khi hướng các trục toạ độ theo các trục chính của elipxôit phân tán ta nhận được hệ thống các phân bố của ba đại lượng ngẫu nhiên độc lập (ξ,η,ζ).

Trong trường hợp này mật độ phân bố sẽ có dạng:

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_\xi\sigma_\eta\sigma_\zeta}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2}+\frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2}+\frac{\zeta^2}{\sigma_\zeta^2}\right)} \quad (1.10.22)$$

trong đó σ_ξ, σ_η, σ_ζ là các độ lệch bình phương trung bình chính.

1.11. Luật phân bố của hàm các đối số ngẫu nhiên

1) Luật phân bố của hàm một đối số ngẫu nhiên

Giả sử có đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có mật độ phân bố f(x) và một đại lượng ngẫu nhiên khác Y, liên hệ với nó bởi sự phụ thuộc hàm

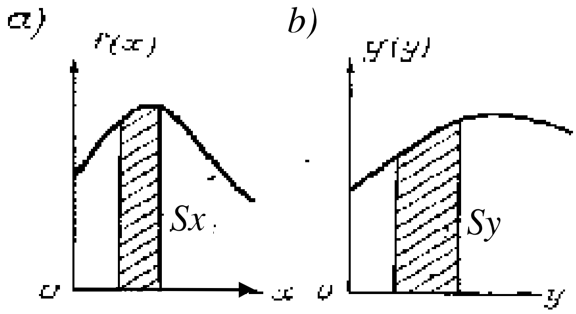
$$Y=\varphi(X), \quad (1.11.1)$$

với φ là hàm liên tục, khả vi.

Yêu cầu tìm mật độ phân bố của đại lượng ngẫu nhiên Y. Trước hết, ta giả thiết rằng hàm $y=\varphi(x)$ đơn điệu, khi đó nó có hàm ngược duy nhất: $x=\psi(y)$. Thêm vào đó, từ điều kiện:

$$x_0<X\le x_0+dx.$$

chắc chắn suy ra rằng $y_0<Y\le y_0+dy$ và ngược lại. Ở đây $y_0=\varphi(x_0)$



Hình 1.18

Do đó xác suất của các bất đẳng thức bằng nhau:

$$P(x_0<X\le x_0+dx)=P(y_0<Y\le y_0+dy) \quad (1.11.2)$$

Giả sử mật độ phân bố của đại lượng Y là g(y), khi đó từ các đồ thị f(x) và g(y) (hình 1.18 a và b) ta nhận thấy rằng xác suất

$$P(x_0<X\le x_0+dx)=S_x \quad (1.11.3)$$

bằng diện tích phía dưới đường cong y = f(x), còn xác suất

$$P(y_0<Y\le y_0+dy)=S_y \quad (1.11.4)$$

là diện tích phía dưới đường cong x = g(y)

Với dx, dy đủ nhỏ ta có:

$$S_x=f(x)dx,\ S_y=g(y)dy, \quad (1.11.5)$$

khi đó

$$f(x)dx=g(y)dy \quad (1.11.6)$$

và do vậy:

$$g(y) = f(x)\frac{1}{dy/dx} = f[\psi(y)].\psi'(y) \quad (1.11.7)$$

Vì f(x) ≥0, g(y)≥0, nên trong công thức này cần lấy giá trị tuyệt đối $|\psi'(y)|$

$$g(y) = f[\psi(y)].\ |\psi'(y)| \quad (1.11.8)$$

Nếu hàm y = φ(x) không đơn điệu thì hàm ngược x=ψ(y) có thể đa trị, tức là có một vài nhánh: $x_1 = \psi_1(y)$, $x_2 = \psi_2(y)$,..., $x_n = \psi_n(y)$.

Khi đó từ sự kiện:

$$y_0 < Y \le y_0 + dy, \quad (1.11.9)$$

dẫn đến một trong các khả năng xung khắc tương hỗ:

$$x_1^o < X < x_1^o + dx_1 \text{ hoặc } x_2^o < X < x_2^o + dx_2 \ ...$$

hoặc

$$x_n^o < X < x_n^o + dx_n \quad (1.11.10)$$

Khi đó theo định lý cộng xác suất ta có:

$$P(y_0 < Y \le y_0 + dy) = P(x_1^o < X < x_1^o + dx_1) + P(x_2^o < X < x_2^o + dx_2) + ... +$$

$$+ P(x_n^o < X < x_n^o + dx_n) \quad (1.11.11)$$

hoặc

$$g(y)dy = f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2 + ... + f(x_n)dx_n (1.11.12)$$

Trong trường hợp khi x=ψ(y) là hàm đa trị, ta nhận được công thức đối với g(y):

$$g(y) = f(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + f(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right| + ... + f(x_n)\left|\frac{dx_n}{dy}\right|, \quad (1.11.13)$$

tức là:

$$g(y) = f[\psi_1(y)].\ |\psi_1'(y)| + f[\psi_2(y)].\ |\psi_2'(y)| + ... + f[\psi_n(y)].\ |\psi_n'(y)| \quad (1.11.14)$$

Các ví dụ:

1. Giả X và Y có quan hệ phụ thuộc tuyến tính:

$$Y = aX + b \quad (1.11.15)$$

Trong trường hợp này hàm ngược là đơn trị

$$X = \psi(Y) = \frac{1}{a}(Y - b) \quad (1.11.16)$$

Đạo hàm hàm ngược bằng:

$$\psi'(y) = \frac{1}{a} \quad (1.11.17)$$

Từ đó, thế (1.11.16) và (1.11.17) vào công thức (1.11.8) đối với g(y) ta nhận được

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y - b}{a}\right) \quad (1.11.18)$$

Như vậy, khi biến đổi tuyến tính đại lượng ngẫu nhiên, đường cong phân bố của nó dịch chuyển một lượng b và thay đổi tỷ lệ dọc theo trục toạ độ là a lần.

Khi đó ta nhận được quy luật phân bố của hàm tuyến tính của đối số tuân theo phân bố chuẩn (1.5.1) dưới dạng

$$g(y) = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma_x} e^{-\frac{[y-(am_x+b)]^2}{2a^2\sigma_x^2}} \qquad (1.11.19)$$

Đây là quy luật phân bố chuẩn với các tham số

$$\sigma_y = |a|\sigma_x,$$

$$m_y = am_x + b$$

2. Giả sử các đại lượng ngẫu nhiên X và Y liên hệ với nhau bởi sự phụ thuộc bậc hai $Y = X^2$.

Trong trường hợp này mỗi một giá trị của Y (Y luôn dương) tương ứng với hai giá trị của đại lượng ngẫu nhiên X:

$$X_1 = \psi_1(Y) = \sqrt{Y},\ X_2 = \psi_2(Y) = -\sqrt{Y}.$$

Hàm ngược là hàm hai trị, cho nên theo (1.11.14) ta có:

$$g(y) = f(x_1).\left|\psi_1'(y)\right| + f(x_2).\left|\psi_2'(y)\right| \qquad (1.11.20)$$

Vì

$$\psi_1'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ \psi_2'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad (1.11.21)$$

nên

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right] & \text{khi } y > 0 \\ 0 & \text{khi } y < 0 \end{cases} \qquad (1.11.22)$$

Đặc biệt, khi đối số X tuân theo luật phân bố chuẩn (1.5.1), mật độ phân bố của đại lượng ngẫu nhiên Y sẽ có dạng:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}\sigma_x}\left[e^{-\frac{\left(\sqrt{y}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}} + e^{-\frac{\left(-\sqrt{y}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}\right] & \text{khi } y > 0 \\ 0 & \text{khi } y < 0 \end{cases} \qquad (1.11.23)$$

Nếu kỳ vọng toán học bằng không, $m_x = 0$ thì:

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma_x} e^{-\frac{y}{2\sigma_x^2}} & \text{khi } y > 0 \\ 0 & \text{khi } y < 0 \end{cases} \qquad (1.11.24)$$

2) Luật phân bố của hàm hai đối số ngẫu nhiên

Giả sử có hệ hai đại lượng ngẫu nhiên liên tục (X,Y) có mật độ phân bố f(x,y). Và giả sử đại lượng ngẫu nhiên Z, liên hệ với X và Y bởi mối phụ thuộc hàm

$$Z = \varphi(X,Y).$$

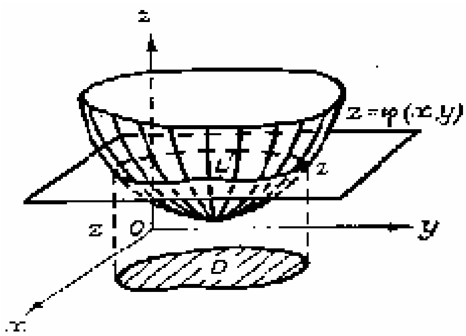
Yêu cầu tìm quy luật phân bố của đại lượng ngẫu nhiên Z. Ta xây dựng đồ thị hàm $z = \varphi(x,y)$. Đây là một mặt nào đó trong không gian (hình 1.19).

Ta xác định hàm phân bố của đại lượng Z

$$G(z) = P(Z<z) = P[\varphi(X,Y)<z]. \qquad (1.11.25)$$

Bất đẳng thức $\varphi(X,Y)<z$ sẽ được thoả mãn với mọi điểm của mặt $z=\varphi(x,y)$ nằm dưới mặt phẳng Q song song với mặt x0y, và cách nó một khoảng bằng z.

Mặt phẳng này cắt mặt $z=\varphi(x,y)$ theo một đường cong L nào đó. Chiếu đường cong L này lên mặt phẳng x0y, nó giới hạn một miền D nào đó.



Hình 1.19

Xác suất để cho $\varphi(X,Y)<z$ bằng xác suất rơi của điểm (X,Y) vào trong miền D trên mặt phẳng x0y được xác định bởi bất đẳng thức $\varphi(x,y)<z$. Xác suất này được biểu diễn bởi tích phân hai lớp theo miền D.

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy$$

Như vậy, hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên Z có dạng:

$$G(z) = \iint_{(\varphi(x,y)<z)} f(x,y)dxdy \qquad (1.11.26)$$

Để nhận được mật độ phân bố g(z) cần tìm đạo hàm của hàm (1.11.26) theo z

$$g(z) = G'(z) \qquad (1.11.27)$$

Rõ ràng, miền phân tích $[\varphi(x,y)<z]$ có thể là miền đa liên thuộc mặt phẳng x0y, trong đó bất đẳng thức $\varphi(x,y)<z$ được thực hiện.

Ví dụ: Xét hàm phân bố của modul vectơ phân bố chuẩn hai chiều mà hình chiếu của nó lên các trục toạ độ X và Y là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có kỳ vọng toán học bằng m_x và m_y, và phương sai đều bằng σ_x.

Đại lượng ngẫu nhiên cần tìm Z sẽ liên hệ với các đại lượng ngẫu nhiên X và Y bởi mối phụ thuộc hàm:

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{1.11.28}$$

Đại lượng ngẫu nhiên Z không âm, vì vậy mật độ phân bố của nó sẽ bằng không khi $z<0$.

Vì X và Y là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có phân bố chuẩn nên mật độ phân bố chung f(x,y) có dạng (1.11.14).

Theo (1.11.26) ta nhận được hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên Z dưới dạng:

$$G(z) = \iint\limits_{(\sqrt{x^2+y^2}<z)} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-m_x)^2+(y-m_y)^2\right]} dxdy \tag{1.11.29}$$

Miền tích phân là miền trong hình tròn tâm ở gốc toạ độ và bán kính bằng z.

Ta chuyển tích phân hai lớp về toạ độ cực bằng cách sử dụng các công thức

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \tag{1.11.30}$$

Khi đó ta nhận được:

$$G(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{z} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(z\cos\varphi - m_x)^2 + (z\sin\varphi - m_y)^2\right]} \rho d\rho d\varphi \tag{1.11.31}$$

Lấy vi phân biểu thức này theo z ta nhận được mật độ phân bố của đại lượng ngẫu nhiên Z.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(z\cos\varphi - m_x)^2 + (z\sin\varphi - m_y)^2\right]} d\varphi & \text{khi } z > 0 \\ 0 & \text{khi } z < 0 \end{cases} \tag{1.11.32}$$

Ta hãy biến đổi hàm dưới dấu tích phân:

$$(z\cos\varphi - m_x)^2 + (z\sin\varphi - m_y)^2 = z^2 - 2z(m_x\cos\varphi + m_y\sin\varphi) + m_x^2 + m_y^2 \tag{1.11.33}$$

Ký hiệu:

$$m_x^2 + m_y^2 = m^2,\ \frac{m_x}{m} = \cos\theta,\ \frac{m_y}{m} = \sin\theta \tag{1.11.34}$$

khi đó

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{m_y}{m_x} \tag{1.11.35}$$

như vậy ta nhận được

$$(z\cos\varphi - m_x)^2 + (z\sin\varphi - m_y)^2 = z^2 + m^2 - 2zm\cos(\varphi - \theta) \tag{1.11.36}$$

Thế (1.11.36) vào (1.11.32) ta nhận được:

$$g(z) = \frac{z}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2+m^2}{2\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{zm\cos(\varphi-\theta)}{\sigma^2}} d\varphi \quad \text{khi } z > 0 \tag{1.11.37}$$

Làm phép thay thế

$$\varphi-\theta = u \tag{1.11.38}$$

ta nhận được

$$g(z) = \frac{z}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2+m^2}{2\sigma^2}} \int_0^{2\pi-\theta} e^{-\frac{zm}{\sigma^2}\cos u} du \quad \text{khi } z > 0 \tag{1.11.39}$$

Tích phân trong công thức (1.11.39)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi-\theta} e^{-i\left(\frac{izm}{\sigma^2}\right)\cos u} du$$

là hàm Bessel loại I bậc 0 đối số ảo $J_o\left(\frac{imz}{\sigma^2}\right)$ hoặc hàm Bessel loại II đối số thực $I_o\left(\frac{mz}{\sigma^2}\right)$.

Như vậy, ta có

$$g(z) = \begin{cases} \frac{z}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2+m^2}{\sigma^2}} I_o\left(\frac{mz}{\sigma^2}\right) & \text{khi } z > 0 \\ 0 & \text{khi } z < 0 \end{cases} \tag{1.11.40}$$

Hàm nhận được gọi là hàm Rơle suy rộng. Các đặc trưng số của nó, như kỳ vọng toán học và phương sai, được xác định được theo các công thức:

$$m_z = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{m^2}{2\sigma^2}\right)I_o\left(\frac{m^2}{4\sigma^2}\right)+\frac{m^2}{2\sigma^2}I_1\left(\frac{m^2}{4\sigma^2}\right)\right]e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}} \tag{1.11.41}$$

$$D_z = 2\sigma^2 + m^2 - m_z^2 \tag{1.11.42}$$

Đối với trường hợp kỳ vọng toán học bằng 0, $m_x = m_y = 0$, biểu thức (1.11.29) được viết lại dưới dạng

$$G(z) = \iint_{(\sqrt{x^2+y^2}<z)} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{z} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \tag{1.11.43}$$

Từ đó, theo (1.11.27), ta nhận được mật độ phân bố g(z) dưới dạng:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & \text{khi } z > 0 \\ 0 & \text{khi } z < 0 \end{cases} \tag{1.11.44}$$

Đây là quy luật phân bố Rơle đã được xét ở mục 1.6.

1.12. Hàm đặc trưng

Hàm đặc trưng g(t) của đại lượng ngẫu nhiên X là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên phức e^{itX}

$$g(t) = M[e^{itX}], \tag{1.12.1}$$

ở đây,

$$i = \sqrt{-1}.$$

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc thì

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k \tag{1.12.2}$$

Nếu X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục thì

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \tag{1.12.3}$$

Công thức (1.12.3) biến đổi hàm f(x) đối số x thành hàm g(t) đối số t, là phép biến đổi Fourier hàm f(x).

Như vậy, hàm đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên liên tục là phép biến đổi Fourier hàm mật độ phân bố của nó.

Các tính chất của hàm đặc trưng

1. Nếu $g_x(t)$ là hàm đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên X, thì hàm đặc trưng của đại lượng ngẫu nhiên

Y = aX(1.12.4)

bằng

$$g_y(t) = g_x(at) \tag{1.12.5}$$

Thực vậy,

$$g_y(t) = M[e^{itY}] = M[e^{i(at)X}] = g_x(at) \tag{1.12.6}$$

2. Hàm đặc trưng của tổng các đại lượng ngẫu nhiên độc lập bằng tích các hàm đặc trưng của từng hạng tử.

Nếu $X_1, X_2 ... X_n$ là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập có các hàm đặc trưng:

$$g_{X_1}(t), g_{X_2}(t), \ldots, g_{X_n}(t) \tag{1.12.7}$$

và giả sử

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{1.12.8}$$

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$g_x(t) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(t) \tag{1.12.9}$$

Thật vậy, khi sử dụng định lý tích kỳ vọng toán học đối với các đại lượng ngẫu nhiên độc lập, ta nhận được:

$$g_x(t) = M\left[e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] = M\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} M\left[e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} g_{x_k}(t) \qquad (1.12.10)$$

3. Giá trị của hàm đặc trưng bằng đơn vị khi t=0:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Vì hàm đặc trưng g(t) của đại lượng ngẫu nhiên liên tục là biến đổi ngược Fourier của mật độ phân bố f(x) nên, như đã biết từ lý thuyết biến đổi Fourier, có thể nhận được mật độ phân bố f(x) như là biến đổi Fourier trực tiếp hàm g(t)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g(t) dt$$

Như vậy, khi biết mật độ phân bố f(x) ta có thể xác định duy nhất một hàm đặc trưng, ngược lại, nếu biết hàm đặc trưng, có thể xác định một cách duy nhất mật độ phân bố.

Khi đó, trong nhiều trường, sử dụng hàm đặc trưng thuận lợi hơn so với mật độ phân bố.

Mối liên hệ giữa hàm đặc trưng và mômen của đại lượng ngẫu nhiên

Khi biết hàm đặc trưng g(t) dễ dàng xác định được các mômen phân bố của đại lượng ngẫu nhiên.

Ta hãy khai triển hàm e^{itX} thành chuỗi Macloren

$$e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} X^k \qquad (1.12.11)$$

Đặt (1.12.11) vào (1.12.1) ta nhận được chuỗi:

$$g(t) = M\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} X^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} M\left[X^k\right] \qquad (1.12.12)$$

Nhưng $M[X^K]$ là mômen gốc bậc k (m_K) của đại lượng ngẫu nhiên X.

Từ đó ta nhận được khai triển chuỗi hàm đặc trưng

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k m_k}{k!} t^k \qquad (1.12.13)$$

Như vậy, có thể tìm được tất cả các mômen gốc của đại lượng ngẫu nhiên bằng cách khai triển hàm đặc trưng thành chuỗi Macloren đối với tham số t.

Ta biểu diễn hàm đặc trưng theo công thức khai triển tổng quát thành chuỗi Macloren:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right|_{t=0} t^k \qquad (1.12.14)$$

Só sánh (1.12.13) và (1.12.14) ta nhận được biểu thức đối với mômen của đại lượng ngẫu nhiên:

$$m_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right|_{t=0} \qquad (1.12.15)$$

Một cách tương tự, có thể biểu diễn các mômen trung tâm của đại lượng ngẫu nhiên qua hàm đặc trưng.

Khi biểu diễn đại lượng ngẫu nhiên X dưới dạng:

$$X = \overset{o}{X} + m_x \qquad (1.12.16)$$

với $\overset{o}{X}$ là đại lượng ngẫu nhiên qui tâm, ta nhận được:

$$g(t) = M\left[e^{itX}\right] = M\left[e^{it\left(\overset{o}{X}+m_x\right)}\right] = M\left[e^{itm_x} e^{it\overset{o}{X}}\right] = e^{itm_x} M\left[e^{it\overset{o}{X}}\right] \qquad (1.12.17)$$

Khai triển $e^{it\overset{o}{X}}$ thành chuỗi Macloren, ta được

$$M\left[e^{it\overset{o}{X}}\right] = M\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \overset{o}{X}{}^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} M\left[\overset{o}{X}{}^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mu_k \qquad (1.12.18)$$

Thế (1.12.18) vào (1.12.17) ta nhận được

$$g(t)\, e^{-itm_x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mu_k \qquad (1.12.19)$$

Do đó, khi khai triển Macloren hàm $g(t)\, e^{-itm_x}$ ta nhận được tất cả các mômen trung tâm của đại lượng ngẫu nhiên.

Khai triển $g(t)\, e^{-itm_x}$ theo công thức khai triển tổng quát chuỗi Macloren:

$$g(t)\, e^{-itm_x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k\left[e^{-itm_x} g(t)\right]}{dt^k} \right|_{t=0} t^k \qquad (1.12.20)$$

So sánh (1.12.19) và (1.12.20), ta nhận được:

$$\mu_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k\left[e^{-itm_x} g(t)\right]}{dt^k} \right|_{t=0} \qquad (1.12.21)$$

Ví dụ: Nhờ hàm đặc trưng ta sẽ tìm được các mômen của phân bố chuẩn.

Giả sử đại lượng ngẫu nhiên X tuân theo quy luật phân bố chuẩn (1.5.1). Ta sẽ tìm hàm đặc trưng của nó.

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}+itx+\frac{xm_x}{\sigma_x^2}-\frac{m_x^2}{2\sigma_x^2}} dx \quad (1.12.22)$$

Có thể đưa tích phân (1.12.22) về tích phân đã biết:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2+2Bx-C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC-B^2}{A}} \quad (1.12.23)$$

và đưa vào ký hiệu

$$A = \frac{1}{2\sigma_x^2}, \quad B = \frac{it\sigma_x^2 + m_x}{2\sigma_x^2}, \quad C = \frac{m_x^2}{2\sigma_x^2} \quad (1.12.24)$$

Khi đó

$$g(t) = e^{itm_x - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}} \quad (1.12.25)$$

Theo (1.12.15), mômen gốc bậc nhất bằng:

$$m_1 = \frac{1}{i}\frac{dg(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{im_x}{i} e^0 = m_x \quad (1.12.26)$$

Ta tìm các mômen trung tâm của phân bố:

$$e^{-itm_x} g(t) = e^{-itm_x} e^{itm_x - \frac{t^2\sigma_x^2}{2}} = e^{-\frac{t^2\sigma_x^2}{2}} \quad (1.12.27)$$

Khai triển hàm này thành chuỗi Macloren, nhận được:

$$e^{-itm_x} g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sigma_x^{2k}}{2^k k!} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\sigma_x^{2k}}{2^k k!} t^{2k} \quad (1.12.28)$$

Từ đó có:

$$\mu_{2k-1} = 0 \quad (1.12.29)$$

$$\frac{i^{2k}}{(2k)!}\mu_{2k} = \frac{i^{2k}\sigma_x^{2k}}{2^k k!} \quad (1.12.30)$$

hay

$$\mu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\sigma_x^{2k}, \ (k=1,2,...) \quad (1.12.31)$$

Đặc biệt

$$\mu_2 = \sigma_x^2, \ \mu_4 = 3\sigma_x^4$$

Các công thức nhận được là các công thức tính trực tiếp mômen của phân bố chuẩn ở mục 1.5.

Tuy nhiên phương pháp sử dụng hàm đặc trưng đơn giản hơn nhiều.

Hàm đặc trưng của véc tơ ngẫu nhiên

Hàm đặc trưng của hệ n đại lượng ngẫu nhiên (X_1, X_2 ... X_n) hoặc vectơ ngẫu nhiên n chiều là hàm n tham số t_1, t_2, t_n, được xác định bởi công thức:

$$g(t_1,t_2,...,t_n)=M\left[e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}\right] \quad (1.12.32)$$

Đối với hệ các đại lượng ngẫu nhiên liên tục đây là phép biến đổi Fourier n chiều của mật độ phân bố $f(x_1,x_2 .... x_n)$

$$g(t_1,t_2,...,t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t_1x_1+...+t_nx_n)}f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n \quad (1.12.33)$$

Tương tự như trường hợp một chiều, mật độ phân bố $f(x_1,x_2 .... x_n)$ là biến đổi Fourier n lần đối với hàm đặc trưng $g(t_1, t_2,. t_n)$

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(t_1x_1+...+t_nx_n)}g(t_1,t_2,...,t_n)dt_1dt_2...dt_n \quad (1.12.34)$$

Đối với hệ các đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn (X_1, X_2 ... X_n) có mật độ phân bố (1.10.20), hàm đặc trưng $g(t_1,t_2,...,t_n)$ được tính theo công thức (1.12.33) có dạng

$$g(t_1,t_2,...,t_n)=e^{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}R_{jk}t_jt_k+i\sum_{j=1}^{n}m_jt_j} \quad (1.12.35)$$

trong đó m_j là kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên X_j, R_{jk} là mômen tương quan của các đại lượng ngẫu nhiên X_j và X_k.

Nếu các đại lượng ngẫu nhiên X_1, X_2,..., X_n độc lập với nhau thì hàm đặc trưng n chiều của chúng bằng tích các hàm đặc trưng của từng đại lượng ngẫu nhiên trong đó.

$$g(t_1,t_2,...,t_n)=\prod_{k=1}^{n}g_{x_k}(t_k) \quad (1.12.36)$$

Nhờ hàm đặc trưng nhiều chiều có thể xác định được mômen hỗn hợp của phân bố của hệ các đại lượng ngẫu nhiên (vectơ ngẫu nhiên) theo công thức

$$m_{k_1,k_2,...,k_n}(x_1,x_2,...,x_n)=i^{-(k_1+k_2+...+k_n)}\left.\frac{\partial^{k_1+...+k_n}g(t_1,...,t_n)}{\partial t_1^{k_1}...\partial t_n^{k_n}}\right|_{t_1=...t_n=0}. \quad (1.12.37)$$

CHƯƠNG 2: HÀM NGẪU NHIÊN VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA CHÚNG

2.1. Định nghĩa hàm ngẫu nhiên

Đại lượng ngẫu nhiên là đại lượng mà khi tiến hành một loạt các phép thử trong cùng những điều kiện như nhau có thể mỗi lần nhận được giá trị này hay giá trị khác không biết trước được cụ thể.

Giả thiết rằng, kết quả thí nghiệm không phải là một số mà là một hàm nào đó của một hay nhiều đối số. Một hàm mà kết quả của mỗi lần thí nghiệm được tiến hành trong những điều kiện như nhau, có thể có các dạng khác nhau, không biết trước được cụ thể, được gọi là hàm ngẫu nhiên. Khi đó hàm không ngẫu nhiên thu được do kết quả của mỗi thí nghiệm được gọi là thể hiện của hàm ngẫu nhiên. Với mỗi lần lặp lại thí nghiệm ta nhận được một thể hiện mới. Như vậy có thể xem hàm ngẫu nhiên như là tập tất cả các thể hiện của nó. Cách tiếp cận thống kê như vậy rất thuận lợi khi nghiên cứu nhiều quá trình vật lý, kỹ thuật, sinh học v.v... Đặc biệt, khái niệm hàm ngẫu nhiên phản ánh rất tốt thực chất của các quá trình khí tượng thuỷ văn.

Tính chất đặc trưng của khí quyển là chuyển động rối nhiễu loạn gây nên sự biến động mạnh của các yếu tố khí tượng cả theo thời gian lẫn không gian. Các xung rối mạnh xảy ra cả trong các quá trình qui mô lớn cũng như trong các chuyển động qui mô nhỏ. Sự tồn tại của rối dẫn tới chỗ những điều kiện ban đầu không còn quy định một cách đầy đủ diễn biến của quá trình, do đó các thí nghiệm tiến hành trong cùng những điều kiện bên ngoài như nhau sẽ dẫn đến các kết quả khác nhau.

Giả sử vào cùng một ngày một giờ của mỗi năm trong một khoảng thời gian nào đó ta đo nhiệt độ không khí tại một điểm cho trước trong khí quyển. Với mỗi lần đo như vậy ta nhận được nhiệt độ như là hàm của thời gian T(t). Các hàm nhận được khi lặp lại thí nghiệm sẽ khác nhau. Mỗi hàm $T_i(t)$ nhận được ở thí nghiệm i có thể được xem như một thể hiện riêng, còn tập tất cả các hàm thu được cho chúng ta tập hợp các thể hiện quan trắc của hàm ngẫu nhiên.

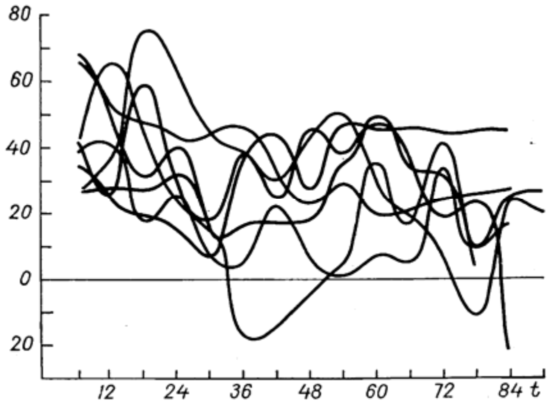
Tương tự, các yếu tố khí tượng khác - áp suất, các thành phần của vectơ vận tốc gió, v.v... cũng có thể được xem như là các hàm ngẫu nhiên của thời gian và toạ độ không gian.

Trên hình 2.1 dẫn các đường cong phụ thuộc vào thời gian của thành phần vĩ hướng vectơ gió nhận được theo các số liệu quan trắc thám không.

Từng đường cong trên hình 2.1 là một thể hiện của hàm ngẫu nhiên. Nếu cố định thời điểm $t=t_o$ và vạch một đường thẳng vuông góc với trục hoành, thì nó sẽ cắt mỗi thể hiện tại một điểm. Các điểm giao là các giá trị của một đại lượng ngẫu nhiên mà người ta gọi là lát cắt của hàm ngẫu nhiên ứng với giá trị của đối số $t=t_o$.

Xuất phát từ đó có thể đưa ra một định nghĩa khác về hàm ngẫu nhiên: Hàm ngẫu nhiên của đối số t là hàm X(t) mà giá trị của nó tại mỗi trị số của đối số $t=t_o$ (mỗi một lát cắt tương ứng với $t=t_o$) là một đại lượng ngẫu nhiên.

Ta sẽ ký hiệu hàm ngẫu nhiênU (m/s) ác chữ cái lớn kèm theo đối số X(t), Y(t)..., còn các thể hiện của nó là các chữ cái nhỏ $x_1(t)$, $x_2(t)$... với các chỉ số nêu rõ lần thí nghiệm mà thể hiện trên nhận được. Lát cắt của hàm ngẫu nhiên tại giá trị đối số t_o được ký hiệu là $X(t_o)$.



Hình 2.1

Đối số t có thể nhận một giá trị thực bất kỳ trong khoảng hữu hạn hoặc vô hạn đã cho, hoặc chỉ là các giá trị rời rạc nhất định. Trong trường hợp thứ nhất X(t) được gọi là quá trình ngẫu nhiên, còn trong trường hợp thứ hai nó được gọi là dãy ngẫu nhiên.

Thuật ngữ hàm ngẫu nhiên bao hàm cả hai khái niệm trên. Đối số của hàm ngẫu nhiên không nhất thiết phải là thời gian. Chẳng hạn, có thể xét nhiệt độ không khí như là hàm ngẫu nhiên của độ cao. Hàm ngẫu nhiên có thể phụ thuộc không chỉ vào một biến mà có thể vài biến. Hàm ngẫu nhiên của vài đối số gọi là trường ngẫu nhiên.

Ví dụ, trong khí tượng học người ta xét trường nhiệt độ, trường gió, trường áp suất, tức là nhiệt độ, áp suất hay vectơ gió được xem như là hàm ngẫu nhiên của 4 đối số: 3 toạ độ không gian và thời gian. Khi đó trường ngẫu nhiên có thể vô hướng như trong các trường hợp trường nhiệt độ và trường áp suất hoặc trường véc tơ như trường gió, khi mà mỗi thể hiện của nó là một hàm vectơ.

Các quá trình khí tượng thuỷ văn là các hàm của đối số liên tục, vì vậy chúng ta sẽ không đề cập đến lý thuyết của chuỗi ngẫu nhiên, mà chỉ xét các quá trình ngẫu nhiên của một đối số liên tục và các trường ngẫu nhiên như là hàm ngẫu nhiên của một vài đối số liên tục. Khi đó ta sẽ gọi quá trình một chiều là hàm ngẫu nhiên hay quá trình nhẫu nhiên, không phân biệt giữa các thuật ngữ đó.

2.2. Các qui luật phân bố quá trình nhẫu nhiên

Như ta đã thấy trước đây, đại lượng ngẫu nhiên được hoàn toàn xác định nếu biết hàm phân bố của nó

$$F(x) = P(X<x) \tag{2.2.1}$$

Hệ các đại lượng ngẫu nhiên được xác định nếu cho hàm phân bố của nó

$$F(x_1,x_2...,x_n) = P(X_1<x_1,X_2<x_2...,X_n<x_n) \tag{2.2.2}$$

Quá trình ngẫu nhiên X(t) có thể được xét như là tập hợp tất cả các lát cắt của nó mà mỗi một lát cắt là một đại lượng ngẫu nhiên.

Khi cố định các giá trị của đối số t_1, t_2,..., t_n chúng ta nhận được n lát cắt của quá trình nhẫu nhiên.

$$X_1=X(t_1),\ X_2=X(t_2),...,\ X_n=X(t_n)$$

Khi đó, một cách gần đúng, quá trình ngẫu nhiên có thể được đặc trưng bởi hàm phân bố của hệ các đại lượng ngẫu nhiên nhận được.

$$F_n(x_1,x_2,..,x_n) = P(X_1<x_1,X_2<x_2,..,X_n<x_n) \tag{2.2.3}$$

Rõ ràng, hàm phân bố này sẽ đặc trưng cho quá trình ngẫu nhiên càng đầy đủ hơn, nếu các giá trị của đối số t_i càng phân bố gần nhau, số lát cắt n có được càng lớn.

Xuất phát từ đó, quá trình ngẫu nhiên X(t) được coi như đã cho trước nếu đối với mỗi giá trị t, hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên X(t) đã được xác định

$$F_1(x,t) = P[X(t)<x], \tag{2.2.4}$$

đối với mỗi cặp hai giá trị t_1 và t_2 của đối số t, hàm phân bố của hệ các đại lượng ngẫu nhiên $X_1=X(t_1)$, $X_2=X(t_2)$ được xác định

$$F_2(x_1,x_2,t) = P(X_1<x_1,\ X_2<x_2), \tag{2.2.5}$$

và nói chung, với mọi n giá trị bất kỳ t_1, t_2,..., t_n của đối số t, hàm phân bố n chiều của hệ các đại lượng ngẫu nhiên $X_1=X(t_1)$, $X_2=X(t_2)$..., $X_n=X(t_n)$ được xác định

$$F_n(x_1,x_2,...,x_n;\ t_1,t_2,...,t_n) = P(X_1<x_1,X_2<x_2,...,X_n<x_n). \tag{2.2.6}$$

Hàm $F_1(x;t)$ được gọi là hàm phân bố một chiều của quá trình ngẫu nhiên, nó đặc trưng cho qui luật phân bố của mỗi một lát cắt của nó, nhưng không giải đáp được vấn đề về sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các lát cắt khác nhau.

Hàm $F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ được gọi là hàm phân bố hai chiều của quá trình ngẫu nhiên, nó cũng không phải là đặc trưng bao quát của quá trình ngẫu nhiên.

Để đặc trưng đầy đủ quá trình ngẫu nhiên cần phải cho tất cả các hàm phân bố nhiều chiều.

Đối với các hàm ngẫu nhiên liên tục, mỗi lát cắt của nó là một đại lượng ngẫu nhiên liên tục, có thể sử dụng qui luật phân bố vi phân nhiều chiều để đặc trưng cho hàm ngẫu nhiên. Nếu $F_1(x;t)$ có đạo hàm riêng theo x

$$\frac{\partial F_1(x;t)}{\partial x} = f_1(x;t) \tag{2.2.7}$$

thì nó được gọi là mật độ phân bố một chiều hay qui luật phân bố vi phân một chiều của hàm ngẫu nhiên.

Qui luật phân bố vi phân một chiều $f_1(x;t)$ là qui luật phân bố vi phân của đại lượng ngẫu nhiên - lát cắt của hàm ngẫu nhiên ứng với giá trị t cho trước.

Qui luật phân bố vi phân nhiều chiều của hàm ngẫu nhiên cũng được xác định một cách tương tự.

Nếu tồn tại đạo hàm riêng hỗn hợp của hàm phân bố n chiều

$$\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} = f_n(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...,t_n), \tag{2.2.8}$$

thì nó được gọi là mật độ phân bố n chiều của quá trình ngẫu nhiên.

Hàm phân bố và mật độ phân bố cần thoả mãn điều kiện đối xứng, tức là cần phải như nhau với mọi cách chọn các giá trị của đối số t_1,...,t_n.

Với mọi hoán vị i_1, i_2,...,i_n từ các số 1, 2,..., n, các hệ thức sau đây phải được thực hiện:

$$F_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \qquad (2.2.9)$$

$$f_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \qquad (2.2.10)$$

Như đã chỉ ra trong mục 1.7, từ hàm phân bố và mật độ phân bố của hệ n đại lượng ngẫu nhiên có thể nhận được hàm phân bố của mọi hệ con của nó. Vì vậy, nếu đã biết hàm phân bố hoặc mật độ phân bố n chiều thì cũng chính là cho trước tất cả các hàm phân bố và mật độ phân bố bậc thấp hơn.

Đặc trưng hàm ngẫu nhiên bằng việc cho trước các qui luật phân bố nhiều chiều, phần lớn trong ứng dụng thực tiễn, là không thể, do tính phức tạp của việc xác định thực nghiệm các qui luật phân bố nhiều chiều, cũng như do sự cồng kềnh, khó khăn khi sử dụng để giải các bài toán ứng dụng.

Vì vậy, thay cho các qui luật phân bố nhiều chiều, trong đa số trường hợp người ta giới hạn bằng cách cho những đặc trưng riêng của các qui luật này, tương tự như trong lý thuyết đại lượng ngẫu nhiên, thay cho qui luật phân bố người ta sử dụng các đặc trưng số của chúng.

2.3. Các đặc trưng của quá trình ngẫu nhiên

Để đặc trưng cho quá trình ngẫu nhiên, cũng như các đại lượng ngẫu nhiên, người ta sử dụng các mômen phân bố.

Mômen bậc $i_1+i_2+\ldots+i_n$ của quá trình ngẫu nhiên là kỳ vọng toán học của tích các luỹ thừa tương ứng của các lát cắt khác nhau của quá trình ngẫu nhiên

$$m_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\left\{[X(t_1)]^{i_1}[X(t_2)]^{i_2}\ldots[X(t_n)]^{i_n}\right\} \qquad (2.3.1)$$

Mômen bậc nhất:

$$m_1(t) = M[X(t)] = m_x(t) \qquad (2.3.2)$$

gọi là kỳ vọng toán học của quá trình ngẫu nhiên.

Kỳ vọng toán học của quá trình ngẫu nhiên là một hàm không ngẫu nhiên $m_x(t)$, mà giá trị của nó với mỗi t bằng kỳ vọng toán học của lát cắt tương ứng.

Kỳ vọng toán học $m_x(t)$ hoàn toàn xác định bởi quy luật phân bố bậc nhất

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x; t) dx \qquad (2.3.3)$$

Mômen gốc bậc hai có thể có hai dạng: mômen bậc hai đối với cùng một lát cắt của quá trình ngẫu nhiên

$$m_{2,0}(t) = M\left\{[X(t)]^2\right\} \qquad (2.3.4)$$

và mômen hỗn hợp bậc hai đối với hai lát cắt khác nhau

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)] \qquad (2.3.5)$$

Mômen $m_{2,0}$ phụ thuộc vào một giá trị đối số t, mômen hỗn hợp $m_{1,1}$ phụ thuộc vào hai giá trị t_1 và t_2 của đối số t.

Bên cạnh các mômen gốc, người ta còn xét các mômen trung tâm của quá trình ngẫu nhiên.

Hiệu giữa quá trình ngẫu nhiên và kỳ vọng của nó

$$\overset{o}{X}(t) = X(t) - m_x(t) \tag{2.3.6}$$

được gọi là quá trình ngẫu nhiên qui tâm.

Mômen trung tâm của quá trình ngẫu nhiên X(t) là mômen gốc bậc tương ứng của quá trình nhẫu nhiên qui tâm $\overset{o}{X}(t)$

Mômen trung tâm bậc nhất bằng không

$$\mu_1(t) = M[\overset{o}{X}(t)] = M[X(t) - m_x(t)] = m_x(t) - m_x(t) = 0.$$

Mômen trung tâm bậc hai có dạng:

$$\mu_{2,0}(t) = M\left\{\left[\overset{o}{X}(t)\right]^2\right\} = M\left\{\left[X(t) - m_x(t)\right]^2\right\} \tag{2.3.7}$$

$$\mu_{1,1}(t_1, t_2) = M\left[\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2)\right] =$$

$$= M\left\{\left[X(t_1) - m_x(t_1)\right]\left[X(t_2) - m_x(t_2)\right]\right\} \tag{2.3.8}$$

Mômen trung tâm $\mu_{2,0}(t)$ là hàm của đối số t, với mỗi giá trị t cố định nó là phương sai của lát cắt tương ứng của quá trình ngẫu nhiên. Hàm không ngẫu nhiên này của đối số t

$$D_x(t) = M\left\{\left[X(t) - m_x(t)\right]^2\right\} \tag{2.3.9}$$

được gọi là phương sai của quá trình ngẫu nhiên.

Mômen trung tâm $\mu_{1,1}(t_1, t_2)$ là hàm của hai đối số t_1 và t_2, với mỗi cặp hai giá trị t_1 và t_2 đó là mômen quan hệ hay mômen tương quan giữa các lát cắt tương ứng của quá trình ngẫu nhiên.

Hàm không ngẫu nhiên của hai đối số t_1 và t_2

$$R_x(t_1, t_2) = M\left\{\left[X(t_1) - m_x(t_1)\right]\left[X(t_2) - m_x(t_2)\right]\right\} \tag{2.3.10}$$

được gọi là hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên X(t).

Rõ ràng, khi $t_1=t_2=t$ thì $R_x(t,t) = D_x(t)$, tức là với các giá trị của đối số như nhau thì hàm tương quan trở thành phương sai.

Khi sử dụng qui luật phân bố vi phân hai chiều của hàm ngẫu nhiên, có thể viết lại hàm tương quan $R_x(t_1, t_2)$:

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x_1 - m_x(t_1)\right]\left[x_2 - m_x(t_2)\right] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)\,dx_1 dx_2 \tag{2.3.11}$$

Từ định nghĩa hàm tương quan $R_x(t_1, t_2)$ thấy rằng, nó đối xứng đối với các đối số

$$R_x(t_1,t_2)=R_x(t_2,t_1) \tag{2.3.12}$$

Thay cho hàm tương quan, có thể sử dụng hàm tương quan chuẩn hoá $r_x(t_1,t_2)$ được xác định dưới dạng

$$r_x(t_1,t_2)=\frac{R_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}, \tag{2.3.13}$$

trong đó $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$ được gọi là độ lệch bình phương trung bình của hàm ngẫu nhiên.

Với mỗi cặp giá trị t_1 và t_2, hàm tương quan chuẩn hoá $r_x(t_1,t_2)$ là hệ số tương quan của hai lát cắt tương ứng của hàm ngẫu nhiên.

Việc cho mômen bậc nhất và bậc hai, tức là kỳ vọng toán học và hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên, mà không cho các đặc trưng đầy đủ của nó, cũng đã xác định được hàng loạt tính chất của quá trình ngẫu nhiên.

Tại mỗi giá trị cố định của đối số t, kỳ vọng toán học $m_x(t)$ xác định tâm phân bố của mỗi lát cắt của quá trình ngẫu nhiên.

Hàm tương quan $R_x(t_1,t_2)$, trở thành phương sai khi các giá trị của đối số như nhau $t_1=t_2=t$, đặc trưng cho tính tản mát của các giá trị ngẫu nhiên của lát cắt đã cho xung quanh tâm phân phối.

Với các giá trị t_1 và t_2 khác nhau, hàm tương quan đặc trưng cho mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa mỗi cặp các lát cắt của quá trình ngẫu nhiên.

Khi giải quyết nhiều bài toán ứng dụng, chỉ cần biết hai mômen này - kỳ vọng toán học và hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên, là đủ.

Phần lý thuyết hàm ngẫu nhiên dựa trên các đặc trưng này có tên gọi là lý thuyết tương quan của hàm ngẫu nhiên.

Đối với các quá trình ngẫu nhiên phân bố chuẩn thường gặp trong thực tế, kỳ vọng toán học và hàm tương quan là các đặc trưng bao quát của quá trình ngẫu nhiên.

Quá trình ngẫu nhiên được gọi là có phân bố chuẩn nếu mọi hệ các lát cắt $X(t_1)$, $X(t_2)$,..., $X(t_n)$ của nó đều tuân theo quy luật phân bố chuẩn của hệ các đại lượng ngẫu nhiên.

Mật độ phân bố của hệ các đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn được xác định duy nhất bởi các kỳ vọng toán học và ma trận tương quan của hệ đại lượng ngẫu nhiên (xem mục 1.10).

Vì kỳ vọng toán học của các lát cắt của quá trình ngẫu nhiên là trị số của kỳ vọng toán học $m_x(t)$ tại các giá trị cố định của đối số t, còn các phần tử của ma trận tương quan là giá trị hàm tương quan $R_x(t_1,t_2)$ khi cố định cặp hai đối số của nó, do đó kỳ vọng toán học và hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên hoàn toàn xác định mọi mật độ phân bố n chiều của quá trình ngẫu nhiên phân bố chuẩn.

Ngày nay, lý thuyết hàm ngẫu nhiên được xây dựng khá đầy đủ và nhờ nó đã có thể giải quyết hàng loạt bài toán ứng dụng quan trọng. Lý thuyết tương quan cho phép xác định cấu trúc thống kê của các quá trình và các trường khí tượng, thuỷ văn, giải quyết các bài toán dự báo những quá trình này và nhiều bài toán khác.

Trong thống kê toán học, khi xác định kỳ vọng toán học và các mômen tương quan của các đại lượng ngẫu nhiên theo số liệu thực nghiệm, theo định luật số lớn, thay cho các giá trị của chúng là trung bình theo mọi giá trị của đại lượng ngẫu nhiên

$$m_x = M[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2.3.14)$$

$$R_{xy} = M\left[(X - m_x)(Y - m_y)\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y)\,, \qquad (2.3.15)$$

ở đây, n là số trị số của đại lượng ngẫu nhiên.

Việc lấy trung bình tương tự theo tập hợp tất cả các thể hiện được tiến hành khi xác định kỳ vọng toán học và hàm tương quan của hàm ngẫu nhiên:

$$m_x(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \qquad (2.3.16),$$

$$R_x(t_1,t_2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_1) - m_x(t_1)\right]\left[x_i(t_2) - m_x(t_2)\right] \qquad (2.3.17)$$

trong đó, n là số lượng các thể hiện.

Từ đó, để xác định các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên, thay cho toán tử lấy kỳ vọng toán học, trong các tài liệu thường sử dụng toán tử trung bình hoá mà nó được ký hiệu bởi

$$m_x(t) = \overline{X(t)} \qquad (2.3.18)$$

$$R_x(t_1,t_2) = \overline{\left[X(t_1) - \overline{X(t_1)}\right]\left[X(t_2) - \overline{X(t_2)}\right]} \qquad (2.3.19)$$

ở đây, đường gạch ngang phía trên mỗi đại lượng là ký hiệu lấy trung bình đại lượng này theo tập hợp tất cả các thể hiện của hàm ngẫu nhiên.

Ta hãy xét xem các đặc trưng của quá trình ngẫu nhiên thay đổi như thế nào khi thêm vào nó một hàm không ngẫu nhiên.

Giả sử

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t) \qquad (2.3.20)$$

trong đó $\varphi(t)$ là hàm không ngẫu nhiên.

Theo định lý cộng kỳ vọng toán học:

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t) \qquad (2.3.21)$$

Ta hãy xác định hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên Y(t)

$$R_y(t_1,t_2) = M\left\{\left[Y(t_1) - m_y(t_1)\right]\left[Y(t_2) - m_y(t_2)\right]\right\} =$$

$$= M\left\{\left[X(t_1) + \varphi(t_1) - m_y(t_1) - \varphi(t_1)\right]\left[X(t_2) + \varphi(t_2) - m_y(t_2) - \varphi(t_2)\right]\right\} =$$

$$= M\left\{\left[X(t_1) - m_y(t_1)\right]\left[X(t_2) - m_y(t_2)\right]\right\} = R_x(t_1,t_2) \qquad (2.3.21)$$

tức là, rõ ràng, khi thêm vào một hạng tử không ngẫu nhiên, hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên không thay đổi.

Sử dụng tính chất này, thông thường, thay cho chính quá trình ngẫu nhiên người ta xét quá trình ngẫu nhiên qui tâm.

Khi nghiên cứu các quá trình khí tượng thuỷ văn, kỳ vọng toán học nhận được bằng cách trung bình hoá theo mọi thể hiện của quá trình ngẫu nhiên, là chuẩn khí hậu của quá trình đã cho. Đó có thể là chuẩn trung bình ngày, tháng hoặc nhiều năm, v.v., phụ thuộc vào tính chất của quá trình nghiên cứu. Sự thay đổi của quá trình được đặc trưng bởi độ lệch của thể hiện của quá trình so với chuẩn và gọi là dị thường.

Điều quan tâm lớn nhất khi nghiên cứu thống kê các quá trình ngẫu nhiên là đặc trưng của các dị thường này. Chẳng hạn, trong dự báo ta quan tâm đến độ lệch của yếu tố cần xét so với chuẩn, tức là yếu tố đó sẽ lớn hơn hay nhỏ hơn chuẩn khí hậu.

Từ đó, thông thường người ta xét các quá trình ngẫu nhiên qui tâm với kỳ vọng toán học bằng 0. Khi đó hàm tương quan của quá trình qui tâm trùng với hàm tương quan của quá trình ban đầu.

2.4. Hệ các quá trình ngẫu nhiên. Hàm tương quan quan hệ

Thông thường ta xét đồng thời một vài quá trình ngẫu nhiên. Khi đó ngoài các đặc trưng của mỗi quá trình ngẫu nhiên, chủ yếu là xác lập mối quan hệ giữa các quá trình khác nhau.

Chẳng hạn, khi nghiên cứu các hiện tượng thời tiết đòi hỏi phải xét đồng thời một loạt các quá trình ngẫu nhiên, như sự thay đổi của nhiệt độ không khí, áp suất, độ ẩm, v.v...

Tương tự như hệ các đại lượng ngẫu nhiên, có thể xét hệ n quá trình ngẫu nhiên như là vectơ ngẫu nhiên n chiều phụ thuộc vào đối số t, mà mỗi một quá trình ngẫu nhiên được xem là hình chiếu của vectơ này trên trục toạ độ đã cho.

Do sự cồng kềnh và không có khả năng ứng dụng thực tế nên các qui luật phân bố nhiều chiều của hệ các quá trình ngẫu nhiên sẽ không được mô tả, chúng ta sẽ giới hạn ở hai mômen đầu tiên mà chúng được sử dụng trong lý thuyết tương quan. Mômen gốc bậc nhất trùng với kỳ vọng toán học các quá trình ngẫu nhiên tương ứng.

Mômen trung tâm bậc hai có thể có hai dạng. Dạng thứ nhất, có thể xét mômen trung tâm bậc hai đối với hai lát cắt của cùng một quá trình ngẫu nhiên, nó sẽ là hàm tương quan của mỗi quá trình ngẫu nhiên của hệ.

Dạng thứ hai, có thể xét mômen trung tâm bậc hai đối với một lát cắt tương ứng với giá trị đối số t_1 của một quá trình ngẫu nhiên của hệ, còn lát cắt của quá trình thứ hai tương ứng với giá trị đối số t_2.

Mômen trung tâm này được gọi là hàm tương quan quan hệ giữa hai quá trình ngẫu nhiên đã cho. Người ta cũng còn dùng tên khác, là hàm tương quan lẫn nhau.

Xét hệ hai quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t). Trong lý thuyết tương quan các đặc trưng của nó sẽ là: Kỳ vọng toán học $m_x(t)$ và $m_y(t)$, hàm tương quan $R_x(t_1,t_2)$ và $R_y(t_1,t_2)$, và hàm tương quan quan hệ

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M\left\{\left[X(t_1)-m_x(t_1)\right]\left[Y(t_2)-m_y(t_2)\right]\right\} \quad (2.4.1)$$

Hàm tương quan quan hệ (2.4.1) đặc trưng cho mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa các lát cắt $X(t_1)$ và $Y(t_2)$. Khi $t_1=t_2$ hàm tương quan quan hệ sẽ đặc trưng cho mức độ phụ thuộc tuyến tính của các lát cắt tương ứng với cùng một giá trị đối số của các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t).

Hàm tương quan của mỗi quá trình ngẫu nhiên đặc trưng cho mức độ quan hệ giữa các lát cắt của cùng một quá trình, đôi khi còn được gọi là hàm tự tượng quan.

Hàm tương quan quan hệ $R_{xy}(t_1,t_2)$ không đối xứng đối với các đối số của chúng, tuy nhiên nó có tính chất là không thay đổi khi chuyển vị đồng thời cả đối số và chỉ số.

Thực vậy, từ (2.4.1) rõ ràng:

$$R_{xy}(t_1,t_2) = R_{yx}(t_2,t_1) \tag{2.4.2}$$

Dễ ràng chứng minh được rằng hàm tương quan quan hệ không thay đổi khi thêm vào mỗi hàm ngẫu nhiên các hạng tử không ngẫu nhiên, cho nên có thể tính nó khi sử dụng hàm ngẫu nhiên qui tâm.

Khi cố định các giá trị đối số t_1 và t_2 thì $R_{xy}(t_1,t_2)$ là mômen quan hệ giữa hai đại lượng ngẫu nhiên $X(t_1)$ và $Y(t_2)$, vì vậy

$$\left|R_{xy}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2) \tag{2.4.3}$$

Thay cho hàm tương quan quan hệ ta xét đại lượng vô thứ nguyên, gọi là hàm tương quan quan hệ chuẩn hoá.

$$r_{xy}(t_1,t_2) = \frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)} \tag{2.4.4}$$

Theo (2.4.3)

$$\left|r_{xy}(t_1,t_2)\right| \le 1 \tag{2.4.5}$$

Khi cố định các giá trị t_1 và t_2 hàm tương quan quan hệ chuẩn hoá $r_{xy}(t_1,t_2)$ là hệ số tương quan của các đại lượng ngẫu nhiên $X(t_1)$ và $Y(t_2)$.

Nếu hàm tương quan quan hệ đồng nhất bằng không thì các quá trình ngẫu nhiên được gọi là không liên hệ hay không tương quan.

Cũng như đối với đại lượng ngẫu nhiên, điều kiện không tương quan là điều kiện cần nhưng không phải là điều kiện đủ để các quá trình ngẫu nhiên độc lập. Nó chỉ đặc trưng cho sự không phụ thuộc tuyến tính giữa chúng.

Nếu có hệ n quá trình ngẫu nhiên $X_1(t)$, $X_2(t)$,..., $X_n(t)$ thì, để đặc trưng cho hệ này, trong lý thuyết tương quan cần phải cho n kỳ vọng toán học $m_{x_i}(t)$, n hàm tương quan $R_{x_i}(t_1,t_2)$ và $\dfrac{n(n-1)}{2}$ hàm tương quan quan hệ $R_{x_ix_j}(t_1,t_2)$. Do (2.4.2), chỉ cần cho các hàm tương quan quan hệ đối với các cặp chỉ số x_i, x_j, với $i<j$ là đủ, vì

$$R_{x_ix_j}(t_1,t_2) = R_{x_jx_i}(t_2,t_1) \tag{2.4.6}$$

Xét trường hợp khi quá trình ngẫu nhiên Z(t) là tổng của hai quá trình ngẫu nhiên khác X(t) và Y(t),

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \tag{2.4.7}$$

Ta tìm kỳ vọng và hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên Z(t).

Với mỗi giá trị t cố định, theo tính chất kỳ vọng của tổng các đại lượng ngẫu nhiên, ta nhận được

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) \tag{2.4.8}$$

Tính hàm tương quan $R_z(t_1,t_2)$

$$\overset{o}{Z}(t) = Z(t) - m_z(t) = \left[X(t) - m_x(t)\right] + \left[Y(t) - m_y(t)\right] = \overset{o}{X}(t) + \overset{o}{Y}(t)\,. \tag{2.4.9}$$

Từ đó

$$R_z(t_1,t_2) = M\left[\overset{o}{Z}(t_1)\overset{o}{Z}(t_2)\right] = M\left\{\left[\overset{o}{X}(t_1) + \overset{o}{Y}(t_1)\right]\left[\overset{o}{X}(t_2) + \overset{o}{Y}(t_2)\right]\right\} =$$

$$= M\left[\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{X}(t_2)\right] + M\left[\overset{o}{Y}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2)\right] + M\left[\overset{o}{X}(t_1)\overset{o}{Y}(t_2)\right] + M\left[\overset{o}{Y}(t_1)\overset{o}{X}(t_2)\right] =$$

$$= R_x(t_1,t_2) + R_y(t_1,t_2) + R_{xy}(t_1,t_2) + R_{yx}(t_1,t_2) \tag{2.4.10}$$

Như vậy, để xác định kỳ vọng toán học của tổng hai quá trình ngẫu nhiên cần biết kỳ vọng toán học của cả hai quá trình.

Để xác định hàm tương quan của tổng hai quá trình ngẫu nhiên cần biết hàm tương quan của mỗi quá trình thành phần và hàm tương quan quan hệ của các quá trình đó. Trong trường hợp khi các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t) không liên hệ, $R_{xy}(t_1,t_2)$=0, $R_{yx}(t_1,t_2)$=0 thì (2.4.10) có dạng

$$R_z(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) + R_y(t_1,t_2) \tag{2.4.11}$$

Các công thức này có thể được tổng quát hoá cho trường hợp tổng của n hạng tử

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t) \tag{2.4.12}$$

khi đó

$$m_z(t) = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}(t) \tag{2.4.13}$$

$$R_z(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} R_{x_i}(t_1,t_2) + \sum_{i<j}^{n} R_{x_i x_j}(t_1,t_2) \tag{2.4.14}$$

Trong trường hợp tất cả các quá trình ngẫu nhiên đôi một không liên hệ ta có

$$R_z(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n} R_{x_i}(t_1,t_2)\,. \tag{2.4.15}$$

Khi cộng hàm ngẫu nhiên X(t) với đại lượng ngẫu nhiên Y, ta có thể xét đại lượng ngẫu nhiên này như là hàm ngẫu nhiên không thay đổi theo đối số t.

Trong trường hợp này $m_y(t) = m_y$, còn $R_y(t_1,t_2) = R_y(t,t) = D_y$. Khi đó công thức (2.4.8) được viết lại dưới dạng

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y. \tag{2.4.16}$$

Khi hàm ngẫu nhiên X(t) không liên hệ với đại lượng ngẫu nhiên Y, công thức (2.4.10) được viết lại dưới dạng

$$R_z(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) + D_y, \tag{2.4.17}$$

2.5. Quá trình ngẫu nhiên dừng

Các quá trình ngẫu nhiên mà những tính chất thống kê của chúng, trên thực tế, không thay đổi theo đối số là những quá trình đơn giản nhất cho việc nghiên cứu và mô tả thống kê. Các quá trình như vậy được gọi là dừng.

Thuật ngữ dừng xuất hiện khi nghiên cứu các hàm ngẫu nhiên thời gian và đặc trưng cho các tính chất của chúng không thay đổi theo thời gian. Đối với các quá trình ngẫu nhiên mà đối số của chúng không phải thời gian mà là biến khác, chẳng hạn, khoảng cách, thuật ngữ đồng nhất là tự nhiên hơn. Tuy nhiên, thuật ngữ dừng được thừa nhận đối với hàm ngẫu nhiên một biến không phụ thuộc vào tính chất của biến này.

Thuật ngữ đồng nhất được áp dụng cho trường ngẫu nhiên, khi đặc trưng cho tính chất đồng nhất của chúng trong không gian, còn tính dừng của trường được hiểu là các tính chất thống kê của nó không thay đổi theo thời gian. Ta sẽ định nghĩa chính xác hơn khái niệm dừng.

Quá trình ngẫu nhiên X(t) được gọi là dừng nếu tất cả các qui luật phân bố hữu hạn chiều của nó không thay đổi khi thêm vào mọi giá trị của đối số với cùng một số, tức là nếu tất cả chúng chỉ phụ thuộc vào sự sắp xếp các giá trị của đối số với nhau mà không phụ thuộc vào chính các giá trị này.

Như vậy, quá trình ngẫu nhiên X(t) là dừng nếu với mọi n và mọi t_o, đẳng thức sau đây được thực hiện

$$f_n(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)=f_n(x_1,x_2,...,x_n;t_1+t_o,t_2+t_o,...,t_n+t_o) \qquad (2.5.1)$$

Do đó, mật độ phân bố là bất biến đối với phép dịch chuyển gốc tính của đối số t.

Cụ thể, đối với mật độ phân bố một chiều $f_1(x;t)$ của quá trình ngẫu nhiên dừng, khi đặt $t_o=-t$ ta nhận được

$$f_1(x;t) = f_1(x;t-t) = f_1(x;0) = f_1(x) \qquad (2.5.2)$$

tức là mật độ phân bố một chiều không phụ thuộc vào t, nó như nhau đối với mọi lát cắt của quá trình ngẫu nhiên.

Khi $t_o=-t_1$ mật độ phân bố hai chiều được đưa về dưới dạng

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1) = f_2(x_1,x_2;t_2-t_1) = f_2(x_1,x_2;\tau), \quad (2.5.3)$$

tức là mật độ phân bố hai chiều phụ thuộc vào không phải cả hai đối số t_1, t_2 mà chỉ phụ thuộc vào một đối số là hiệu của chúng $\tau = t_2-t_1$. Từ đó, theo (2.5.2), đối với quá trình ngẫu nhiên dừng ta nhận được

$$m_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = m_x = \text{const} \qquad (2.5.4)$$

tức kỳ vọng toán học của quá trình ngẫu nhiên dừng không phụ thuộc vào đối số t và là một đại lượng không đổi.

Theo (2.5.3) và (2.5.4),

$$R_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_x)(x_2-m_x)f_2(x_1,x_2;\tau)dx_1dx_2 = R_x(\tau) \qquad (2.5.5)$$

Như vậy, hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng là hàm chỉ của một đối số $\tau = t_2-t_1$.

Các điều kiện (2.5.4) và (2.5.5) được thực hiện đối với mọi quá trình dừng, tức đó là những điều kiện cần của tính dừng. Tuy nhiên chúng không phải là điều kiện đủ đối với quá trình dừng, có nghĩa là điều kiện đó chưa đảm bảo để thực hiện điều kiện (2.5.1) khi $n \geq 3$.

Trong lý thuyết tương quan của hàm ngẫu nhiên người ta không sử dụng qui luật phân bố nhiều chiều mà chỉ sử dụng hai mômen phân bố đầu tiên, khi đó việc thực hiện các điều kiện (2.5.4) và (2.5.5) là điều hết sức cốt yếu, nó làm đơn giản hoá rất nhiều việc mô tả các quá trình ngẫu nhiên và giải quyết được nhiều bài toán.

Vì vậy, trong lý thuyết tương quan người ta tách ra lớp các quá trình ngẫu nhiên mà các điều kiện (2.5.4) và (2.5.5) được thoả mãn, tức là đối với chúng kỳ vọng toán học là đại lượng không đổi, còn hàm tương quan là hàm chỉ của một đối số.

Các quá trình như vậy được gọi là dừng theo nghĩa rộng. Sau này, khi nghiên cứu lý thuyết tương quan hàm ngẫu nhiên, nếu nói đến tính dừng ta sẽ hàm ý là dừng theo nghĩa rộng.

Đối với các quá trình ngẫu nhiên có phân bố chuẩn, tính dừng theo nghĩa rộng tương đương với tính dừng theo nghĩa hẹp, vì tất cả các mật độ phân bố n chiều trong trường hợp này hoàn toàn được xác định bởi kỳ vọng toán học và hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên. Và do đó, sự không phụ thuộc của kỳ vọng và hàm tương quan vào việc chọn gốc tính của đối số t dẫn đến tính bất biến của mật độ phân bố n chiều của quá trình ngẫu nhiên có phân bố chuẩn.

Từ tính chất đối xứng của hàm tương quan (2.3.12) suy ra

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \tag{2.5.6}$$

tức hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng là hàm chẵn. Từ đó cũng có thể nói hàm tương quan chỉ phụ thuộc vào giá trị tuyệt đối của hiệu t_2-t_1, tức là xem $\tau = |t_2 - t_1|$.

Đối với quá trình ngẫu nhiên dừng X(t), phương sai

$$D_x(t) = R_x(t,t) = R_x(0), \tag{2.5.7}$$

tức phương sai cũng là một đại lượng không đổi, không phụ thuộc vào đối số t. Nó nhận được từ hàm tương quan $R_x(\tau)$ khi $\tau=0$.

Theo (2.3.12), hàm tương quan chuẩn hoá của quá trình dừng được xác định dưới dạng

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x} = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \tag{2.5.8}$$

Đặc biệt

$$r_x(0) = \frac{R_x(0)}{R_x(0)} = 1 \tag{2.5.9}$$

Ta hãy xét hệ các quá trình ngẫu nhiên $X_1(t), X_2(t),..., X_n(t)$. Hệ này được gọi là dừng theo nghĩa rộng nếu mỗi một quá trình ngẫu nhiên $X_i(t)$ là dừng theo nghĩa rộng, ngoài ra, các hàm tương quan quan hệ $R_{x_i x_j}(t_1,t_2)$ là hàm chỉ của một đối số $\tau=t_2-t_1$, tức là

$$R_{x_i x_j}(t_1,t_2) = R_{x_i x_j}(\tau). \tag{2.5.10}$$

Hệ như vậy cũng còn được gọi là dừng và liên hệ dừng.

Đối với hệ như vậy, từ tính chất của hàm tương quan quan hệ (2.4.2) ta được

$$R_{x_i x_j}(\tau) = R_{x_i x_j}(-\tau) \qquad (2.5.11)$$

Từ những điều đã trình bày ta thấy rằng, tính dừng của hàm ngẫu nhiên đã làm đơn giản đi một cách đáng kể việc mô tả thống kê nó. Trong khuôn khổ lý thuyết tương quan điều đó cho phép vạch ra các phương pháp toán học khá hữu hiệu giải quyết các vấn đề biến đổi hàm ngẫu nhiên dừng, dự báo chúng,...

Đối với các hàm không dừng việc giải quyết các vấn đề đó gặp rất nhiều khó khăn. Vì vậy, trước khi xét bất kỳ một hàm ngẫu nhiên nào xảy ra trong thực tế, ta phải xét trên quan điểm có thể cho rằng nó là dừng.

Đối với các quá trình xảy ra trong khí quyển và thuỷ quyển, giả thiết về tính dừng của chúng được thoả mãn tương đối tốt trong khoảng thời gian hoặc khoảng cách không lớn. Khi tăng khoảng thay đổi của đối số tính dừng bị phá huỷ. Khi đó, do biến trình ngày (năm) của các yếu tố khí tượng và các nhân tố hệ thống khác, mà dẫn đến việc kỳ vọng toán học thay đổi theo sự thay đổi của đối số. Vì vậy nhiều khi tính dừng theo nghĩa hàm tương quan không phụ thuộc vào gốc tính toán, trên thực tế, vẫn được bảo toàn, nếu không chính xác thì cũng là xấp xỉ cho phép nào đó.

Trong trường hợp này, thay cho chính quá trình ngẫu nhiên, hợp lý hơn ta xét quá trình ngẫu nhiên qui tâm, tức là độ lệch của nó khỏi kỳ vọng toán học

$$\overset{o}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$$

Khi đó, có thể xem quá trình ngẫu nhiên qui tâm là dừng với kỳ vọng toán học không đổi bằng 0. Hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên qui tâm và quá trình ngẫu nhiên ban đầu trùng nhau như đã chỉ ra trong mục 2.3.

Khi nghiên cứu cấu trúc thống kê các quá trình khí quyển và thuỷ quyển, thông thường nhất là các quá trình ngẫu nhiên dừng có hàm tương quan được xấp xỉ bởi các dạng hàm sau đây:

1) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha>0$ (hình 2.2)

2) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}$, $\alpha>0$ (hình 2.3)

3) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$, $\alpha>0$ (hình 2.4)

4) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau$, $\alpha>0$ (hình 2.5)

5) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$, $\alpha>0$, $\beta>0$ (hình 2.6)

6) $R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2\left(1-\dfrac{\tau}{\tau_o}\right) & \text{khi } |\tau| \le \tau_o \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_o \end{cases}$ (hình 2.7)

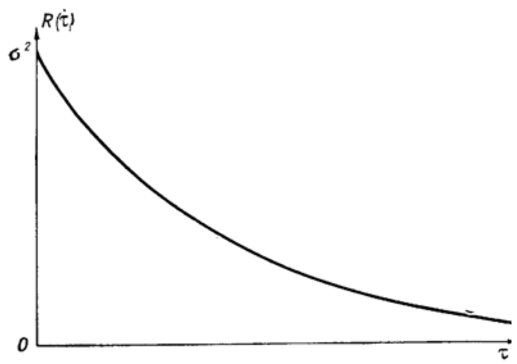
Trên các hình chỉ dẫn ra đồ thị các hàm tương quan đối với $\tau>0$, do tính chẵn của các hàm này, ta sẽ có tương ứng các đường cong đối xứng đối với trục tung.

Từ các hình 2.2, 2.3, 2.7 ta thấy, giá trị của hàm tương quan giảm khi τ tăng, tức là mối liên hệ tương quan giữa các lát cắt của hàm ngẫu nhiên giảm theo sự tăng của khoảng cách giữa chúng.

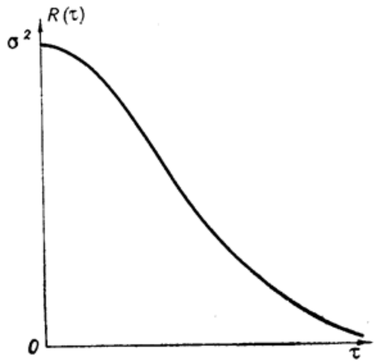
Các đường cong trên hình 2.4 và 2.5 có dạng dao động điều hoà với biên độ giảm dần. Dạng các đường cong này nói lên tính có chu kỳ trong cấu trúc của hàm ngẫu nhiên. Việc nhận được các giá trị âm của R(τ) trên khoảng biến đổi của τ chỉ ra mối quan hệ nghịch biến giữa các lát cắt của hàm ngẫu nhiên, tức là độ lệch khỏi kỳ vọng toán học ở lát cắt này dương tương ứng với độ lệch âm ở lát cắt khác.

Đối với tất cả các trường hợp đã nêu, hàm tương quan dần tới không khi τ dần tới vô hạn. Thực tế, tính chất này thường được thoả mãn đối với tất cả các hàm ngẫu nhiên thường gặp trong khí tượng thuỷ văn.

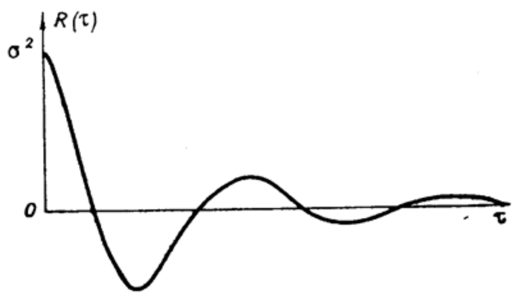
Ngoại trừ trường hợp khi mà trong cấu trúc của hàm ngẫu nhiên có thành phần là một đại lượng ngẫu nhiên không đổi. Trong trường hợp này hàm tương quan sẽ chứa một hạng tử là hằng số, bằng phương sai của đại lượng ngẫu nhiên này. Khi $\tau \to \infty$ thì R(τ) sẽ dần đến phương sai này. Ví dụ như, đối với trường hợp 3 đồ thị sẽ có dạng như trên hình 2.8.



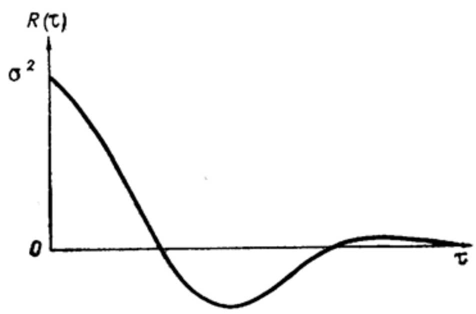
Hình 2.2



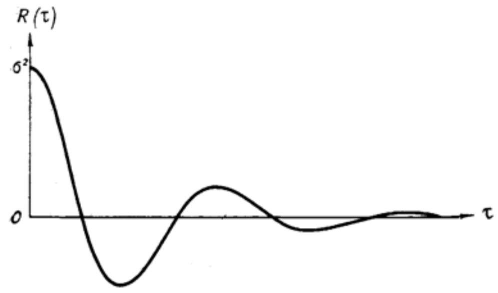
Hình 2.3



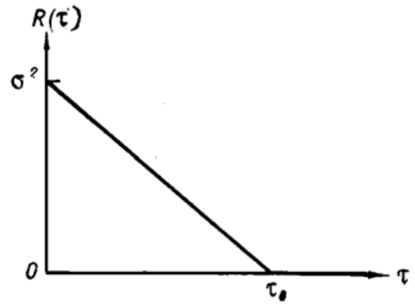
Hình 2.4



Hình 2.5



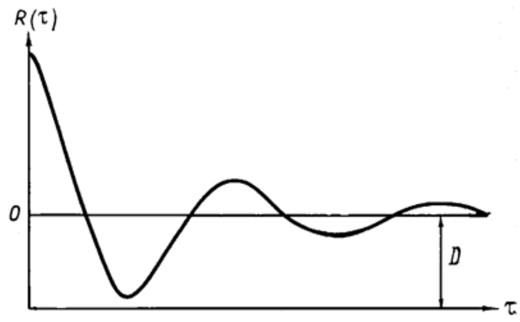
Hình 2.6



Hình 2.7

Một vấn đề xuất hiện là, có phải mọi hàm chẵn đều có thể là hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng hay không.

Hàm f(t) mà đối với nó bất đẳng thức sau đây đúng đối với mọi n số thực a_1, a_2,..., a_n và mọi giá trị của đối số t_1, t_2,..., t_n được gọi là xác định dương:



Hình 2.8

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j f(t_i - t_j) \geq 0 \qquad (2.5.12)$$

Ta xét tổng kiểu như vậy đối với hàm tương quan $R_x(\tau)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j R_x(t_i - t_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M\left[\overset{o}{X}(t_i)\overset{o}{X}(t_j)\right] a_i a_j = M\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{o}{X}(t_i)\right]^2\right\} \geq 0 \qquad (2.5.13)$$

Tổng (2.5.13) không âm giống như kỳ vọng toán học của đại lượng không âm. Do đó, hàm tương quan là xác định dương. Từ đó thấy rằng, một hàm chỉ có thể là hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng khi nó là xác định dương.

Điều ngược lại cũng đúng vì mọi hàm xác định dương là hàm tương quan đối với một quá trình ngẫu nhiên dừng nào đó.

Có thể chỉ ra rằng, tất cả các hàm được xét trên các hình 2.2–2.7 đều xác định dương.

Đối với hàm tự tương quan, như chúng ta đã thấy, giá trị cực đại bằng phương sai của quá trình ngẫu nhiên, đạt được khi τ=0.

Đối với hàm tương quan quan hệ của hai quá trình ngẫu nhiên điều đó không phải luôn luôn xảy ra. Thực vậy, ảnh hưởng của một quá trình lên quá trình khác có thể xảy ra với độ trễ nào đó. Chẳng hạn, sự nung nóng tầng bình lưu do bức xạ mặt trời chỉ xảy ra sau một thời gian τ nào đó. Trong trường hợp này, giá trị của mômen quan hệ giữa các lát cắt của các quá trình này sau khoảng thời gian τ, lớn hơn so với mômen quan hệ giữa các lát cắt tại cùng thời điểm của các quá trình đó. Sự trễ này có thể là nguyên nhân của tính không đối xứng của hàm tương quan quan hệ đối với đối số τ, tức là

$$R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau).$$

2.6. Tính egodic của quá trình ngẫu nhiên dừng

Cho đến nay chúng ta đã xác định được các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên, như kỳ vọng toán học và hàm tương quan, bằng cách lấy trung bình theo tập hợp tất cả các thể hiện. Tuy nhiên có thể có phương pháp lấy trung bình khác nếu chúng ta có một thể hiện với độ dài đủ lớn. Nếu mối liên hệ giữa các lát cắt khác nhau của quá trình ngẫu nhiên giảm nhanh thì có thể xem các phần của thể hiện không phụ thuộc lẫn nhau và có thể xét chúng như là tập hợp các thể hiện. Đương nhiên, chỉ có thể xét phương pháp này đối với hàm ngẫu nhiên dừng, vì đối với hàm không dừng các tính chất thống kê thay đổi theo đối số, và các đoạn riêng biệt của thể hiện không thể xem là những thể hiện khác nhau như kết quả của các lần thí nghiệm trong cùng những điều kiện như nhau.

Đối với quá trình ngẫu nhiên dừng, kỳ vọng toán học (giá trị trung bình) không phụ thuộc vào đối số, vì vậy có thể xác định giá trị của nó như là trung bình số học của tất cả các giá trị của thể hiện đã cho mà không cần chia thể hiện thành các phần riêng biệt. Trong trường hợp này kỳ vọng toán học được xác định bởi công thức

$$m_x = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \tag{2.6.1}$$

trong đó T là khoảng lấy trung bình.

Tương tự, hàm tương quan $R_x(\tau)$ cũng được xác định như là trung bình số học của tích

$$\left[x(t) - m_x\right]\left[x(t+\tau) - m_x\right]$$

theo tất cả các giá trị của thể hiện đã cho bằng công thức

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left[x(t) - m_x\right]\left[x(t+\tau) - m_x\right]dt \tag{2.6.2}$$

Một vấn đề xuất hiện là các giá trị này có tiệm cận với giá trị tương ứng nhận được bằng cách lấy trung bình trên toàn tập hợp hay không. Câu trả lời là điều đó sẽ xảy ra không phải đối với mọi hàm dừng.

Người ta nói rằng, hàm ngẫu nhiên có tính egodic là hàm mà đối với nó, các đặc trưng nhận được bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện có thể tiến dần đến các đặc trưng tương ứng nhận được bằng việc lấy trung bình theo tập tất cả các thể hiện với xác suất tuỳ ý gần bằng đơn vị khi tăng khoảng lấy trung bình T. Các hàm ngẫu nhiên có tính egodic là các hàm mà mỗi thể hiện của chúng có cùng một số tính chất thống kê. Nếu các thể hiện riêng biệt có những đặc tính của mình, ví dụ như dao động xung quanh các giá trị trung bình khác nhau, thì giá trị trung bình nhận được theo một thể hiện có thể khác nhiều so với trung bình theo tập hợp tất cả các thể hiện.

Điều kiện toán học của tính egodic của hàm ngẫu nhiên dừng đã được phát biểu.

Cụ thể, hàm tương quan $R_x(\tau)$ tiến đến không khi τ tiến đến vô hạn đối với kỳ vọng toán học là điều kiện đủ cho tính egodic. Điều kiện này thường thoả mãn đối với mọi hàm ngẫu nhiên gặp trong thực tế. Tuy nhiên, nó sẽ không được thực hiện nếu trong thành phần của hàm ngẫu nhiên có chứa một đại lượng ngẫu nhiên nào đó như là một hằng số cộng.

Thực vậy, giả sử hàm ngẫu nhiên Z(t) là tổng của quá trình ngẫu nhiên dừng X(t) và một đại lượng ngẫu nhiên có kỳ vọng toán học bằng 0 không liên hệ với nó. Khi đó, theo (2.4.17), xảy ra đẳng thức sau:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + D_y,$$

và $R_z(\tau)$ sẽ không tiến tới 0, mà tiến tới một số dương D_y nào đó khi $\tau\to\infty$, thậm chí cả khi điều kiện $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_x(\tau) = 0$ được thoả mãn.

Trong trường hợp này, theo (2.4.16), ta có

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y = m_x(t). \qquad (2.6.3)$$

Mỗi một thể hiện $z_i(t)$, tại mọi giá trị đối số t, sẽ chứa một hằng số cộng bằng giá trị y_i của đại lượng ngẫu nhiên Y, tức là

$$z_i(t) = x_i(t) + y_i \qquad (2.6.4)$$

vì vậy, giá trị trung bình nhận được bằng việc lấy trung bình theo thể hiện này bằng

$$m_z = m_x + y_i \qquad (2.6.5)$$

sẽ khác với giá trị thực m_z một đại lượng y_i.

Khi xác định các đặc trưng của quá trình ngẫu nhiên có tính egodic theo một thể hiện thì độ dài của khoảng lấy trung bình hết sức quan trọng. Vì các đặc trưng nhận được bằng việc trung bình hoá theo một thể hiện khá gần trùng với các đặc trưng thống kê thực của chúng chỉ khi giới hạn khoảng lấy trung bình tăng lên vô hạn, nên khi chỉ có các quan trắc trong một khoảng nhỏ của đối số thay đổi, có thể nhận được các đặc trưng cần tìm với sai số lớn không cho phép.

Taylor [33] đã chỉ ra rằng, đối với phương sai của hiệu giữa giá trị thực của kỳ vọng toán học của quá trình ngẫu nhiên X(t) có dạng đã nói và giá trị nhận được bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện với T đủ lớn, công thức xấp xỉ sau đây là đúng

$$\mathrm{D} \approx 2\frac{T_1}{T}R_x(0), \qquad (2.6.6)$$

trong đó T là khoảng lấy trung bình, còn T_1 là đại lượng, gọi là thời gian tương quan, được xác định theo công thức

$$T_1 = \frac{1}{R_x(0)}\int_0^\infty R_x(\tau)d\tau\,. \qquad (2.6.7)$$

Như vậy, để xác định chắc chắn các đặc trưng cần tìm, cần phải lấy khoảng trung bình hoá lớn hơn nhiều lần so với thời gian tương quan T_1.

Điều kiện egodic đối với hàm tương quan được phát biểu phức tạp hơn. Trên thực tế thông thường ta không kiểm tra được sự thoả mãn của chúng, vì vậy người ta thường phán đoán tính egodic xuất phát từ bản chất vật lý của quá trình.

Tính egodic có ý nghĩa thực tế lớn, vì nhờ nó việc xác định các đặc trưng thống kê không đòi hỏi phải có số thể hiện lớn. Khi nghiên cứu cấu trúc thống kê các yếu tố khí tượng, hoàn toàn không phải lúc nào cũng có thể thực hiện việc lặp lại các thí nghiệm nhiều lần trong những điều kiện như nhau.

Còn một điều phức tạp nữa trong thuỷ văn. Ví dụ như số liệu dòng chảy năm của sông có thể chỉ là một thể hiện.

Nếu có một vài thể hiện độ dài như nhau, là kết quả của các lần thí nghiệm trong cùng một điều kiện, thì khi sử dụng tính egodic, có thể nhận được các đặc trưng thống kê bằng cách lấy trung bình theo mỗi thể hiện, và sau đó lấy giá trị trung bình số học của chúng như là giá trị cần tìm. Nếu độ dài các thể hiện khác nhau thì cần phải tiến hành lấy trung bình kết quả theo chúng có tính đến trọng số của mỗi thể hiện.

2.7. Hàm cấu trúc

Để đặc trưng cho quá trình ngẫu nhiên dừng, bên cạnh hàm tương quan người ta còn xét hàm cấu trúc B(τ) mà nó được xác định bởi kỳ vọng toán học của bình phương hiệu các lát cắt của quá trình ngẫu nhiên tương ứng với các giá trị của đối số t và t+τ

$$B_x(\tau) = M\left\{\left[X(t+\tau) - X(t)\right]^2\right\} \tag{2.7.1}$$

Từ định nghĩa thấy rằng, hàm cấu trúc không âm, $B_x(\tau) \geq 0$.

Có thể biểu diễn hàm cấu trúc qua hàm tương quan

$$B_x(\tau) = M\left\{\left[(X(t+\tau) - m_x) - (X(t) - m_x)\right]^2\right\} = M\left\{\left[X(t+\tau) - m_x\right]^2\right\}$$

$$+ M\left\{\left[X(t) - m_x\right]^2\right\} - 2M\left\{\left[X(t+\tau) - m_x\right]\left[X(t) - m_x\right]\right\} = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]. \tag{2.7.2}$$

Từ (2.7.2) và tính chất của hàm tương quan ta nhận được:

$$B_x(0) = 0, \tag{2.7.3}$$

$$B_x(-\tau) = B_x(\tau) \tag{2.7.4}$$

tức hàm cấu trúc của quá trình ngẫu nhiên dừng là hàm chẵn.

Đối với quá trình ngẫu nhiên, nếu thoả mãn điều kiện

$$\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = 0 \tag{2.7.5}$$

thì từ (2.7.2) ta có

$$\lim_{\tau \to \infty} B_x(\tau) = 2R_x(0) = 2\sigma_x^2$$

Ký hiệu $\lim_{\tau \to \infty} B_x(\tau) = B_x(\infty)$, khi (2.7.5) thoả mãn ta viết lại (2.7.2) dưới dạng

$$B_x(\tau) = B_x(\infty) - 2R_x(\tau), \tag{2.7.6}$$

từ đó có thể biểu diễn hàm tương quan qua hàm cấu trúc

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2}\left[B_x(\infty) - B_x(\tau)\right] \tag{2.7.7}$$

Như vậy, với điều kiện (2.7.5), mà trên thực tế nó thường thoả mãn, khi biết hàm cấu trúc trên khoảng vô hạn của đối số, ta có thể xác định được hàm tương quan theo hàm cấu trúc.

Thực tế ta không bao giờ có bản ghi thể hiện của quá trình ngẫu nhiên trên khoảng vô hạn, tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, hàm cấu trúc đạt khá nhanh đến giá trị mà khi tăng hơn nữa khoảng τ, giá trị này thay đổi cũng không đáng kể.

Giá trị đó được xem là $B_x(\infty)$, đôi khi nó được gọi là giá trị bão hoà của hàm cấu trúc. Giữa hàm cấu trúc và hàm tương quan xảy ra hệ thức

$$R_x(\tau) + \frac{1}{2} B_x(\tau) = \sigma_x^2 \tag{2.7.8}$$

Trên hình 2.9 minh hoạ hệ thức này đối với quá trình ngẫu nhiên dừng có hàm tương quan (hình 2.2) là

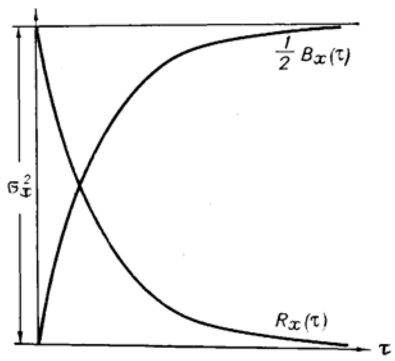
$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

Vì hàm cấu trúc được biểu diễn qua hàm tương quan nên đối với quá trình ngẫu nhiên dừng có tính egodic, hàm cấu trúc cũng có thể được xác định theo một thể hiện độ dài đủ lớn bằng công thức:

$$B_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t+\tau) - x(t)]^2 dt \tag{2.7.9}$$

Nếu hàm ngẫu nhiên là dừng và có số thể hiện đủ lớn đảm bảo mô tả được các tính chất của nó một cách chắc chắn trên tất cả các khoảng biến đổi của đối số, thì có thể xác định hàm tương quan trực tiếp theo các số liệu thực nghiệm.

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp tốt hơn cả nên sử dụng hàm cấu trúc.



Hình 2.9

Tính dừng của các quá trình khí tượng thực thường mang tính chất địa phương, nó chỉ được bảo toàn trên khoảng thay đổi không lớn lắm của đối số.

Khi nghiên cứu cấu trúc qui mô vừa, và đặc biệt là qui mô lớn, của các quá trình này, tính dừng (đồng nhất) của chúng chỉ có thể được chấp nhận với mức độ gần đúng nhất định. Khi đó kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên không phải là hằng số. Việc xác định hàm tương quan đối với các quá trình như vậy có thể mắc phải sai số lớn khi giá trị của đối số nhỏ.

Những biến đổi chậm chạp của chính quá trình không ảnh hưởng đến hàm cấu trúc khi độ lớn của hiệu các giá trị đối số t nhỏ. Vì vậy, tính không đồng nhất của các nhiễu động sóng dài không ảnh hưởng rõ rệt đến độ chính xác của việc tính B(τ) khi giá trị τ nhỏ. Nói chung, những sai số hệ thống, mà chúng bảo toàn giá trị của mình trong suốt chu kỳ dài lớn hơn τ, không ảnh hưởng đến đại lượng $B_x(\tau)$, vì chúng bị khử bỏ khi tính hiệu x(t+τ)–x(t).

Nếu không sử dụng trung bình thống kê thực mà sử dụng trung bình theo thể hiện, tức là lại xảy ra sai số hệ thống, thì việc sử dụng hàm cấu trúc sẽ tốt hơn khi xử lý theo một thể hiện. Hàm cấu trúc được tính theo các thể hiện riêng biệt không chứa sai số hệ thống này, vì khi tính toán người ta không dùng giá trị trung bình theo thể hiện. Đây là trường hợp việc chỉnh lý được tiến hành theo tập hợp thống kê số các thể hiện không lớn lắm.

Như vậy, trong nhiều trường hợp việc sử dụng hàm cấu trúc cho phép làm giảm ảnh hưởng của tính không đồng nhất của quá trình và sai số hệ thống đến độ chính xác của các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên tính toán theo số liệu thực nghiệm.

Tuy nhiên, những ưu việt của hàm cấu trúc là đáng kể chỉ khi giá trị của tham số τ nhỏ. Khi tính hàm tương quan qua hàm cấu trúc, trước hết độ chính xác không tăng lên, vì tất cả sai số nằm trong giá trị bão hoà của hàm cấu trúc.

2.8. Giới hạn của quá trình ngẫu nhiên

Ta định nghĩa khái niệm giới hạn của quá trình ngẫu nhiên X(t) khi đối số t dần tới giá trị t_o nào đó.

Nếu f(t) là hàm không ngẫu nhiên thì, như đã biết, số A được gọi là giới hạn của hàm f(t) khi $t \to t_o$, nếu với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại một số $\delta>0$ sao cho với mọi t mà $|t-t_0|<\delta$, thì bất đẳng thức $|f(t)-A|<\varepsilon$ thoả mãn. Điều này có nghĩa rằng đối với mọi t đủ gần t_0, những giá trị tương ứng của $f(t)$ sẽ gần với A tuỳ ý.

Đối với hàm ngẫu nhiên, một đại lượng ngẫu nhiên nào đó mà chuỗi các lát cắt của hàm ngẫu nhiên sẽ hội tụ tại đó khi t tiến tới t_0, sẽ là giới hạn. Khi đó có thể nói về sự tiến dần của một đại lượng ngẫu nhiên đến một đại lượng ngẫu nhiên khác chỉ là về trung bình theo tất cả các giá trị của chúng.

Ta sẽ xem rằng đại lượng ngẫu nhiên Y là giới hạn của hàm ngẫu nhiên X(t) khi $t \to t_0$, nếu giới hạn của kỳ vọng toán học của bình phương hiệu của chúng tiến tới không

$$\lim_{t\to t_0} M\left\{[X(t)-Y]^2\right\}=0 \tag{2.8.1}$$

ở đây giới hạn cũng được hiểu theo nghĩa thông thường, vì kỳ vọng toán học là hàm không ngẫu nhiên. Như vậy, ta sẽ gọi đại lượng ngẫu nhiên Y là giới hạn của hàm ngẫu nhiên X(t) khi t tiến tới t_0 nếu với mọi $\varepsilon>0$ tìm được một $\delta>0$ sao cho với mọi giá trị t mà $|t-t_0|<\delta$, bất đẳng thức $M\left\{[X(t)-Y]^2\right\}<\varepsilon$ thoả mãn. Vậy người ta gọi giới hạn vừa định nghĩa là giới hạn theo nghĩa bình phương trung bình.

Nhiều khi để phân biệt giới hạn của hàm ngẫu nhiên, được hiểu là giới hạn bình phương trung bình, với giới hạn thông thường của hàm không ngẫu nhiên, người ta ký hiệu $\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m.}} X(t)$. Sau này chúng ta sẽ sử dụng ký hiệu *lim* thông thường, nhưng hiểu theo nghĩa nêu ở trên.

Ta sẽ gọi hàm ngẫu nhiên X(t) là liên tục tại điểm t_0 nếu giới hạn của nó khi $t\to t_0$ là lát cắt $X(t_0)$, $\lim_{t\to t_0} X(t) = X(t_0)$, tức là, nếu

$$\lim_{t\to t_0} M\left\{[X(t)-X(t_0)]^2\right\}=0 \tag{2.8.2}$$

2.9. Đạo hàm của hàm ngẫu nhiên

Ta nói rằng quá trình ngẫu nhiên X(t) khả vi tại điểm t_0 nếu tồn tại một đại lượng ngẫu nhiên $Y(t_0)$ sao cho

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = Y(t_0). \qquad (2.9.1)$$

Theo định nghĩa giới hạn của hàm ngẫu nhiên, điều này có nghĩa rằng với mọi ε>0 sẽ tìm được một δ>0 sao cho với $|\Delta t| < \delta$ bất đẳng thức sau thoả mãn:

$$M\left\{\left[\frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = Y(t_0)\right]^2\right\} < \varepsilon \qquad (2.9.2)$$

Đại lượng ngẫu nhiên $Y(t_0)$ gọi là đạo hàm của quá trình ngẫu nhiên X(t) tại điểm t_0 và được ký hiệu bằng

$$Y(t_0) = \frac{dX(t)}{dt}\bigg|_{t=t_0}. \qquad (2.9.3)$$

Nếu quá trình ngẫu nhiên khả vi tại mọi giá trị t của khoảng nào đó, thì đạo hàm $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$ cũng sẽ là quá trình ngẫu nhiên của đối số t.

Định nghĩa này về đạo hàm của hàm ngẫu nhiên tương tự như định nghĩa về đạo hàm của hàm không ngẫu nhiên, chỉ khác là giới hạn được hiểu như giới hạn bình phương trung bình.

Giả sử hàm ngẫu nhiên X(t) có kỳ vọng toán học $m_x(t)$ và hàm tương quan $R_x(t_1, t_2)$. Ta sẽ xác định kỳ vọng toán học $m_y(t)$ và hàm tương quan $R_y(t_1, t_2)$ của đạo hàm $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M\left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} M\left[\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = \frac{dm_x(t)}{dt}. \qquad (3.9.4)$$

Như vậy, kỳ vọng toán học của đạo hàm của hàm ngẫu nhiên bằng đạo hàm của kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên đó.

Ta xác định $R_y(t_1, t_2)$:

$$R_y(t_1, t_2) = M\left[\overset{0}{Y}(t_1)\overset{0}{Y}(t_2)\right]; \qquad (2.9.5)$$

$$\overset{0}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} -$$

$$- \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[X(t+\Delta t) - m_x(t+\Delta t)\right] - \left[X(t) - m_x(t)\right]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{0}{X}(t+\Delta t) - \overset{0}{X}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overset{0}{X}(t)}{dt} \qquad (2.9.6)$$

Thế (2.9.6) vào (2.9.5), ta nhận được

$$R_y(t_1,t_2) = M\left\{\lim_{\Delta t_1 \to 0} \frac{\overset{0}{X}(t_1+\Delta t_1) - \overset{0}{X}(t_1)}{\Delta t_1} \lim_{\Delta t_2 \to 0} \frac{\overset{0}{X}(t_2+\Delta t_2) - \overset{0}{X}(t_2)}{\Delta t_2}\right\} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \{[R_x(t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2) - R_x(t_1+\Delta t_1, t_2)] -$$

$$- [R_x(t_1, t_2+\Delta t_2) - R_x(t_1,t_2)]\} =$$

$$= \lim_{\Delta t_1 \to 0} \frac{1}{\Delta t_1}\left[\frac{\partial R_x(t_1+\Delta t_1, t_2)}{\partial t_2} - \frac{\partial R_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right] = \frac{\partial^2 R_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \qquad (2.9.7)$$

Như vậy, hàm tương quan của đạo hàm của hàm ngẫu nhiên bằng đạo hàm hỗn hợp cấp hai của hàm tương quan của chính hàm ngẫu nhiên.

Ta sẽ xét phép tính đạo hàm đối với quá trình ngẫu nhiên dừng X(t). Trong trường hợp này kỳ vọng toán học m_x là hằng số, do đó

$$\frac{dm_x}{dt} = 0, \qquad (2.9.8)$$

tức là kỳ vọng toán học của đạo hàm của quá trình ngẫu nhiên dừng bằng không.

Hàm tương quan là hàm một đối số $R_x(\tau), \tau = t_2 - t_1$, từ đó

$$R_y(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 R_x(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left[\frac{\partial R_x(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t_1}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t_2}\left[\frac{dR_x(\tau)}{d\tau}\right] = -\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}, \qquad (2.9.9)$$

tức là hàm tương quan của đạo hàm của quá trình ngẫu nhiên dừng bằng đạo hàm cấp hai lấy ngược dấu của hàm tương quan một đối số τ của chính quá trình ngẫu nhiên đó.

Từ đó thấy rằng hàm tương quan của đạo hàm của quá trình ngẫu nhiên dừng cũng chỉ phụ thuộc vào một đối số $\tau, R_y(t_1,t_2) = R_y(\tau)$, tức là đạo hàm của hàm ngẫu nhiên dừng cũng là hàm dừng.

Chúng ta đã xác định những đặc trưng của đạo hàm của hàm ngẫu nhiên trong điều kiện giả định nó khả vi.

Có thể chỉ ra rằng [21], điều kiện cần và đủ để hàm ngẫu nhiên khả vi là tồn tại đạo hàm của kỳ vọng toán học và đạo hàm riêng hỗn hợp cấp hai của hàm tương quan của nó tại t_1=t_2 (tồn tại đạo hàm cấp hai của hàm tương quan tại τ=0 đối với hàm ngẫu nhiên dừng). Từ đó suy ra rằng không phải mọi hàm ngẫu nhiên đều khả vi.

Ví dụ, hàm ngẫu nhiên có hàm tương quan dạng

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \ \alpha > 0 \qquad (2.9.10)$$

là hàm không khả vi.

Thực vậy,

$$R_x(\tau) = \begin{cases} -\sigma^2 \alpha e^{-\alpha\tau} & \text{khi } \tau > 0, \\ \sigma^2 \alpha e^{\alpha\tau} & \text{khi } \tau < 0. \end{cases} \qquad (2.9.11)$$

Từ đó thấy rằng tại điểm τ=0 đạo hàm $R_x'(\tau)$ bị gián đoạn, vì đạo hàm bên phải điểm này bằng $-\sigma^2\alpha$, còn đạo hàm bên trái bằng $\sigma^2\alpha$. Do đó, đạo hàm cấp hai $R_x''(\tau)$ tại điểm τ=0 không tồn tại.

Ta sẽ tìm các đặc trưng của đạo hàm của một số quá trình ngẫu nhiên dừng.

1. Giả sử quá trình ngẫu nhiên có hàm tương quan

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}, \ \ \alpha > 0 \qquad (2.9.12)$$

Hàm tương quan của đạo hàm của quá trình ngẫu nhiên này bằng

$$R_y(\tau) = 2\sigma^2\alpha(1 - 2\alpha\tau^2)e^{-\alpha\tau^2} \qquad (2.9.13)$$

Tại τ = 0 ta có

$$R_y(0) = 2\sigma^2\alpha \qquad (2.9.14)$$

Từ đó thấy rằng quá trình ngẫu nhiên X(t) khả vi.

Phương sai của đạo hàm Y(t) khi đó phụ thuộc không những vào phương sai của quá trình ngẫu nhiên X(t), mà còn vào hệ số α đặc trưng cho mức độ giảm hàm tương quan $R_x(\tau)$ khi đối số τ tăng.

2. $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau, \ \alpha > 0;$ (2.9.15)

Trong trường hợp này đạo hàm của hàm tương quan bị gián đoạn tại τ=0 và do đó đạo hàm cấp hai không tồn tại.

Do đó quá trình ngẫu nhiên X(t) có hàm tương quan dạng như vậy không khả vi.

3. $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau, \ \alpha > 0;$ (2.9.16)

$$R_x'(\tau) = -\sigma^2(2\alpha\tau\cos\beta\tau + \beta\sin\beta\tau)e^{-\alpha\tau^2}, \qquad (2.9.17)$$

$$R_y(\tau) = -R_x''(\tau) = \sigma^2\left[(\beta^2 + 2\alpha - 4\alpha^2\tau^2)\cos\beta\tau - 4\alpha\beta\tau\sin\beta\tau\right]e^{-\alpha\tau^2} \qquad (2.9.18)$$

Tại τ = 0 ta có

$$R_y(0) = \sigma^2(2\alpha + \beta^2). \qquad (2.9.19)$$

Quá trình ngẫu nhiên X(t) khả vi, phương sai của đạo hàm của quá trình này phụ thuộc không chỉ vào phương sai của X(t), mà còn vào các hệ số α và β quy định dạng hàm tương quan $R_x(\tau)$.

4. $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau\right), \ \alpha > 0, \ \beta > 0;$ (2.9.20)

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 e^{-\alpha\tau}\left(\cos\beta\tau + \dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau\right) & \text{khi} \quad \tau > 0, \\ \sigma^2 e^{\alpha\tau}\left(\cos\beta\tau - \dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau\right) & \text{khi} \quad \tau < 0. \end{cases} \qquad (2.9.21)$$

Từ đó

$$R_y(\tau) = -R_x''(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}(\beta\cos\beta\tau - \alpha\sin\beta\tau)e^{-\alpha\tau} & \text{khi} \quad \tau > 0, \\ \sigma^2 \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}(\beta\cos\beta\tau + \alpha\sin\beta\tau)e^{\alpha\tau} & \text{khi} \quad \tau > 0. \end{cases} \qquad (2.9.22)$$

Có thể viết $R_y(\tau)$ dưới dạng một biểu thức

$$R_y(\tau) = \sigma^2 \frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta} e^{-\alpha|\tau|}(\beta\cos\beta\tau - \alpha\sin\beta|\tau|)\,. \qquad (2.9.23)$$

Khi $\tau = 0 \quad D_y = R_y(0) = \sigma^2(\alpha^2+\beta^2)$. (2.9.24)

Vậy hàm ngẫu nhiên X(t) có hàm tương quan dạng như trên là hàm khả vi.

Chúng ta sẽ xác định tiếp hàm tương quan quan hệ $R_{xy}(t_1,t_2)$ giữa hàm ngẫu nhiên X(t) và đạo hàm của nó $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$. Theo (2.4.1) ta có

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]\} =$$

$$= M\left\{[X(t_1) - m_x(t_1)]\frac{d}{dt_2}[X(t_2) - m_x(t_2)]\right\}. \qquad (2.9.25)$$

Đổi chỗ phép tính lấy vi phân và phép lấy kỳ vọng toán học và ký hiệu đạo hàm bằng đạo hàm riêng theo biến t_2, vì biến t_1 được xem như đại lượng không đổi, có thể viết

$$R_{xy}(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} = \frac{\partial}{\partial t_2} R_x(t_1,t_2). \qquad (2.9.26)$$

Đặc biệt đối với hàm ngẫu nhiên dừng X(t)

$$\frac{\partial}{\partial t_2} R_x(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} R_x.(t_2 - t_1) = \frac{dR_x(\tau)}{d\tau}, \qquad (2.9.27)$$

trong đó $\tau = t_2 - t_1$.

Từ đó thấy rằng hàm tương quan quan hệ giữa hàm ngẫu nhiên dừng và đạo hàm của nó là hàm một đối số τ, tức hàm ngẫu nhiên dừng và đạo hàm của nó là những hàm liên hệ dừng.

Hàm tương quan quan hệ giữa hàm ngẫu nhiên dừng và đạo hàm của nó bằng đạo hàm của hàm tương quan của chính hàm ngẫu nhiên.

2.10. Tích phân của hàm ngẫu nhiên

Giả sử quá trình ngẫu nhiên X(t) được cho trên đoạn $[a,b]$. Chia đoạn này thành n phần bởi các điểm $a=t_0,t_1,...,t_n=b$ và lập tổng $\sum_{k=1}^{n} X(t_k)\Delta t_k$, trong đó $X(t_k)$ là lát cắt của quá trình ngẫu nhiên tại $t=t_k$, còn $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

Tương tự như định nghĩa tích phân của hàm không ngẫu nhiên, ta sẽ gọi giới hạn bình phương trung bình của tổng tích phân này khi đại lượng λ, là hiệu lớn nhất trong số các hiệu Δt_k, tiến tới không, là tích phân xác định của hàm ngẫu nhiên X(t) trên đoạn $[a,b]$ và ký hiệu bằng

$$\int_a^b X(t)dt = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} X(t_k)\Delta t_k \tag{2.10.1}$$

Tích phân xác định của hàm ngẫu nhiên, giống như giới hạn của tổng các đại lượng ngẫu nhiên, là một đại lượng ngẫu nhiên. Nếu giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào cách thức chia đoạn $[a,b]$ bởi các điểm t_k, thì hàm ngẫu nhiên X(t) gọi là khả tích trên đoạn $[a,b]$.

Có thể chứng minh rằng [21], muốn cho tồn tại tích phân đã nêu chỉ cần tồn tại tích phân của kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên X(t) và tích phân hai lớp của hàm tương quan của nó.

Bây giờ ta xét tích phân với cận trên biến thiên của hàm ngẫu nhiên X(t)

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau \tag{2.10.2}$$

Tích phân này là một hàm ngẫu nhiên mới $Y(t)$. Chúng ta sẽ xác định kỳ vọng toán học $m_y(t)$ và hàm tương quan $R_y(t_1,t_2)$ của hàm ngẫu nhiên Y(t), khi xem rằng các đặc trưng tương ứng của X(t) đã được cho trước:

$$m_y(t)=M\left[\lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} X(\tau_k)\Delta\tau_k\right]=\lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} m_x(\tau_k)\Delta\tau_k\ . \tag{2.10.3}$$

Tổng cuối cùng này là tổng tích phân đối với hàm không ngẫu nhiên $m_x(\tau)$, do đó

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(\tau)d\tau \tag{2.10.4}$$

Vì

$$\overset{0}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)=\int_0^t\left[\overset{0}{X}(\tau)+m_x(\tau)\right]dt-m_y(t)=$$

$$=\int_0^t \overset{0}{X}(\tau)d\tau+m_y(t)-m_y(t)=\int_0^t \overset{0}{X}(\tau)d\tau, \tag{2.10.5}$$

nên

$$R_y(t_1,t_2) = M\left[\overset{0}{Y}(t_1)\overset{0}{Y}(t_2)\right] = M\left[\int_0^{t_1}\overset{0}{X}(\tau)d\tau\int_0^{t_2}\overset{0}{X}(\tau)d\tau\right] =$$

$$= M\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\overset{0}{X}(\tau_1)\overset{0}{X}(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right] =$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} M\left[\overset{0}{X}(\tau_1)\overset{0}{X}(\tau_2)\right]d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \;. \qquad (2.10.6)$$

Như vậy, kỳ vọng toán học của tích phân của quá trình ngẫu nhiên bằng tích phân của kỳ vọng toán học của chính quá trình đó. Hàm tương quan của tích phân của quá trình ngẫu nhiên bằng tích phân hai lớp của hàm tương quan của chính quá trình đó lấy theo cả hai đối số.

Nếu X(t) là một hàm ngẫu nhiên dừng, thì $m_x(t) = m_x = \text{const}$, $R_x(t_1,t_2) = R_x(t_2 - t_1)$.

Khi đó

$$m_y(t) = \int_0^t m_x d\tau = m_x t\,, \qquad (2.10.7)$$

tức kỳ vọng toán học $m_y(t)$ phụ thuộc vào t.

$$R_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_x(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (2.10.8)$$

Biểu thức ở vế phải trong (2.10.8) phụ thuộc riêng biệt vào cả t_1 và t_2, chứ không phải chỉ phụ thuộc vào hiệu hai giá trị đó.

Do đó tích phân của hàm ngẫu nhiên dừng không có tính chất dừng.

Người ta còn xem xét tích phân của quá trình ngẫu nhiên X(t) dạng

$$Y(t) = \int_a^b \varphi(t,\tau)X(\tau)dt, \qquad (2.10.9)$$

trong đó $\varphi(t,\tau)$ là hàm không ngẫu nhiên.

Tích phân này được cũng xác định như là giới hạn bình phương trung bình của tổng tích phân

$$\lim_{\Delta\tau_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\varphi(t,\tau_k)X(\tau_k)\Delta\tau_k = Y(t) \qquad (2.10.10)$$

và được gọi là tích phân của hàm ngẫu nhiên với hàm trọng lượng $\varphi(t,\tau)$.

Cũng hoàn toàn như vậy đối với tích phân cận trên biến thiên, ta sẽ tìm $m_y(t)$ và $R_y(t_1,t_2)$:

$$m_y(t) = \int_a^b \varphi(t,\tau)m_x(\tau)d\tau \qquad (2.10.11)$$

$$R_y(t_1,t_2) = \int_a^b\int_a^b \varphi(t_1,\tau_1)\varphi(t_2,\tau_2)R_x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (2.10.12)$$

2.11. Các hàm ngẫu nhiên phức

Để đơn giản hoá việc tính toán, trong phần trình bày tiếp theo sẽ sử dụng các hàm ngẫu nhiên phức để xem xét các hàm ngẫu nhiên thực mà từ trước đến giờ chúng ta đã phân tích, và trong thực tế chỉ có các hàm ngẫu nhiên thực. Hàm ngẫu nhiên thực được xem như trường hợp riêng của hàm ngẫu nhiên phức.

Ta sẽ gọi hàm có dạng dưới đây là hàm ngẫu nhiên phức

$$Z(t) = X(t) + \mathrm{i}Y(t) \tag{2.11.1}$$

trong đó X(t) và Y(t) là những hàm ngẫu nhiên thực.

Hàm ngẫu nhiên thực ở đây được xem như trường hợp riêng của hàm phức với Y(t)=0.

Ta sẽ xác định các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên phức – kỳ vọng toán học, phương sai, hàm tương quan – sao cho đối với những hàm ngẫu nhiên thực (khi $Y(t)=0$), những đặc trưng này trùng với những đặc trưng đã đưa ra trước đây. Ta sẽ gọi hàm không ngẫu nhiên $m_z(t)$ định nghĩa dưới đây là kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên phức

$$m_z(t) = m_x(t) + i m_y(t) \tag{2.11.2}$$

Phương sai của hàm ngẫu nhiên phức $D_z(t)$ là kỳ vọng toán học của bình phương modul độ lệch của hàm ngẫu nhiên so với kỳ vọng toán học của nó:

$$D_z(t) = M\left[\left|Z(t) - m_z(t)\right|^2\right] \tag{2.11.3}$$

Vì

$$Z(t) - m_z(t) = \left[X(t) - m_x(t)\right] + i\left[Y(t) - m_y(t)\right] \tag{2..11.4}$$

nên

$$\left|Z(t) - m_z(t)\right|^2 = \left[X(t) - m_x(t)\right]^2 + \left[Y(t) - m_y(t)\right]^2 \tag{2.11.5}$$

Khi đó

$$D_z(t) = M\left\{\left[X(t) - m_x(t)\right]^2\right\} + M\left\{\left[Y(t) - m_y(t)\right]^2\right\} = D_x(t) + D_y(t) \tag{2.11.6}$$

Từ đây thấy rằng phương sai của hàm ngẫu nhiên phức là một hàm thực.

Đối với hàm thực $D_y(t) = 0$, do đó

$$D_z(t) = D_x(t).$$

Hàm tương quan của hàm ngẫu nhiên phức là hàm không ngẫu nhiên dạng

$$R_z(t_1, t_2) = M\left\{\left[Z(t_1) - m_z(t_1)\right]\left[Z^*(t_2) - m_z^*(t_2)\right]\right\} \tag{2.11.7}$$

Dấu (*) có nghĩa là lấy đại lượng liên hiệp phức.

Khi $t_1 = t_2 = t$ hàm tương quan trở thành phương sai

$$R_z(t,t) = M\left\{\left[Z(t) - m_z(t)\right] - \left[Z^*(t) - m_z^*(t)\right]\right\} =$$

$$= M\left\{\left[Z(t) - m_z(t)\right]^2\right\} = D_z(t) \tag{2.11.8}$$

Hàm tương quan của hàm ngẫu nhiên phức có thể được biểu thị qua những đặc trưng của các phần thực và phần ảo của nó. Nếu ký hiệu

$$\overset{0}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$$
$$\overset{0}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t)$$

ta có

$$R_z(t_1,t_2) = M\left\{\left[\overset{0}{X}(t_1) + i\overset{0}{Y}(t_1)\right]\left[\overset{0}{X}(t_2) - i\overset{0}{Y}(t_2)\right]\right\} =$$

$$= M\left[\overset{0}{X}(t_1)\overset{0}{X}(t_2)\right] + M\left[\overset{0}{Y}(t_1)\overset{0}{Y}(t_2)\right] + \mathrm{i}\left\{M\left[\overset{0}{Y}(t_1)\overset{0}{X}(t_2)\right] - M\left[\overset{0}{X}(t_1)\overset{0}{Y}(t_2)\right]\right\} =$$

$$= R_x(t_1,t_2) + R_y(t_1,t_2) + i\left[R_{yx}(t_1,t_2) - R_{xy}(t_1,t_2)\right] \qquad (2.11.9)$$

trong đó $R_{xy}(t_1,t_2)$ là hàm tương quan quan hệ của các hàm ngẫu nhiên $X(t)$ và $Y(t)$.

Nếu các phần thực và ảo của hàm ngẫu nhiên phức không tương quan lẫn nhau, tức $R_{xy}(t_1,t_2) = 0$, thì

$$R_z(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) + R_y(t_1,t_2) \qquad (2.11.10)$$

Nếu phần thực và phần ảo của hàm ngẫu nhiên phức là các hàm ngẫu nhiên dừng và liên hệ dừng, thì $m_z(t) = m_z$ và $D_z(t) = D_z$ là những đại lượng không đổi, còn $R_z(t_1,t_2) = R_z(t_2 - t_1)$ chỉ phụ thuộc vào một tham số $\tau = t_2 - t_1$.

Ta sẽ gọi hàm ngẫu nhiên phức $Z(t)$ với những tính chất $m_z = \text{const}$ và $R_z(t_1,t_2) = R_z(\tau)$ là hàm ngẫu nhiên dừng theo nghĩa rộng.

Đối với hàm tương quan $R_z(t_1,t_2)$, tính chất sau được thoả mãn

$$R_z(t_1,t_2) = R_z^*(t_2,t_1) \qquad (2.11.11)$$

tức là việc hoán vị các đối số trong hàm tương quan sẽ cho biểu thức liên hợp phức với biểu thức ban đầu.

Đặc biệt, đối với hàm phức dừng đẳng thức sau được thoả mãn

$$R_z(-\tau) = R_z^*(\tau),$$

đối với hàm thực, đẳng thức này biểu thị tính chẵn

$$R_z(-\tau) = R_z(\tau).$$

Hàm tương quan quan hệ $R_{z_1z_2}(t_1,t_2)$ của hệ hai hàm ngẫu nhiên phức $Z_1(t)$ và $Z_2(t)$ được xác định dưới dạng

$$R_{z_1z_2}(t_1,t_2) = M\{[Z_1(t_1) - m_{z_1}(t_1)][Z_2^*(t_2) - m_{z_2}^*(t_2)]\} \qquad (2.11.12)$$

Đối với hàm $R_{z_1z_2}(t_1,t_2)$ hệ thức sau thoả mãn

$$R_{z_1z_2}(t_1,t_2) = R_{z_qz_2}^*(t_2,t_1) \qquad (2.11.13)$$

Hệ các hàm ngẫu nhiên phức $Z_1(t)$ và $Z_2(t)$ được gọi là hệ dừng theo nghĩa rộng, nếu như ngoài tính dừng theo cùng nghĩa của từng hàm, còn thoả mãn hệ thức

$R_{z_1z_2}(t_1,t_2) = R_{z_1z_2}(t_2 - t_1) = R_{z_1z_2}(\tau)$ (2.11.14)

Với những hàm như vậy sẽ thoả mãn hệ thức $R_{z_1z_2}(\tau)=R^*_{z_2z_1}(-\tau)$, và biểu thức này, đối với các hàm thực, sẽ có dạng

$$R_{z_1z_2}(\tau)=R_{z_2z_1}(-\tau).$$

2.12. Trường ngẫu nhiên và các đặc trưng của nó

Bên cạnh những quá trình ngẫu nhiên đã xét trên đây là những hàm ngẫu nhiên một đối số, trong khí tượng thủy văn rất hay gặp những hàm ngẫu nhiên của một số biến độc lập mà người ta gọi là những trường ngẫu nhiên.

Ta sẽ xét trường ngẫu nhiên $U(x,y,z,t)$, trong đó x, y, z là những toạ độ của điểm không gian, còn t là thời gian.

Có thể xem x, y, z, t như các toạ độ của một vectơ bốn chiều nào đó $\vec{\rho}(x,y,z,t)$ và ký hiệu trường ngẫu nhiên một cách đơn giản dưới dạng $U(\vec{\rho})$.

Tương tự như đối với các quá trình ngẫu nhiên, trường ngẫu nhiên có thể được xem như tập hợp tất cả các thể hiện của nó, hay như tập hợp tất cả các lát cắt của nó, khi hiểu lát cắt của trường ngẫu nhiên là một đại lượng ngẫu nhiên nhận được tại những trị số xác định của tất cả các đối số, tức là với giá trị xác định của vectơ $\vec{\rho}$.

Thể hiện của trường ngẫu nhiên, kết quả nhận được của một lần thí nghiệm, sẽ là một hàm không ngẫu nhiên. Khi đó, bằng cách thay thế đơn giản t thành $\vec{\rho}$, tất cả các công thức đối với các hàm phân bố n chiều, các mômen gốc và mômen trung tâm đã xét ở mục 2.2 và 2.3 đối với các quá trình ngẫu nhiên sẽ được mở rộng sang cho các trường ngẫu nhiên.

Ta sẽ gọi hàm phân bố n chiều của trường ngẫu nhiên $U(x,y,z,t)=U(\vec{\rho})$ là hàm phân bố của hệ các đại lượng ngẫu nhiên $U_1=U(\vec{\rho}_1),\ U_2=U(\vec{\rho}_2),\dots,\ U_n=U(\vec{\rho}_n)$, tức là

$$\begin{aligned}&F_n(u_1,u_2,..,u_n;\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,...,\vec{\rho}_n)=\\&=P(U_1<u_1,U_2<u_2,...,U_n<u_n)\end{aligned} \tag{2.12.1}$$

Để đặc trưng đầy đủ cho trường ngẫu nhiên cần biết tất cả các hàm phân bố n chiều của nó.

Nếu tồn tại đạo hàm riêng hỗn hợp của các hàm phân bố $F_n(u_1,u_2,..,u_n;\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,...,\vec{\rho}_n)$, thì chúng được gọi là mật độ phân bố n chiều của trường ngẫu nhiên $f_n(u_1,u_2,..,u_n;\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,...,\vec{\rho}_n)$

$$f_n(u_1,u_2,..,u_n;\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,...,\vec{\rho}_n)=\frac{\partial^n F_n(u_1,u_2,...,u_n;\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,...,\vec{\rho}_n)}{\partial u_1\partial u_2...\partial u_n} \tag{2.12.2}$$

Cũng như đối với các quá trình ngẫu nhiên, trong thực tế hiếm khi xác định được các hàm phân bố hoặc mật độ phân bố n chiều, vì vậy để đặc trưng cho các trường ngẫu nhiên chủ yếu người ta sử dụng các mômen phân bố.

Ta sẽ gọi kỳ vọng toán học của tích n luỹ thừa tương ứng với các lát cắt của trường ngẫu nhiên tại n điểm trong miền không–thời gian là mômen gốc n điểm của trường ngẫu nhiên $U(\vec{\rho})=U(x,y,z,t)$ bậc $i_1+i_2+...+i_n$

$$m_{i_1,i_2,...,i_n}(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2,...,\vec{\rho}_n)=M\left\{[U(\vec{\rho}_1)]^{i_1}.[U(\vec{\rho}_2)]^{i_2}...[U(\vec{\rho}_n)]^{i_n}\right\} \tag{2.12.3}$$

Mômen bậc nhất

$$m_1(\vec{\rho}) = M[U(\vec{\rho})] = m_u(\vec{\rho}) \tag{2.12.4}$$

được gọi là kỳ vọng toán học của trường ngẫu nhiên.

Độ lệch của trường ngẫu nhiên so với kỳ vọng toán học của nó được gọi là trường ngẫu nhiên quy tâm

$$\overset{0}{U}(\vec{\rho}) = U(\vec{\rho}) - m_u(\vec{\rho}) \tag{2.12.5}$$

Các mômen gốc của trường ngẫu nhiên quy tâm $\overset{0}{U}(\vec{\rho})$ được gọi là các mômen trung tâm của trường $U(\vec{\rho})$

$$\mu_{i_1, i_2, \ldots, i_n}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \ldots, \vec{\rho}_n) = M\left\{\left[\overset{0}{U}(\vec{\rho}_1)\right]^{i_1} \cdot \left[\overset{0}{U}(\vec{\rho}_2)\right]^{i_2} \ldots \left[\overset{0}{U}(\vec{\rho}_n)\right]^{i_n}\right\} \tag{2.12.6}$$

Mômen trung tâm một điểm bậc hai

$$\mu_2(\vec{\rho}) = M\left\{[U(\vec{\rho}) - m_u(\vec{\rho})]^2\right\} = D_u(\vec{\rho}) \tag{2.12.7}$$

gọi là phương sai của trường ngẫu nhiên.

Kỳ vọng toán học và phương sai của trường ngẫu nhiên là những hàm không ngẫu nhiên của các toạ độ điểm của miền không – thời gian:

$$m_u(\vec{\rho}) = m_u(x, y, z, t),$$
$$D_u(\vec{\rho}) = D_u(x, y, z, t).$$

Mômen trung tâm hai điểm bậc hai

$$\mu_{1,1}(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = M\{[U(\vec{\rho}_1) - m_u(\vec{\rho}_1)][U(\vec{\rho}_2) - m_u(\vec{\rho}_2)]\} = R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \tag{2.12.8}$$

được gọi là hàm tương quan của trường ngẫu nhiên.

Hàm tương quan $R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)$ cũng là hàm của toạ độ 2 điểm của miền không–thời gian

$$R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = R_u(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2)$$

Hàm tương quan của trường ngẫu nhiên có tất cả những tính chất như hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên. Ví dụ như, hàm tương quan của trường ngẫu nhiên cũng thoả mãn tính chất đối xứng

$$R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = R_u(\vec{\rho}_2, \vec{\rho}_1).$$

Khi giá trị của các đối số vectơ như nhau $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}$ hàm tương quan biến thành phương sai của trường ngẫu nhiên

$$R_u(\vec{\rho}, \vec{\rho}) = D_u(\vec{\rho}) \tag{2.12.9}$$

Người ta cũng xét hàm tương quan chuẩn hoá của trường ngẫu nhiên

$$r_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \frac{R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)}{\sqrt{D_u(\vec{\rho}_1)}\sqrt{D_u(\vec{\rho}_2)}} \tag{2.12.10}$$

mà đối với mỗi một cặp điểm cố định $\vec{\rho}_1$ và $\vec{\rho}_2$ nó là hệ số tương quan giữa các lát cắt của trường ngẫu nhiên ứng với các điểm đó.

Những mômen đã xét gọi là mômen không–thời gian. Hàm tương quan không–thời gian có thể đặc trưng cho sự liên hệ giữa các giá trị của trường ngẫu nhiên ở hai điểm khác nhau của không gian và tại những thời điểm khác nhau. Ngoài những mômen không–thời gian người ta còn xét các mômen thời gian và mômen không gian riêng biệt.

Khi xác định các mômen thời gian, các toạ độ điểm không gian của trường được xem là cố định và chỉ nghiên cứu sự biến thiên của trường theo thời gian tại điểm cố định đã cho của không gian. Trong trường hợp này chúng ta đề cập tới quá trình ngẫu nhiên.

Khi xét các mômen không gian, người ta cố định điểm thời gian và nghiên cứu trường ngẫu nhiên tại thời điểm đã cho. Trong trường hợp này trường ngẫu nhiên là hàm ngẫu nhiên của toạ độ các điểm không gian.

Vì các quá trình ngẫu nhiên đã được xét ở trên, bây giờ ta chỉ nghiên cứu chi tiết hơn về các trường ngẫu nhiên không gian.

2.13. Trường ngẫu nhiên đồng nhất và đẳng hướng

Khi nghiên cứu các quá trình ngẫu nhiên ta đã thấy rằng điều kiện dừng là một điều kiện rất quan trọng, làm giảm nhẹ việc mô tả quá trình ngẫu nhiên.

Đối với các trường không gian, những điều kiện tương tự là điều kiện đồng nhất và đẳng hướng.

Trường ngẫu nhiên gọi là đồng nhất nếu tất cả các quy luật phân bố n chiều không thay đổi khi dịch chuyển hệ điểm $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, ..., \vec{\rho}_n$ theo cùng một vectơ, tức là, nếu các hàm phân bố (mật độ phân bố) không thay đổi khi thay thế các lát cắt tương ứng với các điểm $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, ..., \vec{\rho}_n$ bằng những lát cắt tương ứng với các điểm $\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_0, \vec{\rho}_2 + \vec{\rho}_0, ..., \vec{\rho}_n + \vec{\rho}_0$, với mọi vectơ $\vec{\rho}_0$ bất kỳ.

Đối với trường ngẫu nhiên đồng nhất

$$f_1(u_1; \vec{\rho}_1) = f_1(u_1; \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_0) \tag{2.13.1}$$

$$f_2(u_1, u_2; \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = f_2(u_1, u_2; \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_0, \vec{\rho}_2 + \vec{\rho}_0) \tag{2.13.2}$$

Khi đặt $\vec{\rho}_0 = -\vec{\rho}_1$ ta nhận được

$$f_1(u_1; \vec{\rho}_1) = f_1(u_1; 0) = f_1(u_1) \tag{2.13.3}$$

$$f_2(u_1, u_2; \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = f_2(u_1, u_2; \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) \tag{2.13.4}$$

Và vì

$$m_u(\vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_1(u; \vec{\rho}) du = \int_{-\infty}^{\infty} u f_1(u) du = m_u = \text{const} \tag{2.13.5}$$

$$R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int [u_1 - m_u(\vec{\rho}_1)]\,[u_2 - m_u(\vec{\rho}_2)]\, f_2(u_1, u_2; \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) du_1 du_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int (u_1 - m_u)(\mathrm{u}_2 - \mathrm{m}_\mathrm{u}) f(u_1, u_2; \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) du_1 du_2 =$$

$$= R_u(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) = R_u(\vec{l}), \quad \vec{l} = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1, \tag{2.13.6}$$

nên đối với trường ngẫu nhiên đồng nhất, kỳ vọng toán học là một đại lượng không đổi m_u, không phụ thuộc vào các toạ độ điểm của trường, còn hàm tương quan $R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = R_u(\vec{l})$ chỉ phụ thuộc vào hiệu các vectơ $\vec{l} = \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1$.

Có thể gọi điều kiện đồng nhất đã nêu của trường ngẫu nhiên, tương tự với điều kiện dừng, là tính đồng nhất nghiêm ngặt. Trường ngẫu nhiên mà kỳ vọng toán học là đại lượng không đổi và hàm tương quan chỉ phụ thuộc vào một đối số vectơ – hiệu các vectơ $\vec{l}$, được gọi là trường đồng nhất theo nghĩa rộng.

Trường ngẫu nhiên đồng nhất được gọi là đẳng hướng nếu tất cả các quy luật phân bố n chiều không thay đổi đối với mọi phép quay hệ điểm $N_1(\vec{\rho}_1), N_2(\vec{\rho}_2), ..., N_n(\vec{\rho}_n)$ xung quanh một trục bất kỳ đi qua gốc toạ độ và khi phản xạ gương những điểm đó so với một mặt phẳng bất kỳ đi qua gốc toạ độ.

Như vậy, đối với trường đồng nhất và đẳng hướng những mật độ phân bố n chiều $f_n(u_1, u_2, ..., u_n; \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, ..., \vec{\rho}_n)$ không thay đổi khi dịch chuyển song song, quay và phản xạ gương hệ điểm $N_1(\vec{\rho}_1), N_2(\vec{\rho}_2), ..., N_n(\vec{\rho}_n)$. Khi đó, hàm tương quan $R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2)$ phải có cùng một giá trị đối với cặp điểm bất kỳ $N_1(\vec{\rho}_1)$ và $N_2(\vec{\rho}_2)$ mà đối với chúng modul của hiệu $l = |\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|$ như nhau, vì những cặp điểm như vậy luôn luôn có thể được chập vào với nhau nhờ phép dịch chuyển song song, quay và phản xạ gương.

Do đó, hàm tương quan của trường đồng nhất và đẳng hướng là hàm của một đối số vô hướng $l = |\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1| -$ khoảng cách giữa các điểm $N_1(\vec{\rho}_1)$ và $N_2(\vec{\rho}_2)$. Đôi khi người ta chấp nhận điều kiện này làm định nghĩa cho tính đẳng hướng của trường.

Như vậy đối với trường đồng nhất và đẳng hướng kỳ vọng toán học là đại lượng không đổi $m_u(\vec{\rho}) = m_u$, còn hàm tương quan là hàm của một đối số vô hướng $l -$ khoảng cách giữa hai điểm, $R_u(\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = R_u(l)$, trong đó

$$l = |\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{2.13.7}$$

Bên cạnh những trường ngẫu nhiên đồng nhất trong toàn không gian ba chiều, có thể xét các trường chỉ đồng nhất trên một đường thẳng hay trong một mặt phẳng nào đó, mà đối với chúng tất cả những mật độ phân bố n chiều không thay đổi khi dịch chuyển song song toàn bộ n điểm đi một khoảng bằng độ lớn vectơ $\vec{\rho}_0$ song song với đường thẳng hay mặt phẳng đã cho.

Tương tự, có thể xét các trường đẳng hướng không phải trong toàn không gian ba chiều, mà chỉ trong một mặt phẳng nào đó.

Nhiều công trình nghiên cứu về cấu trúc các trường khí tượng đã chỉ ra sự biến đổi khác biệt đáng kể của các yếu tố khí tượng theo phương ngang và phương thẳng đứng.

Vì vậy khi nghiên cứu cấu trúc thống kê các trường khí tượng quy mô vừa và lớn, giả thiết về sự gần đồng nhất và đẳng hướng chỉ có thể chấp nhận được đối với trường hai chiều phương ngang. Khi đó, giả thiết rằng chỉ có trường ngẫu nhiên quy tâm, tức trường độ lệch của yếu tố khí tượng đang xét so với kỳ vọng toán học của nó, là đồng nhất, còn không thể xem chính kỳ vọng toán học là không đổi.

Giống như đối với quá trình ngẫu nhiên dừng, nếu trường ngẫu nhiên đồng nhất và đẳng hướng có tính egodic, thì kỳ vọng toán học và hàm tương quan của nó có thể tìm được bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện cho trên miền không gian đủ lớn.

Trong trường hợp này kỳ vọng toán học xác định theo công thức

$$m_u = \frac{1}{v}\iiint\limits_{(D)} u(x,y,z)dxdydz \tag{2.13.8}$$

trong đó D là miền không gian trên đó thực hiện lấy trung bình, v là thể tích của miền đó.

Đối với trường phẳng

$$m_u = \frac{1}{S}\iint\limits_{(D)} u(x,y)dxdy \tag{2.13.9}$$

trong đó S là diện tích miền phẳng D.

Có thể viết những công thức tương tự để nhận hàm tương quan $R_u(l)$ bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện

$$R_u(l) = \frac{1}{v_1}\iiint\limits_{(D_1)} [u(x,y,z) - m_u][u(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) - m_u]dxdydz \tag{2.13.10}$$

Miền D_1 ở đây phải sao cho các điểm $(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$ không được vượt ra khỏi miền D (v_1 là thể tích miền D_1).

Người ta nói trường đồng nhất đẳng hướng có tính egodic, nếu kỳ vọng toán học và hàm tương quan, nhận được bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện nhờ các công thức (2.13.8), (2.13.10), có thể tiến gần tới những đặc trưng tương ứng nhận được bằng phép lấy trung bình theo tập hợp tất cả các thể hiện, khi tăng vô hạn đường kính miền, với xác suất tuỳ ý gần đến đơn vị. Trong thực tế thường không thể thực hiện lấy trung bình theo không gian các trường ngẫu nhiên khí tượng, vì các thể hiện chỉ được ghi ở một số nhỏ các điểm rời rạc.

Để đặc trưng cho trường đồng nhất đẳng hướng, bên cạnh hàm tương quan, còn sử dụng hàm cấu trúc $B_u(l)$

$$B_u(l) = M\left\{\left[U(\vec{\rho}+\vec{l}) - U(\vec{\rho})\right]^2\right\} \tag{2.13.11}$$

Giống như đối với quá trình ngẫu nhiên, hàm cấu trúc của trường ngẫu nhiên được xác định đơn trị qua hàm tương quan dưới dạng

$$B_u(l) = 2[R_u(0) - R_u(l)] \tag{2.13.12}$$

Đối với trường đồng nhất đẳng hướng hàm cấu trúc là hàm của một đối số vô hướng $l = |\vec{l}|$.

Nếu $\lim\limits_{l\to\infty} R_u(l) = 0$, có thể biểu diễn hàm tương quan qua hàm cấu trúc dưới dạng

$$R_u(l) = \frac{1}{2}[B_u(\infty) - B_u(l)] \tag{2.13.13}$$

Cũng như trong trường hợp quá trình ngẫu nhiên dừng hoàn toàn, đối với trường ngẫu nhiên đồng nhất hoàn toàn, việc sử dụng hàm tương quan hay hàm cấu trúc không có gì khác biệt.

Tuy nhiên, để đặc trưng cho trường ngẫu nhiên mà tính đồng nhất chỉ là gần đúng, đôi khi sử dụng hàm cấu trúc sẽ tốt hơn, như đã nhận xét ở mục 2.7.

Đặc biệt điều này xảy ra khi khảo sát cấu trúc không gian quy mô vừa và lớn của các trường khí tượng, khi mà những khác biệt về dòng năng lượng mặt trời đến, tính chất chuyển động trên đại dương và lục địa và những nhân tố khác phá huỷ tính đồng nhất của trường.

Tuy nhiên, khi đó cần lưu ý rằng, không phải bao giờ cũng nhận được các giá trị của hàm cấu trúc $B_u(l)$ theo số liệu thực nghiệm tại những khoảng l khá lớn để có thể chấp nhận làm "giá trị bão hoà" của hàm cấu trúc $B_u(\infty)$.

2.14. Trường véctơ ngẫu nhiên

Bây giờ ta xét trường ngẫu nhiên vectơ không gian, được cho bởi đại lượng ngẫu nhiên vectơ:

$$\vec{U}(x, y, z) = \vec{U}(\vec{\rho}).$$

Ta chọn hệ toạ độ đề các và ký hiệu X($\vec{\rho}$), Y($\vec{\rho}$), Z($\vec{\rho}$) là các hình chiếu của $\vec{U}(\vec{\rho})$ trên các trục toạ độ tương ứng. Khi đó trường ngẫu nhiên vectơ có thể được xét như là hệ ba trường ngẫu nhiên vô hướng.

Bằng cách như vậy, qui luật phân bố của trường vectơ ngẫu nhiên $\vec{U}(\vec{\rho})$ sẽ là hàm phân bố ba chiều của ba trường ngẫu nhiên vô hướng.

Trường vectơ $\vec{U}(\vec{\rho})$ được gọi là đồng nhất và đẳng hướng nếu tất cả mật độ phân bố 3n chiều của nó là bất biến đối với phép dịch chuyển song song hệ các điểm $N_1(\vec{\rho}_1)$, $N_2(\vec{\rho}_2)$,..., $N_n(\vec{\rho}_n)$ cũng như khi quay và phản xạ gương chúng kèm theo việc quay đồng thời và phản xạ gương hệ toạ độ trong đó các thành phần vectơ được lấy.

Trong định nghĩa này ta giả thiết rằng, tất cả hệ các điểm $N_i(\vec{\rho}_i)$ được quay hoặc phản xạ gương cùng với một hệ toạ độ cố định chứa chúng. Khi đó mọi hình chiếu của vectơ $\vec{\rho}_i$ trong hệ toạ độ cũ và mới trùng nhau.

Về mặt hình học, điều kiện đồng nhất và đẳng hướng của trường vectơ có nghĩa là nếu hệ toạ độ liên kết chặt với hệ thống các điểm N_1, N_2,...N_n, thì mật độ phân bố 3n chiều của hình chiếu của trường trên các trục của hệ toạ độ này không thay đổi đối với mọi sự dịch chuyển, quay, và phản xạ gương hệ này.

Đối với trường vectơ đồng nhất, đẳng hướng, kỳ vọng toán học của vectơ $\vec{U}(\vec{\rho})$ bằng 0, M[$\vec{U}(\vec{\rho})$] = 0. Thực vậy, đối với trường đồng nhất M[$\vec{U}(\vec{\rho})$] là một vectơ không đổi, còn đối với trường đẳng hướng, vectơ này cũng không thay đổi khi quay, tức là nó nhất định phải bằng 0.

Tính đồng nhất và tính đẳng hướng của trường vectơ đặt những điều kiện xác định lên các hàm tương quan của hình chiếu vectơ $\vec{U}(\vec{\rho})$ trên các trục toạ độ và lên hàm tương quan quan hệ giữa các hình chiếu khác nhau của nó.

Giả sử X($\vec{\rho}$), Y($\vec{\rho}$), Z($\vec{\rho}$) là các hình chiếu của vectơ $\vec{U}(\vec{\rho})$ trên các trục toạ độ của hệ tọa độ x0yz nào đó.

Khi đó có thể đặc trưng trường vectơ bởi ba hàm tương quan:

$$R_x(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2), R_y(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2), R_z(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2),$$

và ba hàm tương quan quan hệ:

$$R_{xy}(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2), R_{xz}(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2), R_{yz}(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2).$$

Đối với trường đồng nhất và đẳng hướng tất cả các hàm này là hàm chỉ của một đối số vô hướng $l = |\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|$ là khoảng cách giữa các điểm $N_1(\vec{\rho}_1)$ và $N_2(\vec{\rho}_2)$.

Ta chọn hệ toạ độ x0yz như sau. Đặt gốc toạ độ vào điểm N_1, trục 0x hướng dọc theo vectơ N_1N_2, hai trục còn lại 0y và 0z nằm trong mặt phẳng vuông góc với nó (hình 2.10).

Các hàm tương quan và hàm tương quan quan hệ đối với trường đồng nhất đẳng hướng không thay đổi với mọi phép quay hệ toạ độ.

Ta quay hệ toạ độ 180^0 quanh trục N_1x, khi đó hướng của các trục N_1y và N_1z bị thay đổi sang hướng ngược lại, từ đó ta nhận được:

$$R_{xy}(l) = -R_{xy}(l),$$

$$R_{xz}(l) = -R_{xz}(l), \tag{2.14.1}$$

có nghĩa là:

$$R_{xy}(l) = R_{xz}(l) = 0. \tag{2.14.2}$$

Nhờ phép phản xạ gương đối với mặt xN_1z ta có thể chuyển trục N_1y về N_1z và N_1z về N_1y, khi đó:

$$R_{yz}(l) = -R_{yz}(l), \tag{2.14.3}$$

tức là:

$$R_{yz}(l) = 0. \tag{2.14.4}$$

Nhờ phép quay quanh trục N_1x, có thể chuyển N_1y sang N_1z, khi đó:

$$R_y(l) = R_z(l). \tag{2.14.5}$$

Từ đó thấy rằng trong hệ toạ độ được chọn các hàm tương quan quan hệ bằng 0, còn hàm tự tương quan thoả mãn điều kiện (2.14.5).

Như vậy, có thể đặc trưng cho trường vectơ đồng nhất đẳng hướng bởi hai hàm tương quan:

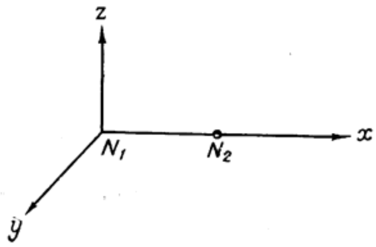
$$R_x(l) = M\left[X(\vec{\rho}_1)X(\vec{\rho}_2)\right] = G(l), \tag{2.14.6}$$

$$R_y(l) = M\left[Y(\vec{\rho}_1)Y(\vec{\rho}_2)\right] = F(l), \tag{2.14.7}$$

ở đây X($\vec{\rho}$) là hình chiếu của trường vectơ $\vec{U}(\vec{\rho})$ theo hướng vectơ $\vec{l} = N_1N_2$, còn Y($\vec{\rho}$) là hình chiếu của trường này theo một hướng nào đó vuông góc với vectơ $\vec{l}$.

Hàm R_x(l) thường được ký hiệu bởi G(l) và gọi là hàm tương quan dọc của trường vectơ, còn hàm R_y(l) được ký hiệu bởi F(l) và gọi là hàm tương quan ngang.

Đối với trường vectơ ngẫu nhiên người ta cũng đưa vào khái niệm hàm cấu trúc dọc và ngang.



Hình 2.10

Hàm cấu trúc dọc $B_\tau(l)$ là kỳ vọng toán học của bình phương hiệu các giá trị hình chiếu của trường vectơ đồng nhất đẳng hướng tại các điểm $N_1(\rho_1)$ và $N_2(\rho_2)$ theo hướng vectơ N_1N_2.

$$B_\tau(l) = M\{[X(\rho_2) - X(\rho_1)]^2\} \tag{2.14.8}$$

Hàm cấu trúc ngang $B_n(l)$ là kỳ vọng toán học của bình phương hiệu các giá trị hình chiếu của trường tại các điểm N_1 và N_2 trên mặt vuông góc với vectơ N_1N_2.

$$B_n(l) = M\{[Y(\rho_2) - Y(\rho_1)]^2\} \tag{2.14.9}$$

CHƯƠNG 3: PHÂN TÍCH ĐIỀU HOÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN DỪNG VÀ TRƯỜNG ĐỒNG NHẤT

Đối với hàm không ngẫu nhiên, phân tích điều hoà được ứng dụng hết sức rộng rãi. Phân tích điều hoà là biểu diễn các hàm tuần hoàn dưới dạng chuỗi Fourier, còn hàm không tuần hoàn được biểu diễn dưới dạng tích phân Fourier.

Ta biết rằng nếu một hàm tuần hoàn f(t) có chu kỳ 2T thoả mãn điều kiện Diricle, thì có thể khai triển nó thành chuỗi Fourier dạng phức:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{\pi k}{T}t}, \tag{3.0.1}$$

trong đó các hệ số Fourier C_k được xác định theo công thức:

$$C_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\frac{\pi k}{T}t} dt. \tag{3.0.2}$$

Công thức (3.0.1) cho phép biểu diễn hàm f(t) dưới dạng tổng vô hạn các dao động điều hoà với tần số $\omega_k = \dfrac{\pi k}{T}$ và biên độ $|C_k|$.

Dãy số phức C_k được gọi là dãy phổ hay phổ của hàm *f(t)*. Các số phức C_k có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$C_k = |C_k| e^{i\psi_k}. \tag{3.0.2}$$

Dãy số thực $|C_k|$ được gọi là phổ biên độ của hàm f(t), còn dãy số ψ_k là phổ pha của nó.

Phổ chỉ ra rằng, trong hàm đã cho có những dao động loại nào, tức là cấu trúc bên trong của nó ra sao. Vì trong trường hợp đang xét các tần số nhận những giá trị rời rạc $\omega_k = \frac{\pi k}{T}$, nên hàm dạng (3.0.1) được gọi là hàm có phổ rời rạc.

Tương tự, nếu hàm không chu kỳ f(t) được cho trên toàn trục số thực thoả mãn điều kiện Diricle và khả tích tuyệt đối, tức là đối với nó tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ tồn tại, thì có thể biểu diễn nó dưới dạng tích phân Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{3.0.3}$$

ở đây:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{3.0.4}$$

Các công thức (3.0.3) và (3.0.4) được gọi là công thức biến đổi Fourier. Công thức (3.0.4) gọi là công thức biến đổi Fourier trực tiếp, còn (3.0.3) là công thức biến đổi Fourier ngược.

Trong công thức (3.0.3), tổng (3.0.1) theo các giá trị rời rạc của tần số được thay thế bởi tích phân theo mọi tần số, còn các hệ số không đổi C_k được thay bởi hàm F(ω) của đối số liên tục ω.

Ý nghĩa của hàm F(ω) được nhận thấy ở chỗ, hạng tử $F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ trong tích phân (3.0.3) trùng với khoảng tần số nhỏ (ω, ω+dω), tức F(ω)dω là biên độ tương ứng với khoảng tần số đã cho. Do đó, F(ω) là mật độ biên độ. Hàm F(ω) được gọi là mật độ phổ của hàm f(t), còn hàm dạng (3.0.3) là hàm có phổ liên tục.

Như vậy, chúng ta thấy rằng tương ứng với hàm có phổ rời rạc là dãy phổ các số phức C_k của nó; tương ứng với hàm f(t) có phổ liên tục là một hàm khác, đó là mật độ phổ F(ω) của nó.

Từ các công thức (3.0.1), (3.0.2) hay (3.0.3), (3.0.4) suy ra rằng khi đã cho hàm f(t) chúng ta có thể xác định một cách duy nhất phổ (mật độ phổ) của nó, và ngược lại, nếu cho phổ (mật độ phổ) ta có thể xác định duy nhất một hàm f(t).

Trong nhiều trường hợp, ví dụ như khi giải các phương trình vi phân tuyến tính, thuận tiện hơn người ta sử dụng mật độ phổ của hàm đang xét thay cho chính hàm đó.

Ta hãy xét việc ứng dụng công cụ khai triển phổ đối với các hàm ngẫu nhiên dừng và các trường đồng nhất và đẳng hướng.

3.1. Các quá trình dừng có phổ rời rạc

Giả sử rằng có thể biểu diễn quá trình ngẫu nhiên dừng X(t) trên khoảng [–*T*, *T*] dưới dạng chuỗi vô hạn các dao động điều hoà với các tần số khác nhau $\omega_k = \frac{\pi k}{T}$ và các biên độ ngẫu nhiên X_k.

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i\omega_k t}. \tag{3.1.1}$$

Ta sẽ xem rằng, kỳ vọng toán học của quá trình ngẫu nhiên bằng 0, m_x=0. Nếu không như vậy ta sẽ xét quá trình ngẫu nhiên qui tâm. Khi đó hiển nhiên rằng, kỳ vọng toán học của tất cả các đại lượng ngẫu nhiên X_k phải bằng 0.

Ta hãy làm sáng tỏ các đại lượng ngẫu nhiên X_k cần thoả mãn điều kiện nào để cho hàm ngẫu nhiên X(t) có dạng (3.1.1) là dừng theo nghĩa rộng, tức là để cho hàm tương quan $R_x(t+\tau,t)$ của nó chỉ phụ thuộc vào một đối số τ và không phụ thuộc vào t.

Theo định nghĩa hàm tương quan của một hàm ngẫu nhiên phức (2.11.7) ta có:

$$R_x(t+\tau,t) = M\left[X(t+\tau)X^*(t)\right] \tag{3.1.2}$$

Theo (3.1.1), có thể viết:

$$X(t+\tau) = \sum_k X_k e^{i\omega_k(t+\tau)}. \tag{3.1.3}$$

$$X^*(t) = \sum_l X^*_l\, e^{-i\omega_l t}. \tag{3.1.4}$$

Đặt (3.1.3) và (3.1.4) vào (3.1.1) ta nhận được:

$$R_x(t+\tau,t) = M\left[\sum_k X_k e^{i\omega_k(t+\tau)} \sum_l X^*_l\, e^{-i\omega_l t}\right] =$$

$$= M\left\{\sum_k \sum_l X_k X^*_l\, e^{i[\omega_k(t+\tau)-\omega_l t]}\right\} = \sum_k \sum_l M\left[X_k X^*_l\right] e^{i[\omega_k(t+\tau)-\omega_l t]} \tag{3.1.5}$$

Để cho hàm tương quan $R_x(t+\tau,t)$ không phụ thuộc vào t, nhất thiết tổng kép trong vế phải của (3.1.5) chứa các số hạng của biểu thức $e^{i[\omega_k(t+\tau)-\omega_l t]}$ không phụ thuộc vào t, tức khi k=l. Do đó, để cho hàm ngẫu nhiên X(t) là dừng thì điều kiện sau đây cần phải được thực hiện:

$$M\left[X_k X^*_l\right] = 0 \text{ khi } k \neq l. \tag{3.1.6}$$

Điều kiện (3.1.6) có nghĩa là các đại lượng ngẫu nhiên X_k phải đôi một không tương quan với nhau. Với điều kiện (3.1.6) công thức (3.1.5) được viết dưới dạng:

$$R_x(\tau) = \sum_k M\left[X_k X^*_k\right] e^{i\omega_k\tau}. \tag{3.1.7}$$

Các đại lượng $M\left[X_k X^*_k\right]$ là phương sai của đại lượng ngẫu nhiên X. Ký hiệu chúng bằng D_k, khi đó ta nhận được:

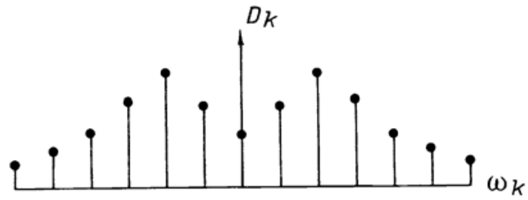
$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_k\tau}. \tag{3.1.8}$$

Để tồn tại hàm tương quan thì chuỗi (3.1.8) phải hội tụ, tức là chuỗi:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|D_k e^{i\omega_k\tau}\right| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k. \tag{3.1.9}$$

hội tụ.

Ta giả thiết rằng, có thể khai triển quá trình ngẫu nhiên dừng thành chuỗi (3.1.1) mà không nói gì đến điều kiện khai triển này. Khi đó ta nhận được các biên độ ngẫu nhiên X_k là những đại lượng ngẫu nhiên không tương quan với nhau, còn hàm tương quan được xác định dưới dạng chuỗi (3.1.8).



Hình 3.1

Nhà toán học xô viết E. E. Sluskii đã chứng minh rằng, mọi quá trình ngẫu nhiên dừng có hàm tương quan dạng (3.1.8) có thể được biểu diễn dưới dạng (3.1.1) và ngược lại.

Đối với quá trình ngẫu nhiên dừng, phổ là phân bố phương sai của biên độ ngẫu nhiên theo các tần số ω_k.

Vì chuỗi (3.1.9) phải hội tụ, cho nên số hạng tổng quát của nó phải dần đến 0, tức khi tăng tần số ω_k thì giá trị phương sai tương ứng phải tiến đến 0.

Phổ của quá trình ngẫu nhiên có thể được biểu thị dưới dạng đồ thị, với trục hoành đặt các giá trị biên độ, còn trục tung là phương sai tương ứng của chúng (hình 3.1).

Các hàm ngẫu nhiên dừng dạng (3.1.1) được gọi là các quá trình ngẫu nhiên có phổ rời rạc.

Phương sai quá của trình ngẫu nhiên D_x nhận được bằng cách đặt τ=0 vào công thức (3.1.8).

$$D_x = R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k. \tag{3.1.10}$$

Do đó, phương sai của hàm ngẫu nhiên bằng tổng của chuỗi tạo thành từ tất cả các tung độ phổ.

Quá trình ngẫu nhiên dừng dạng (3.1.1) có thể phức, cũng có thể thực.

Quá trình (3.1.1) là thực nếu mỗi k trong tổng (3.1.1) tương ứng với một cặp hai số hạng phức $X_k e^{i\omega_k \tau}$ và $X_k e^{-i\omega_k \tau}$.

Khi đó

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(X_k e^{i\omega_k \tau} + X_k e^{-i\omega_k \tau} \right). \tag{3.1.11}$$

Nếu viết X_k dưới dạng:

$$X_k = \frac{A_k}{2} - i\frac{B_k}{2}, X_k^* = \frac{A_k}{2} + i\frac{B_k}{2} \tag{3.1.12}$$

ta nhận được:

$$\begin{aligned} X_k e^{i\omega_k \tau} + X_k e^{-i\omega_k \tau} &= \left(\frac{A_k}{2} - i\frac{B_k}{2} \right) (\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t) + \\ &+ \left(\frac{A_k}{2} + i\frac{B_k}{2} \right) (\cos\omega_k t - i\sin\omega_k t) = A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Đặt (3.1.13) vào (3.1.11) ta được quá trình ngẫu nhiên dừng thực:

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t\right) \tag{3.1.14}$$

trong đó A_k và B_k là các đại lượng ngẫu nhiên thực có kỳ vọng toán học bằng không.

Trường hợp riêng, khi áp dụng điều kiện (3.1.6) cho hai hạng tử khác nhau $X_k e^{i\omega_k\tau}$ và $X_k^* e^{-i\omega_k\tau}$, ta nhận được:

$$M\left[X_k\left(X_k^*\right)^*\right]=M\left[X_kX_k\right]=0 \tag{3.1.15}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}M\left[X_kX_k\right]&=M\left[\left(\frac{A_k}{2}-i\frac{B_k}{2}\right)^2\right]=\\&=\frac{1}{4}\left\{M\left[A_k^2\right]-M\left[B_k^2\right]-2iM\left[A_kB_k\right]\right\}=0\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Đồng nhất bằng không cả phần thực và phần ảo, ta nhận được:

$$M\left[A_k^2\right]=M\left[B_k^2\right]=d_k \tag{3.1.17}$$

$$M\left[A_kB_k\right]=0 \tag{3.1.18}$$

tức là các đại lượng ngẫu nhiên A_k và B_k không tương quan với nhau và có cùng phương sai. Từ đẳng thức (3.1.6) ta nhận được tính không tương quan đôi một của các đại lượng A_k, A_l, B_k, B_l khi $k \neq l$.

Ta biểu diễn D_k qua d_k

$$\begin{aligned}D_k&=M\left[X_kX^*_k\right]=M\left[\left(\frac{A_k}{2}-i\frac{B_k}{2}\right)\left(\frac{A_k}{2}-i\frac{B_k}{2}\right)\right]=\\&=\frac{1}{4}\left\{M\left[A_k^2\right]+M\left[B_k^2\right]\right\}=\frac{d_k}{2}\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Khi đó công thức đối với hàm tương quan (3.1.8) được viết lại dưới dạng:

$$R_x(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}D_k\left[e^{i\omega_k\tau}+e^{-i\omega_k\tau}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k}{2}2\cos\omega_k\tau \tag{3.1.20}$$

tức là

$$R_x(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\cos\omega_k\tau \tag{3.1.21}$$

Đối với quá trình ngẫu nhiên thực các tần số ω_k và $-\omega_k$ tương ứng với cùng biên độ D_k, do vậy, phổ của quá trình ngẫu nhiên thực đối xứng đối với trục tung (hình 3.1) và có thể chỉ cần xây dựng nó cho những giá trị tần số dương.

3.2. Các quá trình dừng có phổ liên tục

Không phải mọi quá trình dừng đều là quá trình có phổ rời rạc. Tuy nhiên có thể chỉ ra rằng bất kỳ quá trình dừng nào cũng có thể được biểu diễn như là giới hạn của dãy các quá trình có phổ rời rạc dạng (3.1.1).

Ta đưa vào xét hàm ngẫu nhiên $\Phi(\omega)$, khi xem rằng trong khoảng tần số $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1}$ số gia của nó

$$\Delta\Phi(\omega_k) = \Phi(\omega_k) - \Phi(\omega_{k-1}) \tag{3.2.1}$$

bằng tổng các biên độ ngẫu nhiên X_k trong khoảng này.

Một cách gần đúng, coi tần số trong khoảng $\Delta\omega_k$ không đổi và bằng ω_k, trên cơ sở (3.1.1) ta có thể viết đẳng thức gần đúng:

$$X(t) \approx \sum_k e^{i\omega_k t}\Delta\Phi(\omega_k), \tag{3.2.2}$$

ở đây tổng được lấy theo mọi khoảng tần số $\Delta\omega_k$,

Bây giờ ta sẽ tăng vô hạn số tần số ω_k trong (3.2.2), giảm vô hạn hiệu giữa chúng. Lấy giới hạn ta nhận được

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\Phi(\omega), \tag{3.2.3}$$

trong đó, vế phải là tích phân Fourier - Stiltex, và dưới dấu tích phân không phải là số gia của đối số như trong tích phân Riman, mà là số gia của hàm $d\Phi(\omega)$.

Biểu diễn quá trình ngẫu nhiên dừng X(t) dưới dạng tích phân Stiltex theo công thức (3.2.3) được gọi là khai triển phổ nó.

Ta xác định hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên biểu diễn theo công thức (3.2.3). Đối với quá trình ngẫu nhiên dừng (3.1.1), hàm tương quan được xác định bởi công thức (3.1.8). Công thức này biểu diễn hàm không ngẫu nhiên $R_x(\tau)$ dưới dạng chuỗi Fourier. Khi đó, nếu khai triển (3.1.1) của quá trình ngẫu nhiên X(t) được tiến hành trên khoảng biến đổi [–T, T] của đối số t, thì khoảng biến đổi của đối số $\tau = t_2 - t_1$ sẽ là đoạn [-2T, 2T].

Do đó, công thức (3.1.8) là khai triển hàm tương quan $R_x(\tau)$ trong khoảng [–2T, 2T].

Khi đó, các hệ số Fourier D_k của khai triển này được xác định theo công thức:

$$D_k = \frac{1}{4T}\int_{-2T}^{2T} R_x(\tau)e^{-i\omega_k t}d\tau,\ \omega_k = \frac{\pi k}{2T} \tag{3.2.4}$$

Ký hiệu hiệu giữa hai tần số lân cận là $\Delta\omega_k$

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{\pi k}{2T} - \frac{\pi(k-1)}{2T} = \frac{\pi}{2T}. \tag{3.2.5}$$

Khi đó công thức (3.1.8) có thể viết dưới dạng:

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2T}{\pi} D_k e^{i\omega_k t}\Delta\omega_k. \tag{3.2.6}$$

Ta đưa vào hàm

$$S_x^T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2T}^{2T} R_x(\tau)e^{-i\omega_k t}d\tau. \tag{3.2.7}$$

Chỉ số T nói lên rằng, hàm phụ thuộc vào khoảng T. Theo (3.2.4) và (3.2.5) ta có

$$S_x^T(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega_k}. \tag{3.2.8}$$

Điều đó chứng tỏ $S_x^T(\omega_k)$ là mật độ trung bình của phương sai trên đoạn $\Delta\omega_k$.

Thế (3.2.8) vào (3.2.6) ta được

$$R_x(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_x^T(\omega_k)e^{i\omega_k t}\Delta\omega_k. \qquad (3.2.9)$$

Nếu $T \to \infty$, còn $\Delta\omega_k \to 0$ thì khi lấy giới hạn tổng tích phân (3.2.9) sẽ trở thành tích phân

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{i\omega_k t}d\omega. \qquad (3.2.10)$$

Công thức (3.2.10) là khai triển hàm tương quan thành tích phân Fourier. Khai triển như vậy có thể thực hiện được nếu tích phân tuyệt đối của hàm $R_x(\tau)$ thoả điều kiện

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|R_x(\tau)\right|d\tau<\infty. \qquad (3.2.11)$$

Khi đó, chuyển qua giới hạn, công thức (3.2.7) sẽ có dạng

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (3.2.12)$$

Hàm $S_x(\omega)$ là giới hạn của mật độ phương sai trung bình $S_x^T(\omega_k)$ khi $\Delta\omega_k$ dần đến 0, tức là biểu thị mật độ phương sai của hàm ngẫu nhiên X(t) khi cho trước tần số ω. Hàm này được gọi là mật độ phổ của hàm ngẫu nhiên dừng X(t). Mật độ phổ là hàm không âm của tần số.

Các công thức (3.2.10) và (3.2.12) chỉ ra rằng hàm tương quan $R_x(\tau)$ và mật độ phổ $S_x(\omega)$ là biến đổi Fourier lẫn nhau. Do đó, biến đổi Fourier đối với hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng phải là hàm không âm với mọi giá trị tần số ω.

Năm 1934, A. Ia. Khintrin đã chứng minh rằng, mỗi một hàm là biến đổi ngược Fourier từ một hàm không âm, là hàm tương quan của một quá trình ngẫu nhiên dừng nào đó.

Khi đặt $\tau = 0$ vào công thức (3.2.10), ta nhận được biểu thức đối với phương sai của hàm ngẫu nhiên.

$$D_x=R_x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)d\omega. \qquad (3.2.13)$$

Từ đó thấy rằng, nếu hàm ngẫu nhiên X(t) có phương sai hữu hạn, thì hàm $S_x(\omega)$ là khả tích. Hàm

$$F_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}S_x(\omega)d\omega. \qquad (3.2.14)$$

được gọi là hàm phổ hay phổ tích phân của hàm ngẫu nhiên dừng.

Tại những giá trị ω nào đó mật độ phổ có thể trở nên vô hạn, nhưng vẫn còn khả tích ở lân cận các giá trị này.

Từ các công thức (3.2.10) và (3.2.12) ta thấy rằng, khi biết hàm tương quan có thể tìm được mật độ phổ và ngược lại. Tuy nhiên, như ta sẽ thấy sau này, trong nhiều trường hợp, sử dụng mật độ phổ thuận tiện hơn.

Thay cho mật độ phổ $S_x(\omega)$ người ta thường xét mật độ phổ chuẩn hoá $s_x(\omega)$

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega} = \frac{S_x(\omega)}{D_x}. \quad (3.2.15)$$

Hàm tương quan chuẩn hoá và mật độ phổ chuẩn hoá cũng là biến đổi Fourier lẫn nhau và được xác định bởi các công thức:

$$r_x(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \quad (3.2.16)$$

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau)e^{-i\omega t}d\tau. \quad (3.2.17)$$

Theo công thức (3.2.12) ta có

$$S_x(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau. \quad (3.2.18)$$

Đối với quá trình ngẫu nhiên thực, khi cho $\tau = -\tau'$ và để ý đến tính chẵn của $R_x(\tau)$, ta nhận được

$$S_x(-\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{+\infty}^{-\infty} R_x(-\tau')e^{-i\omega\tau'}d\tau' = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau')e^{-i\omega\tau'}d\tau' = S_x(\omega). \quad (3.2.19)$$

Từ đó thấy rằng, đối với quá trình ngẫu nhiên thực $S_x(\omega)$ cũng là hàm chẵn, tính thực của nó suy ra từ tính thực của $R_x(\tau)$.

Do tính chẵn của $R_x(\tau)$ và $S_x(\omega)$ đối với quá trình ngẫu nhiên thực có thể viết

$$R_x(\tau) = 2\int\limits_0^{\infty} S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega. \quad (3.2.20)$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} R_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \quad (3.2.21)$$

Ta có thể viết các công thức tương tự đối với hàm tương quan chuẩn hoá $r_x(\tau)$ và mật độ phổ chuẩn hoá $s_x(\omega)$ của quá trình ngẫu nhiên thực

$$r_x(\tau) = 2\int\limits_0^{\infty} s_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega. \quad (3.2.22)$$

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} r_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \quad (3.2.23)$$

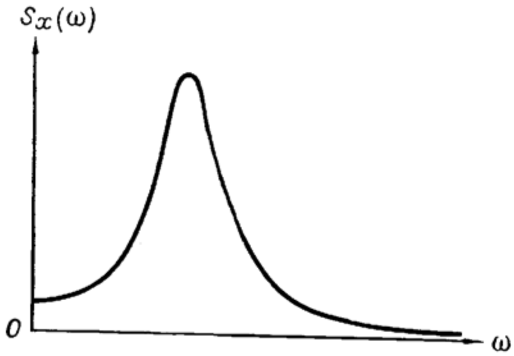
Đối với quá trình ngẫu nhiên có phổ rời rạc, phổ gián đoạn của phương sai được thay thế bằng phổ liên tục với mật độ phương sai $S_x(\omega)$. Hàm $S_x(\omega)$ có thể được biểu diễn bằng đồ thị (hình 3.2). Vì

$$D_x = R_x(0) = 2\int\limits_0^{\infty} S_x(\omega)d\omega. \quad (3.2.24)$$

nên phương sai bằng hai lần diện tích giới hạn bởi đường cong $S_x(\omega)$ được xây dựng đối với $\omega \geq 0$, hoặc bằng diện tích giới hạn bởi đường cong $S_x(\omega)$ được xây dựng trên toàn khoảng $(-\infty, +\infty)$.

Nếu xây dựng đồ thị mật độ phổ chuẩn hoá thì diện tích nằm dưới nó bằng 1, vì:

$$r_x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s_x(\omega)d\omega=1. \tag{3.2.25}$$



Hình 3.2

Đối với hệ các quá trình ngẫu nhiên dừng và liên hệ dừng $X_1(t)$, $X_2(t)$,...,$X_n(t)$, ngoài mật độ phổ của mỗi quá trình $S_{x_i}(\omega)$, người ta còn xét mật độ phổ quan hệ $S_{x_ix_j}(\omega)$, là biến đổi Fourier lẫn nhau với các hàm tương quan quan hệ tương ứng $R_{x_ix_j}(\tau)$.

$$R_{x_ix_j}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{x_ix_j}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \tag{3.2.26}$$

$$S_{x_ix_j}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{x_ix_j}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{3.2.27}$$

Ta sẽ xác định các mật độ phổ của các quá trình ngẫu nhiên dừng đã xét trong mục 2.5.

1. Giả sử quá trình ngẫu nhiên dừng X(t) có hàm tương quan chuẩn hoá

$$R_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|},\alpha>0. \tag{3.2.28}$$

Theo (3.2.17), khi đó mật độ phổ chuẩn hoá được xác định dưới dạng

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-i\omega)\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+i\omega)\tau}d\tau\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha-i\omega}+\frac{1}{\alpha+i\omega}\right]=\frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2+\omega^2\right)} \tag{3.2.29}$$

Đây là một hàm chẵn, đạt giá trị cực đại bằng $\frac{1}{\pi a}$ khi tần số $\omega = 0$.

Ta hãy xét sự phụ thuộc vào tham số α của hàm tương quan và mật độ phổ tương ứng với nó.

Trên hình 3.3a,b đã dẫn ra các đồ thị $r(\tau)$ và $s(\omega)$ tương ứng với các giá trị $\alpha = 0{,}5$; 1; 3.

Từ hình 3.3a thấy rằng, khi tăng tham số α, hàm tương quan giảm nhanh hơn, tức là với cùng một khoảng τ, mối quan hệ tương quan giữa các lát cắt X(t) và X(t+τ) của hàm ngẫu nhiên giảm khi α tăng.

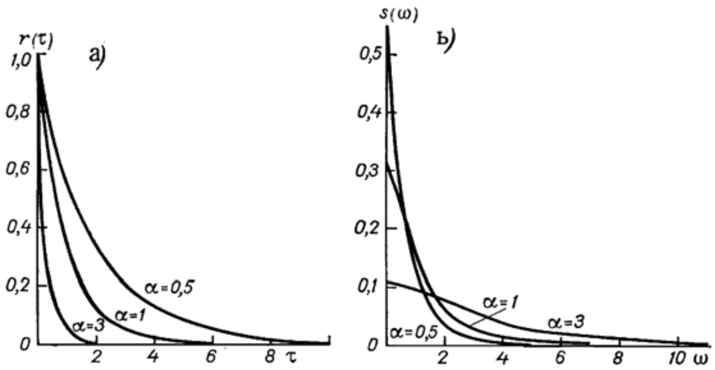
Trong mục 2.6 ta gọi đại lượng T_1 trong công thức (2.6.7) là thời gian tương quan. Đối với trường hợp đang xét

$$T_1(\tau)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha} \tag{3.2.30}$$

tức đại lượng 1/α là thời gian tương quan, đặc trưng cho tốc độ tắt dần của mối liên hệ tương quan.

Việc so sánh các đường cong trên hình 3.3b chỉ ra rằng, với các giá trị α bé, mật độ phổ giảm nhanh khi tăng tần số ω, tức là các tần số nhỏ có giá trị chiếm ưu thế trong phổ của quá trình ngẫu nhiên. Khi α tăng, mật độ phổ thay đổi đều đặn hơn, giảm chậm hơn theo tần số tăng. Đối với các giá trị α lớn, khi tăng ω, mật độ phổ giảm rất chậm, hầu như không đổi và bằng s(0) trên một dải tần số khá lớn.

Quá trình ngẫu nhiên mà mật độ phổ của nó không đổi trong mọi dải tần số $s_x(\omega)$ $=s_x(0)=$ const, được gọi là ồn trắng, tương tự với ánh sáng trắng, mà ở đó thành phần phổ dường như đồng nhất. Về mặt vật lý, quá trình như vậy là không có thực, vì phương sai $D_x=\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega$ của nó trở thành vô hạn.



Hình 3.3

Tuy nhiên, có thể xét nó như là trường hợp tới hạn của quá trình ngẫu nhiên thực có dạng đang xét khi cho α dần tới vô hạn. Thông thường, một cách gần đúng, quá trình ngẫu nhiên mà mật độ phổ của nó thay đổi ít trên một dải tần số đủ lớn được xem như ồn trắng khi bỏ qua các tần số lớn.

2. $r(\tau)=e^{-\alpha\tau^2}, \alpha>0$ (3.2.31)

Khi đó

$$s(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau^2}e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha\left(\tau+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2}d\tau. \tag{3.2.32}$$

Bằng phép thay biến, tích phân cuối cùng được dẫn về tích phân Poatxông, bằng $\sqrt{\pi}$. Từ đó

$$s(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \qquad (3.2.33)$$

Trên hình 3.4 a,b dẫn ra các đồ thị r(τ) và s(ω) đối với α = 0,5, 1 và 3.

Từ hình 3.4 thấy rằng, tính chất phụ thuộc của r(τ) và s(ω) về mặt định tính cũng giống như trong ví dụ trước, chỉ có dạng đường cong bị thay đổi.

3. $r(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau, \alpha>0$. (3.2.34)

Biểu diễn cosβτ qua hàm mũ theo công thức Euler

$$\cos\beta\tau=\frac{1}{2}\left(e^{i\beta\tau}+e^{-i\beta\tau}\right) \qquad (3.2.35)$$

Khi đó

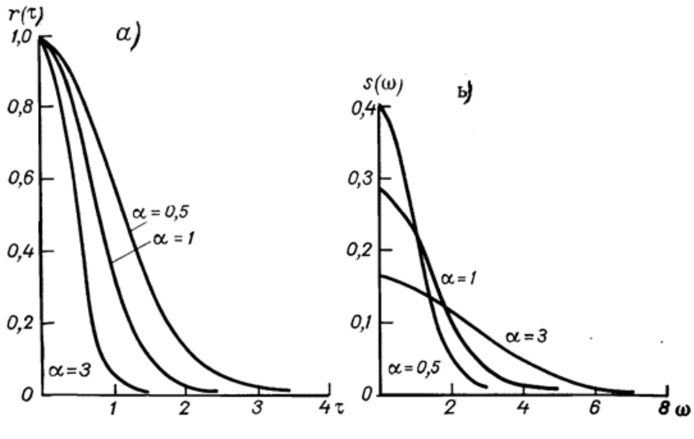
$$s(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}\left(e^{i\beta\tau}+e^{-i\beta\tau}\right)e^{-i\omega\tau}d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-i(\omega-\beta)\tau}d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-i(\omega+\beta)\tau}d\tau\right]. \qquad (3.2.36)$$

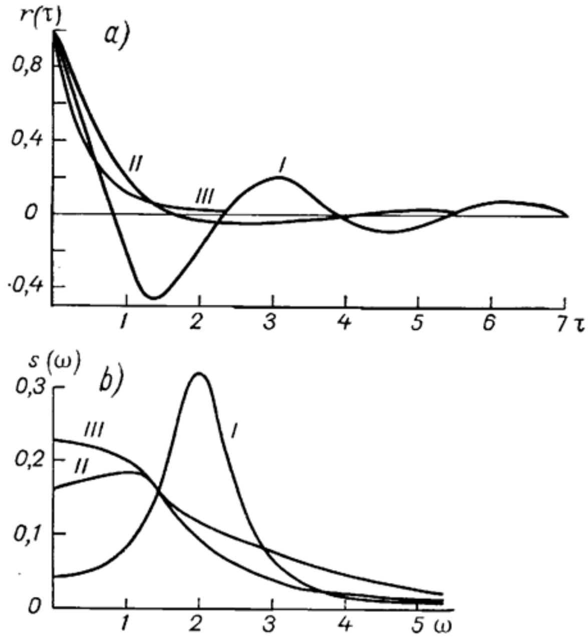
Tương tự như (3.2.29), ta nhận được

$$s(\omega)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha}{\pi\left[\alpha^2+(\omega-\beta)^2\right]}+\frac{\alpha}{\pi\left[\alpha^2+(\omega+\beta)^2\right]}\right\}=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{\left(\omega^2-\alpha^2-\beta^2\right)^2+4\alpha^2\omega^2}=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2-4\omega^2\beta^2} \qquad (3.2.37)$$



Hình 3.4



Hình 3.5

I) α=0,5, β=2; II) α=1, β=1; III) α=2, β=0,5

Trong trường hợp này hàm tương quan và mật độ phổ được xác định bởi hai tham số α và β. Tham số α xác định mức độ suy giảm nhanh của biên độ dao động của hàm tương quan, tham số β xác định chu kỳ của quá trình dao động đó.

Ta sẽ làm sáng tỏ tính chất phụ thuộc của hàm tương quan và mật độ phổ tương ứng của nó vào mối quan hệ của các tham số đó.

Trên hình 3.5 a,b dẫn ra đồ thị các hàm r(τ) và s(ω) cho 3 trường hợp: 1) α = 0,5, β = 2 (đường cong I); 2) α = 1 và β=1 (đường cong II); 3) α=2, β= 0,5 (đường cong III).

Từ hình 3.5 thấy rằng, khi giá trị của tỷ số α/β bé (đường cong I, α/β=0,25) đồ thị hàm tương quan gần với dao động điều hoà tần số ω. Trong trường hợp này mật độ phổ có cực đại biểu hiện rõ khi ω=β, trong phổ của quá trình ngẫu nhiên có các tần số chiếm ưu thế gần với tần số β.

Việc tăng α/β làm đẩy nhanh sự tắt dần của hàm tương quan, cực đại của mật độ phổ trở nên ít rõ nét hơn. Với các giá trị α/β lớn (đường cong III, α/β=4), hàm tương quan trên thực tế chỉ khác 0 tại những trị số τ không lớn. Trong trường hợp này, khi tăng tần số ω, mật độ phổ thay đổi chậm, gần với giá trị ban đầu s(0) trên một dải tần số lớn.

4. $r(\tau)=e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau, \alpha>0$ (3.2.38)

Thay cosβτ theo (3.2.35), ta có

$$s(\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau^2+i(\omega-\beta)\tau}d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau^2-i(\omega+\beta)\tau}dt\right] \quad (3.2.39)$$

Sử dụng ví dụ 2, ta nhận được

$$s(\omega)=\frac{1}{4\sqrt{\pi\alpha}}\left[e^{-\frac{(\omega-\beta)^2}{4\alpha}}+e^{-\frac{(\omega+\beta)^2}{4\alpha}}\right] \tag{3.2.40}$$

Trên hình 3.6 a,b đã dẫn ra các đồ thị r(τ) và s(ω) với các giá trị α và β như trên hình 3.5.

Tính chất phụ thuộc của hàm tương quan và mật độ phổ vào các tham số, về định tính, giống như ở ví dụ 3.

5. $r(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right), \alpha>0, \beta>0$ (3.2.41)

Khi thay sinβ$|\tau|$ bằng hàm mũ theo công thức Euler

$$\sin\beta|\tau|=\frac{1}{2i}\left(e^{i\beta|\tau|}-e^{-i\beta|\tau|}\right) \tag{3.2.42}$$

ta nhận được

$$s(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau d\tau+$$

$$+\frac{\alpha}{2i\beta}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega-i\beta)|\tau|-i\omega\tau}d\tau-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega+i\beta)|\tau|-i\omega\tau}d\tau\right\} \tag{3.2.43}$$

Hạng thứ nhất là s(ω) trong ví dụ 3, các hạng trong ngoặc nhọn là s(ω) trong ví dụ 1, nhận được khi thay α tương ứng bằng α–iβ và α+iβ. Từ đó ta được

$$s(\omega)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{\left(\omega^2+\alpha^2+\beta^2\right)^2-4\omega^2\beta^2}+$$

$$+\frac{4}{2\pi i\beta}\left\{\frac{\alpha}{\omega^2+(\alpha-i\beta)^2}+\frac{\alpha}{\omega^2+(\alpha+i\beta)^2}\right\}=$$

$$=\frac{2\alpha}{\pi}\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\left(\omega^2+\alpha^2-\beta^2\right)+4\alpha^2\omega^2}\right\} \tag{3.2.44}$$

Đồ thị các hàm r(τ) và s(ω) được dẫn ra trên hình 3.7 a,b đối với các giá trị α, β như trên hình 3.5.

6. $r(\tau)=\begin{cases}1-\frac{\tau}{\tau_0} & 0\le\tau\le\tau_0\\ 0 & \tau\ge\tau_0\end{cases}$ (3.2.45)

Coi quá trình ngẫu nhiên là thực, ta có thể tính mật độ phổ theo công thức (3.2.23).

$$s(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\tau_0}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\cos\omega\tau d\tau \tag{3.2.46}$$

Sử dụng công thức tích phân theo từng phần, ta nhận được

$$s(\omega)=\frac{1}{\pi\omega^2\tau_0}\left(1-\cos\omega\tau_0\right) \tag{3.2.47}$$

Giá trị s(0) cần được xét như là giới hạn của s(ω) khi ω tiến dần tới 0.

$$s(0) = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{\pi \omega^2 \tau_0} (1 - \cos \omega \tau_0) = \frac{\tau_0}{2\pi} \quad (3.2.48)$$

Trên hình 3.8 a,b dẫn ra đồ thị các hàm r(τ) và s(ω) với các giá trị của tham số τ_0 = 1, 2, 3.

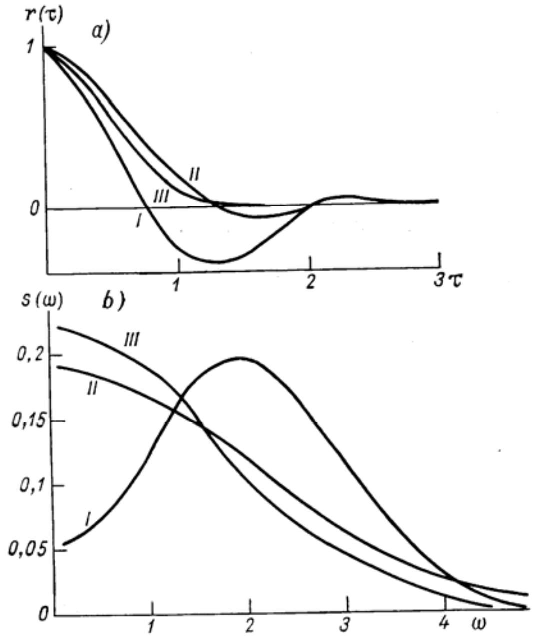
Từ hình 3.8 thấy rằng, sự thay đổi của mật độ phổ theo tần số là một quá trình dao động: s(ω) nhận các giá trị cực tiểu

s(ω) = 0 với $\omega = \frac{2k\pi}{\tau_0}, k = 1,2 \ldots$

và đạt các giá trị cực đại giảm theo sự tăng của tần số ω.

Khi tăng tham số τ_0 các giá trị cực đại tương đối của mật độ phổ cũng tăng và thể hiện ưu thế rõ nét hơn trong phổ của quá trình ngẫu nhiên tại các tần số rời rạc riêng biệt, nhất là khi tần số ω = 0.

Trong tất cả các trường hợp đã xét, các mật độ phổ s(ω) là những hàm không âm với mọi giá trị tần số ω. Do đó, theo định lý Khintrin, hàm r(τ), biến đổi ngược Fourier của chúng, thật sự là hàm tương quan của các quá trình ngẫu nhiên dừng.



Hình 3.6

I) α=0,5, β=2; II) α=1, β=1; III) α=2, β=0,5

7. Xét hàm:

$$r(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\tau^2}{\tau_0^2} & khi |\tau| \le \tau_0 \\ 0 & khi |\tau| > \tau_0 \end{cases} \quad (3.2.49)$$

Ta sẽ làm sáng tỏ xem nó có thể là hàm tương quan của một quá trình ngẫu nhiên dừng nào đó không. Ta tìm mật độ phổ đối với nó theo công thức (3.2.14).

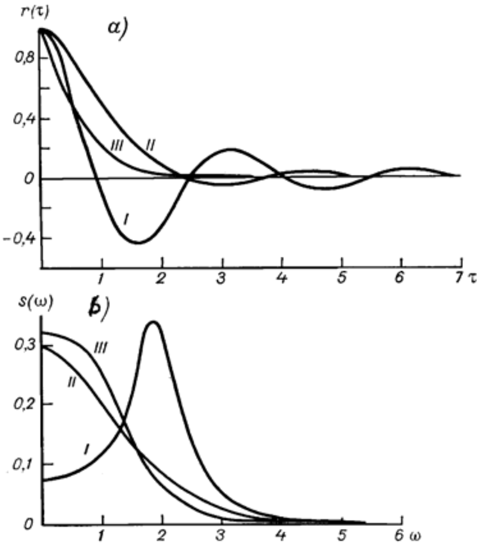
$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right) \cos \omega\tau d\tau \quad (3.2.50)$$

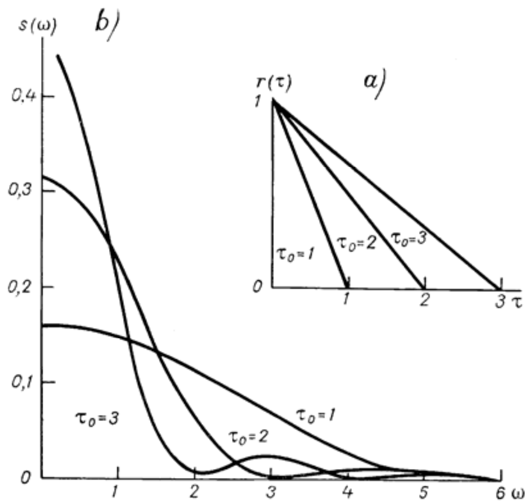
Sử dụng hai lần công thức tích phân từng phần, ta được:

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi \omega^2 \tau_0^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega\tau_0 - \tau_0 \cos \omega\tau_0 \right) \quad (3.2.51)$$

Đồ thị các hàm r(τ) và s(ω) dẫn ra trên hình 3.9 a,b.

Trong trường hợp này mật độ phổ không phải là hàm không âm với mọi ω, do đó r(τ) không thể là hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng.

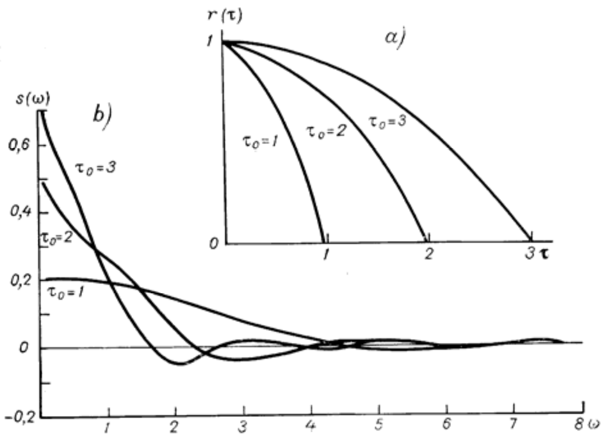




Hình 3.7

I) α=0,5, β=2; II) α=1, β=1; III) α=2, β=0,5

Hình 3.8



Hình 3.9

3.3. Phân tích điều hoà trường ngẫu nhiên đồng nhất

Tương tự như quá trình ngẫu nhiên dừng, có thể biểu diễn trường ngẫu nhiên đồng nhất U(ρ)=U(x,y,z) dưới dạng tích phân Fourier-Stiltex

$$U(\vec{\rho})=\int e^{i(\vec{k\rho})}d\Phi(\vec{k}) \qquad (3.3.1)$$

ở đây các sóng phẳng $e^{i(\vec{k\rho})}$ đóng vai trò dao động điều hoà, trong đó $\vec{k}.\vec{\rho}$ là tích vô hướng của vectơ $\vec{k}$ và vectơ $\vec{\rho}$. Tích phân được trải trên toàn không gian của vectơ sóng $\vec{k}$.

Giả thiết rằng, kỳ vọng toán học của trường bằng không, còn hàm tương quan $R_u(\vec{l})$ giảm khá nhanh trên khoảng vô hạn sao cho

$$\int \left| R_u(\vec{l}) \right| d\vec{l} < \infty \quad (3.3.2)$$

và bằng cách lập luận tương tự như đã xét trong mục 3.2 cho trường hợp ba chiều, ta có thể viết hàm tương quan dưới dạng

$$R_u(\vec{l}) = \int e^{i(\vec{kl})} S_u(\vec{k}) d\vec{k} \quad (3.3.3)$$

trong đó $d\vec{k}$ là yếu tố thể tích trong không gian sóng, còn hàm $S_u(\vec{k})$ được gọi là mật độ phổ ba chiều, nó phải là một hàm không âm.

Hàm tương quan là biến đổi ngược Fourier ba chiều của mật độ phổ. Từ đó, giống như phép biến đổi Fourier đối với hàm tương quan, có thể xác định mật độ phổ theo công thức

$$S_u(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i(\vec{kl})} R_u(\vec{l}) d\vec{l} \quad (3.3.4)$$

Trong trường hợp $U(\vec{\rho})$ là trường đồng nhất đẳng hướng, hàm tương quan là hàm của đối số vô hướng $l = \left| \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1 \right|$. Khi đó dễ dàng tính được tích phân trong công thức (3.3.4) khi chuyển về toạ độ cầu.

Ta biểu diễn tích vô hướng $\vec{k}.\vec{l}$ dưới dạng

$$\vec{k}.\vec{l} = kl\cos(\widehat{\vec{k}.\vec{l}}) \quad (3.3.5)$$

Hướng hệ toạ độ cầu sao cho góc giữa các vectơ $\vec{k}$ và $\vec{l}$ trùng với một toạ độ cầu – góc θ. Khi đó

$$S_u(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i(\vec{kl})} R_u(\vec{l}) d\vec{l} = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikl\cos\theta} R_u(l) l^2 \sin\theta d\theta d\varphi dl \quad (3.3.6)$$

Bằng phép thay biến cosθ=t trong tích phân hai lớp ta nhận được

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikl\cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi e^{-ikl\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 e^{-iklt} dt = \frac{4\pi}{kl} \sin(kl). \quad (3.3.7)$$

Đặt (3.3.7) vào (3.3.6) ta được

$$S_u(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kl)}{kl} R_u(l) l^2 dl \quad (3.3.8)$$

Từ đó thấy rằng, mật độ phổ của trường đồng nhất đẳng hướng là hàm của một đối số vô hướng k.

$$S_u(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kl)}{kl} R_u(l) l^2 dl \quad (3.3.9)$$

Đối với trường đồng nhất đẳng hướng, khi sử dụng phương pháp tương tự để tính tích phân (3.3.3), ta nhận được

$$R_u(l) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(kl)}{kl} S_u(k) k^2 dk \quad (3.3.10)$$

Vì mật độ phổ phải là hàm không âm, nên các hàm tương quan $R_u(l)$ của trường đồng nhất đẳng hướng chỉ có thể là những hàm sao cho tích phân (3.3.9) không âm với mọi k≥0.

Đối với trường đồng nhất đẳng hướng trên mặt phẳng, các công thức cho hàm tương quan $R_u(l)$ và mật độ phổ $S_u(k)$ được biểu thị như những phép biến đổi Fourier lẫn nhau theo các công thức

$$R_u(l) = \int e^{i(\vec{k}\vec{l})} S_u(k) d\vec{k} \tag{3.3.11}$$

$$S_u(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i(\vec{k}\vec{l})} R_u(l) d\vec{l} \tag{3.3.12}$$

ở đây, d$\vec{k}$ và d$\vec{l}$ là các yếu tố diện tích.

Khi chuyển về toạ độ cực và hướng trục cực theo vectơ $\vec{k}$, ta nhận được

$$\vec{k}.\vec{l} = kl\cos\varphi, \tag{3.3.13}$$

từ đó

$$S_u(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ikl\cos\varphi} R_u(l) l dl d\varphi \tag{3.3.14}$$

Vì

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikl\cos\varphi} d\varphi = J_o(kl) \tag{3.3.15}$$

là hàm Bessel loại I bậc 0, nên (3.3.14) được viết dưới dạng

$$S_u(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} J_o(kl) R_u(l) l dl \tag{3.3.16}$$

ở đây, $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Tương tự, ta nhận được

$$R_u(l) = 2\pi \int_0^{\infty} J_o(kl) S_u(k) k dk . \tag{3.3.17}$$

Để cho hàm $R_u(l)$ là hàm tương quan của trường đồng nhất đẳng hướng trên mặt phẳng thì tích phân (3.3.16) cần phải không âm với mọi k≥0.

Ta hãy xét một vài ví dụ tính mật độ phổ.

1. Giả sử hàm tương quan của trường đồng nhất đẳng hướng ba chiều có dạng

$$\mathrm{R(l)} = \sigma^2 e^{-\alpha|l|}, \alpha > 0 \tag{3.3.18}$$

Khi đó mật độ phổ được xác định theo công thức (3.3.9)

$$\mathrm{S(k)} = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k}\int_0^{\infty} e^{-\alpha l} l \sin(kl) dl . \tag{3.3.19}$$

Ta xét tích phân

$$\mathrm{J} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} l \sin(kl) dl \tag{3.3.20}$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, ta được

$$J = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha l} l\sin(kl)dl + \frac{k}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha l} l\cos(kl)dl \tag{3.3.21}$$

Sử dụng phương pháp tương tự cho tích phân

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-\alpha l} l\cos(kl)dl \tag{3.3.22}$$

ta có

$$J_1 = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha l} l\cos(kl)dl - \frac{k}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha l} l\sin(kl)dl \tag{3.3.23}$$

Đặt (3.3.23) vào (3.3.21) ta được

$$J = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha l} \sin(kl)dl + \frac{k^2}{\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha l} \cos(kl)dl - \frac{k^2}{\alpha^2}J\ . \tag{3.3.24}$$

Từ đó

$$J = \frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}\int_0^\infty e^{-\alpha l}\left[\sin(kl) + \frac{k}{\alpha}\cos(kl)\right]dl \tag{3.3.25}$$

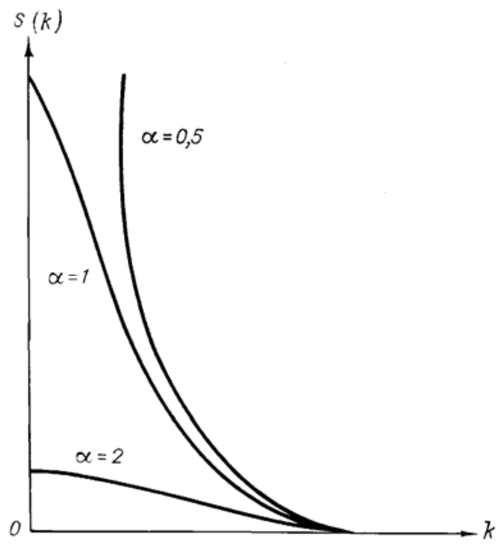
Sử dụng hai lần phương pháp tích phân từng phần cho (3.3.25), ta nhận được

$$J = \frac{2k\pi}{\left(k^2+\alpha^2\right)^2} \tag{3.3.26}$$

Đặt (3.3.26) vào (3.3.19) cuối cùng ta được

$$S(k) = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi\left(k^2+\alpha^2\right)^2} \tag{3.3.27}$$

Mật độ phổ (3.3.27) không âm với mọi giá trị của k, do đó hàm (3.3.18) có thể là hàm tương quan của trường ngẫu nhiên ba chiều. Đồ thị của mật độ phổ (3.3.27) được dẫn ra trên hình 3.10).



Hình 3.10

2. R(l) = $\sigma^2 e^{-\alpha l^2}, \alpha > 0$.   (3.3.28)

Mật độ phổ trong trường hợp này được xác định dưới dạng

$$S(k) = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k}\int_0^\infty e^{-\alpha l^2} l \sin(kl) dl = \frac{\sigma^2}{8(\pi\alpha)^{3/2}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}} \qquad (3.3.29)$$

Hàm (3.3.29) cũng là hàm không âm với mọi k, do đó hàm (3.3.28) có thể là hàm tương quan của trường ngẫu nhiên ba chiều. Đồ thị mật độ phổ (3.3.29) được biểu diễn trên hình 3.11.

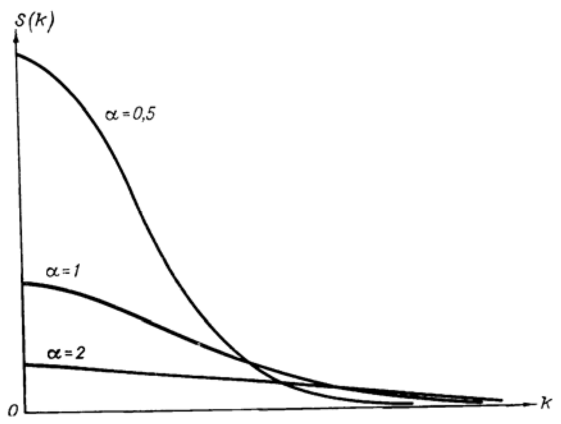
3. Đối với hàm R(l) = $\sigma^2 e^{-\alpha|l|}\cos\beta l, \alpha > 0, \beta > 0$ (3.3.30)

mật độ phổ bằng

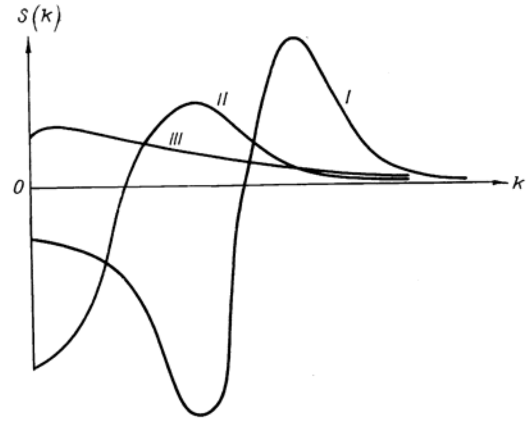
$$S(k) = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k}\int_0^\infty e^{-\alpha l}\cos\beta l \sin(kl) l dl = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi^2}\frac{k^4 + 2k^2b^2 + (2a - b^2)b^2}{\left(k^4 + 2ak^2 + b^4\right)^2} \qquad (3.3.31)$$

trong đó $a=\alpha^2-\beta^2$, $b=\alpha^2+\beta^2$.

Đồ thị S(k) được biểu diễn trên hình 3.12.



Hình 3.11



Hình 3.12

I) α=0.5, β=2; II) α=1, β=1; III) α=2, β=0.5

Trong trường hợp này, S(k)≥0 với mọi k≥0 chỉ khi bất đẳng thức $\alpha^2 > 3\beta^2$ hay $\alpha > \sqrt{3}\beta$ được thoả mãn, và do đó, chỉ khi $\alpha > \sqrt{3}\beta$ thì hàm $R_u(l)$ mới có thể là hàm tương quan của trường ngẫu nhiên ba chiều.

Như đã nêu trong mục 3.2, hàm R(τ)=$\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$ với mọi α>0 và β>0 có thể là hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng (trường đồng nhất). Hàm tương quan của trường ngẫu nhiên đồng nhất đẳng hướng ba chiều (hoặc hai chiều) R(l) khi thay thế l=τ luôn luôn có thể là hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng (trường đồng nhất một chiều), vì tại tất cả mọi điểm của đường thẳng y=z=0 trường đồng nhất đẳng hướng ba chiều là trường đồng nhất một chiều.

Như đã nêu ở ví dụ cuối cùng, điều ngược lại sẽ không xảy ra, tức nếu hàm R(τ) là hàm tương quan của trường đồng nhất một chiều thì không thể suy ra được rằng, một hàm là hàm của khoảng cách giữa các điểm có thể là hàm tương quan của trường hai hoặc ba chiều.

CHƯƠNG 4: BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN DỪNG

4.1. Biến đổi hàm ngẫu nhiên bằng toán tử tuyến tính

Giả sử hàm φ(t) nhận được từ hàm f(t) bằng cách thực hiện một số phép toán nào đó và L là ký hiệu qui ước các phép toán này, tức L là qui tắc, theo đó hàm f(t) biến đổi thành φ(t). Trong toán học, người ta gọi qui tắc, theo nó một tập hàm được ánh xạ sang một tập hợp hàm khác là toán tử. Ta sẽ nói rằng, hàm φ(t) là kết quả tác dụng toán tử L lên hàm f(t), tức là

$$\varphi(t) = L\{f(t)\}. \tag{4.1.1}$$

Trong kỹ thuật vô tuyến và các ứng dụng kỹ thuật khác người ta thường gọi hàm f(t) là tác dụng lối vào, hàm φ(t) là tín hiệu ra, còn L toán tử của hệ làm biến đổi tác dụng lối vào. Toán tử L được gọi là tuyến tính, nếu nó thoả mãn hai điều kiện sau:

1. $L\{cf(x)\} = cL\{f(x)\}$ (4.1.2)

tức là kết quả tác dụng toán tử lên tích của hàm f(t) và một thừa số không đổi c bằng tích của thừa số đó với kết quả tác dụng toán tử đó lên f(t).

2. $L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\}$ (4.1.3)

tức là kết quả tác dụng toán tử lên tổng hai hàm bằng tổng kết quả tác dụng toán tử lên mỗi hàm riêng biệt.

Toán tử không thoả mãn các điều kiện trên gọi là toán tử phi tuyến.

Ví dụ, toán tử vi phân là toán tử tuyến tính, vì nó thoả mãn các đẳng thức

$$\frac{d}{dt}\{cf_1(t)\} = c\frac{d}{dt}\{f_1(t)\}$$

và

$$\frac{d}{dt}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \frac{d}{dt}\{f_1(t)\} + \frac{d}{dt}\{f_2(t)\}.$$

Toán tử lấy tích phân là toán tử tuyến tính. Toán tử nhận được khi tác dụng liên tiếp một vài toán tử tuyến tính cũng là toán tử tuyến tính. Toán tử lấy kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên là toán tử tuyến tính.

Ví dụ về toán tử phi tuyến là phép toán nâng lên luỹ thừa, toán tử lấy phương sai hàm ngẫu nhiên.

Nếu hàm ngẫu nhiên Y(t) là kết quả tác dụng của một toán tử tuyến tính L bất kỳ lên hàm ngẫu nhiên X(t) có kỳ vọng toán học $m_x(t)$ và hàm tương quan $R_x(t_1,t_2)$, tức là

$$Y(t) = L\{X(t)\} \tag{4.1.4}$$

thì

$$m_y(t) = L\{m_x(t)\} \tag{4.1.5}$$

$$R_y(t_1,t_2) = L^{(t_1)}L^{(t_2)}\{R_x(t_1,t_2)\} \tag{4.1.6}$$

nghĩa là $m_y(t)$ nhận được bằng cách tác dụng toán tử L lên $m_x(t)$, $R_y(t_1,t_2)$ nhận được bằng cách tác dụng hai lần toán tử L lên hàm $R_x(t_1,t_2)$, đầu tiên theo đối số thứ nhất t_1, sau đó theo đối số thứ hai t_2.

Thực vậy,

$$m_y(t) = M\left[L\{X(t)\}\right] \tag{4.1.7}$$

Toán tử L tác dụng lên biến t, toán tử tìm kỳ vọng toán học tiến hành lấy trung bình tung độ của hàm ngẫu nhiên (khi cố định t) theo tập hợp tất cả các giá trị có thể của đại lượng ngẫu nhiên X(t), cũng là toán tử tuyến tính. Vì vậy, có thể đổi chỗ trật tự tác dụng của các toán tử M và L cho nhau, tức là $m_y(t) = L\{M[X(t)]\} = L\{m_x(t)\}$, và điều đó đã chứng minh cho đẳng thức (4.1.5).

Tiếp theo

$$
\begin{aligned}
R_y(t_1,t_2) &= M\{[Y(t_1)-m_y(t_1)][Y(t_2)-m_y(t_2)]\} = \\
&= M\left[\left(L^{(t_1)}\{X(t_1)\} - L^{(t_1)}\{m_x(t_1)\}\right)\left(L^{(t_2)}\{X(t_2)\} - L^{(t_{21})}\{m_x(t_2)\}\right)\right] = \\
&= M\left[L^{(t_1)}L^{(t_2)}\{[X(t_1)-m_x(t_1)][X(t_2)-m_x(t_2)]\}\right] = \\
&= L^{(t_1)}L^{(t_2)}\{M[[X(t_1)-m_x(t_1)][X(t_2)-m_x(t_2)]]\} = L^{(t_1)}L^{(t_2)}\{R_x(t_1,t_2)\}.
\end{aligned}
$$

Các công thức đã trình bày trong chương 2 đối với kỳ vọng toán học và hàm tương quan của đạo hàm và tích phân của hàm ngẫu nhiên là các trường hợp riêng của (4.1.5) và (4.1.6).

Việc biết $D_x(t)$ là chưa đủ để nhận được phương sai $D_y(t)$ của quá trình ngẫu nhiên Y(t). Trước hết cần phải tìm hàm tương quan $R_y(t_1,t_2)$ theo công thức (4.1.6), sau đó thế vào nó $t_1=t_2=t$.

Để tìm các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên, là kết quả tác dụng toán tử phi tuyến lên hàm ngẫu nhiên X(t), thì biết $m_x(t)$ và $R_x(t_1,t_2)$ cũng chưa đủ, vì trong trường hợp này qui luật phân bố của hàm X(t) đóng một vai trò quan trọng. Đối với các toán tử phi tuyến có thể nhận được những kết quả tương đối đơn giản chỉ ở trong một số trường hợp riêng.

Trong trường hợp tác dụng toán tử tuyến tính lên hàm X(t) có qui luật phân bố chuẩn, hàm ngẫu nhiên Y(t) = L{X(t)} cũng tuân theo qui luật phân bố chuẩn, bởi vì do tính chất tuyến tính của toán tử L, hàm Y(t) có thể chỉ nhận được nhờ tổ hợp tuyến tính của một số hữu hạn hoặc vô hạn các tung độ của hàm X(t). Nhưng từ lý thuyết xác suất ta biết rằng, tổ hợp tuyến tính các đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn phụ thuộc hoặc độc lập đều tuân theo qui luật phân bố chuẩn.

Do vậy, trong trường hợp X(t) là hàm ngẫu nhiên tuân theo qui luật phân bố chuẩn, thì Y(t) cũng tuân theo qui luật phân bố chuẩn và các đặc trưng $m_y(t)$, $R_y(t_1,t_2)$ tìm được hoàn toàn xác định nó.

Nếu X(t) không phải là hàm ngẫu nhiên phân bố chuẩn, thì Y(t) cũng sẽ không có cùng qui luật phân bố với X(t). Qui luật phân bố chuẩn cũng sẽ không được bảo toàn nếu toán tử L không tuyến tính.

4.2. Biến đổi tuyến tính dưới dạng phổ

Ta hãy biểu diễn phép biến đổi tuyến tính dưới dạng phổ. Muốn vậy, ta sử dụng khái niệm hàm delta Dirac, một hàm được sử dụng rộng rãi trong toán học.

Hàm delta δ(t) là hàm có các tính chất sau:

1) $\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$ (4.2.1)

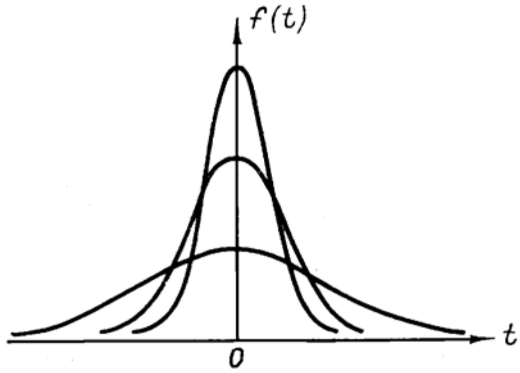
tức là δ(t) bằng không với mọi giá trị t khác không, còn tại điểm t = 0 thì tăng lên vô hạn.

2) Tích phân hàm delta trên toàn miền vô hạn bằng đơn vị

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \tag{4.2.2}$$

Hàm delta không phải là hàm theo nghĩa thông thường, mà là một hàm tượng trưng nào đó. Theo nghĩa chính xác, hàm có các tính chất (4.2.1) và (4.2.2) không tồn tại. Tuy nhiên có thể xét hàm δ(t) theo một nghĩa nào đó giống như giới hạn của hàm thông thường.

Ta lấy hàm Gauss làm ví dụ



Hình 4.1

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

đối với hàm này hệ thức (4.2.2) được thoả mãn.

Ta sẽ giảm đại lượng σ xuống, khi đó đồ thị của hàm sẽ nhọn hơn (trong nguyên bản viết là đồ thị giãn ra –ND) (hình 4.1), giá trị cực đại $f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ sẽ tăng, còn miền giá trị khác không của hàm thu hẹp lại. Lấy giới hạn khi σ→0 ta nhận được hàm có tính chất của hàm delta.

Sử dụng khái niệm giới hạn này, có thể biểu diễn hàm delta dưới dạng tích phân. Tương ứng với mục 1.12, mật độ phân bố của đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn có thể được biểu diễn như là phép biến đổi ngược Fourier hàm đặc trưng của nó, theo (1.12.25) hàm này có dạng $g(\omega)=e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$. Do tính chẵn của hàm này nên ta có đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}d\omega \tag{4.2.3}$$

Lấy giới hạn hai vế đẳng thức (4.2.3) khi σ→0 ta nhận được biểu diễn tích phân hàm delta

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}d\omega \tag{4.2.4}$$

Nếu xét hàm delta của đối số t–τ, với τ là một số xác định, thì

$$\delta(t-\tau)=\begin{cases}0 & t\neq\tau\\ \infty & t=\tau\end{cases} \tag{4.2.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)dt = 1 \qquad (4.2.6)$$

Đối với mọi hàm f(t) bất kỳ, liên tục tại t=τ, ta có đẳng thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \qquad (4.2.7)$$

Điều này được suy ra một cách đơn giản như sau, mặc dù không thật chặt chẽ. Vì δ(t–τ) khác 0 chỉ khi t=τ, nên tích phân (4.2.7) khác 0 chỉ trong khoảng [t–ε, t+ε], với ε>0 bé tuỳ ý. Từ đó

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \mathrm{f}(\mathrm{t})\int_{\mathrm{t}-\varepsilon}^{\mathrm{t}+\varepsilon} \delta(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{f}(\mathrm{t})\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{f}(\mathrm{t})$$

Ký hiệu g(t,τ) là kết quả tác dụng toán tử tuyến tính L nào đó lên hàm delta δ(t–τ) tại điểm τ cố định

$$g(t,\tau) = L\{\delta(t-\tau)\}. \qquad (4.2.8)$$

Nhờ hàm g(t,τ) này, ta sẽ biểu thị kết quả tác dụng toán tử L đã cho lên hàm f(t) bất kỳ cho trên đoạn [a,b].

Tác dụng toán tử tuyến tính L lên hai vế đẳng thức (4.2.7), ta được

$$L\{f(t)\} = \int_a^b g(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad (4.2.9)$$

Như vậy, hàm φ(t)=L{f(t)}, kết quả tác dụng toán tử tuyến tính L lên hàm f(t), có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\varphi(t) = \int_a^b g(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad (4.2.10)$$

Hàm g(t,τ), kết quả tác dụng toán tử L lên hàm delta δ(t–τ), được gọi là hàm trọng lượng. (Trong kỹ thuật vô tuyến người ta gọi nó là hàm chuyển xung).

Nếu hàm f(t) được cho trong khoảng vô hạn (–∞, +∞) thì có thể viết

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad (4.2.11)$$

Trong trường hợp riêng, nếu toán tử L là dừng thì hàm trọng lượng chỉ phụ thuộc vào hiệu t–τ. Khi đó có thể viết

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (4.2.12)$$

Tích phân (4.2.12) được gọi là tích phân chập của hàm f(t) và g(t).

Ký hiệu $S_f(\omega)$ và $S_\varphi(\omega)$ là biến đổi Fourier (mật độ phổ) tương ứng của các hàm f(t) và φ(t). Khi đó ta có:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (4.2.13)$$

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varphi}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (4.2.14)$$

Đặt các biểu thức trên vào (4.2.12), ta nhận được

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varphi}(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}S_{f}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\right]d\tau \quad (4.2.15)$$

Thay đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân hai lớp và làm phép đổi biến $t-\tau=\tau_1$, ta được

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_{\varphi}(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}S_{f}(\omega)e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau_1)e^{-i\omega\tau_1}d\tau_1\right]d\omega \quad (4.2.16)$$

Ký hiệu $G(\omega)$ là biến đổi Fourier (mật độ phổ) của hàm trọng lượng $g(t)$

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt \quad (4.2.17)$$

Tích phân trong móc vuông (4.2.16) bằng $2\pi G(\omega)$, từ đó có thể viết

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_{\varphi}(\omega)-S_{f}(\omega).2\pi G(\omega)\right]e^{i\omega t}d\omega=0 \quad (4.2.18)$$

Điều này chứng tỏ rằng, biến đổi ngược Fourier hàm $S_{\varphi}(\omega)-S_{f}(\omega)2\pi G(\omega)$ bằng 0, và do đó đẳng thức sau cần được thoả mãn

$$S_{\varphi}(\omega)=S_{f}(\omega).2\pi G(\omega). \quad (4.2.19)$$

Hàm:

$$L(\omega)=2\pi G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt \quad (4.2.20)$$

được gọi là hàm truyền của toán tử tuyến tính L. Từ đó có thể viết (4.2.19) dưới dạng

$S_{\varphi}(\omega)=S_{f}(\omega)L(\omega)$ (4.2.21)

Như vậy, mật độ phổ $S_{\varphi}(\omega)$, kết quả của việc tác dụng toán tử tuyến tính L lên hàm f(t), bằng tích mật độ phổ $S_f(\omega)$ của hàm f(t) và hàm truyền $L(\omega)$ của toán tử.

4.3 Mật độ phổ của phép biến đổi tuyến tính quá trình ngẫu nhiên dừng

Bây giờ ta xét quá trình ngẫu nhiên dừng X(t) có kỳ vọng toán học bằng 0 và hàm tương quan $R_x(\tau)$ cho trước. Và giả sử một quá trình ngẫu nhiên khác Y(t) là kết quả tác dụng toán tử tuyến tính dừng L lên quá trình ngẫu nhiên X(t)

$$Y(t)=L\{X(t)\}. \quad (4.3.1)$$

Khi đó ta có thể biểu diễn quá trình ngẫu nhiên Y(t) dưới dạng

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)X(\tau)d\tau \quad (4.3.2)$$

với $g(t-\tau)$ là hàm trọng lượng.

Thật vậy, mỗi thể hiện $y_i(t)$ của quá trình ngẫu nhiên Y(t), kết quả tác dụng toán tử L lên hàm không ngẫu nhiên $x_i(t)$ là thể hiện tương ứng của quá trình ngẫu nhiên X(t), và do đó đối với chúng hệ thức (4.3.2) là đúng, khi đó nó cũng đúng đối với tập tất cả các thể hiện.

Trong trường hợp toán tử tuyến tính L được cho dưới hình thức một bộ biến đổi thực nào đó, thì nguyên tắc cần thoả mãn là khả năng thực hiện được về mặt vật lý, mà theo đó phản ứng của bộ biến đổi lên tác dụng lối vào không thể xuất hiện trước khi bắt đầu có tác động xảy ra, tức là hàm trọng lượng $g(t-\tau)$ cần phải đồng nhất bằng 0 khi $t<\tau$.

Xuất phát từ đó, đối với bộ biến đổi thực, công thức (4.3.2) cần phải viết dưới dạng

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t} g(t-\tau)X(\tau)d\tau \qquad (4.3.3)$$

Thực hiện phép đổi biến $t-\tau=\tau_1$, ta được

$$Y(t)=\int_{0}^{\infty} g(\tau)X(t-\tau)d\tau \qquad (4.3.4)$$

$$g(t)=0 \qquad \text{khi } t<0$$

Ta xác định hàm tương quan quá trình ngẫu nhiên Y(t).

$$R_y(t_1,t_2)=M\left[Y(t_1)Y(t_1)\right]=$$

$$=M\left\{\left[\int_0^\infty g(\tau_1)X(t_1-\tau_1)d\tau_1\right]\left[\int_0^\infty g(\tau_2)X(t_2-\tau_2)d\tau_2\right]\right\}=$$

$$=\int_0^\infty g(\tau_1)\left\{\int_0^\infty g(\tau_2)M\left[X(t_1-\tau_1)X(t_2-\tau_2)\right]d\tau_2\right\}d\tau_1=$$

$$=\int_0^\infty g(\tau_1)d\tau_1\int_0^\infty g(\tau_2)R_x(t_2-t_1-\tau_2+\tau_1)d\tau_2 \qquad (4.3.5)$$

Từ đó thấy rằng, hàm tương quan $R_y(t_1,t_2)$ chỉ phụ thuộc vào hiệu $t_2-t_1=\tau$, tức Y(t) là quá trình ngẫu nhiên dừng theo nghĩa rộng.

$$R_x(\tau)=\int_0^\infty g(\tau_1)d\tau_1\int_0^\infty g(\tau_2)R_x(\tau-\tau_2+\tau_1)d\tau_2 \qquad (4.3.6)$$

Ta xác định mật độ phổ của quá trình ngẫu nhiên Y(t)

$$S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}d\tau\int_0^\infty g(\tau_1)d\tau_1\int_0^\infty g(\tau_2)R_x(\tau-\tau_2+\tau_1)d\tau_2 \qquad (4.3.7)$$

Thay đổi thứ tự tích phân trong tích phân ba lớp và làm phép đổi biến $\tau-\tau_2+\tau_1=t$, ta nhận được tích của ba tích phân một lớp

$$S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(\tau_1)e^{i\omega\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty g(\tau_2)e^{-i\omega\tau_2}d\tau_2\int_{-\infty}^{\infty} R_x(t)e^{-i\omega t}dt\,. \qquad (4.3.8)$$

Khi đó thừa số $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(t)e^{-i\omega t}dt = S_x(\omega)$ là mật độ phổ quá trình ngẫu nhiên X(t).

Tích phân $\int_0^{\infty} g(\tau_2)e^{-i\omega\tau_2}d\tau_2 = \mathrm{L}(\omega)$ là hàm truyền của toán tử L. Vì hàm trọng lượng chỉ nhận các giá trị thực, nên tích phân $\int_0^{\infty} g(\tau_1)e^{i\omega\tau_1}d\tau_1 = \mathrm{L}^*(\omega)$ là đại lượng liên hợp phức của hàm truyền. Như vậy, công thức (4.3.8) có thể viết dưới dạng

$$\mathrm{S_y}(\omega) = \mathrm{L}(\omega)\mathrm{L}^*(\omega)\mathrm{S_x}(\omega) \tag{4.3.9}$$

hay

$$\mathrm{S_y}(\omega) = |\mathrm{L}(\omega)|^2\mathrm{S_x}(\omega) \tag{4.3.10}$$

Do vậy, mật độ phổ của kết quả biến đổi quá trình ngẫu nhiên dừng X(t) nhờ toán tử tuyến tính dừng L bằng tích mật độ phổ của quá trình ngẫu nhiên và bình phương modul hàm truyền của toán tử.

4.4. nghiệm dừng của phương trình vi phân tuyến tính có hệ số hằng số

Để làm ví dụ cho toán tử tuyến tính ta xét phương trình vi phân tuyến tính có hệ số hằng số

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots.. + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots.. + b_1\frac{dx(t)}{dx} + b_0 x(t) \tag{4.4.1}$$

Như đã biết từ lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính có vế phải, nghiệm tổng quát của phương trình (4.4.1) bằng tổng của nghiệm tổng quát $\bar{y}(t)$ của phương trình thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng bất kỳ của phương trình không thuần nhất. Nghiệm $\bar{y}(t)$ xác định cái gọi là dao động tự do hay dao động riêng của quá trình đang xét, không phụ thuộc vào hàm x(t). Trên thực tế thường gặp những quá trình ổn định trong đó dao động tự do tắt dần theo thời gian.

Nếu xét một thời điểm khá xa so với thời điểm ban đầu, khi mà các dao động tự do trên thực tế không còn tồn tại, ta có thể đặt $\bar{y}(t)$ = 0. Khi đó, bài toán dẫn tới việc tìm dao động cưỡng bức y(t) gây nên bởi x(t). Người ta gọi quá trình như vậy là ổn định để phân biệt với quá trình chuyển tiếp mà ở đó còn tồn tại dao động tự do.

Ta ký hiệu toán tử vi phân bằng chữ cái p, tức là

$$p = \frac{d}{dt},\ p^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \ldots.., p^n = \frac{d^n}{dt^n}. \tag{4.4.2}$$

Khi đó có thể viết phương trình (4.4.1) dưới dạng ký hiệu

$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)y(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)x(t) \quad (4.4.3)$$

Đặt

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = A_n(p)$$

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0 = B_m(p) \quad (4.4.4)$$

ta có thể viết (4.4.3) dưới dạng ký hiệu gọn hơn nữa

$$y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} x(t) \quad (4.4.5)$$

Biểu thức $\frac{B_m(p)}{A_n(p)}$ là toán tử phương trình vi phân (4.4.1) được viết dưới dạng ký hiệu. Có thể nói rằng hàm y(t) là kết quả tác dụng toán tử đó lên hàm x(t). Vì phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không đổi thoả mãn nguyên lý chồng chất, tức nếu x(t) là tổng của một số hàm thì nghiệm y(t) bằng tổng các nghiệm của mỗi hạng tử riêng rẽ, nên toán tử đang xét là tuyến tính. Và khi đó, từ những điều đã trình bày ở mục 4.2, có thể tìm nghiệm y(t), kết quả của việc tác dụng toán tử tuyến tính (4.4.5) lên hàm x(t), theo công thức (4.2.12) dưới dạng:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (4.4.6)$$

nếu như đã biết hàm trọng lượng g(t–τ) là nghiệm của phương trình vi phân (4.4.1), trong đó hàm delta δ(t–τ) đóng vai trò là x(t).

Như vậy, để tìm nghiệm y(t) của phương trình (4.4.1) cần tìm nghiệm của phương trình

$$g(t-\tau) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} \delta(t-\tau) \quad (4.4.7)$$

đối với mọi giá trị t khi τ cố định và đặt hàm g(t–τ) tìm được vào (4.4.6).

Thuận tiện hơn sẽ tìm nghiệm y(t) dưới dạng phổ khi sử dụng công thức liên hệ (4.2.21) giữa mật độ phổ của các hàm x(t) và y(t). Khi đó cần phải tìm hàm truyền L(ω) của toán tử $\frac{B_m(p)}{A_n(p)}$.

Để tìm hàm truyền L(ω) ta xem x(t) là dao động điều hoà

$$x(t) = e^{i\omega t} \quad (4.4.8)$$

Khi đó, theo (4.4.6), nghiệm y(t) được viết dưới dạng

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau =$$

$$= e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{i\omega t} L(\omega) \quad (4.4.9)$$

Ta thay (4.4.8) và (4.4.9) vào (4.4.1). Vì

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{i\omega t} = (i\omega)^k e^{i\omega t} \quad (4.4.10)$$

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[e^{i\omega t} L(\omega) \right] = (i\omega)^k L(\omega) e^{i\omega t} \quad (4.4.11)$$

nên ta có

$$[a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + a_1(i\omega) + a_0] L(\omega) e^{i\omega t} =$$

$$=[b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(i\omega) + b_0]e^{i\omega t} \quad (4.4.12)$$

Từ đó ta nhận được biểu thức đối với hàm truyền

$$L(\omega) = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(i\omega) + b_0}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(i\omega) + a_0} \quad (4.4.13)$$

Khi sử dụng ký hiệu (4.4.4) có thể viết

$$L(\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)} \quad (4.4.14)$$

Như vậy, để xác định hàm truyền, thay cho toán tử vi phân p, cần phải đặt vào toán tử phương trình vi phân đại lượng iω.

Khi thay biểu thức tìm được của hàm truyền vào (4.2.21), ta nhận được biểu thức đối với mật độ phổ $S_y(\omega)$ của nghiệm phương trình vi phân

$$S_y(\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)} S_x(\omega) \quad (4.4.15)$$

trong đó $S_x(\omega)$ là mật độ phổ của hàm x(t).

Bây giờ ta xét trường hợp khi mà x(t) trong phương trình (4.1.4) là quá trình ngẫu nhiên dừng X(t) có kỳ vọng toán học bằng 0 và hàm tương quan là $R_x(\tau)$. Ta sẽ xác định hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên Y(t) là nghiệm của phương trình (4.4.1).

Vì Y(t) là kết quả tác dụng toán tử tuyến tính $\dfrac{B_m(p)}{A_n(p)}$ lên hàm ngẫu nhiên dừng X(t), nên, từ những điều đã trình bày trong mục 4.3, Y(t) cũng là hàm ngẫu nhiên dừng. Khi đó giữa mật độ phổ của các hàm ngẫu nhiên X(t) và Y(t) xảy ra hệ thức (4.3.10).

Đặt giá trị tìm được của hàm truyền của phương trình vi phân (4.4.14) vào (4.3.10) ta được

$$S_y(\omega) = \left|\frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}\right|^2 S_x(\omega). \quad (4.4.16)$$

Khi biết mật độ phổ $S_y(\omega)$, ta có thể tìm được hàm tương quan $R_y(\tau)$ của hàm ngẫu nhiên Y(t) theo công thức

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.4.17)$$

Các ví dụ

1. Với những giả thiết nhất định, chuyển động một chiều (hình chiếu trên trục cho trước) trong mặt phẳng ngang của phần tử trong dòng khí có thể được mô tả bởi phương trình

$$m\frac{dv(t)}{dt} + bv(t) = F(t) \quad (4.4.18)$$

ở đây v(t) là hình chiếu của xung vận tốc phần tử trên trục đã cho, còn F(t) là hình chiếu của lực tác động lên phần tử do ảnh hưởng của rối khí quyển, thành phần bv(t) đặc trưng cho lực ma sát.

Nếu chia (4.4.18) cho khối lượng phần tử m, thì phương trình được viết dưới dạng

$$\frac{dv(t)}{dt}+\alpha v(t)=F_1(t) \tag{4.4.19}$$

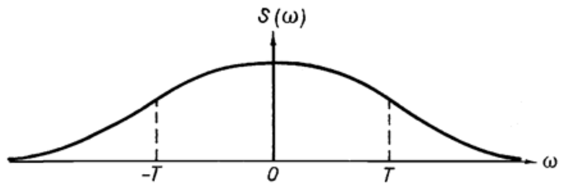
Phương trình (4.4.19) là phương trình Lanjeven.

Ta sẽ cho rằng lực $F_1(t)$ là hàm ngẫu nhiên dừng của thời gian mà mật độ phổ của nó $S_f(\omega)$ có thể nhận giá trị hằng số, tức là "ồn trắng".

$$S_f(\omega)=c=const \tag{4.4.20}$$

Như ta đã chỉ ra (xem mục 3.2, ví dụ 1), mật độ phổ không thể hằng số trên toàn dải tần số, vì nếu vậy phương sai của quá trình ngẫu nhiên trở nên vô hạn. Giả thiết rằng mật độ phổ có dạng đường cong (hình 4.2) ít thay đổi trong một khoảng [–T, T] nào đó và một cách gần đúng có thể xem nó là hằng số.

Khi tần số ω tiến đến vô hạn, S(ω) tiến đến 0 rất nhanh, đảm bảo tính hội tụ của tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega$.



Hình 4.2

Ta tìm hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên V(t) là nghiệm của phương trình (4.4.9) ở chế độ ổn định.

Muốn vậy, ta xác định hàm truyền của phương trình (4.4.9) khi viết nó dưới dạng ký hiệu

$$V(t)=\frac{1}{p+\alpha}F_1(t). \tag{4.4.21}$$

Đối với phương trình (4.4.21) hàm truyền được viết dưới dạng

$$L(\omega)=\frac{1}{i\omega+\alpha}. \tag{4.4.22}$$

Từ đó ta nhận được mật độ phổ $S_v(\omega)$ của nghiệm V(t) dưới dạng

$$S_v(\omega)=\left|\frac{1}{i\omega+\alpha}\right|^2 S_f(\omega) \tag{4.4.23}$$

hay

$$S_v(\omega)=\frac{c}{\omega^2+\alpha^2}. \tag{4.4.24}$$

Từ công thức (4.4.24) thấy rằng, $S_v(\omega)$ giảm khi ω tăng, và dải tần số lớn, ở đó trị số $S_f(\omega)$ khác giá trị c mà ta đã thừa nhận, không quan trọng.

Khi biết mật độ phổ $S_v(\omega)$ ta có thể tìm được hàm tương quan $R_v(\tau)$.

Trong ví dụ 1 mục 3.2 ta đã thấy rằng mật độ phổ

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2\alpha}{\pi\left(\omega^2 + \alpha^2\right)}$$

tương ứng với hàm tương quan

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

So sánh với (4.4.24) ta thấy $\frac{\sigma^2\alpha}{\pi} = c$, từ đó $\sigma^2 = \frac{\pi c}{\alpha}$, ta nhận được hàm tương quan của nghiệm phương trình (4.4.19) dưới dạng

$$R_v(\tau) = \frac{\pi c}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \qquad (4.4.25)$$

Trong mục 2.9 ta đã chứng tỏ rằng, quá trình ngẫu nhiên có hàm tương quan dạng (4.4.25) là không khả vi. Cho nên cần làm chính xác ý nghĩa của phương trình (4.4.19). Tính không khả vi của quá trình V(t) là hệ quả của việc do ta nhận F(t) là "ồn trắng" có mật độ phổ không đổi.

Trong trường hợp này, cách giải chính xác hơn là xét nghiệm phương trình (4.4.19) như giới hạn của một dãy nghiệm nào đó của phương trình này với vế phải dừng mà mật độ phổ của chúng tiến đến một hằng số.

2. Ta xét nghiệm dừng của phương trình vi phân

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy(t)}{dt} + k^2y(t) = F(t) \qquad (4.4.26)$$

Phương trình dạng (4.4.26) mô tả nhiều quá trình dao động vật lý. Đặc biệt, phương trình (4.4.26) mô tả chuyển động Brown của các phần tử. Trong trường hợp này y(t) là toạ độ phần tử tại thời điểm t; $2\alpha\frac{dy}{dt}$ là ma sát nhớt, gây nên sự cản trở chuyển động của phần tử, $\alpha > 0$; k^2y – lực đàn hồi; $F(t)$ – lực xáo trộn được xác định bởi sự dao động của số lượng các va chạm phân tử.

Giả sử rằng, lực F(t) là quá trình ngẫu nhiên dừng có mật độ phổ không đổi $S_f(\omega) = c$. Theo (4.4.14), hàm truyền của phương trình (4.4.26) có dạng

$$L(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + 2\alpha i\omega + k^2} = \frac{1}{k^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \qquad (4.4.27)$$

Theo (4.4.16), mật độ phổ của quá trình ngẫu nhiên dừng Y(t), nghiệm của phương trình (4.4.26), được xác định dưới dạng

$$S_y(\omega) = \left|\frac{1}{k^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega}\right|^2 c = \frac{c}{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + (2i\alpha\omega)^2} \qquad (4.4.28)$$

Bằng cách ký hiệu

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2, c = \frac{2\alpha\sigma^2k^2}{\pi} \qquad (4.4.29)$$

có thể viết biểu thức (4.4.28) dưới dạng

$$S_y(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\left(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \qquad (4.4.30)$$

Mật độ phổ này (như đã chỉ ra trong mục 3.2, ví dụ 5) tương ứng với hàm tương quan

$$R_y(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right). \qquad (4.4.31)$$

Từ (4.4.29), biểu diễn β và σ qua các hệ số của phương trình

$$\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \qquad \sigma^2 = \frac{\pi c}{2\alpha k^2}, \qquad (4.4.32)$$

ta viết hàm tương quan (4.4.31) dưới dạng

$$R_y(\tau) = \frac{\pi c}{2\alpha k^2}\, e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\sqrt{k^2-\alpha^2}\,\tau + \frac{\alpha}{\sqrt{k^2-\alpha^2}}\sin\sqrt{k^2-\alpha^2}\,|\tau|\right) \qquad (4.4.33)$$

Quá trình ngẫu nhiên Y(t) có hàm tương quan dạng (4.4.31) là khả vi, tuy nhiên có thể chỉ ra rằng nó không tồn tại đạo hàm bậc hai. Vì vậy, cần xét nghiệm của phương trình (4.4.26) theo nghĩa như đã chỉ ra đối với phương trình (4.4.19).

CHƯƠNG 5: NỘI NGOẠI SUY VÀ LÀM TRƠN HÀM NGẪU NHIÊN

5.1. Đặt bài toán

Ta hãy xét một vài bài toán thường gặp trong khí tượng thuỷ văn.

1. Ngoại suy

Giả sử có một thể hiện x(t) của quá trình ngẫu nhiên X(t) trên khoảng biến đổi nào đó của tham số [a,t] xảy ra trước thời điểm t. Giả thiết rằng các đặc trưng của quá trình ngẫu nhiên X(t) – kỳ vọng toán học và hàm tương quan của nó, đã biết. Yêu cầu dự báo giá trị x(t+T) của thể hiện này tại thời điểm tiếp theo t+T nào đó, T>0. Người ta gọi đại lượng T là lượng ngắm đón.

Bài toán này được gọi là bài toán ngoại suy quá trình ngẫu nhiên. Do giả thiết rằng thể hiện x(t) được xác định chính xác, không có sai số đo, nên bài toán này được gọi là bài toán ngoại suy thuần tuý.

2. Làm trơn

Giả sử thể hiện x(t) của quá trình ngẫu nhiên X(t) được xác định nhờ kết quả thực nghiệm, trên khoảng biến đổi [a,t] của tham số t, với sai số y(t) là thể hiện của quá trình ngẫu nhiên Y(t), tức là do thực nghiệm ta nhận được thể hiện z(t) = x(t) + y(t), với x(t) là giá trị thực của thể hiện, y(t) là sai số đo. Giả thiết rằng đã biết các đặc trưng của các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t), như kỳ vọng toán học, hàm tương quan và hàm tương quan quan hệ. Yêu cầu xác định giá trị thực của thể hiện x(t) tại thời điểm t nào đó, có nghĩa là tách nó ra khỏi sai số đo.

Bài toán này gọi là bài toán làm trơn (lọc) quá trình ngẫu nhiên. Nó xuất hiện, chẳng hạn, khi tách các tín hiệu hữu ích trên nền nhiễu trong kỹ thuật vô tuyến, trong đó người ta gọi giá trị thực là các tín hiệu hữu ích, còn sai số làm méo tín hiệu được gọi là nhiễu hay ồn.

Trong khí tượng thuỷ văn bài toán này nảy sinh về cơ bản giống như bài toán loại bỏ sai số đo khi chỉnh lý các số liệu thực nghiệm. Khi đó có sự khác nhau cơ bản giữa bài toán làm trơn số liệu thực nghiệm và bài toán tách tín hiệu trong kỹ thuật vô tuyến. Trong kỹ thuật vô tuyến, và nói chung trong lý thuyết hệ điều khiển tự động, người ta giả thiết rằng, nếu tín hiệu đi qua một thiết bị được sử dụng để làm trơn tín hiệu thì ở thời điểm t nào đó chỉ có những giá trị của tín hiệu trước thời điểm này đi qua, mà không thể tính đến những giá trị về sau của nó. Vấn đề ở chỗ cái gọi là nguyên lý "nhân quả" về mặt vật lý của hệ. Khi đó, để nhận được giá trị x(t) phải tiến hành làm trơn thể hiện z(t) trên khoảng [a,t] nào đó xảy ra trước thời điểm này.

Khi làm trơn các số liệu thực nghiệm bằng cách tiến hành tính toán thuần tuý, không sử dụng các thiết bị vật lý, chúng ta sẽ không bị phụ thuộc vào các điều kiện này và có thể sử dụng tất cả các giá trị của thể hiện z(t) đã có để làm trơn, tức là giá trị cần tìm x(t) tại thời điểm t có thể được xác định bằng cách làm trơn các giá trị của thể hiện z(t) trên toàn đoạn [a,b].

3. Ngoại suy có làm trơn

Bài toán ngoại suy gắn liền chặt chẽ với việc làm trơn, vì trên thực tế ta luôn luôn nhận được thể hiện của quá trình ngẫu nhiên mà ta quan tâm có chứa cả sai số đo trong đó. Khi đó bài toán ngoại suy quá trình ngẫu nhiên là ở chỗ, với thể hiện đã có trên đoạn [a,t]

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

phải dự báo được giá trị của thể hiện x(t) tại thời điểm t+T, T>0. Bài toán này được gọi là bài toán ngoại suy có làm trơn. Khi T<0 thì bài toán gọi là nội suy có làm trơn.

Trên thực tế, bài toán nội suy thường xuất hiện trong các trường hợp do thực nghiệm giá trị của thể hiện z(t) của quá trình ngẫu nhiên được cho tại chuỗi những giá trị rời rạc của đối số t_1, t_2,..., t_n trong khoảng [a,b] nào đó, và yêu cầu xác định giá trị của thể hiện x(t) tại các thời điểm trong khoảng. Khi không có sai số đo y(t), nó được gọi là bài toán nội suy thuần tuý, khi có sai số đo – bài toán nội suy có làm trơn.

Khi nội suy các số liệu thực nghiệm bằng cách tiến hành tính toán thuần tuý, ta cũng có thể sử dụng tất cả các giá trị đã cho của thể hiện z(t), cả trước và sau thời điểm t.

Có thể xét các bài toán nội, ngoại suy và làm trơn như một bài toán chung xác định giá trị thực của thể hiện x(t) tại giá trị tham số t_o nào đó theo các giá trị đã biết của thể hiện

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

trên khoảng [a,b] nào đó.

Phát biểu toán học của bài toán ngoại suy (nội suy) và làm trơn như sau. Cho biết thể hiện

$$z(t) = x(t) + y(t) \tag{5.1.1}$$

trên khoảng biến đổi của tham số [a,b] nào đó, x(t) và y(t) là thể hiện của các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t) có các kỳ vọng toán học, hàm tương quan, hàm tương quan quan hệ cho trước. Ta sẽ cho rằng, kỳ vọng toán học $m_x(t)$ và $m_y(t)$ bằng 0. (Trong trường hợp ngược lại ta sẽ xét các quá trình ngẫu nhiên qui tâm tương ứng).

Yêu cầu xác định giá trị $x(t_0)$ cuả thể hiện x(t) tại thời điểm t_0. Đối với trường hợp ngoại suy $t_0 = b + T$, với $T > 0$.

Tương tự, $t_0 = b$ cho trường hợp làm trơn.

Vì ta đang xét hàm ngẫu nhiên nên cái mà ta quan tâm là tìm phương pháp giải bài toán sao cho nhận được kết quả tốt nhất từ tập hợp tất cả các thể hiện theo nghĩa nào đó, tức là tìm một toán tử sao cho khi tác dụng lên tập các thể hiện z(t), sẽ cho giá trị tốt nhất của thể hiện $x(t_0)$, theo nghĩa nào đó.

Nếu ký hiệu toán tử cần tìm là L, ta có thể viết

$$X(t_0) = L\{Z(t)\} \tag{5.1.2}$$

hay

$$X(t_0) = L\{X(t) + Y(t)\} \tag{5.1.3}$$

Trước hết cần xác định tiêu chuẩn chất lượng của nghiệm bài toán đặt ra là gì. Trong khuôn khổ lý thuyết xác suất chỉ có thể đánh giá chất lượng của toán tử trên phương diện thống kê – trung bình theo toàn bộ tập thể hiện có thể của hàm ngẫu nhiên.

Ký hiệu δ là hiệu giữa giá trị thực $X(t_0)$ và giá trị nhận được theo công thức (5.1.2),

$$\delta = X(t_0) - L\{Z(t)\} \tag{5.1.4}$$

Có thể gọi toán tử L là tốt nhất nếu nó làm cho giá trị trung bình của một hàm được chọn nào đó của hiệu δ trở nên cực tiểu, ví dụ như kỳ vọng toán học của modul hiệu.

Thuận tiện hơn, từ quan điểm toán học, tiêu chuẩn chất lượng là làm cực tiểu kỳ vọng toán học của bình phương hiệu

$$M[\delta^2] = M\{[X(t_0) - L\{Z(t)\}]^2\} \tag{5.1.5}$$

Ta sẽ gọi toán tử L là tối ưu nếu nó làm cho biểu thức (5.1.5) trở thành cực tiểu, và công thức (5.1.2) tương ứng với nó là công thức ngoại suy (nội suy) hoặc làm trơn tối ưu.

Trên thực tế hiện nay, ta thừa nhận lời giải của bài toán đã nêu khi có những giới hạn sau mà chúng ta sẽ còn tiếp tục xét sau này:

1) Toán tử L là tuyến tính và dừng, tức không phụ thuộc vào đối số t;

2) Các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t) là dừng và liên hệ dừng;

Với các giả thiết đã nêu, bài toán đang xét được gọi là bài toán nội, ngoại suy và làm trơn tuyến tính tối ưu quá trình ngẫu nhiên dừng. Lần đầu tiên bài toán này được A. N. Komogorov [10] đề xuất và giải quyết. Tư tưởng đó được phát triển tiếp trong công trình của N. Viner [32].

Phương pháp giải bài toán đã nêu phụ thuộc vào khoảng mà trên đó thể hiện z(t) được cho là vô hạn hay hữu hạn.

Ta sẽ xét từng trường hợp riêng biệt. Trong đó, đối với trường hợp khoảng hữu hạn, ta sẽ xem rằng thể hiện được cho tại một số hữu hạn các giá trị rời rạc của tham số t, điều mà thường xuyên xảy ra trong thực tế đo đạc khí tượng thuỷ văn.

5.2. Nội, ngoại suy tuyến tính tối ưu và làm trơn hàm ngẫu nhiên cho trên một số điểm hữu hạn

Ta bắt đầu xét từ trường hợp khi đã biết chỉ một số hữu hạn giá trị của thể hiện cuả quá trình ngẫu nhiên dừng, tức là biết các giá trị của thể hiện z(t) tại các thời điểm

$$t_1, t_2,..., t_n \ (t_1<t_2<...<t_n).$$

Nếu xem các giá trị này là kết quả đo đạc có chứa sai số, ta có thể viết

$$z(t_k) = x(t_k) + y(t_k), \ k = 1, 2, ..., n, \quad (5.2.1)$$

ở đây $x(t_k)$ là giá trị thực của thể hiện tại thời điểm t_k, còn $y(t_k)$ là sai số đo. Ta sẽ xem các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t) là dừng và liên hệ dừng, còn các đặc trưng của chúng, như kỳ vọng toán học, hàm tương quan và hàm tương quan quan hệ, đã biết.

Không làm mất tính tổng quát, có thể cho kỳ vọng toán học bằng 0 khi chuyển về xét các hàm qui tâm tương ứng.

Có thể viết giá trị cần tìm $x(t_0)$, kết quả của việc tác dụng toán tử tuyến tính lên tất cả các giá trị $z(t_k)$, dưới dạng tổ hợp tuyến tính

$$x(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z(t_k) \quad (5.2.2)$$

trong đó α_k là các hệ số hằng số.

Bài toán dẫn đến việc tìm giá trị của các hệ số $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ sao cho đại lượng

$$\sigma_n^2(\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n) = M\left\{\left[X(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Z(t_k)\right]^2\right\} \quad (5.2.3)$$

nhận giá trị nhỏ nhất.

Như đã biết, điều kiện cần để cực tiểu hàm n biến là các đạo hàm riêng theo từng biến phải bằng không.

Từ đó suy ra rằng $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ phải là nghiệm của hệ phương trình

$$\frac{\partial \sigma_n^2(\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n)}{\partial \alpha_k} = 0, \ k = 1,2,..., n. \quad (5.2.4)$$

Ta biến đổi biểu thức (5.2.3)

$$\sigma_n^2(\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n) = M\left\{\left[X(t_0) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [X(t_k) + Y(t_k)]\right]^2\right\} =$$

$$= M[X^2(t_0)] - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \{M[X(t_o)X(t_k)] + M[X(t_o)Y(t_k)]\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k \alpha_j \{M[X(t_k)X(t_j)] + M[X(t_k)Y(t_j)] + M[Y(t_k)X(t_j)] + M[Y(t_k)Y(t_j)]\} =$$

$$= R_x(0) - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k [R_x(t_o - t_k) + R_{xy}(t_o - t_k)] + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k \alpha_j [R_x(t_j - t_k) + R_y(t_j - t_k) +$$

$$+ R_{xy}(t_j - t_k) + R_{yx}(t_j - t_k)] \quad (5.2.5)$$

Lấy đạo hàm riêng vế phải (5.2.5) theo α_k và đồng nhất bằng 0, ta nhận được hệ phương trình:

$$-[R_x(t_o - t_k) + R_{xy}(t_o - t_k)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [R_x(t_j - t_k) + R_y(t_j - t_k) + R_{xy}(t_j - t_k) + R_{yx}(t_j - t_k)] = 0, \quad (5.2.6)$$

$$k = 1,2,...,n.$$

Đổi dấu, cuối cùng ta nhận được hệ để xác định các hệ số α_k

$$R_x(t_o - t_k) + R_{xy}(t_o - t_k) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[R_x(t_j - t_k) + R_y(t_j - t_k) + R_{xy}(t_j - t_k) + R_{yx}(t_j - t_k)\right] = 0, \qquad (5.2.7)$$

$$k = 1,2,...,n.$$

Điều kiện (5.2.7) là điều kiện cần để hàm $\sigma_n^2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ đạt cực trị. Có thể chứng minh rằng với các giá trị α_1, α_2,...,α_n là nghiệm của hệ (5.2.7), hàm (5.2.3) thật sự đạt giá trị nhỏ nhất, có nghĩa là điều kiện (5.2.7) cũng là điều kiện đủ.

Như vậy, về nguyên tắc bài toán nội, ngoại suy tuyến tính hoặc làm trơn trong trường hợp đang xét được đưa về việc giải hệ phương trình (5.2.7) để tìm các giá trị α_1, α_2,...,α_n và đặt vào công thức (5.2.2).

Để tính được sai số bình phương trung bình $\sigma_n^2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ của phép nội, ngoại suy tối ưu hay làm trơn, khi đã tìm được các giá trị α_1, α_2,..., α_n, ta nhân từng hạng tử của (5.2.7) với α_k và cộng các kết quả lại, ta được

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k \alpha_j \left[R_x(t_j - t_k) + R_y(t_j - t_k) + R_{xy}(t_j - t_k) + R_{yx}(t_j - t_k)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left[R_x(t_0 - t_k) + R_{xy}(t_0 - t_k)\right] \qquad (5.2.8)$$

Thế vào (5.2.5) ta nhận được

$$\sigma_n^2(\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n) = R_x(0) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left[R_x(t_o - t_k) + R_{xy}(t_o - t_k)\right] \qquad (5.2.9)$$

Khi số giá trị quan trắc của thể hiện z(t) lớn, tức là khi số điểm n lớn, bài toán dẫn đến việc giải hệ (5.2.7) với số phương trình lớn, điều đó trở nên rất khó khăn thậm chí ngay cả khi sử dụng máy tính điện tử. Trong trường hợp này, thông thường để thuận tiện hơn, một cách gần đúng xem rằng thể hiện z(t) được cho tại mọi giá trị của đối số t xảy ra trước thời điểm t_0 và sử dụng phương pháp được trình bày trong mục 5.3.

Ta xét các trường hợp riêng của bài toán tổng quát đã nêu.

1. Không có sai số đo. Nội ngoại suy thuần tuý.

Trong trường hợp riêng, khi $z(t_k) = x(t_k)$ là các giá trị chính xác của thể hiện x(t) được xác định không chứa sai số, tức là khi $y(t_k) \equiv 0$, và do đó

$$R_y(\tau) \equiv R_{xy}(\tau) \equiv 0 \qquad (5.2.10)$$

hệ (5.2.7) được viết dưới dạng

$$R_x(t_0 - t_k) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j R_x(t_j - t_k) = 0, \qquad k = 1,2,...n \qquad (5.2.11)$$

Vì hàm tương quan là xác định dương nên định thức của hệ (5.2.11) khác không, và do đó hệ luôn luôn có nghiệm. Sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy tối ưu trong trường hợp này được xác định bằng cách đặt các giá trị α_1, α_2,...,α_n tìm được vào công thức

$$\sigma_n^2(\alpha_1,\alpha_2,....\alpha_n) = R_x(0) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k R_x(t_0 - t_k), \tag{5.2.12}$$

Công thức này nhận được từ (5.2.9) khi cho $R_{xy}(\tau) \equiv 0$.

Sử dụng (5.2.8) và điều kiện (5.2.10), ta có thể nhận được biểu thức sai số bình phương trung bình dưới dạng khác

$$\sigma_n^2(\alpha_1,\alpha_2,....\alpha_n) = R_x(0) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j R_x(t_j - t_k). \tag{5.2.13}$$

Vì hàm tương quan $R_x(\tau)$ là xác định dương, nên dạng toàn phương trong biểu thức (5.2.13) không âm

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j R_x(t_j - t_k) \ge 0 \tag{5.2.14}$$

Do đó, sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy tối ưu không vượt quá phương sai của hàm ngẫu nhiên X(t).

Để làm thước đo sai số nội, ngoại suy, thuận tiện hơn là sử dụng đại lượng vô thứ nguyên ε_n, bằng tỷ số của sai số trung bình bình phương σ_n^2 và phương sai của hàm ngẫu nhiên $D_x = R_x(0)$,

$$\varepsilon_n = \frac{\sigma_n^2}{D_x} = 1 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k r_x(t_0 - t_k), \tag{5.2.15}$$

trong đó $r_x(\tau)$ là hàm tương quan chuẩn hoá của hàm ngẫu nhiên X(t). Các hệ số α_k nhận được theo phương pháp nội, ngoại suy tối ưu là trọng số mà các giá trị $x(t_k)$ trong tổng (5.2.2) được tính đến theo chúng.

Các trọng số này phụ thuộc vào mức độ quan hệ giữa các giá trị $x(t_k)$ với nhau và mức độ quan hệ của chúng với giá trị được xấp xỉ $x(t_0)$.

Ta xét một vài trường hợp giới hạn.

a) Giả sử lát cắt $X(t_0)$ của quá trình ngẫu nhiên, trên thực tế, không liên hệ với các lát cắt của nó tại các thời điểm t_k, tức là có thể xem

$$R_x(t_0 - t_k) = 0. \tag{5.2.16}$$

Khi ngoại suy, điều đó sẽ xảy ra trong trường hợp nếu lượng ngắm đón T được chọn lớn đến mức sao cho lát cắt của quá trình ngẫu nhiên tại thời điểm $t_0=t_n+T$ không liên hệ với các lát cắt của nó tại các thời điểm t_k. Trong trường hợp này hệ (5.2.11) được viết dưới dạng

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j R_x(t_j - t_k) = 0,\ \ k = 1,2,....n. \tag{5.2.17}$$

Vì định thức của hệ thuần nhất này khác 0, nên nó chỉ có nghiệm bằng 0 là $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, tức trong trường hợp này phương pháp ngoại suy tối ưu cho giá trị bằng kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên $m_x=0$. Khi đó, theo (5.2.13), sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy σ_n^2 bằng phương sai hàm ngẫu nhiên.

b) Giả sử lát cắt của hàm ngẫu nhiên tại các thời điểm t_k và t_j không quan hệ với nhau, nhưng có quan hệ với lát cắt tại thời điểm t_0.

Khi nội suy, trường hợp này có thể tương ứng với trường hợp các lát cắt liền kề nhau $X(t_{k-1})$ và $X(t_k)$ của quá trình ngẫu nhiên khi hiệu $t_k - t_{k-1}$ lớn, trên thực tế không quan hệ với nhau, nhưng có quan hệ với giá trị nội suy $X(t_0)$, ở đây $t_{k-1}<t_0<t_k$. Khi đó hệ (5.2.11) được viết dưới dạng

$$\alpha_k R_k(0) = R_x(t_0 - t_k), \qquad k = 1,2,....n. \tag{5.2.18}$$

Từ đó

$$\alpha_k = \frac{R_x(t_0 - t_k)}{R_x(0)} = r_x(t_0 - t_k), \tag{5.2.19}$$

tức là các trọng số α_k bằng hệ số tương quan giữa các lát cắt của hàm ngẫu nhiên tại các thời điểm t_o và t_k. Trọng số của giá trị $x(t_k)$ càng lớn thì $x(t_k)$ càng liên hệ chặt chẽ với giá trị $x(t_o)$.

2. Có sai số đo, nhưng sai số không tương quan với nhau và không quan hệ với giá trị thực của đại lượng được đo.

Ta xét một trường hợp quan trọng trong thực tế, khi sai số đo Y(t) tại các giá trị khác nhau của đối số t không tương quan với nhau, tức $R_y(\tau)\equiv 0$ khi $\tau\neq 0$, và các sai số này không tương quan với các giá trị thực của đại lượng được đo, tức hàm tương quan quan hệ $R_{xy}(\tau) \equiv 0$ với mọi τ. Trong trường hợp này công thức (5.2.5) đối với sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy σ_n^2 được viết dưới dạng

$$\sigma_n^2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3...\alpha_n) = R_x(0) - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k R_x(t_0 - t_k) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j R_x(t_j - t_k) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 R_y(0). \tag{5.2.20}$$

Khi đó hệ (5.2.7) để xác định các hệ số α_k có dạng

$$R_x(t_0 - t_k) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j R_x(t_j - t_k) - \alpha_k R_y(0) = 0, \ \text{k=1,2,...,n} \tag{5.2.21}$$

Nhân các hạng tử của (5.1.21) với α_k và cộng các kết quả lại, ta được

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k R_x(t_0 - t_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j R_x(t_j - t_k) + R_y(0)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2. \tag{5.2.22}$$

Thế (5.2.22) vào (5.2.20), ta nhận được công thức đối với sai số bình phương trung bình của phép nội, ngoại suy tối ưu

$$\sigma_n^2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n) = R_x(0) - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k R_x(t_0 - t_k). \tag{5.2.23}$$

hay

$$\sigma_n^2(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n) = R_x(0) - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j R_x(t_j - t_k) - R_y(0)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2. \tag{5.2.24}$$

Công thức (5.2.23) trùng với dạng công thức (5.2.12) cho trường hợp không có sai số đo. Nó không chỉ rõ ảnh hưởng của sai số đo đến đại lượng sai số σ_n^2, tuy nhiên ảnh hưởng này là có, vì các hệ số α_k xác định từ hệ (5.2.21) phụ thuộc vào phương sai của sai số đo $D_y=R_y(0)$.

Trong công thức (5.2.24) ảnh hưởng của sai số đo được thể hiện qua cả ảnh hưởng của nó đến các hệ số α_k cũng như biểu hiện một cách trực tiếp qua các hạng tử cuối cùng.

Có thể chứng minh rằng, sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy σ_n^2 tăng lên khi phương sai sai số D_y tăng, còn các trọng số α_k thay đổi sao cho tổng bình phương của chúng giảm, tức là sai số đo sẽ làm giảm độ chính xác của phép nội, ngoại suy tối ưu.

Tuy nhiên khi nội, ngoại suy tối ưu có làm trơn, tức là khi xác định các trọng số α_k có tính đến sai số đo theo công thức (5.2.21), đại lượng sai số σ_n^2 nhận được sẽ bé hơn so với khi ta tiến hành nội ngoại suy thuần tuý theo công thức (5.2.11) và bỏ qua việc tính đến sai số đo.

5.3. Ngoại suy tuyến tính tối ưu và làm trơn quá trình ngẫu nhiên cho trên khoảng vô hạn

Giả sử các giá trị thể hiện z(t) của quá trình ngẫu nhiên X(t), được xác định với sai số ngẫu nhiên y(t) cũng là thể hiện của quá trình ngẫu nhiên Y(t), đã được biết trước trên khoảng vô hạn xảy ra trước giá trị đã cho của đối số, tức là thể hiện z(t) = x(t) + y(t) cho trước trên khoảng (–∞, t).

Trên thực tế điều này có nghĩa là thể hiện z(t) được cho trên một khoảng biến đổi đủ lớn của đối số, lớn hơn khoảng mà trên đó mối liên hệ tương quan giữa các lát cắt của quá trình ngẫu nhiên đã hoàn toàn lụi tắt.

Giống như trước đây, ta xem các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t) là dừng và liên hệ dừng có kỳ vọng toán học bằng 0, và cho trước các hàm tương quan $R_x(\tau)$, $R_y(\tau)$, các hàm tương quan quan hệ $R_{xy}(\tau)$, $R_{yx}(\tau)$.

Yêu cầu xác định giá trị x(t+T) sao cho kỳ vọng toán học của bình phương hiệu σ^2 giữa các giá trị thực và giá trị dự báo trở nên cực tiểu.

Tương ứng với những điều đã trình bày trong mục 4.2, có thể biểu diễn giá trị cần tìm x(t+T) là kết quả tác dụng toán tử tuyến tính lên hàm z(t) (5.1.2), dưới dạng

$$x(t+T)=\int_0^\infty g(\tau)z(t-\tau)d\tau=\int_0^\infty g(\tau)[x(t-\tau)+y(t-\tau)]d\tau \qquad (5.3.1)$$

Bài toán dẫn đến việc lựa chọn hàm trọng lượng g(t) để cho đại lượng

$$\sigma^2=M\left\{\left[X(t+T)-\int_0^\infty g(\tau)Z(t-\tau)d\tau\right]^2\right\} \qquad (5.3.2)$$

đạt cực tiểu.

Trong đó, hàm trọng lượng phụ thuộc lượng ngắm đón T.

Ta biến đổi (5.3.2)

$$\sigma^2=M\left[X^2(t+T)\right]-2\int_0^\infty g(\tau)M\left[X(t+T)Z(t-\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^\infty g(\tau_1)d\tau_1\int_0^\infty g(\tau_2)M\left[Z(t-\tau_1)Z(t-\tau_2)\right]d\tau_2=$$

$$= R_x(0) - 2\int_0^\infty g(\tau) R_{xz}(T+\tau) d\tau + \int_0^\infty g(\tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty g(\tau_2) R_z(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 \quad (5.3.3)$$

Trong đó

$$R_{xz}(\tau) = M[X(t+T)Z(t)] = M\{X(T+\tau)[X(t)+Y(t)]\} =$$
$$= R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) \quad (5.3.4)$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{Z}}(\tau) = \mathrm{M}[\mathrm{Z}(\mathrm{t}+\tau)\mathrm{Z}(\mathrm{t})] =$$
$$= M\{[X(t+\tau) + Y(t+\tau)][X(t)+Y(t)]\} =$$
$$= R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau) \quad (5.3.5)$$

Ta hãy xác lập điều kiện cần và đủ mà hàm trọng lượng g(t) phải thoả mãn để cho σ^2 đạt cực tiểu.

Giả sử hàm g(t) làm cho σ^2 đạt cực tiểu, khi đó nếu trong (5.3.3) thay cho g(t) là hàm

$$g_1(t) = g(t) + a\alpha(t) \quad (5.3.6)$$

trong đó a là một số thực bất kỳ, còn $\alpha(t)$ là một hàm tuỳ ý, thì đại lượng σ^2 chỉ có thể chỉ có thể tăng lên.

Do vậy, khi đó σ^2 được xét như là hàm của đối số a, đạt cực tiểu khi a=0, tức đạo hàm của nó theo a phải bằng 0 khi a=0.

Thay (5.3.6) vào (5.3.3) ta được

$$\sigma^2(a) = R_x(0) - 2\int_0^\infty [g(\tau) + a\alpha(\tau)] R_{xz}(T+\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty [g(\tau_1) + a\alpha(\tau_1)][g(\tau_2) + a\alpha(\tau_2)] R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 =$$

$$= R_x(0) - 2\int_0^\infty [g(\tau) + a\alpha(\tau)] R_{xz}(T+\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty [g(\tau_1)g(\tau_2) + a\alpha(\tau_2)g(\tau_1) + a\alpha(\tau_1)g(\tau_2) + a^2\alpha(\tau_1)\alpha(\tau_1)] R_z(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \quad (5.3.7)$$

Khi lấy vi phân dưới dấu tích phân (5.3.7) theo tham số a, ta nhận được

$$\frac{d\sigma^2(a)}{da} = -2\int_0^\infty \alpha(\tau) R_{xz}(T+\tau) d\tau + \int_0^\infty \alpha(\tau_2) d\tau_2 \int_0^\infty g(\tau_1) R_z(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^\infty \alpha(\tau_1) d\tau_1 \int_0^\infty g(\tau_2) R_z(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 = 0 \quad (5.3.8)$$

Thay τ_1 bằng τ_2, còn τ_2 bằng τ_1 vào tích phân cuối cùng, do tính chẵn của hàm tương quan nên đẳng thức (5.3.8) được viết dưới dạng

$$-2\int_0^\infty \alpha(\tau) R_{xz}(T+\tau) d\tau + 2\int_0^\infty \alpha(\tau_2) d\tau_2 \int_0^\infty g(\tau_1) R_z(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 = 0 \quad (5.3.9)$$

hay

$$\int_0^\infty \alpha(\tau)\left[R_{xz}(T+\tau)-\int_0^\infty g(\tau)R_z(t-\tau)d\tau\right]dt = 0 \quad (5.3.10)$$

Vì đẳng thức (5.3.10) đúng với mọi hàm α(t), nên đẳng thức sau cần thoả mãn

$$R_{xz}(T+\tau)-\int_0^\infty g(\tau)R_z(t-\tau)d\tau = 0\,, \quad \text{với mọi } t\geq 0 \quad (5.3.11)$$

Như vậy điều kiện (5.3.11) là điều kiện cần để cho σ^2 đạt cực tiểu. Ta chứng minh rằng điều kiện này cũng là đủ. Muốn vậy ta viết (5.3.7) dưới dạng

$$\sigma^2(a) = R_x(0) - 2\int_0^\infty g(\tau)R_{xz}(T-\tau)d\tau + \int_0^\infty\int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)R_z(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+2a\int_0^\infty \alpha(t)\left[-R_{xz}(T+\tau)+\int_0^\infty g(\tau)R_z(t-\tau)d\tau\right]dt + a^2\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha(\tau_1)\alpha(\tau_2)R_z(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2. \quad (5.3.12)$$

Theo (5.3.3), ba hạng tử đầu tiên trong (5.3.12) là giá trị $\sigma^2(0)$, hạng thứ tư sẽ bằng 0 khi điều kiện (5.3.11) được thực hiện, tích phân hai lớp cuối cùng có thể viết dưới dạng

$$a^2\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha(\tau_1)\alpha(\tau_2)R_z(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 = a^2 M\left\{\left[\int_0^\infty \alpha(\tau)Z(t-\tau)d\tau\right]\right\}, \quad (5.3.13)$$

Từ đó thấy rằng, vế phải (5.3.13) là một số không âm, có thể ký hiệu bằng A^2. Do đó, khi điều kiện (5.3.11) được thực hiện, đẳng thức (5.3.12) được viết dưới dạng

$$\sigma^2(a) = \sigma^2(0) + A^2 \quad (5.3.14)$$

tức là kỳ vọng toán học của bình phương sai số σ^2 chỉ có thể tăng lên khi thay hàm trọng lượng g(t), thoả mãn điều kiện (5.3.11), bởi một hàm bất kỳ khác. Do vậy, nếu hàm trọng lượng g(t) thoả mãn điều kiện (5.3.11), thì σ^2 thực sự đạt cực tiểu.

Như vậy, bài toán tìm hàm trọng lượng g(t) đảm bảo σ^2 cực tiểu tương đương với bài toán tìm hàm trọng lượng g(t) là nghiệm của phương trình tích phân (5.3.11). Phương trình tích phân này được gọi là phương trình Winer-Hopf, các tác giả lần đầu tiên khảo sát phương trình dạng này.

Hàm trọng lượng g(t), nghiệm của phương trình Winer–Hopf, được gọi là hàm trọng lượng tối ưu, còn công thức (5.3.1) khi thế vào nó hàm trọng lượng tối ưu g(t) gọi là công thức ngoại suy tối ưu có làm trơn.

Khi T =0 ta nhận được công thức làm trơn tối ưu. Ta sẽ xác định sai số bình phương trung bình σ^2 của phép ngoại suy tối ưu.

Viết (5.3.3) dưới dạng

$$\sigma^2 = R_x(0) - 2\int_0^\infty\left[R_{xz}(T+\tau)-\int_0^\infty g(\tau)R_z(t-\tau)d\tau\right]\times$$

$$\times g(t)dt - \int_0^\infty\int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)R_z(\tau_2-\tau_1)d\tau_1 d\tau_2 \quad (5.3.15)$$

Đối với hàm trọng lượng tối ưu, do (5.3.11), hạng thứ hai triệt tiêu, từ đó

$$\sigma^2 = R_x(0) - \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)R(\tau_2 - \tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \tag{5.3.16}$$

Ta biến đổi tích phân hai lớp trong (5.3.16), muốn vậy ta ký hiệu mật độ phổ của quá trình ngẫu nhiên Z(t) là $S_z(\omega)$, khi đó hàm tương quan $R_z(\tau_2 - \tau_1)$ có thể viết dưới dạng

$$R_z(\tau_2 - \tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau_2 - \tau_1)} S_z(\omega) d\omega \tag{5.3.17}$$

Khi đó

$$\int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)R_z(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau_1)g(\tau_2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau_2 - \tau_1)} S_z(\omega) d\omega d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^\infty e^{-i\omega\tau_1} g(\tau_1)d\tau_1\right]\left[\int_0^\infty e^{i\omega\tau 2} g(\tau_2)d\tau_2\right] S_z(\omega)d\omega. \tag{5.3.18}$$

Theo (4.2.22), tích phân

$$\int_0^\infty g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = L(\omega) \tag{5.3.19}$$

là hàm truyền tương ứng với hàm trọng lượng g(t), ta sẽ gọi nó là hàm truyền tối ưu.

Tương tự, tích phân

$$\int_0^\infty g(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = L^*(\omega) \tag{5.3.20}$$

là liên hợp phức của hàm truyền tối ưu. Từ đó, (5.3.18) được viết dưới dạng

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1)g(\tau_2)R_z(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 S_z(\omega)d\omega. \tag{5.3.21}$$

Thế (5.3.21) vào (5.3.16) ta nhận được công thức đối với sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy tối ưu

$$\sigma^2 = R_x(0) - \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 S_z(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left[S_x(\omega) - |L(\omega)|^2 S_z(\omega)\right]d\omega, \tag{5.3.22}$$

trong đó $S_x(\omega)$ là mật độ phổ quá trình ngẫu nhiên X(t). Theo (5.3.5) và do tính chất tuyến tính của phép biến đổi Fourier, mật độ phổ $S_z(\omega)$ được biểu diễn qua các mật độ phổ $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ của các quá trình ngẫu nhiên X(t), Y(t) và mật độ phổ quan hệ $S_{xy}(\omega)$ của chúng dưới dạng

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_{xy}(\omega) + S_{yx}(\omega) + S_y(\omega) \tag{5.3.23}$$

Tương tự, theo (5.3.4), mật độ phổ quan hệ S_{xz} được biểu diễn dưới dạng

$$S_{xz} = S_x(\omega) + S_{xy}(\omega) \tag{5.3.24}$$

Các phương pháp giải phương trình Winer–Hopf (5.3.11) được trình bày trong các mục 5.4, 5.5, 5.6.

Đơn giản nhất, phương trình này được giải cho trường hợp thể hiện của quá trình ngẫu nhiên z(t) được cho tại mọi giá trị t, tức là cho trên toàn khoảng vô hạn $(-\infty, +\infty)$. Nghiệm phương trình (5.3.11) đối với trường hợp này được dẫn ra trong mục 5.4.

Trường hợp ngoại suy hay làm trơn thể hiện z(t) chỉ với các giá trị của đối số t xảy ra trước thời điểm t dẫn tới phương trình (5.3.11) chỉ được thoả mãn với các giá trị không âm của đối số, khi $t<0$ hàm trọng lượng g(t) nhất thiết phải bằng 0.

Ta xét hai phương pháp giải phương trình (5.3.11) đối với trường hợp thường gặp nhất trong thực tế, khi các hàm tương quan $R_x(\tau)$, $R_y(\tau)$ và hàm tương quan quan hệ $R_{xy}(\tau)$ có mật độ phổ hữu tỷ.

Phương pháp thứ nhất dựa trên cơ sở sử dụng lý thuyết hàm biến phức được trình bày ở mục 5.5. Phương pháp giải thứ hai (xem 5.6) dựa trên cơ sở biểu diễn hàm tương quan có phổ hữu tỷ dưới dạng tổng các số mũ.

Trong trường hợp tổng quát, khi mà mật độ phổ không phải là các hàm hữu tỷ của tần số ω, lời giải sẽ rất phức tạp và ta sẽ không xét nó.

Trên thực tế, người ta xấp xỉ hàm tương quan nhận được theo các số liệu thực nghiệm bằng các biểu thức giải tích. Khi đó, nếu sử dụng chúng vào mục đích ngoại suy tối ưu hay làm trơn thì nên chọn biểu thức xấp xỉ hàm có phổ hữu tỷ hoặc hàm tương quan được xấp xỉ gần đúng với hàm có phổ hữu tỷ, chẳng hạn, biểu diễn chúng dưới dạng tổng các số mũ.

5.4. Làm trơn quá trình ngẫu nhiên cho trên khoảng vô hạn $(-\infty,+\infty)$

Khi làm trơn quá trình ngẫu nhiên mà thể hiện của nó được cho trên khoảng $(-\infty,+\infty)$, thì giá trị làm trơn được tìm dưới dạng

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)z(t-\tau)d\tau . \qquad (5.4.1)$$

Trong trường hợp này, tích phân ở biểu thức dưới dấu tích phân trong (5.3.10) được lấy trên toàn khoảng $(-\infty,+\infty)$, và do đó, phương trình (5.3.11) cần thoả mãn với mọi giá trị của đối số t. Khi đó T=0 và phương trình (5.3.11) được viết dưới dạng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)R_z(t-\tau)d\tau = R_{xz}(t) \qquad (5.4.2)$$

Ta biểu diễn $R_z(t-\tau)$ và $R_{xz}(t)$ qua mật độ phổ $S_z(\omega)$ và mật độ phổ quan hệ $S_{xz}(\omega)$:

$$R_z(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)}S_z(\omega)d\omega \qquad (5.4.3)$$

$$R_{xz}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}S_{xz}(\omega)d\omega \qquad (5.4.4)$$

Thay (5.4.3) và (5.4.4) vào (5.4.2) ta nhận được

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)}S_z(\omega)d\omega\right]d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}S_{xz}(\omega)d\omega \qquad (5.4.5)$$

Khi thay đổi thứ tự tích phân trong tích phân hai lớp ta viết lại (5.4.5) dưới dạng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[S_{xz}(\omega) - S_z(\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} g(\tau)d\tau\right]d\omega = 0 \tag{5.4.6}$$

Để ý đến biểu thức (4.2.20) đối với hàm truyền L(ω), ta được

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\left[S_{xz}(\omega) - S_z(\omega)L(\omega)\right]d\omega = 0 \tag{5.4.7}$$

Điều đó chứng tỏ rằng, phép biến đổi Fourier hàm $S_{xz}(\omega) - S_z(\omega)L(\omega)$ đồng nhất bằng không, do đó đẳng thức sau được thoả mãn

$$S_{xz}(\omega) - S_z(\omega)L(\omega) = 0 \tag{5.4.8}$$

Như vậy, hàm truyền tối ưu L(ω) được xác định dưới dạng

$$L(\omega) = \frac{S_{xz}(\omega)}{S_z(\omega)} \tag{5.4.9}$$

Biểu diễn $S_{xz}(\omega)$ và $S_z(\omega)$ qua mật độ phổ của các quá trình ngẫu nhiên X(t), Y(t) và mật độ phổ quan hệ của chúng theo (5.3.24) và (5.3.23) ta viết (5.4.9) dưới dạng

$$L(\omega) = \frac{S_x(\omega) + S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega) + S_{xy}(\omega) + S_{yx}(\omega) + S_y(\omega)} \tag{5.4.10}$$

Khi biết hàm truyền tối ưu L(ω), theo 4.2.20), ta sẽ tìm được hàm trọng lượng tối ưu g(t) như là biến đổi Fourier của L(ω) chia cho 2π

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} L(\omega)d\omega \tag{5.4.11}$$

Đặt hàm trọng lượng tối ưu tìm được vào (5.4.1) ta nhận được công thức làm trơn tối ưu.

Trên thực tế thường gặp những trường hợp có thể xem sai số đo không tương quan với giá trị thực của đại lượng được đo. Trong trường hợp này $R_{xy}(\tau)=R_{yx}(\tau)\equiv 0$, do đó $S_{xy}(\omega)=S_{yx}(\omega)\equiv 0$, và các công thức (5.3.23), (5.3.24) được viết dưới dạng

$$S_{xy}(\omega) = S_x(\omega) \tag{5.4.12}$$

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega) \tag{5.4.13}$$

Khi đó công thức (5.4.10) để xác định hàm truyền được viết như sau

$$L(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{S_x(\omega) + S_y(\omega)} \tag{5.4.14}$$

Trong trường hợp này, khi thay (5.4.13) và (5.4.14) vào (5.3.22), ta nhận được sai số bình phương trung bình của phép làm trơn tối ưu là

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_x(\omega)S_y(\omega)}{S_x(\omega) + S_y(\omega)} d\omega \tag{5.4.15}$$

Từ đó thấy rằng, chỉ có thể tách hoàn toàn hàm ngẫu nhiên X(t) ra khỏi sai số đo Y(t) khi $S_x(\omega)S_y(\omega)=0$, tức là khi phổ của chúng không bị phủ lên nhau.

5.5. Ngoại suy và làm trơn hàm ngẫu nhiên cho trên khoảng (–∞,t) nhờ sử dụng phương pháp của lý thuyết hàm biến phức

Ta biểu diễn hàm tương quan $R_{xz}(t+\tau)$ và $R_z(t-\tau)$ qua các mật độ phổ tương ứng khi đưa vào phương trình (5.3.11)

$$R_{xz}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t+\tau)} S_{xz}(\omega) d\omega \tag{5.5.1}$$

$$R_z(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} S_z(\omega) d\omega \tag{5.5.2}$$

Ta biểu diễn hàm trọng lượng g(τ) qua hàm truyền L(ω)

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} L(\omega) d\omega. \tag{5.5.3}$$

Đặt (5.5.1), (5.5.2), (5.5.3) vào (5.3.11) ta được

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} L(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-\tau)} S_z(\omega) d\omega \right] d\tau -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t+T)} S_{xz}(\omega) d\omega = 0, khi\, t \ge 0 \tag{5.5.4}$$

Khi thay đổi thứ tự tích phân ta viết (5.5.4) dưới dạng

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_1 t} L(\omega) S_z(\omega_1) \left[\int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_1)\tau} d\tau \right] d\omega_1 - \right.$$

$$\left. - e^{i\omega(t+T)} S_{xz}(\omega) \right\} d\omega = 0, khi\, t \ge 0 \tag{5.5.5}$$

Theo tính chất của hàm Delta (4.2.4) ta có

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_1)\tau} d\tau = \delta(\omega - \omega_1) \tag{5.5.6}$$

Khi đó, theo tính chất của hàm Delta (4.2.7), tích phân bên trong của (5.5.5) bằng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_1 t} L(\omega) S_z(\omega_1) \delta(\omega - \omega_1) d\omega_1 = e^{i\omega t} L(\omega) S_z(\omega) \tag{5.5.7}$$

Như vậy, (5.5.5) có dạng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[L(\omega) S_z(\omega) - e^{i\omega T} S_{xz}(\omega) \right] d\omega = 0, khi\, t \ge 0 \tag{5.5.8}$$

Ta sẽ xét vế trái của (5.5.8) như một hàm f(t) nào đó

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[L(\omega) S_z(\omega) - e^{i\omega T} S_{xz}(\omega) \right] d\omega \tag{5.5.9}$$

Hàm này là biến đổi ngược Fourier của hàm

$$F(\omega) = L(\omega) S_z(\omega) - e^{i\omega T} S_{xz}(\omega) \tag{5.5.10}$$

Do đó, F(ω) là biến đổi Fourier của hàm f(t), theo (5.5.8), hàm f(t) này đồng nhất bằng không khi t≥0.

Trong lý thuyết biến đổi Fourier, định lý sau đây đã được chứng minh:

Giả sử f(t) là một hàm khả tích, đồng nhất bằng không trên khoảng (0,+∞) và có biến đổi Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt .$$

Khi đó F(ω) là giá trị trên trục thực của hàm giải tích biến phức bị chặn F(ζ) trong nửa mặt phẳng phía trên, với

$$\zeta = \omega + i\lambda$$

Nếu hàm F(ζ) là hàm giải tích biến phức bị chặn ở nửa mặt phẳng phía trên thì biến đổi ngược Fourier giá trị F(ω) của nó trên trục thực bằng không trên khoảng (0,∞), f(t) = 0.

Nếu thay khoảng (0,∞) bằng khoảng (-∞,0) và thay nửa mặt phẳng phía trên bằng nửa mặt phẳng phía dưới ta sẽ nhận được một định lý tương tự.

Theo định lý này hàm (5.5.10) là giá trị trên trục thực của hàm giải tích F(ζ) bị chặn ở nửa mặt phẳng phía trên.

Trong đa số các bài toán ứng dụng, các quá trình ngẫu nhiên là những quá trình có phổ hữu tỷ, tức mật độ phổ của chúng là hàm phân thức hữu tỷ của tần số ω. Hàm phân thức hữu tỷ chẵn biến thực ω có thể biểu diễn dưới dạng tích của hai hàm $S_1(\omega)$ và $S_2(\omega)$, trong đó hàm thứ nhất $S_1(\omega)$ là giá trị trên trục thực của hàm biến phức giải tích, bị chặn không có không điểm ở nửa mặt phẳng phía trên ζ = ω + iλ, còn $S_2(\omega)$ là giá trị trên trục thực của hàm biến phức giải tích, bị chặn và không có không điểm ở nửa mặt phẳng dưới.

Thực vậy, giả sử

$$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

trong đó P(ω) và Q(ω) là các đa thức có hệ số thực của ω.

Ta khai triển tử thức và mẫu thức thành các nhân tử tuyến tính. Ta gộp các nhân tử của tử thức và mẫu thức mà chúng sẽ bằng không ở nửa mặt phẳng dưới vào một hàm $S_1(\omega)$, và gộp tất cả các nhân tử còn lại của tử thức và mẫu thức thành $S_2(\omega)$ và do S(ω) là hàm chẵn, còn các hệ số của đa thức P(ω) và Q(ω) là thực nên các nhân tử tạo thành $S_2(\omega)$ là các đại lượng liên hợp phức của các nhân tử trong $S_1(\omega)$, tức là chúng chỉ biến thành không ở nửa mặt phẳng trên. Tương ứng với điều đó ta biểu diễn hàm phổ dưới dạng

$S_z(\omega) = S_1(\omega)S_2(\omega)$, (5.5.11)

trong đó $S_1(\omega)$ không có không điểm và cực điểm ở nửa mặt phẳng trên, $S_2(\omega)$ không có không điểm và cực điểm ở nửa mặt phẳng dưới. Đặt (5.5.11) vào (5.5.10)

$$F(\omega) = L(\omega)S_1(\omega)S_2(\omega) - e^{i\omega T}S_{xz}(\omega) \tag{5.5.12}$$

và chia cho $S_1(\omega)$ ta được

$$\frac{F(\omega)}{S_1(\omega)} = L(\omega)S_2(\omega) - e^{i\omega T}\frac{S_{xz}(\omega)}{S_1(\omega)} \tag{5.5.13}$$

Hàm $\dfrac{F(\omega)}{S_1(\omega)}$ là giải tích và bị chặn ở nửa mặt phẳng phía trên, vì trên đó hàm F(ω) là giải tích và bị chặn, còn $S_1(\omega)$ không có không điểm và cực điểm.

Do đó, theo phần hai của định lý, biến đổi ngược Fourier của hàm này bằng không trên khoảng (0,∞), tức là do (5.5.13) ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{S_1(\omega)}e^{i\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left[L(\omega)S_2(\omega)-e^{i\omega T}\frac{S_{xz}(\omega)}{S_1(\omega)}\right]e^{i\omega t}d\omega=0,\ \text{khi}\ t\geq 0 \tag{5.5.14}$$

Từ đó ta nhận được

$$\int_{-\infty}^{\infty}L(\omega)S_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{xz}(\omega)}{S_1(\omega)}e^{i\omega(t+T)}d\omega,\ \text{khi}\ t\geq 0 \tag{5.5.15}$$

Hàm L(ω) giống như hàm truyền của hệ khả dĩ thực, mà ta giả thiết nó ổn định, có thể có nghiệm của mẫu thức chỉ trong nửa mặt phẳng trên, do đó nó không có cực điểm trong nửa mặt phẳng dưới.

Như vậy, hàm $L(\omega)S_2(\omega)$ là giải tích, bị chặn ở nửa mặt phẳng dưới, do đó nhờ định lý đã dẫn, biến đổi ngược Fourier của nó bằng không

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}L(\omega)S_2(\omega)e^{i\omega t}d\omega=0,\ \text{khi}\ t<0 \tag{5.5.16}$$

Khi đó nếu lấy biến đổi Fourier của hàm φ(t) ta nhận được

$$L(\omega)S_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}L(\omega_1)S_2(\omega_1)e^{i\omega_1 t}d\omega_1 dt \tag{5.5.17}$$

Nhưng theo công thức (5.5.15), khi t≥0 tích phân bên trong của (5.5.17) có thể thay thế bởi vế phải của (5.5.15)

$$2\pi L(\omega)S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{xz}(\omega_1)}{S_1(\omega_1)}e^{i\omega_1(t+T)}d\omega_1 dt \tag{5.5.18}$$

Từ đó ta nhận được công thức đối với hàm truyền tối ưu

$$L(\omega) = \frac{1}{2\pi S_2(\omega)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{xz}(\omega_1)}{S_1(\omega_1)}e^{i\omega_1(t+T)}d\omega_1 dt \tag{5.5.19}$$

Khi biết hàm truyền L(ω) ta tìm được hàm trọng lượng g(t) như là biến đổi ngược Fourier của L(ω) theo (5.4.12) chia cho 2π.

Tương ứng với những điều đã trình bày, để xác định hàm truyền tối ưu L(ω) trong trường hợp mật độ phổ hữu tỷ cần phải làm như sau

1. Xác định các mật độ phổ $S_{xz}(\omega)$ và $S_z(\omega)$.

2. Biểu diễn $S_z(\omega)$ dưới dạng tích của hai hàm $S_z(\omega) = S_1(\omega)S_2(\omega)$, trong đó $S_1(\omega)$ không có không điểm và điểm kỳ dị trong nửa mặt phẳng trên, còn $S_2(\omega)$không có không điểm và điểm kỳ dị trong nửa mặt phẳng dưới.

Muốn vậy, trong mật độ phổ $S_z(\omega) = \dfrac{P(\omega)}{Q(\omega)}$ cần phải khai triển tử thức và mẫu thức thành các nhân tử tuyến tính. Gộp vào hàm $S_1(\omega)$ các nhân tử của tử thức và mẫu thức mà chúng biến thành không ở nửa mặt phẳng dưới, còn những nhân tử còn lại gộp vào $S_2(\omega)$.

3. Xác định hàm truyền theo công thức (5.5.19). Khi tính theo công thức (5.5.19) để thuận tiện ta sử dụng các công thức:

Nếu b >0 thì

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{[\omega-(a+ib)]^n}=\begin{cases}\frac{i^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{i(a+ib)t} & khi\ t>0,\\ 0 & khi\ t<0\end{cases} \tag{5.5.20}$$

Nếu b <0 thì

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{[\omega-(a+ib)]^n}=\begin{cases}\frac{i^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{i(a+ib)t} & khi t<0,\\ 0 & khi t>0\end{cases} \tag{5.5.21}$$

A.M. Iaglom [28], đã chứng minh được rằng, trong nhiều trường hợp có thể tìm hàm truyền tối ưu L(ω) không cần tiến hành tính theo công thức (5.5.19) mà sử dụng tính chất dừng của hàm đưa vào đẳng thức (5.5.10).

Trên đây ta đã xác định rằng

1. Hàm F(ω) là hàm giải tích, bị chặn trong nửa mặt phẳng trên,

2. Hàm L(ω) không có không điểm và cực điểm ở nửa mặt phẳng dưới,

3. Như đã thấy từ công thức (5.3.22), tích phân không kỳ dị sau phải hội tụ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|L(\omega)|^2 S_z(\omega)d\omega \tag{5.5.22}$$

Như ta sẽ chỉ ra trong các ví dụ, khi sử dụng điều kiện thứ ba này có thể tìm được hàm truyền tối ưu.

Các ví dụ

1. Ta xét trường hợp ngoại suy thuần tuý khi trên khoảng (–∞,t) có một thể hiện của quá trình ngẫu nhiên X(t) mà hàm tương quan có dạng

$$R_x(\tau) = D\,e^{-\alpha|\tau|} \tag{5.5.23}$$

Trong trường hợp này không có sai số đo và theo (5.3.4)

$R_z(\tau) = R_{xz}(\tau) = R_x(\tau)$.

Mật độ phổ $S_x(\omega)$ tương ứng với hàm tương quan (5.5.23), như đã chỉ ra trong mục 3.2, ví dụ 1, có dạng

$$S_x(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)} \tag{5.5.24}$$

Do đó,

$$S_z(\omega) = S_{xz}(\omega) = S_x(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)} \tag{5.5.25}$$

Công thức (5.5.10) được viết lại dưới dạng

$$F(\omega) = \left[L(\omega) - e^{i\omega T}\right] \frac{D\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} = \frac{D\alpha}{\pi} \frac{L(\omega) - e^{i\omega T}}{(\omega - i\alpha)(\omega + i\alpha)} \tag{5.5.26}$$

Theo điều kiện 1 hàm $F(\omega)$ phải giải tích trong nửa mặt phẳng trên. Nhưng mẫu thức vế phải (5.5.26) có không điểm tại $\omega = i\alpha$ ở nửa mặt phẳng trên, do đó tử thức vế phải cũng phải có không điểm tại $\omega = i\alpha$, không điểm này được rút gọn với không điểm của mẫu thức.

Như vậy, cần thoả mãn điều kiện

$$L(i\alpha) - e^{i(i\alpha)T} = 0, \tag{5.5.27}$$

Từ đó

$$L(\omega) = e^{-\alpha T} \tag{5.5.28}$$

Từ điều kiện 1 và 2 suy ra rằng hàm $L(\omega)$ nói chung không thể có điểm kỳ dị hữu hạn. Thực vậy, hàm $F(\omega)$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên, và có nghĩa là vế phải của (5.5.26), tức là cả hàm $L(\omega)$, phải giải tích ở nửa mặt phẳng trên. Còn từ điều kiện 2 suy ra rằng, $L(\omega)$ cũng không có điểm kỳ dị ở nửa mặt phẳng dưới.

Để thực hiện điều kiện 3 cần đặt hàm $L(\omega)$ bằng đại lượng hằng số. Khi đó tích phân không kỳ dị (5.5.22) hội tụ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 S_z(\omega) d\omega = |L(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega = |L(\omega)|^2 D \tag{5.5.29}$$

Như vậy, có thể lấy hàm truyền tối ưu là

$$L(\omega) = e^{-\alpha T} = \text{const.} \tag{5.5.30}$$

Theo (5.4.12), hàm trọng lượng $g(t)$ tương ứng với hàm truyền này được xác định dưới dạng

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} L(\omega) d\omega = e^{-\alpha T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = e^{-\alpha T} \delta(t). \tag{5.5.31}$$

Khi đó, theo tính chất của hàm Delta (4.2.7), công thức ngoại suy tối ưu (5.3.1) được viết dưới dạng

$$x(t+T) = e^{-\alpha T} \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau) d\tau = e^{-\alpha T} x(t). \tag{5.5.32}$$

Từ đó thấy rằng, trong trường hợp ngoại suy thuần tuý quá trình ngẫu nhiên có hàm tương quan dạng (5.5.23), để dự báo tối ưu thể hiện tại thời điểm t+T chỉ cần biết giá trị của nó tại thời điểm t. Việc biết giá trị của thể hiện ở tất cả các thời điểm trước không thể làm cho dự báo tốt hơn. Nếu tăng giá trị của lượng ngắm đón T thì đại lượng $e^{-\alpha T}$ bị giảm đi và sẽ dần tới không khi $T \to \infty$.

Như vậy, khi $T \to \infty$ giá trị đoán trước tối ưu $x(t+T)$ sẽ tiến tới kỳ vọng toán học của quá trình ngẫu nhiên và bằng không.

Theo (5.3.22), sai số bình phương trung bình của dự báo σ^2 được xác định dưới dạng

$$\sigma^2 = D - e^{-2\alpha T} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = D(1 - e^{-2\alpha T}) \tag{5.5.33}$$

Từ đó thấy rằng sai số dự báo tăng lên khi tăng lượng ngắm đón T.

Khi sử dụng công thức (5.5.19) ta nhận được chính giá trị của hàm truyền tối ưu.

Trong trường hợp này, khi phân tích mật độ phổ $S_z(\omega) = S_x(\omega)$ thành các nhân tử tuyến tính ta được

$$S_z(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi}\frac{1}{(\omega - i\alpha)(\omega + i\alpha)} \tag{5.5.34}$$

Nhân tử của mẫu thức $\omega+i\alpha$ có nghiệm $\omega=-i\alpha$ nằm ở nửa mặt phẳng phía dưới, nhân tử $\omega-i\alpha$ có nghiệm $\omega=i\alpha$ nằm ở nửa mặt phẳng phía trên. Vì vậy, ta lấy hàm $S_1(\omega)$ là

$$S_1(\omega) = \frac{1}{(\omega + i\alpha)}, \tag{5.5.35}$$

và lấy $S_2(\omega)$ là

$$S_2(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi(\omega - i\alpha)} \tag{5.5.36}$$

Thay các hàm $S_1(\omega)$ và $S_2(\omega)$ đã chọn vào (5.5.19) ta nhận được

$$L(\omega) = \frac{\omega - i\alpha}{2\pi^2}\int_0^\infty e^{-i\alpha t}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega_1 - i\alpha} e^{i\omega_1(t+T)} d\omega_1 dt\,. \tag{5.5.37}$$

Theo (5.5.20), ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega_1 - i\alpha} e^{i\omega_1(t+T)} d\omega_1 = \begin{cases} ie^{-\alpha(t+T)} & \text{khi } t+T>0 \\ 0 & \text{khi } t+T<0 \end{cases} \tag{5.5.38}$$

Từ đó

$$L(\omega) = (\alpha+i\omega)\, e^{-\alpha T}\int_0^\infty e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = e^{-\alpha T}\,. \tag{5.5.39}$$

2. Ta xét trường hợp ngoại suy thuần tuý thể hiện x(t) cho trên khoảng $(-\infty,t)$, khi quá trình ngẫu nhiên X(t) có hàm tương quan

$$R_x(\tau) = D\, e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau \tag{5.5.40}$$

Hàm tương quan này, như đã chỉ ra trong mục 3.2, ví dụ 3, tương ứng với mật độ phổ

$$S_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2} =$$

$$= \frac{D\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{[\omega+(\beta+i\alpha)][\omega-(\beta+i\alpha)][\omega+(\beta-i\alpha)][\omega-(\beta-i\alpha)]} \tag{5.5.41}$$

Công thức (5.5.10) được viết lại dưới dạng

$$F(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi}\frac{\left[L(\omega)-e^{i\omega T}\right](\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{[\omega+(\beta+i\alpha)][\omega-(\beta+i\alpha)][\omega+(\beta-i\alpha)][\omega-(\beta-i\alpha)]} \tag{5.5.42}$$

Mẫu thức vế phải (5.5.42) có không điểm ở nửa mặt phẳng trên tại $\omega=\beta+i\alpha$ và $\omega=-\beta+i\alpha$. Vì biểu thức $\omega^2+\alpha^2+\beta^2$ tại các không điểm này không bằng không, nên tại các giá trị này của ω hàm $L(\omega) - e^{i\omega T}$ cần phải bằng không. Từ đó ta được

$$L(\beta+i\alpha) = e^{i(\beta+i\alpha)T} = e^{-(\alpha-i\beta)T}, \quad (5.5.43)$$

$$L(-\beta+i\alpha) = e^{i(-\beta+i\alpha)T} = e^{-(\alpha+i\beta)T}. \quad (5.5.44)$$

Hàm F(ω) có không điểm tại $\pm i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, trong đó điểm $i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ nằm ở nửa mặt phẳng trên, do đó hàm L(ω) chỉ có thể có cực điểm đơn tại $\omega = i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, có nghĩa là hàm $L(\omega)(\omega - i\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$ cần phải nguyên, tức là nó không thể có điểm kỳ dị hữu hạn.

Để thực hiện điều kiện 3 cần phải cho hàm này là hàm tuyến tính, tức đặt

$$L(\omega)(\omega - i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) = A\omega + B. \quad (5.5.45)$$

Từ đó

$$L(\omega) = \frac{A\omega + B}{\omega - i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \quad (5.5.46)$$

Khi sử dụng điều kiện (5.5.43) và (5.5.44) ta nhận được hệ để xác định các hệ số A và B:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha T}\left[\beta + i\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\right]e^{i\beta T} &= A(\beta + i\alpha) + B \\ e^{-\alpha T}\left[-\beta + i\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\right]e^{-i\beta T} &= A(-\beta + i\alpha) + B \end{aligned} \quad (5.5.47)$$

Khi giải hệ này ta được:

$$A = \left(\cos\beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\sin\beta T\right)e^{-\alpha T}, \quad (5.5.48)$$

$$B = i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta T - \cos\beta T\right)e^{-\alpha T}. \quad (5.5.49)$$

Khi đã tìm được các giá trị A và B, hợp lý hơn ta biểu diễn hàm truyền tối ưu (5.5.46) dưới dạng

$$L(\omega) = A - \frac{A\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - iB}{i\omega + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \left(\cos\beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta T\right)e^{-\alpha T} -$$

$$- \frac{2}{i\omega + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\frac{\alpha^2+\beta^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\sin\beta T . e^{-\alpha T} \quad (5.5.50)$$

Theo (5.4.12) ta tìm được hàm trọng lượng tối ưu

$$g(t) = \left(\cos\beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta T\right)e^{-\alpha T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega -$$

$$- \frac{2(\alpha^2+\beta^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}{\beta}\sin\beta T . e^{-\alpha T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\frac{d\omega}{i\omega + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad (5.5.51)$$

Theo tính chất của hàm Delta (4.2.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t) \tag{5.5.52}$$

Tích phân trong hạng thứ hai của (5.5.51) bằng

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{i\omega + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega - i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} =$$

$$= \begin{cases} e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,t} & \text{khi } t \ge 0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \end{cases} \tag{5.5.53}$$

Khi thế (5.5.52) và (5.5.53) vào (5.5.51) ta nhận được hàm trọng lượng tối ưu với t≥0

$$g(t) = \left(\cos\beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha}{\beta}\sin\beta T\right) e^{-\alpha T}\,\delta(t) -$$

$$- \frac{2(\alpha^2+\beta^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}{\beta}\sin\beta T . e^{-\alpha T} e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,t} \tag{5.5.54}$$

Khi đó, tương ứng với (5.3.1), công thức ngoại suy tối ưu được viết dưới dạng

$$x(t+T) = \left(\cos\beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha}{\beta}\sin\beta T\right) e^{-\alpha T}\, x(t) -$$

$$- \frac{2(\alpha^2+\beta^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}{\beta}\sin\beta T . e^{-\alpha T}\int_0^{\infty} x(t-\tau) e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\tau} d\tau \tag{5.5.55}$$

Công thức (5.5.55) chứng tỏ rằng, giá trị dự báo x(t+T) không chỉ phụ thuộc vào các giá trị cuối cùng của thể hiện x(t) đã biết, mà còn phụ thuộc vào giá trị của nó tại tất cả các trị số cho trước của đối số theo đó tiến hành lấy tích phân.

Theo (5.3.22), sai số bình phương trung bình trong trường hợp đã xét được xác định dưới dạng

$$\sigma^2 = \frac{D}{2}\left[1 - e^{-2\alpha T}\left(\cos\beta T - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha}{\beta}\sin\beta T\right)^2\right] \tag{5.5.56}$$

3. Ta xét trường hợp ngoại suy thuần tuý, khi mà quá trình ngẫu nhiên X(t) có hàm tương quan

$$R_x(\tau) = D\, e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right) \tag{5.5.57}$$

Tương ứng với hàm tương quan này là hàm mật độ phổ

$$S_x(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\left(\omega^2+\alpha^2-\beta^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \tag{5.5.58}$$

Trong trường hợp này công thức (5.5.10) được viết dưới dạng

$$F(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi}\frac{\left[L(\omega) - e^{i\omega T}\right](\alpha^2+\beta^2)}{[\omega+(\beta+i\alpha)][\omega-(\beta+i\alpha)][\omega+(\beta-i\alpha)][\omega-(\beta-i\alpha)]} \tag{5.5.59}$$

Tiến hành lập luận như trong ví dụ 2 ta nhận được hàm truyền tối ưu dưới dạng

$$L(\omega)=\left(\cos\beta T+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta T\right)e^{-\alpha T}+\frac{i\omega\sin\beta T}{\beta}e^{-\alpha T} \qquad (5.5.60)$$

Theo (5.4.12) ta tìm được hàm trọng lượng tối ưu

$$g(t) = (\cos\beta T + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta T)\,e^{-\alpha T}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega+\frac{\sin\beta T.e^{-\alpha T}}{\beta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\omega e^{i\omega t}d\omega \qquad (5.5.61)$$

Tích phân

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\omega e^{i\omega t}d\omega = \delta'(t) \qquad (5.5.62)$$

là đạo hàm của hàm Delta. Từ đó ta có thể viết hàm trọng lượng tối ưu dưới dạng

$$g(t) = (\cos\beta T + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta T)\ e^{-\alpha T}\delta(t)+\frac{\sin\beta T.e^{-\alpha T}}{\beta}\delta'(t) \qquad (5.5.63)$$

Khi thay hàm trọng lượng tìm được vào (5.3.1) ta nhận được công thức ngoại suy tối ưu

$$x(t+T) = (\cos\beta T + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta T)\,e^{-\alpha T}x(t)+\frac{\sin\beta T.e^{-\alpha T}}{\beta}x'(t) \qquad (5.5.64)$$

Vì

$$\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)\delta'(\tau)d\tau = x'(t) \qquad (5.5.65)$$

Từ công thức (5.5.64) thấy rằng giá trị ngoại suy x(t+T) phụ thuộc vào chính giá trị của thể hiện x(t) tại thời điểm t cũng như phụ thuộc cả vào đạo hàm x'(t) của nó tại thời điểm này.

Sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy trong trường hợp vừa xét được xác định dưới dạng

$$\sigma^2 = D\left[1-e^{-2\alpha T}\left(\cos\beta T+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta T\right)^2\right]. \qquad (5.5.66)$$

4. Xét trường hợp ngoại suy có làm trơn khi cho thể hiện z(t)=x(t)+y(t) trên khoảng $(-\infty,t)$ với y(t) là sai số đo.

Ta sẽ xem rằng các quá trình ngẫu nhiên X(t) và Y(t) không tương quan lẫn nhau và có các hàm tương quan

$$R_x(\tau) = D_1e^{-\alpha_1|\tau|} \qquad (5.5.67)$$

$$R_y(\tau) = D_2e^{-\alpha_2|\tau|} \qquad (5.5.68)$$

Các mật độ phổ tương ứng với chúng được mô tả bởi các công thức

$$S_x(\omega) = \frac{D_1\alpha_1}{\pi\left(\omega^2+\alpha_1^2\right)}=\frac{c_1}{\omega^2+\alpha_1^2} \qquad (5.5.69)$$

$$S_y(\omega) = \frac{D_2\alpha_2}{\pi\left(\omega^2+\alpha_2^2\right)} = \frac{c_2}{\omega^2+\alpha_2^2} \tag{5.5.70}$$

Tương ứng với (5.3.23) và (5.3.24) ta tìm được mật độ phổ $S_z(\omega)$ và mật độ phổ quan hệ $S_{xz}(\omega)$:

$$S_{xz}(\omega) = S_x(\omega) \tag{5.5.71}$$

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega) = \frac{c_3\left(\omega^2+\beta^2\right)}{\left(\omega^2+\alpha_1^2\right)\left(\omega^2+\alpha_2^2\right)} \tag{5.5.72}$$

trong đó

$$c_3 = \frac{1}{\pi}(D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2),\ \beta^2 = \frac{D_1\alpha_2 + D_2\alpha_1}{D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2}\alpha_1\alpha_2 \tag{5.5.73}$$

Công thức (5.5.10) được viết dưới dạng

$$F(\omega) = \frac{L(\omega)c_3(\omega^2+\beta^2) - e^{i\omega T}c_1(\omega+i\alpha_2)(\omega-i\alpha_2)}{(\omega+i\alpha_1)(\omega-i\alpha_1)(\omega+i\alpha_2)(\omega-i\alpha_2)} \tag{5.5.74}$$

Mẫu thức vế phải (5.5.74) có không điểm ở nửa mặt phẳng trên tại $\omega=i\alpha_1$ và $\omega=i\alpha_2$. Vì hàm $F(\omega)$ là giải tích ở nửa mặt phẳng trên, nên tử thức cũng phải có không điểm tại các điểm này để chúng có thể được rút gọn với các không điểm của mẫu thức.

Do đó, cần thoả mãn các đẳng thức

$$c_3L(i\alpha_1)(\beta^2-\alpha_1^2) = c_1e^{-\alpha_1T}(\alpha_2^2-\alpha_1^2),$$

$$L(i\alpha_2)(\beta^2-\alpha_2^2) = 0 \tag{5.5.75}$$

Từ đó ta được

$$L(i\alpha_1) = \frac{c_1}{c_3}\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\beta^2-\alpha_1^2}e^{-\alpha_1T} \tag{5.5.76}$$

$L(i\alpha_2) = 0$, khi $\beta \neq \alpha_2$. (5.5.77)

Hàm $L(\omega)$ giải tích ở nửa mặt phẳng dưới, còn ở nửa mặt phẳng trên nó chỉ có thể có các cực điểm mà chúng không phải là cực điểm của hàm $F(\omega)$, tức là với chúng hàm $L(\omega)(\omega^2+\beta^2)$ không thể có cực điểm. Điểm $\omega=i\beta$ là điểm duy nhất như vậy, tức $L(\omega)$ có thể có cực điểm $\omega=i\beta$, do đó hàm $L(\omega)(\omega-i\beta)$ là nguyên. Để thoả mãn điều kiện 3 ta giả thiết nó là hàm tuyến tính

$$L(\omega)(\omega-i\beta) = A\omega + B, \tag{5.5.78}$$

từ đó

$$L(\omega) = \frac{A\omega+B}{\omega-i\beta} \tag{5.5.79}$$

Thay (5.5.76) và (5.5.77) vào (5.5.78) ta xác định được các hệ số A và B từ hệ phương trình

$Ai\alpha_2 + B = 0$

$$\frac{c_1}{c_3}\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{\beta^2-\alpha_1^2}e^{-\alpha_1T} = \frac{Ai\alpha_1+B}{i(\alpha_1-\beta)} \tag{5.5.80}$$

từ đó

$$A = \frac{c_1}{c_3}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\beta}e^{-\alpha_1 T},$$

$$B = -i\alpha_2\frac{c_1}{c_3}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\beta}e^{-\alpha_1 T} \qquad (5.5.81)$$

Thay (5.5.81) vào (5.5.79) ta nhận được hàm truyền tối ưu

$$L(\omega) = \frac{c_1}{c_3}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\beta}\frac{\alpha_2+i\omega}{\beta+i\omega}e^{-\alpha_1 T} \qquad (5.5.82)$$

Theo (5.4.12) ta tìm được hàm trọng lượng tối ưu dưới dạng

$$g(t) = \frac{c_1}{c_3}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\beta}e^{-\alpha_1 T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\frac{\alpha_2+i\omega}{\beta+i\omega}d\omega =$$

$$=\frac{c_1}{c_3}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\beta}e^{-\alpha_1 T}\left[\delta(t)+(\alpha_2-\beta)e^{-\beta t}\right]. \qquad (5.5.83)$$

Công thức ngoại suy tối ưu có làm trơn sẽ có dạng

$$x(t+T) = \frac{D_1\alpha_1}{D_1\alpha_1+D_2\alpha_2}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\beta}e^{-\alpha_1 T}\left[x(t)+(\alpha_2-\beta)\int_0^{\infty}e^{-\beta t}x(t-\tau)d\tau\right] \qquad (5.5.84)$$

Sai số bình phương trung bình của phép ngoại suy có làm trơn trong trường hợp trên được xác định như sau:

$$\sigma^2 = D_1\left[1-\frac{D_1\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)^2}{(D_1\alpha_1+D_2\alpha_2)(\alpha_1+\beta)^2}e^{-\alpha_1 T}\right]. \qquad (5.5.85)$$

5.6. Ngoại suy và làm trơn quá trình ngẫu nhiên khi biểu diễn hàm tương quan dưới dạng tổng các hàm mũ

Đối với các quá trình ngẫu nhiên mà hàm tự tương quan và hàm tương quan quan hệ của chúng có thể biểu diễn dưới dạng tổng các hàm mũ thì phương pháp giải phương trình Viner–Hopf [17] có thể không đòi hỏi phải sử dụng lý thuyết hàm biến phức.

Các hàm ngẫu nhiên, mà hàm tương quan của chúng được biểu diễn dưới dạng tổng các hàm mũ, là những hàm có mật độ phổ hữu tỷ.

Thực vậy, nếu

$$R_x(\tau) = \sum_k D_k e^{-\alpha_k|\tau|}, \qquad (5.6.1)$$

thì mật độ phổ có dạng

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}R_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \frac{2}{\pi}\sum_k D_k\int_0^{\infty}e^{-\alpha_k\tau}\cos\omega\tau d\tau = \frac{2}{\pi}\sum_k\frac{D_k\alpha_k}{\omega^2+\alpha_k^2} \qquad (5.6.2)$$

Có thể chỉ ra rằng, mọi hàm tương quan có thể được xấp xỉ, với độ chính xác tuỳ ý, bởi chuỗi mà các thành phần của nó là các hàm mũ.

Cụ thể, hàm tương quan được biểu diễn qua các hàm mũ là tổng có dạng

$$R(\tau) = \sum_k D_k e^{-\alpha_k|\tau|}\cos\beta_k\tau = \sum_k\frac{D_k}{2}\left[e^{-(\alpha_k+i\beta_k)|\tau|}+e^{-(\alpha_k-i\beta_k)|\tau|}\right]. \qquad (5.6.3)$$

Giả sử tất cả các hàm tương quan đưa vào phương trình Viner-Hopf được biểu diễn dưới dạng tổng các hàm mũ:

$$R_x(\tau) = \sum_i S_i e^{-\alpha_i|\tau|}\ , \tag{5.6.4}$$

$$R_y(\tau) = \sum_i N_i e^{-\beta_i|\tau|}\ ; \tag{5.6.5}$$

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} \sum_i H_i e^{-\delta_i \tau}, & \tau > 0 \\ \sum_i G_i e^{\gamma_i \tau}, & \tau < 0 \end{cases} \tag{5.6.6}$$

$$R_{yx}(\tau) = \begin{cases} \sum_i G_i e^{-\gamma_i \tau}, & \tau > 0 \\ \sum_i H_i e^{\delta_i \tau}, & \tau < 0 \end{cases} \tag{5.6.7}$$

Thay (5.6.4)-(5.6.7) vào công thức (5.3.4), (5.3.5) ta được

$$R_{xz}(\tau) = \sum_i S_i e^{-\alpha_i \tau} + \sum_i N_i e^{-\beta_i \tau}\ , \tag{5.6.8}$$

$$R_z(\tau) = \sum_i S_i e^{-\alpha_i \tau} + \sum_i G_i e^{-\gamma_i|\tau|} + \sum_i H_i e^{-\delta_i|\tau|} + \sum_i N_i e^{-\beta_i|\tau|}\ . \tag{5.6.9}$$

Trong công thức (5.6.8) ta chỉ xét $\tau \geq 0$, vì phương trình Viner-Hopf chỉ được xét đối với các giá trị không âm của t.

Có thể viết lại các công thức (5.6.8) và (5.6.9) khi hợp hai tổng vào một

$$R_{xz}(\tau) = \sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k \tau}, \tau \geq 0\ ; \tag{5.6.10}$$

$$R_z(\tau) = \sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k|\tau|} + \sum_{j=1}^{m} B_j e^{-b_j|\tau|} \tag{5.6.11}$$

ở đây p và m là số các hạng chung trong tổng kết hợp tương ứng.

Ta sẽ tìm hàm trọng lượng g(t) dưới dạng

$$g(t) = \sum_{s=1}^{N} A_s e^{-a_s t} + A\delta(t), \tag{5.6.12}$$

trong đó δ(t) là hàm Delta.

Số N và cả các hệ số A_s và a_s được xác định từ phương trình Viner-Hopf (5.3.11).

Thay (5.6.10), (5.6.11) và (5.6.12) vào phương trình (5.3.11) và yêu cầu sao cho nó thoả mãn đồng nhất tại mọi giá trị không âm của đối số t:

$$\sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k(t+T)} = \int_0^\infty \left[\sum_{s=1}^{N} A_s e^{-a_s \tau} + A\delta(\tau) \right] \left[\sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k|t-\tau|} + \sum_{j=1}^{m} B_j e^{-b_j|t-\tau|} \right] d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{s=1}^{N} A_s \sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k|t-\tau|} e^{-a_s \tau} d\tau + \int_0^\infty \sum_{s=1}^{N} A_s \sum_{j=1}^{m} B_j e^{-b_j|t-\tau|} e^{-a_s \tau} d\tau\ +$$

$$+\ A\int_0^\infty \sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k|t-\tau|}\delta(\tau)d\tau + A\int_0^\infty \sum_{j=1}^{m} B_j e^{-b_j|t-\tau|}\delta(\tau)d\tau = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \qquad (5.6.13)$$

$$J_1 = \sum_{s=1}^{N} A_s \sum_{k=1}^{p} C_k \left[\int_0^t e^{-[a_s\tau + c_k(t-\tau)]} d\tau + \int_t^\infty e^{-[a_s\tau + c_k(t-\tau)]} d\tau \right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} A_s \sum_{k=1}^{p} C_k \left[\frac{1}{c_k - a_s} e^{-c_k t} e^{-(a_s - c_k)t} - e^{-c_k t} \frac{1}{c_k - a_s} - e^{c_k t} \frac{1}{c_k + a_s} e^{-(c_k + a_s)t} \right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} A_s \sum_{k=1}^{p} C_k \left(\frac{1}{c_k - a_s} e^{-c_k t} - \frac{2c_k}{a_s^2 - c_k^2} e^{-a_s t} \right) \qquad (5.6.14)$$

Bằng cách tương tự khi tính J_2 ta được

$$J_2 = \sum_{s=1}^{N} A_s \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{B_j}{a_s - b_j} e^{-b_j t} - \frac{2B_j b_j}{a_s^2 - b_j^2} e^{-a_s t} \right) \qquad (5.6.15)$$

Ta tính J_3

$$J_3 = A\sum_{k=1}^{p} C_k \int_0^\infty e^{-c_k|t-\tau|}\delta(\tau)d\tau = A\sum_{k=1}^{p} C_k \left[\int_0^t e^{-c_k|t-\tau|}\delta(\tau)d\tau + \int_t^\infty e^{-c_k(t-\tau)}\delta(\tau)d\tau \right] \qquad (5.6.16)$$

Tích phân thứ hai trong (5.6.16) bằng không vì $\delta(t)=0$ khi $\tau\neq 0$. Trong tích phân thứ nhất, thực hiện phép đổi biến $t-\tau = z$, trên cơ sở tính chất của hàm Delta (4.2.7), ta được

$$J_3 = A\sum_{k=1}^{p} C_k \int_0^t e^{-c_k z}\delta(t-z)dz = A\sum_{k=1}^{p} C_k \int_0^\infty e^{-c_k z}\delta(t-z)dz = A\sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k t} \qquad (5.6.17)$$

Bằng cách tính tương tự với J_4, ta được

$$J_4 = A\sum_{j=1}^{m} B_j e^{-b_j t} \qquad (5.6.18)$$

Đặt (5.6.14)–(5.6.18) vào (5.6.13) ta nhận được

$$\sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k(t+T)} = \sum_{s=1}^{N} A_s \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{C_k e^{-c_k t}}{c_k - a_s} - \frac{2C_k c_k e^{-a_s t}}{a_s^2 - c_k^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{B_j e^{-b_j t}}{a_s - b_j} - \frac{2B_j b_j e^{-a_s t}}{a_s^2 - b_j^2} \right) \right] + A\left(\sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k t} + \sum_{j=1}^{m} B_j e^{-b_j t} \right). \qquad (5.6.19)$$

Đẳng thức (5.6.19) cần phải được thoả mãn đồng nhất với mọi giá trị t dương. Muốn vậy, các điều kiện sau đây phải được thực hiện

1. Các hệ số trong $e^{-a_s t}$ ở vế phải cần phải bằng không. Từ đó

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{C_k c_k}{a_s^2 - c_k^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j b_j}{a_s^2 - b_j^2} = 0, \qquad s = 1,2,..., N. \qquad (5.6.20)$$

Ta đã nhận được hệ N phương trình để xác định $a_1, a_2,..., a_N$. Do đó, có thể tìm các chỉ số mũ đưa vào trong đẳng thức (5.6.12) như là nghiệm của hàm

$$P(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{C_k c_k}{z^2 - c_k^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j b_j}{z^2 - b_j^2} \qquad (5.6.21)$$

Trong đó chỉ lấy các nghiệm có phần thực dương. Trong trường hợp tổng quát số các nghiệm như vậy sẽ là m+p–1, do đó N trong công thức (5.6.12) có thể lấy bằng m+p–1.

2. Các hệ số trong $e^{-b_j t}$ ở vế phải cần phải bằng không, còn các hệ số trong $e^{-c_k t}$ ở vế phải phải bằng $C_k e^{-c_k T}$. Từ đó, sau khi xác định a_s theo công thức (5.6.21) ta nhận được hệ phương trình để xác định $A_1, A_2, \ldots, A_{m+p-1}$.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{N} \frac{A_s}{a_s - b_j} + A = 0,\ j = 1,2,\ldots,m \\ &\sum_{s=1}^{N} \frac{A_s}{a_s - c_k} + A = e^{-c_k T}, k = 1,2,\ldots,p \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.22)$$

Tất cả những điều đã trình bày có thể dùng được khi mà hàm P(z) không có nghiệm bội. Trong trường hợp có nghiệm bội, cần phải biến đổi biểu thức (5.6.12), vì trong trường hợp ngược lại hệ (5.6.22) sẽ không tương thích. Chẳng hạn, nếu a_l là nghiệm bội hai của hàm (5.6.21), tức là $a_l=a_{l+1}$, thì hai thành phần tương ứng với nó trong biểu thức (5.6.12) cần thay bằng $(A_l\tau+A_{l+1}\tau)\, e^{-a_l \tau}$.

Khi đó phương trình thứ l của (5.6.20) được viết dưới dạng

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{C_k c_k}{\left(a_l^2 - c_k^2\right)^2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j b_j}{\left(a_l^2 - b_j^2\right)^2} = 0, \qquad (5.6.23)$$

còn những phương trình còn lại được giữ nguyên không thay đổi. Khi đó, thành phần của tổng có hệ số A_l trong các phương trình (5.6.22) được viết dưới dạng

$$\frac{A_l}{(a_l - c_k)^2} \quad \text{hay} \quad \frac{A_l}{(a_l - b_j)^2}.$$

Phương pháp đã xét ở đây bao gồm như sau:

1) Các hàm tương quan được xấp xỉ bởi các công thức (5.6.10) và (5.6.11),

2) Thành lập hàm P(z) theo công thức (5.6.21) và tìm nghiệm có phần thực dương a_s của nó,

3) Lập hệ phương trình (5.6.22), giải nó, ta nhận được các hệ số A_s và A,

4) Tìm hàm trọng lượng g(t) theo công thức (5.6.12),

5) Theo công thức (5.3.1) tìm giá trị chưa biết x(t+T).

Phương sai sai số của phép xấp xỉ, khi đó, được xác định theo công thức (5.3.3) mà sau khi thay thế (5.6.10), (5.6.11), (5.6.12) và thực hiện việc tính tích phân nó được viết dưới dạng

$$\sigma^2 = R_x(0) - \sum_{s=1}^{N} A_s \sum_{k=1}^{p} \frac{C_k}{a_s + c_k} e^{-c_k T} - A \sum_{k=1}^{p} C_k e^{-c_k T} \qquad (5.6.24)$$

Các ví dụ

1. Ta xét trường hợp ngắm đón thuần tuý khi có thể hiện x(t) trên khoảng (–∞,t) của quá trình ngẫu nhiên X(t) có hàm tương quan

$$R_x(\tau) = D\,e^{-\alpha|\tau|}. \qquad (5.6.25)$$

Trong trường hợp này, theo (5.3.4) và (5.3.5),

$$R_{xz}(\tau) = R_z(\tau) = R_x(\tau) = D\,e^{-\alpha|\tau|}. \qquad (5.6.26)$$

Khi đó phương trình Viner–Hopf được viết dưới dạng

$$R_x(t+T) = \int_0^\infty g(\tau)R_x(t-\tau)d\tau, \qquad t \ge 0 \qquad (5.6.27)$$

Theo (5.6.12), hàm trọng lượng g(t) sẽ được tìm dưới dạng

$$g(t) = \sum_{s=1}^{N} A_s e^{-a_s t} + A\delta(t) \qquad (5.6.28)$$

Vì tổng trong các đẳng thức (5.6.10) và (5.6.11) chỉ có một hạng tử, tức là p = 1, m = 0, nên hàm (5.6.21), mà nó có thể có số nghiệm không lớn hơn p+m–1, sẽ không có nghiệm, tức N=0. Khi đó hàm trọng lượng được viết dưới dạng

$$g(t) = A\delta(t). \qquad (5.6.29)$$

Từ đẳng thức (5.6.22) ta được

$$A = e^{-\alpha T} \qquad (5.6.30)$$

Từ đó hàm trọng lượng tối ưu có dạng

$$g(t) = e^{-\alpha T}\,\delta(t) \qquad (5.6.31)$$

Khi đó phương sai sai số của dự báo, theo (5.6.24), được xác định dưới dạng

$$\sigma^2 = R_x(0) - e^{-\alpha T}\,D\,e^{-\alpha T} = D(1-e^{-2\alpha T}) \qquad (5.6.32)$$

Ta nhận được chính kết quả như trong ví dụ 1 mục 5.5.

2. Xét trường hợp ngắm đón thuần tuý khi quá trình ngẫu nhiên X(t) có hàm tương quan

$$R_x(\tau) = D\,e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau. \qquad (5.6.33)$$

Ta viết $R_x(\tau)$ dưới dạng

$$R_x(\tau) = \frac{D}{2}\left[e^{-(\alpha-i\beta)\tau} + e^{-(\alpha+i\beta)\tau}\right] \qquad (5.6.34)$$

Trong trường hợp này

$$R_{xz}(\tau) = R_z(\tau) = \frac{D}{2}\left[e^{-(\alpha-i\beta)\tau} + e^{-(\alpha+i\beta)\tau}\right] \qquad (5.6.35)$$

là tổng của hai hạng tử, tức p=2, m=0. Khi đó N=p+m–1=1, còn hàm trọng lượng sẽ có dạng

$$g(t) = A_1 e^{-a_1 t} + A\delta(t) \qquad (5.6.36)$$

Hàm (5.6.21) được viết dưới dạng

$$P(z) = \frac{D}{2\pi}\left[\frac{\alpha-i\beta}{z^2-(\alpha-i\beta)^2} + \frac{\alpha+i\beta}{z^2-(\alpha+i\beta)^2}\right] =$$

$$= D\alpha\left[\frac{z^2-(\alpha^2+\beta^2)^2}{z^2-2z^2(\alpha^2-\beta^2)+(\alpha^2+\beta^2)^2}\right] \qquad (5.6.37)$$

Hàm này có nghiệm dương duy nhất $z = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ mà nó cho phép tìm a_1 trong hàm trọng lượng.

Để xác định các hệ số A_1 và A ta sử dụng hệ (5.6.22) dưới dạng

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-(\alpha-i\beta)} + A = e^{-(\alpha-i\beta)T}, \\ \frac{A_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-(\alpha+i\beta)} + A = e^{-(\alpha+i\beta)T} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.38}$$

Giải hệ này ta được

$$A_1 = \frac{2\left(\alpha^2+\beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\beta} e^{-\alpha T} \sin\beta T \tag{5.6.39}$$

$$A = e^{-\alpha T}\left(\cos\beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta T\right) \tag{5.6.40}$$

Cuối cùng hàm trọng lượng có dạng

$$\begin{aligned} g(t) = \Bigg\{ & \frac{2\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha^2-\beta^2\right)}{\beta}\sin\beta T e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}T} + \\ & + \left[\cos\beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta T\right]\delta(t)\Bigg\} e^{-\alpha T} \end{aligned} \tag{5.6.41}$$

Kết quả nhận được này chính là kết quả trong ví dụ 2 mục 5.5.

CHƯƠNG 6: XÁC ĐỊNH CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA HÀM NGẪU NHIÊN THEO SỐ LIỆU THỰC NGHIỆM

6.1. Các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên

Ở chương 2 chúng ta đã thấy rằng, trong lý thuyết tương quan, người ta lấy kỳ vọng toán học và hàm tương quan làm đặc trưng của hàm ngẫu nhiên. Ta xét phương pháp xác định các đặc trưng này theo số liệu thực nghiệm. Trong đó cần nhớ rằng, khi sử dụng các số liệu thực nghiệm ta không bao giờ giả thiết có tập hợp tất cả các thể hiện có thể của hàm ngẫu nhiên, mà chỉ có một số hữu hạn các thể hiện, là một phần nào đó trong tập tổng thể.

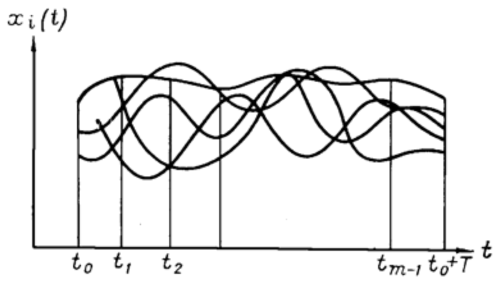
Vì vậy, các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên được xác định theo tập mẫu này mang tính chất ngẫu nhiên và có thể khác với những đặc trưng thực xác định theo toàn bộ tập tổng thể các thể hiện. Những đặc trưng nhận được theo số liệu thực nghiệm gọi là những đặc trưng thống kê hay ước lượng thống kê. Khác với giá trị thực của kỳ vọng toán học

$m(t)$ và hàm tương quan $R(t_1,t_2)$, ta sẽ ký hiệu các đặc trưng thống kê tương ứng dưới dạng $\widetilde{m}(t), \widetilde{R}(t_1,t_2)$.

Có thể xét hàm ngẫu nhiên như tập hợp tất cả các lát cắt của nó. Xuất phát từ đó, có thể đưa việc xác định các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên về việc xác định các đặc trưng tương ứng của hệ các đại lượng ngẫu nhiên.

Giả sử do kết quả thực nghiệm ta nhận được n thể hiện $X_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ trên khoảng $t_0 \le t \le t_0+T$ (hình 6.1).

Ta sẽ chia khoảng này thành m phần bằng nhau bởi các điểm $t_0, t_1, ..., t_{m-1}, t_0+T$. Đối với mỗi giá trị của đối số t_j $(j=1,2,...,m)$ ta nhận được một lát cắt của quá trình ngẫu nhiên $X_j = X(t_j)$ là một đại lượng ngẫu nhiên, tức là ta nhận được hệ m đại lượng ngẫu nhiên. Và thay cho các đặc trưng thống kê của quá trình ngẫu nhiên ta sẽ xét những đặc trưng tương ứng của hệ các đại lượng ngẫu nhiên này.



Hình 6.1

Theo mục 1.8, những đặc trưng đó là: kỳ vọng toán học của các đại lượng ngẫu nhiên

$$\widetilde{m}[X_j] = \widetilde{m}_x(t_j) \tag{6.1.1}$$

là những giá trị thống kê của kỳ vọng toán học của quá trình ngẫu nhiên tại các giá trị rời rạc của đối số t_j, và ma trận tương quan

$$\left\| \widetilde{R}_{j,l} \right\| = \begin{pmatrix} \widetilde{R}_{11} & \widetilde{R}_{12} & ... & \widetilde{R}_{1m} \\ & \widetilde{R}_{22} & ... & \widetilde{R}_{2m} \\ & & ... & ... \\ & & & \widetilde{R}_{mm} \end{pmatrix}. \tag{6.1.2}$$

Các phần tử của ma trận tương quan (6.1.2) là mômen tương quan thống kê giữa các lát cắt của quá trình ngẫu nhiên, ứng với các giá trị của đối số t_j và t_l, tức là các giá trị thống kê của hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên tại những giá trị rời rạc của đối số t_j và t_l

$$\widetilde{R}_{j,l} = \widetilde{R}_x(t_j, t_l).$$

Theo luận điểm của thống kê toán học (chẳng hạn, xem [8]), người ta xem trung bình số học của n giá trị hiện có của đại lượng ngẫu nhiên là giá trị thống kê của kỳ vọng toán học

$$\widetilde{m}_x(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_j), \quad j=1,2,...,m. \tag{6.1.3}$$

Tương tự, các giá trị thống kê của mômen tương quan được xác định theo công thức

$$\widetilde{R}_x(t_j,t_l)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_j)-\widetilde{m}_x(t_j)\right]\left[x_i(t_l)-\widetilde{m}_x(t_l)\right] \qquad (6.1.4)$$

Đặc biệt, khi $j=l$ mômen tương quan là giá trị thống kê của phương sai tại lát cắt tương ứng

$$\widetilde{D}_x(t_j)=\widetilde{R}_x(t_j,t_j)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_j)-\widetilde{m}_x(t_j)\right]^2 . \qquad (6.1.5)$$

Các giá trị thống kê của hệ số tương quan $\widetilde{r}_{j,l}=\widetilde{r}_x(t_j,t_l)$ là những giá trị thống kê của hàm tương quan chuẩn hoá $\widetilde{r}_x(t_j,t_l)$ tại những giá trị đối số t_j, t_l, được xác định theo công thức

$$\widetilde{r}_x(t_j,t_l)=\frac{\widetilde{R}_x(t_j,t_l)}{\widetilde{\sigma}_x(t_j)\,\widetilde{\sigma}_x(t_l)}, \qquad (6.1.6)$$

trong đó $\widetilde{\sigma}_x(t)=\sqrt{\widetilde{D}_x(t)}$.

Phương pháp vừa xét trên đây, lấy trị số trung bình số học theo tất cả các thể hiện có được làm giá trị thống kê của kỳ vọng toán học của đại lượng ngẫu nhiên, dựa trên cơ sở sử dụng quy luật số lớn. Quy luật này phát biểu rằng, khi số lượng các thí nghiệm là lớn, với xác suất gần bằng đơn vị, có thể cho rằng độ lệch của giá trị trung bình so với kỳ vọng toán học là nhỏ. ở đây giả thiết rằng, các thí nghiệm là độc lập và được tiến hành trong những điều kiện như nhau. Các thí nghiệm được coi là tiến hành trong những điều kiện như nhau nếu khi thực hiện chúng, tập hợp tất cả những tác động được tính tới, điều kiện ban đầu và những mối liên hệ được giữ nguyên không đổi. Các thí nghiệm được coi là độc lập nếu kết quả của mỗi thí nghiệm không phụ thuộc vào kết quả của những lần thí nghiệm khác. Dưới góc độ toán học, tính độc lập của các lần thí nghiệm khác nhau tương đương với sự độc lập của luật phân bố của hàm ngẫu nhiên trong các thí nghiệm đó, còn sự tồn tại những điều kiện bên ngoài giống nhau khi tiến hành thí nghiệm tương đương với việc các quy luật phân bố của hàm ngẫu nhiên như nhau trong tất cả các lần thí nghiệm.

Hệ phương pháp vừa xét cũng được ứng dụng để xác định các đặc trưng thống kê của trường ngẫu nhiên.

Giả sử có n thể hiện $u_i(\vec{\rho})$ $(i=1,2,...,n)$ của trường ngẫu nhiên $U(\vec{\rho})$ trong miền không gian D nào đó. Ta chia miền D thành m phần bởi một tập hợp các mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ và phân bố cách đều nhau. Ký hiệu $\vec{\rho}_j$ là bán kính vectơ của điểm N_j, đỉnh của các khối lập phương mà miền D đã được chia thành. Khi đó ứng với mỗi giá trị của đối số $\vec{\rho}_j$ là một đại lượng ngẫu nhiên $U(\vec{\rho}_j)$ – lát cắt của trường ngẫu nhiên tại điểm N_j. Tất cả các công thức để xác định các đặc trưng thống kê của trường ngẫu nhiên $U(\vec{\rho})$ được nhận từ các công thức tương ứng của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ (6.1.3)–(6.1.6) bằng cách thay thế chỉ số x thành chỉ số u, còn đối số vô hướng t được thay bằng đối số vectơ $\vec{\rho}$. Phương pháp xử lý theo tập hợp các thể hiện của hàm ngẫu nhiên vừa xét đòi hỏi số lượng lớn các thể hiện, vì, như đã biết từ thống kê toán học, độ chính xác của các đặc trưng thống kê nhận được giảm nhanh khi giảm số lượng thể hiện.

Với số lượng thể hiện lớn, việc tính toán theo công thức (6.1.3) và đặc biệt theo công thức (6.1.4) rất khó khăn. Công việc này có thể được thực hiện một cách hiệu quả nhờ máy tính điện tử. Ngày nay người ta đã lập các chương trình xác định kỳ vọng toán học và ma trận tương quan cho nhiều loại máy tính khác nhau, nhờ đó việc xử lý các thông tin khí tượng thủy văn được thực hiện.

Thông thường trong thực tế việc đo đạc các yếu tố khí tượng thủy văn được tiến hành không liên tục đối với tất cả các giá trị của đối số, mà chỉ tại những giá trị rời rạc của nó. Như vậy, khi xác định các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên theo số liệu thực nghiệm quan trắc khí tượng thủy văn, chúng ta có một hệ các lát cắt đối với những giá trị cụ thể đã cho của đối số, và chúng ta chỉ có thể thao tác với hệ đó.

Trong trường hợp quá trình ngẫu nhiên dừng hay trường đồng nhất đẳng hướng, kỳ vọng toán học không phụ thuộc vào đối số của hàm ngẫu nhiên, còn hàm tương quan là hàm chỉ của một đối số vô hướng – modul của hiệu các đối số. Khi đó việc tính toán đơn giản hơn nhiều, thay vì ma trận tương quan (6.1.2) chỉ cần tính những phần tử ở hàng đầu tiên của nó, đó chính là các mômen tương quan giữa các lát cắt nằm cách nhau những khoảng khác nhau của hàm ngẫu nhiên.

6.2. Các đặc trưng thống kê của các hàm ngẫu nhiên có tính Egođic

Đối với quá trình ngẫu nhiên dừng hay trường đồng nhất đẳng hướng có tính egođic việc lấy trung bình theo tập các thể hiện (xem chương 2) có thể thay bằng lấy trung bình theo một thể hiện cho trên khoảng biến thiên đủ lớn của đối số.

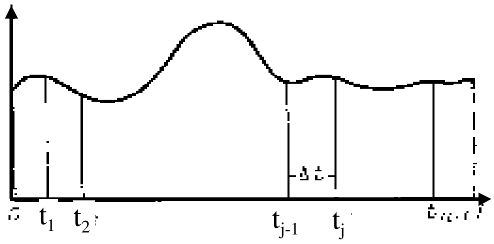
Ta xét các phương pháp xác định các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên trong trường hợp này.

Giả sử có thể hiện $x(t)$ của quá trình ngẫu nhiên dừng egođic $X(t)$ cho trên khoảng $[0, T]$.

Như đã trình bày trong mục 2.6, các giá trị của kỳ vọng toán học và hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên được xác định theo các công thức (2.6.1) và (2.6.2).

Trong công thức (2.6.2) có mặt giá trị thực của kỳ vọng toán học m_x của quá trình ngẫu nhiên. Song trong đa số trường hợp giá trị này chưa được biết, và do đó thay cho giá trị thực buộc phải sử dụng giá trị thống kê của kỳ vọng toán học $\tilde{m}_x$.

Trên thực tế chúng ta thường không có biểu thức giải tích của thể hiện $x(t)$, mà chỉ là biểu diễn đồ thị của nó, nhận được bằng các dụng cụ tự ghi, hoặc thông thường nhất là bảng các giá trị của nó tại những trị số rời rạc của đối số t.



Hình 6.2

Khi đó, trong các công thức (2.6.1) và (2.6.2) các tích phân được thay thế gần đúng bằng các tổng tích phân.

Giả sử có băng ghi liên tục của thể hiện $x(t)$ (hình 6.2), ta chia khoảng $[0, T]$ thành n phần bằng nhau độ dài Δt và ký hiệu điểm cuối của từng đoạn là $t_j = j\Delta t\ (j = 1, 2, ..., n)$.

Vì $T = n\Delta t$, nên các công thức (2.6.1) và (2.6.2) có thể viết dưới dạng

$$\widetilde{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x(j\Delta t)\,, \tag{6.2.1}$$

$$\widetilde{R}_x(\tau_k) = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}\left[x(j\Delta t) - \widetilde{m}_x\right]\left[x[(j+k)\Delta t] - \widetilde{m}_x\right], \tag{6.2.2}$$

trong đó $\tau_k = k\Delta t\ (k = 1, 2, ..., m)$.

Nếu băng ghi thể hiện không liên tục mà là rời rạc, thì t_j lấy bằng những giá trị của đối số tại đó ghi giá trị của thể hiện $x(t)$.

Việc xác định giá trị thống kê của kỳ vọng toán học $\widetilde{m}_u$ và hàm tương quan $\widetilde{R}_u(l)$ của trường đồng nhất đẳng hướng $U(\vec{\rho})$ theo một thể hiện cho trong miền không gian D cũng được tiến hành bằng cách tương tự.

Hệ phương pháp vừa xét cũng hoàn toàn được áp dụng để xác định hàm cấu trúc của quá trình dừng egođic hay trường ngẫu nhiên đồng nhất đẳng hướng. Công thức để xác định giá trị thống kê của hàm cấu trúc theo một thể hiện của hàm ngẫu nhiên $X(t)$ cho trên đoạn $[0, T]$ có dạng

$$B_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left[x(t+\tau) - x(t)\right]^2 dt\,. \tag{6.2.3}$$

Khi thay thế tích phân trong (6.2.3) bằng tổng tích phân, giống như đối với hàm tương quan, ta có công thức

$$\widetilde{B}_x(\tau_k) = \frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}\left[x(t_j + \tau_k) - x(t_j)\right]^2\,. \tag{6.2.4}$$

Nếu không chỉ có một thể hiện, mà là một số các thể hiện của nó nhận được trong những điều kiện như nhau, thì việc xử lý được tiến hành theo phương pháp trên đối với từng thể hiện, sau đó lấy trung bình các đặc trưng tính được. Trong trường hợp này cần nhớ rằng giá trị trung bình của hàm cấu trúc nhận được bằng cách lấy trung bình theo một bộ n thể hiện độ dài hữu hạn T, sẽ tiến tới giá trị thực khi lấy giới hạn $n \to \infty$.

Còn đối với hàm tương quan, do khi tính nó không sử dụng giá trị thực mà dùng giá trị thống kê của kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên, nên giá trị trung bình của nó, thậm chí cả khi $n \to \infty$, vẫn bị sai lệch.

Thực vậy, đối với hàm cấu trúc ta có

$$M\left[\widetilde{B}_x(\tau)\right] = M\left\{\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left[X(t+\tau) - X(t)\right]^2 dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} M\left\{\left[X(t+\tau) - X(t)\right]^2\right\} dt = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} B_x(\tau)dt = B_x(\tau)\,, \tag{6.2.5}$$

tức là kỳ vọng toán học của hàm cấu trúc thống kê bằng giá trị thực của nó.

Nếu các giá trị thống kê của hàm tương quan được xác định theo từng thể hiện độ dài T có sử dụng giá trị thống kê của kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên, thì

$$M\left[\widetilde{R}_x(\tau)\right]=M\left\{\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left[X(t)-\widetilde{m}_x\right]\left[X(t+\tau)-\widetilde{m}_x\right]dt\right\}==\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}M\left\{\left[X(t)-\widetilde{m}_x\right]\left[X(t+\tau)-\widetilde{m}_x\right]\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}M\left\{\left[X(t)-m_x\right]\left[X(t+\tau)-m_x\right]\right\}dt--\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}M\left\{\left[\widetilde{m}_x-m_x\right]\left[X(t+\tau)-m_x\right]\right\}dt-$$

$$-\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}M\left\{\left[\widetilde{m}_x-m_x\right]\left[X(t)-m_x\right]\right\}dt+\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}M\left[(\widetilde{m}_x-m_x)^2\right]dt\,. \tag{6.2.6}$$

Hạng thứ nhất trong (6.2.6) bằng giá trị thực của hàm tương quan $R_x(\tau)$. Thế các giá trị thống kê $\widetilde{m}_x$ vào những hạng còn lại của (6.2.6), sau một loạt biến đổi ta nhận được biểu thức

$$M\left[\widetilde{R}_x(\tau)\right]=R_x(\tau)-\frac{2}{(T-\tau)T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\left[\tau R_x(\tau_1)+TR_x(\tau_1-\tau)\right]d\tau_1+$$

$$+\frac{1}{(T-\tau)T}\int_0^{\tau}(T+\tau-2\tau_1)\left[R_x(\tau_1)+R_x(\tau_1-\tau)\right]d\tau_1 \tag{6.2.7}$$

Từ đó thấy rằng, kỳ vọng toán học của giá trị thống kê của hàm tương quan, mà giá trị trung bình của nó lấy theo tất cả các thể hiện sẽ tiến tới đó khi $n\to\infty$, không trùng với giá trị thực của hàm tương quan. Khi $\tau\to 0$, từ (6.2.7) ta nhận được công thức cho kỳ vọng toán học của phương sai thống kê của hàm ngẫu nhiên khi tính giá trị của nó bằng cách lấy trung bình theo từng thể hiện độ dài T có sử dụng giá trị thống kê của kỳ vọng toán học

$$M\left[\widetilde{R}_x(0)\right]=M\left[\widetilde{D}_x\right]=D_x-\frac{2}{T^2}\int_0^{T}(T-\tau)R_x(\tau)\,d\tau\,. \tag{6.2.8}$$

Từ (6.2.8) thấy rằng, thậm chí khi số thể hiện để lấy trung bình các giá trị thống kê của phương sai tiến tới vô hạn và khi khoảng ghi thể hiện T hữu hạn thì phương sai trung bình vẫn sẽ khác biệt với giá trị thực của phương sai một đại lượng, phụ thuộc vào T và bằng

$$\alpha=\frac{2}{T^2}\int_0^{T}(T-\tau)R_x(\tau)d\tau\,. \tag{6.2.9}$$

Bằng việc xử lý số liệu thực nghiệm như trên, ta nhận được các giá trị thống kê của hàm tương quan tại những trị số rời rạc của đối số. Để có thể sử dụng tiếp hàm tương quan khi nghiên cứu thống kê các quá trình và các trường khí tượng thủy văn, thuận tiện hơn nên sử dụng biểu thức giải tích của hàm tương quan như là hàm của đối số liên tục. Có thể nhận được hàm như vậy bằng cách xấp xỉ các giá trị tính được bởi các biểu thức giải tích khi sử dụng các phương pháp toán học quen thuộc. Khi chọn biểu thức giải tích để xấp xỉ hàm tương quan cần nhớ rằng điều kiện cần về tính dừng của quá trình ngẫu nhiên hay tính đồng nhất của trường ngẫu nhiên là điều kiện không âm của phổ. Vì vậy chỉ có thể chọn những hàm nào có phổ không âm làm hàm xấp xỉ.

Trong chương 3 đã xét chi tiết một số hàm và đã chỉ ra những hàm nào có thể dùng làm hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng hay trường ngẫu nhiên đồng nhất. Dĩ nhiên những hàm này chưa bao quát được tất cả các hàm có phổ không âm mà chúng có thể là hàm tương quan, song như nhiều nghiên cứu đã chỉ ra, những hàm đó thường cho kết quả khá phù hợp với số liệu thực nghiệm khi xấp xỉ giá trị thống kê của hàm tương quan của các quá trình và trường khí tượng thủy văn.

Khi chọn các biểu thức xấp xỉ nên dựng đồ thị các mômen tương quan nhận được và xem xét tính chất phụ thuộc của nó vào đối số, so sánh đồ thị này với đồ thị các hàm tương quan đã xét ở chương 3. Những chỉ dẫn tỉ mỉ về các phương pháp xấp xỉ và độ chính xác của chúng đã được xét trong các sách chuyên khảo và chúng ta sẽ dừng lại vấn đề này ở đây.

6.3 Độ chính xác xác định các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên

Do nhiều nguyên nhân làm ảnh hưởng tới độ chính xác, các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên xác định theo số liệu thực nghiệm là những đặc trưng gần đúng và có thể khác nhiều so với giá trị thực của kỳ vọng toán học và hàm tương quan. Ta sẽ xét ảnh hưởng của những nhân tố khác nhau tới độ chính xác của việc xác định các đặc trưng thống kê.

Để đơn giản cho việc tính toán ta sẽ tiến hành nghiên cứu độ chính xác đối với quá trình ngẫu nhiên. Với trường ngẫu nhiên, tính chất nghiên cứu và các kết luận sẽ tương tự.

1. Ảnh hưởng của sai số trong số liệu ban đầu

Các số liệu thực nghiệm được sử dụng khi xử lý không tránh khỏi có chứa những sai số phụ thuộc vào độ chính xác của phương pháp quan trắc và các dụng cụ đo.

Ta sẽ cho rằng sai số đo là một quá trình ngẫu nhiên $Y(t)$ có kỳ vọng toán học $m_y(t)$ và hàm tương quan $R_y(t_1, t_2)$.

Khi đó mỗi thể hiện $z_i(t)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ nhận được do thí nghiệm sẽ là tổng của giá trị thực của thể hiện $x_i(t)$ và sai số đo $y_i(t)$

$$z_i(t) = x_i(t) + y_i(t)\,. \tag{6.3.1}$$

Trong trường hợp này, tương ứng với (6.1.3), giá trị thống kê của kỳ vọng toán học $\tilde{m}_z(t)$ sẽ bằng

$$\tilde{m}_z(t_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t_j) + y_i(t_j)\right] = \tilde{m}_x(t_j) + \tilde{m}_y(t_j)\,. \tag{6.3.2}$$

Vì trong trường hợp đang xét ta chỉ quan tâm tới ảnh hưởng của sai số đo, nên ta sẽ coi số thể hiện đủ lớn sao cho các đặc trưng thống kê của quá trình được xét không khác biệt so với giá trị thực tương ứng. Khi đó có thể viết (6.3.2) dưới dạng

$$\tilde{m}_z(t_j) = m_x(t_j) + m_y(t_j)\,, \tag{6.3.3}$$

tức là sai số của giá trị thống kê của kỳ vọng toán học bằng kỳ vọng toán học của sai số đo.

Theo (6.1.4), ta sẽ xác định giá trị thống kê của hàm tương quan dưới dạng

$$\tilde{R}_z(t_j, t_l) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[z_i(t_j) - \tilde{m}_z(t_j)\right]\left[z_i(t_l) - \tilde{m}_z(t_l)\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[x_i(t_j) + y_i(t_j) - m_x(t_j) - m_y(t_j)][x_i(t_l) + y_i(t_l) -$$

$$-m_x(t_l) - m_y(t_l)] = = R_x(t_j, t_l) + R_y(t_j, t_l) + R_{xy}(t_j, t_l) + R_{yx}(t_j, t_l) \tag{6.3.4}$$

Trong thực tế quan trắc khí tượng thủy văn, thông thường người ta thừa nhận rằng, sai số đo không liên quan với giá trị thực của đại lượng được đo, và các sai số ứng với những giá trị khác nhau của đối số không liên hệ với nhau, tức là

$$R_{xy}(t_j,t_l)=R_{yx}(t_j,t_l)=0, \qquad (6.3.5)$$

$$R_y(t_j,t_l)=\begin{cases}0 & \text{khi } j\neq l,\\ \sigma_y^2(t_j) & \text{khi } j=l.\end{cases} \qquad (6.3.6)$$

Khi đó công thức (6.3.5) được viết dưới dạng

$$\tilde{R}_z(t_j,t_l)=\begin{cases}R_x(t_j,t_l) & \text{khi } j\neq l,\\ \sigma_x^2(t_j)+\sigma_y^2(t_j) & \text{khi } j=l.\end{cases} \qquad (6.3.7)$$

Từ công thức (6.3.7) suy ra rằng, trong trường hợp đang xét sai số đo không ảnh hưởng tới giá trị thống kê của hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên khi $t_j\neq t_l$, nhưng làm tăng giá trị thống kê của phương sai $\tilde{\sigma}_z(t_j)$, nhận được từ (6.3.7) khi $t_j=t_l$, lên một lượng bằng phương sai của sai số đo $\sigma_y(t_j)$.

Khi đó, theo (6.1.6), giá trị thống kê của hàm tương quan chuẩn hoá được xác định như sau

$$\tilde{r}_z(t_j,t_l)=\frac{\tilde{R}_z(t_j,t_l)}{\tilde{\sigma}_z(t_j)\tilde{\sigma}_z(t_l)}=\frac{R_x(t_j,t_l)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_j)+\sigma_y^2(t_j)}\sqrt{\sigma_x^2(t_l)+\sigma_y^2(t_l)}}. \qquad (6.3.8)$$

Từ (6.3.8) thấy rằng, sai số đo làm giảm giá trị thống kê của hàm tương quan chuẩn hoá.

Đối với các quá trình ngẫu nhiên dừng $X(t),Y(t)$ thì hàm tương quan phụ thuộc vào một tham số $\tau=\left|t_l-t_j\right|$, còn các phương sai σ_x^2,σ_y^2 là những đại lượng không đổi, khi đó (6.3.8) được viết thành dạng

$$\tilde{r}_z(\tau)=\frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}. \qquad (6.3.9)$$

Chia tử thức và mẫu thức của (6.3.9) cho σ_x^2, ta có

$$\tilde{r}_z(\tau)=r_x(\tau)\frac{1}{1+\delta}, \qquad (6.3.10)$$

trong đó $r_x(\tau)$ là giá trị thực của hàm tương quan chuẩn hoá, còn $\delta=\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$.

Khi $\tau\to 0$ hàm tương quan chuẩn hoá tiến tới đơn vị, do đó $\tilde{r}_z(\tau)\to\frac{1}{1+\delta}$, và điều này cho phép xác định đại lượng δ.

Ta sẽ dựng đồ thị hàm $\tilde{r}_z(\tau)$, bắt đầu từ giá trị $\tau=\tau_0$ và ngoại suy nó đến điểm $\tau=0$. Nếu τ_0 nhỏ thì có thể tiến hành ngoại suy bằng phương pháp đồ thị. Ngoài ra, cũng có thể thực hiện điều đó bằng cách xấp xỉ hàm $\tilde{r}_z(\tau)$ bằng biểu thức giải tích, sau đó tính giá trị của biểu thức này với $\tau=0$. Sử dụng đẳng thức (6.3.10), ta xác định được đại lượng

$$1+\delta=\frac{1}{\tilde{r}_z(0)}. \qquad (6.3.11)$$

Bây giờ những giá trị bị hạ thấp của hàm tương quan chuẩn hoá thống kê có thể được hiệu chỉnh lại khi nhân chúng với đại lượng $1+\delta$ vừa tìm được.

Để hiệu chỉnh giá trị bị tăng của phương sai thống kê, cần phải lấy giá trị nhận được của $\tilde{\sigma}_z^2$ chia cho $1+\delta$ theo công thức

$$\sigma_x^2 = \frac{\tilde{\sigma}_z^2}{1+\delta}. \tag{6.3.12}$$

Giá trị thống kê của hàm cấu trúc $B_z(\tau)$ được xác định dưới dạng

$$\tilde{B}_z(\tau) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[z_i(t+\tau) - z_i(\tau)]^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[x_i(t+\tau) + y_i(t+\tau) - x_i(t) - y_i(t)]^2 =$$

$$= B_x(\tau) + B_y(\tau) + 2[R_{xy}(0) + R_{xy}(0) - R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau)] \tag{6.3.13}$$

Cũng dựa trên giả thiết về tính không tương quan giữa sai số đo và các đại lượng được đo và tính không tương quan với nhau giữa sai số tại những thời điểm t khác nhau, ta nhận được

$$\tilde{B}_z(\tau) = B_x(\tau) + 2\sigma_y^2. \tag{6.3.14}$$

Như vậy giá trị thống kê của hàm cấu trúc bị tăng lên một lượng bằng hai lần phương sai của sai số.

Vì $B_x(0) = 0$ nên $\tilde{B}_z(0) = 2\sigma_y^2$. Từ đây có thể tìm được đại lượng $2\sigma_y^2$ bằng cách ngoại suy đồ thị hàm cấu trúc $\tilde{B}_z(\tau)$ đến điểm $\tau = 0$. Sau khi xác định được σ_y^2, có thể hiệu chỉnh các giá trị nhận được của hàm cấu trúc bằng cách trừ chúng cho $2\sigma_y^2$.

Hàm cấu trúc chuẩn hoá được xác định theo công thức

$$b_z(\tau) = \frac{B_z(\tau)}{B_z(\infty)} = \frac{B_z(\tau)}{2R_z(0)}. \tag{6.3.15}$$

Do đó, giá trị thống kê của hàm cấu trúc chuẩn hoá được xác định theo công thức

$$\tilde{b}_z(\tau) = \frac{B_x(\tau) + 2\sigma_y^2}{2\sigma_x^2 + 2\sigma_y^2} = \frac{2\sigma_x^2 b_x(\tau) + 2\sigma_y^2}{2\sigma_x^2 + 2\sigma_y^2} = \frac{b_x(\tau) + \delta}{1+\delta}. \tag{6.3.16}$$

Công thức này đặc trưng cho sự sai lệch của hàm cấu trúc gây nên bởi sai số đo.

Chúng ta đã xét ảnh hưởng của sai số đo trong số liệu ban đầu đến độ chính xác của các đặc trưng thống kê tính được bằng phương pháp lấy trung bình theo tập hợp các thể hiện. Các sai số đo cũng ảnh hưởng đúng như vậy đến độ chính xác của các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên dừng egođic, khi những đặc trưng này được xác định bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện với độ dài đủ lớn.

2. Ảnh hưởng của sự hạn chế số lượng các thể hiện

Khi xác định các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên bằng cách lấy trung bình theo tập các thể hiện, chúng ta chỉ có một số lượng hạn chế các thể hiện, thường là không lớn.

Như đã biết trong thống kê toán học, độ chính xác của việc xác định các đại lượng này phụ thuộc vào số lượng thể hiện. Đối với những đại lượng ngẫu nhiên phân bố gần chuẩn, sai số bình phương trung bình σ_r của hệ số tương quan được xác định theo công thức

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}, \tag{6.3.17}$$

trong đó r là giá trị thực của hệ số tương quan, n là số lượng các quan trắc độc lập.

Từ công thức (6.3.17) thấy rằng, đại lượng σ_r phụ thuộc đáng kể vào giá trị của hệ số tương quan. Ký hiệu

$$\gamma = \frac{\sigma_r}{r} = \frac{1-r^2}{r\sqrt{n-1}}, \tag{6.3.18}$$

ta nhận được:

với $r = 0{,}9$ $\gamma = \frac{0{,}2}{\sqrt{n-1}}$, với $r = 0{,}5$ $\gamma = \frac{1{,}5}{\sqrt{n-1}}$, với $r = 0{,}1$ $\gamma = \frac{9{,}9}{\sqrt{n-1}}$.

Điều này cho thấy, giá trị thống kê của các hệ số tương quan đối với các cặp lát cắt của hàm ngẫu nhiên liên hệ chặt chẽ với nhau tin cậy hơn so với trường hợp các lát cắt liên hệ yếu.

Đối với những quá trình ngẫu nhiên gặp trong khí tượng thủy văn, mối liên hệ tương quan thường giảm khá nhanh khi tham số τ tăng.

Như vậy, các giá trị $R(\tau)$ nhận được theo số liệu thực nghiệm sẽ chính xác hơn với những trị số τ nhỏ và ít tin cậy khi τ lớn. Xuất phát từ đó, khi xấp xỉ các giá trị nhận được của hàm tương quan $R(\tau)$ bằng biểu thức giải tích cần phải đạt được sự phù hợp tốt giữa các giá trị thực nghiệm và giá trị làm trơn tại những τ không lớn, nếu cho rằng sự sai lệch tại những trị số τ lớn chủ yếu là do ngẫu nhiên.

Đối với những hàm ngẫu nhiên dừng, các giá trị của hàm tương quan có thể được chính xác hoá bằng cách tính chúng cho những trị số τ giống nhau lấy trên những đoạn khác nhau của khoảng biến thiên của đối số t, và sau đó lấy trung bình chúng. Trong trường hợp này sai số bình phương trung bình của chúng sẽ giảm. Mức độ giảm của sai số này càng đáng kể nếu các lát cắt của hàm ngẫu nhiên trên những đoạn của khoảng biến thiên t, mà tại đó ta tính các trị số $r(\tau)$ để lấy trung bình, càng ít liên hệ với nhau.

Khi để ý đến điều đó, cần lặp lại việc tính toán $r(\tau)$ qua các khoảng biến thiên đủ lớn của tham số t, sao cho mối liên hệ tương quan giữa các lát cắt trong những khoảng đó trở nên không đáng kể.

Nếu các hệ số tương quan tham gia vào phép lấy trung bình được tính trên những đoạn thực tế độc lập với nhau, thì như đã biết, sai số bình phương trung bình σ_r sẽ giảm đi $\sqrt{k}$ lần, với k là số giá trị $r(\tau)$ đem lấy trung bình. Bây giờ ta sẽ xét sai số xuất hiện khi xác định các đặc trưng thống kê bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện.

3. Ảnh hưởng của sự hạn chế khoảng ghi thể hiện

Khi xác định các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên dừng có tính egođic bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện sẽ xuất hiện sai số do chúng ta chỉ có một bản ghi thể hiện trên một khoảng biến thiên hữu hạn nào đó của đối số mà không phải trên toàn bộ khoảng vô hạn.

Khi đó mỗi đặc trưng thống kê sẽ là một đại lượng ngẫu nhiên, và ta quan tâm tới mức độ sai lệch có thể của đại lượng này khỏi giá trị thực của nó. Vì vậy, đương nhiên ta sẽ lấy bình phương trung bình độ lệch của các giá trị có thể của đặc trưng thống kê so với giá trị thực làm thước đo độ chính xác của đặc trưng thống kê này.

Giả sử giá trị thực của đặc trưng là a, còn giá trị thống kê của nó nhận được bằng việc lấy trung bình theo một thể hiện là một trong những giá trị có thể của đại lượng ngẫu nhiên $\widetilde{A}$, khi đó để làm thước đo độ chính xác người ta dùng đại lượng

$$\sigma = \sqrt{M\left[\left(\widetilde{A} - a\right)^2\right]}. \tag{6.3.19}$$

Khi xác định giá trị thống kê của kỳ vọng toán học $\widetilde{m}_x$ bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện của hàm ngẫu nhiên $X(t)$ cho trên khoảng $[0, T]$, theo (2.6.1) thì đại lượng (6.3.19) sẽ được xác định dưới dạng

$$\sigma_m^2 = M\left\{\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt - m_x\right]^2\right\} = M\left\{\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \left[X(t_1)\,dt - m_x\right]\left[X(t_2)dt - m_x\right]dt_1 dt_2\right\} =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_x(t_2 - t_1)dt_1 dt_2, \tag{6.3.20}$$

trong đó m_x là giá trị thực của kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên $X(t)$, còn $R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$ là hàm tương quan của nó. Ta biến đổi tích phân hai lớp trong (6.3.20)

$$J = \int_0^T\int_0^T R_x(t_2 - t_1)dt_1 dt_2 = \int_0^T\left[\int_0^T R_x(t_2 - t_1)dt_2\right]dt_1. \tag{6.3.21}$$

Thay biến $t_2 - t_1 = \tau$ ở tích phân bên trong

$$J = \int_0^T\left[\int_{-t_1}^{T-t_1} R_x(\tau)d\tau\right]dt \tag{6.3.22}$$

và lấy tích phân từng phần, ta được

$$J = T\int_0^T R_x(\tau)d\tau - \int_0^T \tau R_x(\tau)d\tau - \int_0^T tR_x(T - t)dt. \tag{6.3.23}$$

Sau khi thay $T - t = \tau$ trong tích phân cuối cùng của (6.3.23)

$$J = 2\int_0^T (T - \tau)R_x(\tau)d\tau. \tag{6.3.24}$$

Thế (6.3.24) vào (6.3.20), cuối cùng ta có

$$\sigma_m^2 = \frac{2}{T}\int_0^T\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)R_x(\tau)d\tau. \tag{6.3.25}$$

Từ (6.3.25) thấy rằng độ lệch bình phương trung bình σ_m, đặc trưng cho độ chính xác của việc xác định giá trị thống kê của kỳ vọng toán học, phụ thuộc vào khoảng lấy trung bình T và phụ thuộc vào dạng của hàm tương quan $R_x(\tau)$.

Ví dụ, đối với hàm ngẫu nhiên $X(t)$ có hàm tương quan

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \tag{6.3.26}$$

$$\sigma_m^2 = \frac{2D_x}{\alpha T}\int_0^T\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)e^{-\alpha\tau}d\tau = \frac{2D_x}{\alpha T}\left[1 - \frac{1}{\alpha T}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)\right]. \tag{6.3.27}$$

Từ đó thấy rằng, đại lượng σ_m^2 phụ thuộc vào tích αT. Với những giá trị αT lớn công thức xấp xỉ sau đây sẽ đúng

$$\sigma_m^2 \approx \frac{2D_x}{\alpha T} \tag{6.3.28}$$

hay

$$\frac{\sigma_m}{\sqrt{D_x}} \approx \sqrt{\frac{2}{\alpha T}}\,. \tag{6.3.29}$$

Công thức (6.3.29) cho thấy rằng, tỷ trọng tương đối của độ lệch bình phương trung bình của sai số xác định giá trị thống kê của kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên $X(t)$ so với độ lệch bình phương trung bình của nó $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ tỷ lệ nghịch với căn bậc hai của khoảng lấy trung bình T. Từ (6.3.29), với trị số α đã cho, có thể tìm được độ dài cần thiết của khoảng T khi cho trước sai số tương đối cho phép $\frac{\sigma_m}{\sigma_x}$.

Khi xác định giá trị thống kê của hàm tương quan $\tilde{R}_x(\tau)$ bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện của hàm ngẫu nhiên $X(t)$ cho trên khoảng $[0,T]$, theo (2.6.2), đại lượng (6.3.19) sẽ được xác định dưới dạng

$$\sigma_R^2(\tau) = M\left\{\left[\tilde{R}_x(\tau) - R_x(\tau)\right]^2\right\} =$$

$$= M\left\{\left[\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[X(t) - m_x][X(t+\tau) - m_x]dt - R_x(\tau)\right]^2\right\}. \tag{6.3.30}$$

Đối với trường hợp hàm ngẫu nhiên dừng phân phối chuẩn, bằng cách biến đổi biểu thức (6.3.30), ví dụ như trong [16] đã thực hiện, có thể nhận được công thức gần đúng để tính $\sigma_R^2(\tau)$ dưới dạng

$$\sigma_R^2(\tau) \approx \frac{2}{T-\tau}\int_0^{\infty}\left[R_x^2(\tau_1) + R_x(\tau_1+\tau)R_x(\tau_1-\tau)\right]d\tau_1\,. \tag{6.3.31}$$

Công thức này đúng đối với những giá trị T lớn và với những giá trị τ mà tại đó $R(\tau)$ còn có giá trị đáng kể.

Sử dụng công thức (6.3.31) có thể nhận được giá trị $\sigma_R^2(\tau)$ đối với hàm ngẫu nhiên có hàm tương quan (6.3.26) dưới dạng

$$\sigma_R^2(\tau) \approx \frac{D_x}{\alpha(T-\tau)}\left[1 + (1+2\alpha\tau)\,e^{-2\alpha\tau}\right]. \tag{6.3.32}$$

Đặc biệt, với $\tau = 0$ ta được công thức gần đúng đối với độ lệch bình phương trung bình của phương sai thống kê

$$\sigma_D^2 \approx \frac{D_x}{\alpha T}\,. \tag{6.3.33}$$

Từ đó thấy rằng tỷ số giữa σ_D và độ lệch bình phương trung bình σ_x của hàm ngẫu nhiên tỷ lệ nghịch với căn bậc hai của khoảng lấy trung bình T.

4. Ảnh hưởng của phép thay thế tích phân bằng tổng tích phân

Như đã chỉ ra ở trên, khi xác định các đặc trưng thống kê của hàm ngẫu nhiên bằng cách lấy trung bình theo một thể hiện sẽ xuất hiện sai số do tích phân xác định trong các công thức (2.6.1) và (2.6.2) bị thay thế bằng tổng tích phân (6.2.1) và (6.2.2).

Theo (6.3.19), độ lệch bình phương trung bình σ_m, đặc trưng cho độ chính xác của việc xác định kỳ vọng toán học thống kê, được xác định dưới dạng

$$\sigma_m^2 = M\left\{\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X(t_j) - m_x\right]^2\right\} = = \frac{1}{n^2} M\left\{\left[\sum_{j=1}^{n} X(t_j)\right]^2\right\} - \frac{2m_x}{n}\sum_{j=1}^{n} M\left[X(t_j)\right] + m_x^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M\left[X(t_j)X(t_k)\right] - \frac{2m_x}{n} n m_x + m_x^2 = = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M\left\{\left[X(t_j) - m_x\right]\left[X(t_k) - m_x\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_x(t_k - t_j)\,. \tag{6.3.34}$$

Khi phân chia khoảng lấy trung bình T ra làm n phần bằng nhau thì $t_k = k\frac{T}{n}$, $t_j = j\frac{T}{n}$, do đó

$$t_k - t_j = (k-j)\frac{T}{n} = (k-j)\Delta, \tag{6.3.35}$$

trong đó $\Delta = \frac{T}{n}$.

Khi sử dụng (6.3.35) có thể viết (6.3.34) dưới dạng

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_x\left[(k-j)\Delta\right]. \tag{6.3.36}$$

Theo công thức này, khi biết hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên $R_x(\tau)$ có thể ước lượng được đại lượng σ_m ứng với bước chia Δ đã chọn, hoặc nếu cho trước đại lượng σ_m cho phép có thể chọn được bước chia tương ứng với nó.

Cụ thể, đối với hàm tương quan (6.3.26) đại lượng σ_m^2 tính theo công thức (6.3.36) sẽ bằng [16]

$$\sigma_m^2 = D_x\left[\frac{\Delta}{T} + \frac{2\Delta}{T}\frac{1}{e^{\alpha\Delta} - 1} - \frac{2\Delta^2}{T^2}\frac{e^{2\Delta}}{\left(e^{2\Delta} - 1\right)^2}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)\right]. \tag{6.3.37}$$

Từ đây thấy rằng, độ lệch bình phương trung bình của giá trị thống kê của kỳ vọng toán học so với giá trị thực của nó phụ thuộc vào khoảng lấy trung bình T và bước chia Δ của khoảng đó khi thay thế tích phân xác định bằng tổng tích phân.

Trong công thức (6.3.37), khi giảm vô hạn bước chia, tức là khi $\Delta \to 0\,(n \to \infty)$:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta}{T} = 0, \quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{2\Delta}{T}\frac{1}{e^{\alpha\Delta} - 1} = \frac{2}{\alpha\Delta}, \quad \lim_{\Delta\to 0}\frac{2\Delta^2}{\alpha T}\frac{e^{\alpha\Delta}}{\left(e^{\alpha\Delta} - 1\right)} = \frac{2}{T^2\alpha^2}.$$

Từ đó

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma_m^2 = \frac{D_x}{\alpha T}\left[1 - \frac{1}{\alpha T}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)\right]. \tag{6.3.38}$$

Từ (6.3.38) thấy rằng, khi giá trị bước chia Δ nhỏ, đại lượng σ_m sẽ giảm khi αT tăng.

Với những giá trị Δ đủ nhỏ và αT đủ lớn, ta có công thức gần đúng

$$\sigma_m \approx \sqrt{\frac{D_x}{\alpha T}}\,. \tag{6.3.39}$$

Tương ứng với (6.3.19) và (6.2.2), độ lệch bình phương trung bình của giá trị thống kê của hàm tương quan so với giá trị thực của nó do việc thay thế tích phân bằng tổng tích phân được xác định theo công thức

$$\sigma_R^2 = M\left\{\left[\tilde{R}_x(\tau) - R_x(\tau)\right]^2\right\} =$$

$$M\left\{\left[\frac{1}{n-k}\sum_{j=1}^{n-k}\left[X(t_j) - m_x\right]\left[X(t_j + k\frac{T}{n}) - m_x\right] - R_x(\tau)\right]^2\right\}. \quad (6.3.40)$$

Khi sử dụng phương pháp đơn giản hoá chính biểu thức (6.3.40) và cả cho biểu thức (6.3.30) mà (6.3.40) chỉ khác với nó ở chỗ tích phân trong đó được thay bằng tổng tích phân, có thể nhận được công thức gần đúng đối với hàm ngẫu nhiên phân bố chuẩn

$$\sigma_R^2 \approx \frac{1}{n-k}\left\{R_x^2(0) + R_x^2\left(k\frac{T}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{j=1}^{n}\left[R_x^2\left(j\frac{T}{n}\right) + R_x^2\left(j\frac{T}{n} + k\frac{T}{n}\right)R_x\left(j\frac{T}{n} + k\frac{T}{n}\right)\right]\right\}. \quad (6.3.41)$$

Công thức này đúng đối với khoảng lấy trung bình T khá lớn và với những trị số của k mà ở đó hàm tương quan $R_x\left(k\frac{T}{n}\right)$ vẫn còn đạt giá trị đáng kể.

Đối với quá trình ngẫu nhiên có hàm tương quan (6.3.26), đại lượng σ_R^2, tính theo công thức (6.3.41), bằng [16]

$$\sigma_R^2 \approx \frac{D_x^2}{n-k}\left\{\frac{1+e^{-2\alpha\Delta}}{1-e^{-2\alpha\Delta}}\left(1 + e^{-2k\Delta}\right) + 2ke^{-2\alpha k\Delta}\right\}. \quad (6.3.42)$$

Đặc biệt, khi $k = 0$ ta nhận được công thức gần đúng đối với độ lệch bình phương trung bình của phương sai thống kê

$$\sigma_D \approx D_x\sqrt{\frac{2}{n}\frac{1+e^{-2\alpha\Delta}}{1-e^{-2\alpha\Delta}}}. \quad (6.3.43)$$

Có thể nhận được các công thức tương tự đối với độ lệch bình phương trung bình σ_B^2, xuất hiện do sự hạn chế khoảng lấy trung bình T của thể hiện cũng như do việc thay thế tích phân bằng tổng tích phân, của giá trị thống kê hàm cấu trúc so với giá trị thực của nó. Các công thức này và những ước lượng tương ứng đối với quá trình ngẫu nhiên có hàm tương quan (6.3.26) được trình bày, chẳng hạn, trong công trình [1].

Ví dụ

Ta sẽ minh hoạ hệ phương pháp đã trình bày bằng ví dụ chỉnh lý thống kê số liệu gió cao không trên mực 250 mb, được quan trắc bằng bóng thám không, trong thời kỳ từ tháng 9/1957 đến tháng 4/1959 ở Avakuni (Nhật Bản). Trường vectơ vận tốc gió trên mực này được xem là trường ngẫu nhiên vectơ phẳng.

Có tất cả 86 lần thả bóng được tiến hành, tức là có 86 thể hiện của trường ngẫu nhiên. Độ dài thời gian các lần thả bóng khác nhau, dài nhất là 92 giờ. Đại lượng vectơ vận tốc gió được ghi với thời đoạn 6 giờ một, tức là có 15 lát cắt của trường ngẫu nhiên.

Tại thời điểm ban đầu máy thám không ở vị trí điểm $N_o(\vec{\rho}_o)$ của mặt phẳng, sau thời gian t nó dịch chuyển đến điểm $N(\vec{\rho})$, tức là ta sẽ xét trường ngẫu nhiên trong miền không–thời gian. Do đó các đặc trưng thống kê của nó, như kỳ vọng toán học và hàm tương quan, là hàm của toạ độ không gian và thời gian.

Nhiều công trình nghiên cứu trường gió chứng tỏ rằng, trong giới hạn của khoảng cách và khoảng thời gian xảy ra ở trường hợp trên đây, trường gió trong mặt phẳng ngang thực tế có thể xem là đồng nhất và đẳng hướng với độ chính xác chấp nhận được. Vì vậy (xem mục 2.14), có thể đặc trưng nó bằng hai hàm tương quan: hàm tương quan dọc $G(1)$ và hàm tương quan ngang $F(1)$. Đối với trường gió có thể lấy thành phần vĩ hướng của vectơ gió, mà ta ký hiệu là $U(\vec{\rho})$, làm thành phần dọc, còn thành phần kinh hướng $V(\vec{\rho})$ của nó làm thành phần ngang.

Như vậy, bài toán được đưa về việc tìm kỳ vọng toán học và hàm tương quan của các thành phần kinh hướng và vĩ hướng của vectơ gió.

ở mỗi thể hiện, thành phần kinh hướng và vĩ hướng được tính cho tất cả các thời điểm ghi vectơ gió, tức là với thời khoảng 6 giờ.

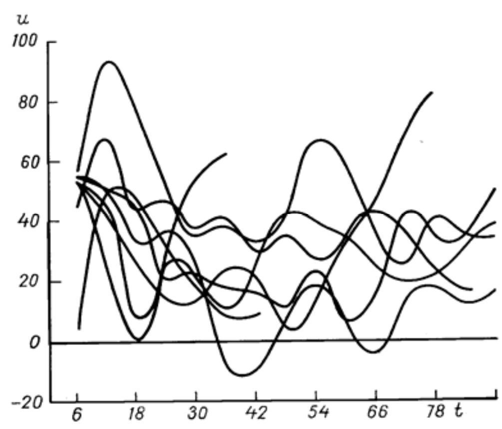
Vì quá trình dịch chuyển của bóng thám không qua các khoảng thời gian này không được ghi lại, nên chúng ta qui ước sẽ chỉ xét thời gian như là một tham số, mặc dù trên thực tế các hàm tương quan thống kê là hàm của hai tham số – khoảng thời gian $\tau = |t_2 - t_1|$ và tương ứng với nó là khoảng cách giữa các điểm $l = |\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|$, tức chúng là hàm tương quan không–thời gian.

Để có khái niệm trực quan về tính chất của hàm ngẫu nhiên đang xét, trên hình 6.3 đã dẫn ra một vài thể hiện của thành phần gió vĩ hướng. Trên hình các giá trị rời rạc của từng thể hiện đã được nối lại bằng các đường liền nét.

Dạng của các đường cong không mâu thuẫn với giả thiết về tính đồng nhất và egođic của hàm ngẫu nhiên được xét. Chúng có dạng dao động ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình chung, hơn nữa cả biên độ trung bình và đặc điểm của các dao động này không biểu hiện sự biến đổi đáng kể theo thời gian. Ngoài ra, điều đó khẳng định dạng hàm tương quan nhận được khi xử lý.

Những tính toán do G. A. Degtiapenko thực hiện trên máy tính điện tử “Uran”. Trong đó chương trình được lập có tính đến độ dài khác nhau của các thể hiện riêng biệt.

Kỳ vọng toán học và phương sai được tính cho từng giá trị tham số t theo các công thức (6.1.3), (6.1.5) bằng cách lấy trung bình theo số các lát cắt thực có của thể hiện. Trong bảng 6.1 đã dẫn ra giá trị kỳ vọng toán học $\tilde{m}_u$ và độ lệch bình phương trung bình $\tilde{\sigma}_u$ đối với từng lát cắt của thành phần vĩ hướng. Từ bảng thấy rằng, $\tilde{m}_u$ không phải là đại lượng không đổi mà có tính chu kỳ nào đó, tức là tính dừng chỉ có thể được chấp nhận với gần đúng nhất định. Các giá trị $\tilde{\sigma}_u$ cũng khác nhau đôi chút.



Hình 6.3

Bảng 6.1

t (giờ)	6	12	18	24	30	36	42	48
$\widetilde{m}_u$ (m/s)	2,0	2,7	-2,2	-2,2	3,0	1,7	-2,6	-1,5
$\widetilde{\sigma}_u$ (m/s)	16	15	13	15	14	13	11	12
t (giờ)	54	60	66	72	78	84	90	
$\widetilde{m}_u$ (m/s)	2,4	2,0	-2,6	-2,2	-0,8	0,4	0,3	
$\widetilde{\sigma}_u$ (m/s)	13	9	8	13	11	8	11	

Để loại bỏ sai số một cách chính xác hơn, đã tính các hàm cấu trúc và hàm tương quan tách biệt nhau theo số liệu thực nghiệm.

Tất cả các thể hiện (các lần thả bóng) đã được chia thành ba nhóm theo giá trị của tốc độ gió: I – 50 km/h; II – 50–100 km/h và III – trên 100 km/h.

Các hàm cấu trúc và hàm tương quan được xác định riêng biệt cho từng thể hiện theo các công thức (6.2.17) và (6.2.6), sau đó lấy trung bình theo tất cả các thể hiện của từng nhóm.

Trên hình 6.4 đưa ra hàm cấu trúc đã trung bình hoá của thành phần vĩ hướng. Từ hình vẽ thấy rằng, giá trị lớn nhất của các hàm cấu trúc đạt được tại $\tau = 30$ giờ. Tiếp theo đó ta thấy hàm cấu trúc giảm. Sự giảm này được giải thích bởi sự hiện diện của tính chu kỳ trong cấu trúc của hàm ngẫu nhiên.

Từ hình 6.4 cũng thấy rằng, các giá trị của hàm cấu trúc nhận được bị sai lệch. Nếu kéo dài chúng đến điểm $\tau = 0$ thì giá trị nhận được sẽ khác không. Những trị số ngoại suy $\widetilde{B}(0)$ này có giá trị bằng hai lần phương sai sai số trong số liệu ban đầu và chúng phải được trừ bỏ khỏi các giá trị của hàm cấu trúc. Chính những giá trị này được sử dụng để chỉnh lý các hàm tương quan thu được. Khi đó giả thiết rằng tại các giá trị τ nhỏ hàm cấu trúc chính xác hơn.

Các hàm tương quan của thành phần vĩ hướng được dẫn ra trên hình 6.5. Từ hình vẽ thấy rằng, các hàm tương quan $\widetilde{R}_u(\tau)$ dần tới 0 khi $\tau \to \infty$, điều đó xác nhận giả thiết về tính egođic của hàm ngẫu nhiên.

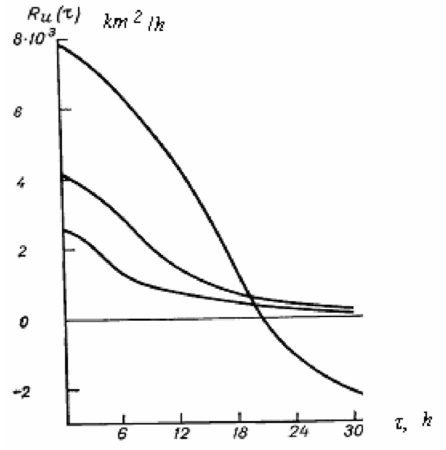
Các hàm tương quan của thành phần vĩ hướng được dẫn ra trên hình 6.5. Từ hình vẽ thấy rằng, các hàm tương quan $\widetilde{R}_u(\tau)$ dần tới 0 khi $\tau \to \infty$, điều đó xác nhận giả thiết về tính egođic của hàm ngẫu nhiên.

Các đồ thị của hàm tương quan tương ứng với nhóm thứ nhất và nhóm thứ hai của những lần thả bóng (khi tốc độ gió nhỏ hơn 100 km/h), làm gợi nhớ tới đồ thị hàm

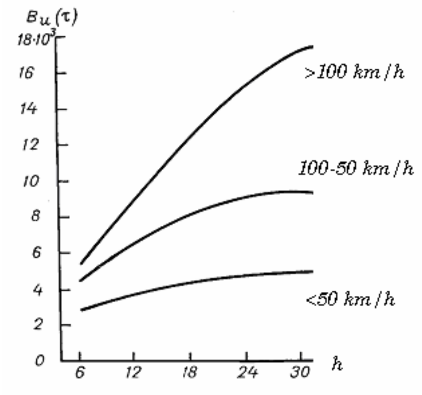
$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}.$$

Đồ thị của hàm tương quan đối với tốc độ gió trên 100 km/h làm gợi nhớ đến đồ thị hàm

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau} \cos\beta\tau.$$



Hình 6.5



Hình 6.4

PHẦN 2 - MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÍ TƯỢNG VÀ THỦY VĂN GIẢI BẰNG CÁC PHƯƠNG PHÁP LÝ THUYẾT HÀM NGẪU NHIÊN

CHƯƠNG 7: NGHIÊN CỨU CẤU TRÚC THỐNG KÊ CỦA CÁC TRƯỜNG KHÍ TƯỢNG

7.1. Nhận xét chung về cấu trúc các trường khí tượng

Đặc điểm của khí quyển là tính chất chuyển động rối hỗn loạn. Các trường yếu tố khí tượng rất linh động. Sự phụ thuộc của các giá trị tức thời của trường vào toạ độ không gian và thời gian rất phức tạp và rối rắm. Hơn nữa, những giá trị đó, khi quan trắc trong cùng những điều kiện như nhau, mỗi lần chúng lại một khác. Do đó, không thể mô tả các trường này theo kiểu cho những giá trị tức thời tại từng điểm không gian và tại từng thời điểm.

Để nghiên cứu cấu trúc các trường yếu tố khí tượng thì quan điểm lý thuyết xác xuất là hợp lý. Theo quan điểm này mỗi trường được xem như một trường ngẫu nhiên và để mô tả nó sẽ sử dụng các phương pháp của lý thuyết hàm ngẫu nhiên.

Cơ sở của quan điểm này là không xem xét những đặc điểm của các giá trị tức thời riêng lẻ, mà khảo sát một số tính chất trung bình của tập hợp thống kê các thể hiện của trường ứng với một tập những điều kiện bên ngoài nhất định nào đó.

Như ta đã thấy ở chương 6, khi xác định bằng thực nghiệm các đặc trưng thống kê của trường ngẫu nhiên, giả thiết được đưa ra là tồn tại một tập hợp thể hiện nào đó của nó ứng với những điều kiện thí nghiệm như nhau, hoặc tồn tại một thể hiện của trường trong miền không gian, thời gian đủ lớn đối với trường hợp trường đồng nhất có tính egodic.

Ta sẽ xét vấn đề thu nhận tập hợp thống kê các thể hiện đối với các trường khí tượng.

Về nguyên tắc, các trường khí tượng không bao giờ lặp lại với cùng những điều kiện bên ngoài. Trong khả năng của mình, nhà khí tượng không bao giờ có được một tập hợp thống kê các hành tinh hoàn toàn tương tự Trái Đất, vì vậy, nói một cách chính xác, các trường khí tượng có thể được gọi là các trường ngẫu nhiên theo nghĩa của lý thuyết hàm ngẫu nhiên chỉ là quy ước.

Trong khí tượng học, một quá trình thống nhất thường được chia làm nhiều phần, và chính các phần này được quy ước chấp nhận là các thể hiện khác nhau, tức là, người ta sử dụng những quan trắc được tiến hành ở những miền không gian khác nhau hoặc tại những thời điểm khác nhau với tư cách là các thể hiện của trường ngẫu nhiên. Khi đó, người ta chấp nhận những quan trắc đã từng được thực hiện ở những miền không gian hay trong những khoảng thời gian tương tự nhau theo một nghĩa nào đó như là các thể hiện tương ứng với những điều kiện bên ngoài như nhau, những quan trắc này có thể được sử dụng để xử lý thống kê.

Trong lý thuyết hàm ngẫu nhiên, ta gọi những tình huống, trong đó các quy luật phân bố của trường ngẫu nhiên được bảo toàn, là những tình huống tương ứng với những điều kiện bên ngoài như nhau. Trên thực tế thường không biết trước các quy luật phân bố đó, vì vậy sự lựa chọn các tình huống tương tự được tiến hành dựa theo kinh nghiệm hàng ngày của nhà khí tượng và các kết quả nghiên cứu trước đó.

Trong từng trường hợp cụ thể, kiến thức nhận được về cấu trúc của trường được xét phụ thuộc vào việc chọn các tình huống tương tự để lấy trung bình ra sao. Một yêu cầu khác đối với tập các thể hiện là tính độc lập của các thể hiện riêng biệt. Nếu các thể hiện liên quan chặt chẽ với nhau, thì tất cả chúng sẽ chứa rất ít thông tin mới so với mỗi một thể hiện trong chúng, và do đó, tăng số lượng thể hiện trong trường hợp này không làm chính xác thêm một cách đáng kể các đặc trưng thống kê.

Xuất phát từ những đòi hỏi trên và bản chất vật lý của các quá trình khí tượng, có thể nêu ra một số điểm cơ bản cần phải tính đến khi gộp các số liệu thực nghiệm vào một tập hợp thống kê.

Khi chọn các thời điểm ứng với những tình huống tương tự, phải xuất phát từ sự tồn tại biến trình ngày và năm của các yếu tố khí tượng. Sự hiện diện của biến trình ngày dẫn đến có thể xem các thời điểm ứng với một thời gian nhất định trong ngày là tương tự. Do có biến trình năm, không thể coi những thời điểm ứng với các mùa khác nhau trong năm là những tình huống tương tự. Nói đúng ra, chỉ có thể coi những thể hiện nhận được trong cùng một ngày, một giờ của từng năm là tương tự. Tuy nhiên thực tế điều này bất lợi, vì khi đó ta sẽ chỉ có thể làm việc với một tập rất nhỏ các thể hiện, việc lấy trung bình theo tập này sẽ không đảm bảo cho việc nhận các đặc trưng thống kê đủ tin cậy. Do đó, trong thực tế người ta thường nhóm tất cả những thể hiện không phải ứng với một ngày, mà ứng với một khoảng nào đó của năm, ví dụ một tháng hay một mùa, vào làm một tập, tức là nhóm vào một tập tất cả những thể hiện có được nhờ quan trắc trong nhiều năm, ứng với thời gian nhất định của ngày và mùa khảo sát. Muốn cho các thể hiện độc lập, phải chọn khoảng thời gian giữa các quan trắc đủ lớn. Ví dụ, được biết rằng trong một ngày áp suất không khí biến đổi ít, vậy có sự phụ thuộc đáng kể giữa các trị số của nó tại những thời điểm khác nhau trong ngày. Mối phụ thuộc này duy trì rõ rệt cả trong hai ngày tiếp sau, do đó khi chọn tập thể hiện của trường áp suất thường người ta sử dụng những quan trắc cách nhau không ít hơn ba ngày.

Ngoài việc tính tới biến trình ngày và năm, khi gộp các thể hiện vào thành một tập thống kê có thể tiến hành phân loại bổ sung các số liệu thực nghiệm theo một số dấu hiệu đặc biệt. Chẳng hạn, khi nghiên cứu trường gió, người ta phân chia các thể hiện tương ứng với những điều kiện hoàn lưu khác nhau, ví dụ như tách riêng những dòng xiết, hoặc phân lớp các thể hiện theo độ lớn tốc độ gió v.v... Ngay cả trong nghiên cứu trường áp suất (địa thế vị) đôi khi người ta cũng tiến hành phân chia theo dạng hoàn lưu.

Khi gộp các tập không gian tương tự, tức các thể hiện nhận được ở những điểm địa lý khác nhau, người ta xuất phát từ chỗ những điểm đó phải thuộc các vùng khí hậu giống nhau.

Khi nghiên cứu cấu trúc không gian các trường khí tượng, vấn đề hết sức quan trọng là phải tuân thủ những điều kiện đồng nhất đẳng hướng của trường. Điều này gây nên những hạn chế nhất định về độ rộng không gian của trường được nghiên cứu. A.N. Kolmogorov [11] đã chỉ ra rằng, trong dòng rối thực, mà nói chung là không đồng nhất và không đẳng hướng, có thể tách ra một phạm vi, trong đó tính đồng nhất, đẳng hướng của các trường khí tượng được thoả mãn một cách gần đúng. Những trường như vậy gọi là đồng nhất và đẳng hướng địa phương.

Tuỳ thuộc vào quy mô của các trường được khảo sát, trong khí tượng học người ta chia ra các cấu trúc qui mô vi mô, qui mô vừa và qui mô vĩ mô.

Cấu trúc vi mô mô tả đặc điểm của trường trong khoảng từ vài phần milimét đến vài trăm mét. Trong khoảng này tính đồng nhất và đẳng hướng địa phương thoả mãn theo cả ba chiều.

Cấu trúc thống kê qui mô vừa mô tả những đặc điểm của trường trong khoảng từ một kilômét đến hàng chục kilômét. Trong khoảng này biểu lộ rõ sự khác nhau giữa các phương thẳng đứng và phương ngang. Tính đồng nhất và đẳng hướng chỉ thoả mãn một cách gần đúng theo phương ngang.

Cấu trúc thống kê vĩ mô mô tả sự thay đổi và những mối liên hệ tương hỗ khi qui mô không gian cỡ hàng trăm kilômét hoặc lớn hơn. Các quá trình vĩ mô liên quan tới những quá trình vận động khí quyển mang tính chất synop và thậm chí có tính chất toàn cầu, bản chất vật lý của chúng căn bản khác với những thăng giáng rối hỗn loạn quy mô nhỏ.

Trong nhiều trường hợp việc xem xét các quá trình vĩ mô như các quá trình ngẫu nhiên và mô tả chúng tương tự với các quá trình quy mô nhỏ vẫn tỏ ra thuận tiện. Khi đó trao đổi rối vĩ mô được xét giống như một loại của quá trình qui mô nhỏ. Tuy nhiên, sự tương tự này có tính chất hình thức. Trong phạm vi này các điều kiện đồng nhất đẳng hướng chỉ được thoả mãn một cách gần đúng rất thô trong mặt phẳng ngang. Trong phạm vi rối qui mô vừa và vĩ mô, ta chỉ có thể nói về tính đồng nhất đẳng hướng đối với độ lệch của các yếu tố khí tượng so với chuẩn khí hậu, vì bản thân các chuẩn khí hậu trong những quy mô đó có thể khác nhau đáng kể. ở đây, thực tế không hy vọng sử dụng được tính egodic, mà như đã thấy trong chương 2, tính chất này cho phép xác định các đặc trưng thống kê dựa trên một thể hiện đủ dài, làm giảm nhẹ đáng kể việc khảo sát trường đồng nhất. Thực vậy, kỳ vọng toán học của trường khí tượng phụ thuộc vào toạ độ, do đó để tính các kỳ vọng toán học không thể dùng một thể hiện, mà phải có nhiều thể hiện. Ngoài ra, khi nghiên cứu thực nghiệm cấu trúc các trường khí tượng quy mô lớn, người ta sử dụng những số liệu quan trắc tại các trạm khí tượng và gộp lại thành một tập thống kê, số lượng các trạm này trong một vùng không gian thường không nhiều, tức là chúng ta chỉ có những giá trị của thể hiện tại một số ít các điểm gián đoạn, và do đó, việc lấy trung bình dựa theo một thể hiện sẽ không hiệu quả.

Nghiên cứu cấu trúc trường là xác định các đặc trưng thống kê của nó, như kỳ vọng toán học, hàm tương quan hay hàm cấu trúc. Đó là những đặc trưng cần thiết khi giải quyết nhiều bài toán khác nhau.

Trên cơ sở những số liệu này người ta tiến hành phân tích khách quan và làm trơn các trường khí tượng cho mục đích dự báo thời tiết, tiến hành tối ưu hoá sự phân bố mạng lưới trạm khí tượng, đánh giá các thành phần khác nhau trong các phương trình động lực học khí quyển, giải quyết các vấn đề ngoại suy số liệu khí tượng v.v...

Do nhu cầu hiểu biết ngày càng tăng về cấu trúc thống kê trường các yếu tố khí tượng, trong những năm gần đây đã có hàng loạt công trình về xử lý thực nghiệm khối lượng đồ sộ các tài liệu quan trắc khí tượng đã tích luỹ, và những tài liệu đó được dùng trong chương này.

Trong những công trình nghiên cứu đầu tiên, tất cả công việc tính toán đều được thực hiện bằng tay, điều này đương nhiên hạn chế khối lượng tài liệu đưa vào xử lý và không cho phép nhận được những kết quả đủ tin cậy. Từ năm 1963 người ta bắt đầu sử dụng rộng rãi máy tính điện tử trong công tác này. Trong đó, phương pháp sử dụng máy tính và lập chương trình để nghiên cứu cấu trúc thống kê của các trường khí tượng không gian do L.X. Gandin và các tác giả khác đề xuất [42, 44] đóng vai trò quan trọng.

7.2. Cấu trúc thống kê của trường địa thế vị

Các vấn đề nghiên cứu thực nghiệm cấu trúc trường địa thế vị được đề cập trong nhiều công trình [41-44, 46, 50, 75, 78–80, 86].

Việc xác định cấu trúc thống kê trường khí tượng (xem mục 7.1) cần phải bắt đầu từ phân tích tài liệu thực nghiệm hiện có và qui các thể hiện ứng với những tình huống tương tự về một tập thống kê.

Khi nghiên cứu trường áp suất, người ta coi các điểm trên địa cầu có cùng vĩ độ và chỉ khác nhau về kinh độ là những điểm tương ứng với những tình huống tương tự.

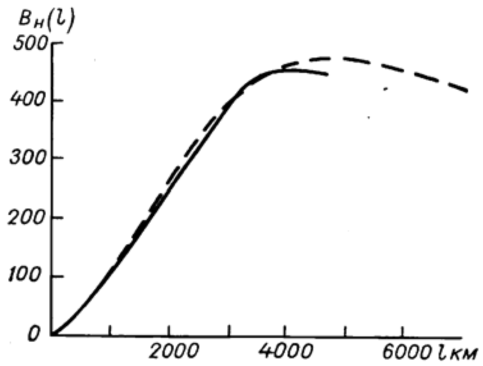
Các công trình nghiên cứu [41] đã chỉ ra rằng, ở những vĩ độ trung bình, điều kiện đồng nhất và đẳng hướng đối với hàm cấu trúc của trường địa thế vị được thoả mãn khá tốt. Tuy nhiên phương sai của trường vẫn có những biến thiên theo kinh độ. Thông thường sự phụ thuộc của các đặc trưng thống kê vào kinh độ không được chú ý, tức trường được coi là đồng nhất theo kinh độ. Khi đó từ những lập luận người ta cho rằng sự phụ thuộc vào kinh độ không mạnh lắm, hơn nữa giả thiết về sự đồng nhất theo kinh độ làm giảm nhẹ rất nhiều công việc xử lý thống kê, vì có thể coi tất cả các trạm quan trắc nằm gần một vĩ tuyến là tương ứng với các tình huống tương tự và nhờ đó tăng đáng kể số lượng thể hiện để lấy trung bình.

Trong điều kiện như vậy, đương nhiên các đặc trưng nhận được sẽ là những đại lượng trung bình theo kinh độ. Trong công trình [78] đã sử dụng tài liệu quan trắc của 20 trạm khí tượng thuộc lãnh thổ Âu–á nằm gần dọc theo vĩ tuyến 55° VB trong bốn mùa đông các năm 1955–1959. Khoảng cách nhỏ nhất giữa các trạm bằng 210 km và lớn nhất gần 5500 km. Số liệu được lấy từ các bản đồ phân tích vào kỳ 3 giờ và cách nhau ba ngày một.

Trong công trình [43] đã sử dụng số liệu quan trắc tại các trạm khí tượng ở các vĩ độ trung bình trên lãnh thổ châu Âu và một phần Tây Xibiri. ở đây, để phát hiện sự phụ thuộc của các đặc trưng thống kê của trường vào dạng hoàn lưu đã phân dữ liệu thực nghiệm thành những tập thống kê riêng biệt ứng với các dạng hoàn lưu khác nhau (dạng phía tây, dạng kinh tuyến và dạng phía đông) theo sự phân loại hoàn lưu chung của G. Ia. Vangengheim.

Người ta đã xác định được rằng giá trị trung bình (chuẩn) của độ cao H khác biệt đáng kể đối với những dạng hoàn lưu khác nhau. Sự khác biệt giữa các hàm cấu trúc đối với các dạng hoàn lưu khác nhau tỏ ra không lớn lắm và có thể bỏ qua, tức các hàm cấu trúc nhận được theo những dạng hoàn lưu khác nhau có thể đem lấy trung bình và sử dụng một hàm cấu trúc duy nhất cho tất cả các dạng hoàn lưu. Hàm cấu trúc độ cao mực 500 mb được trung bình hoá theo tất cả các kiểu hoàn lưu lấy từ [43] được dẫn trên hình 7.1 (đường liền).

Theo đồ thị của hàm cấu trúc thống kê nhận được không thể xác định một cách tin cậy trị số bão hoà, tức nhận làm trị số $B_H(\infty)$ của hàm cấu trúc. Một phương pháp gián tiếp ước lượng trị số hàm cấu trúc tại vô cùng là phương pháp xấp xỉ giá trị thống kê của nó nhờ mối phụ thuộc giải tích.



Hình 7.1

Người ta đã xét một số mối phụ thuộc giải tích như vậy và thấy rằng phù hợp hơn cả với hàm cấu trúc thống kê (xem hình 7.1, đường gạch nối) là mối phụ thuộc

$$B_H(\ell) = 400\left(1 - e^{-0,188\ell^{1,3}} \cos 0,54\ell\right). \qquad (7.2.1)$$

Nhờ hàm cấu trúc xấp xỉ (7.2.1) đã xác định được hàm tương quan tương ứng

$$R_H(\ell) = 200\, e^{-0,188\ell^{1,3}} \cos 0,54\, \ell\,. \qquad (7.2.2)$$

Trong công trình [78] đã tính trực tiếp các hàm tương quan độ cao trường địa thế vị theo số liệu thực nghiệm.

Ở đây sự khác biệt của hệ phương pháp dùng trong [78] so với các công trình trước đó là ở chỗ trong công trình này trường địa thế vị được xem xét không phải như một trường phẳng, mà như một trường không gian. Vì trường địa thế vị ba chiều có thể xem là đẳng hướng một cách gần đúng chỉ theo phương ngang, nên các hàm tương quan của trường này sẽ phụ thuộc vào ba biến – khoảng cách ngang ℓ giữa các điểm quan trắc và hai độ cao (hai áp suất p_1 và p_2).

Vì trong khí tượng học sử dụng nhiều mặt đẳng áp cố định, nên biến p đã được gán một loạt các trị số gián đoạn, và hàm ba biến $R(\ell, p_1, p_2)$ đã được quy về một số hàm một biến ℓ $R_{ij}(\ell) = R(\ell, p_i, p_j)$ nào đó và các hàm này đã được xác định theo các số liệu thực nghiệm. Năm mặt đẳng áp (1000, 850, 700, 500 và 300 mb) đã được chọn và tính 15 hàm tương quan $R_{ij}(\ell)$. Khi $i = j$ sẽ nhận được các hàm tự tương quan của trường địa thế vị $H(p_i)$, khi $i \neq j$ – các hàm tương quan quan hệ giữa hai trường $H(p_i)$ và $H(p_j)$.

Những giá trị thống kê tính được của các hàm tự tương quan được xấp xỉ bằng các biểu thức giải tích dạng

$$R_H(\ell) = De^{-\alpha\ell}\cos\beta\ell\,; \tag{7.2.3}$$

$$R_H(\ell) = De^{-\alpha\ell}J_0(\beta\ell). \tag{7.2.4}$$

Trong chương 3 ta đã thấy rằng hàm (7.2.3) chỉ có phổ một chiều không âm tại mọi nơi, còn mật độ phổ hai và ba chiều của nó không âm không phải tại tất cả mọi giá trị của các hệ số α và β, mà chỉ khi giữa chúng có mối quan hệ nhất định, nhưng quan hệ này không thoả mãn với những hàm tương quan thống kê nhận được. Vì vậy, nói đúng ra, hàm (7.2.3) không thể dùng làm hàm hàm tương quan của trường đồng nhất hai chiều. Có thể chỉ ra rằng mật độ phổ hai chiều của hàm (7.2.4) là hàm dương hoàn toàn, tức hàm này có thể dùng làm hàm tương quan của trường. Tuy nhiên, trong công trình này đã sử dụng các hàm dạng (7.2.3) để xấp xỉ khi tính đến sự phức tạp của việc sử dụng mối phụ thuộc (7.2.4) và luôn luôn có thể chọn được các tham số của hàm (7.2.4) sao cho đồ thị của nó gần như trùng với đồ thị của hàm (7.2.3) (khi ℓ không quá lớn).

Ví dụ, đối với H_{500} đã nhận được hàm tương quan

$$R_H(\ell) = 235\, e^{-0{,}29\ell}\cos 0{,}70\,\ell\,. \tag{7.2.5}$$

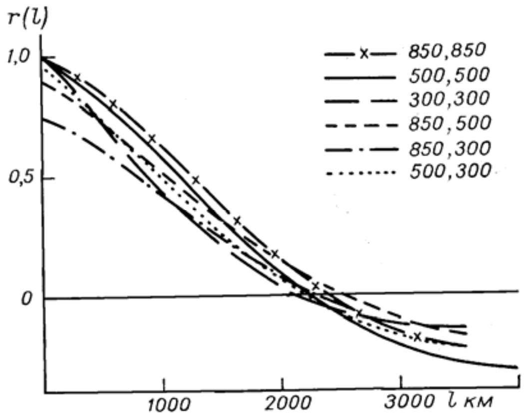
Những giá trị thống kê của các hàm tương quan quan hệ cũng được xấp xỉ bằng mối liên hệ (7.2.3). Việc chọn các hàm (7.2.3) để xấp xỉ là do các hàm tương quan quan hệ thống kê nhận được có dạng rất giống với các hàm tự tương quan.

Trên hình 7.2 dẫn ra các hàm tự tương quan chuẩn hoá và các hàm tương quan quan hệ chuẩn hoá được xấp xỉ bằng mối phụ thuộc (7.2.3) tương ứng với độ cao của các mặt đẳng áp 850, 500 và 300 mb.

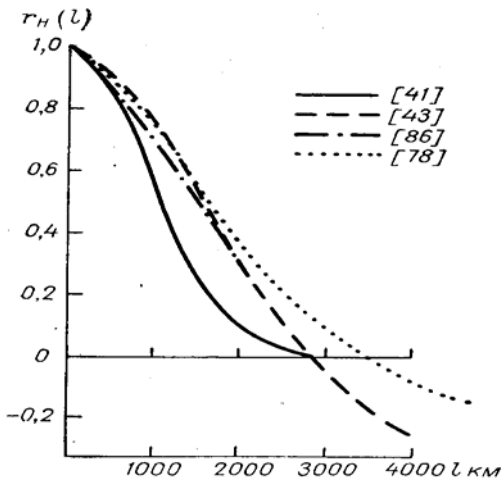
Giá trị hàm tương quan chuẩn hoá của trường địa thế vị H_{500} của một số tác giả được dẫn ra trên hình 7.3.

Sự khác nhau của các hàm tương quan nhận được có lẽ được giải thích bởi đặc điểm của số liệu thực nghiệm đã sử dụng, tức bởi sự khác nhau của các vùng địa lý và mùa quan trắc cũng như sự hạn chế về số lượng các thể hiện và tính không đồng nhất của trường.

Sự sai khác đặc biệt rõ nét khi khoảng cách ℓ lớn, tại đó số cặp trạm được dùng để xử lý ít nhất, còn tính bất đồng nhất thể hiện mạnh nhất.



Hình 7.2



Hình 7.3

7.3. Cấu trúc thống kê của trường nhiệt độ không khí

Những số liệu thực nghiệm đầy đủ và khách quan nhất về cấu trúc vĩ mô trường nhiệt độ không khí có trong các công trình [37, 38, 62].

Ở đây, giống như trường địa thế vị, trường độ lệch nhiệt độ không khí so với chuẩn được xem là đồng nhất và đẳng hướng trong mặt phẳng ngang hay trên một mặt đẳng áp đã cho. Do đó, các hàm tương quan và hàm cấu trúc trên mặt đã cho được xem như hàm của một đối số – khoảng cách ngang giữa các điểm quan trắc. Ngoài các hàm tự tương quan và hàm cấu trúc đối với mỗi mặt đẳng áp chuẩn, cấu trúc không gian còn được đặc trưng bởi các hàm tương quan và hàm cấu trúc quan hệ đối với từng cặp mặt.

Trong các công trình [37, 38] dữ liệu ban đầu để xác định các hàm cấu trúc và hàm tương quan ba chiều của độ lệch nhiệt độ không khí so với chuẩn là số liệu nhiệt độ thám không được thu thập trong thời gian 1957–1959 trên lãnh thổ Bắc Mỹ theo kế hoạch của Năm Vật lý địa cầu Quốc tế.

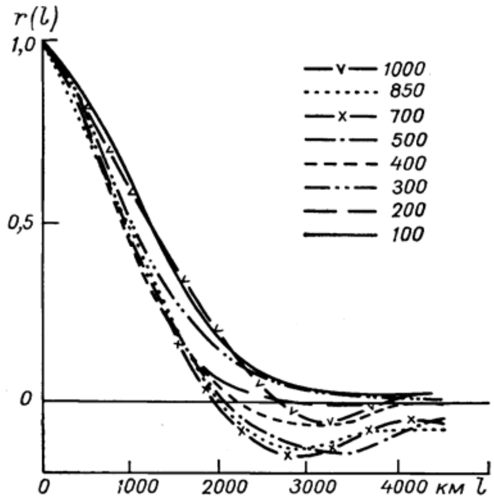
Việc tính toán được thực hiện theo các mùa, đối với mỗi một trong bốn mùa đã sử dụng 60 thể hiện. Để làm giảm mối liên hệ thống kê giữa các thể hiện, chúng được chọn cách nhau ba ngày đêm.

Mỗi một thể hiện bao gồm kết quả thám không tại 60 trạm.

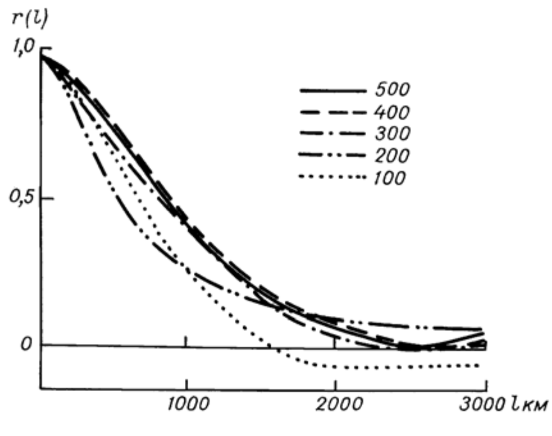
Khoảng cách xa nhất giữa các trạm bằng 7500 km. Người ta đã tính các hàm cấu trúc và hàm tương quan cho các mặt đẳng áp 1000, 850, 700, 500, 400, 300, 200 và 100 mb cũng như các hàm cấu trúc và hàm tương quan quan hệ đối với từng cặp mặt.

Việc tính toán được thực hiện theo phương pháp đã trình bày trong [42].

Trong công trình [62] số liệu ban đầu được sử dụng là những quan trắc tại 50 trạm khí tượng. Một số trạm nằm trên vùng Trung Âu, số còn lại ở phần lãnh thổ châu Âu của Liên Xô. Khoảng cách giữa hai vùng đó nhỏ hơn một ít so với bề rộng của mỗi vùng. Điều đó bảo đảm số các trạm ở hai vùng có sự phân bố đều theo khoảng cách. Trung bình đối với mỗi mùa đã sử dụng số liệu của 60 tình huống trong những năm 1959 và 1961. Khoảng thời gian giữa các kỳ liên tiếp không ít hơn hai ngày đêm. Các hàm tự tương quan được tính cho ba mực, là mặt đất, 850 và 700 mb. Để loại trừ sai số đo đạc đã tiến hành ngoại suy về 0 bằng phương pháp đồ thị các hàm tương quan và hàm cấu trúc nhận được và sử dụng chúng theo phương pháp đã xét trong chương 6. Trên hình 7.4 đã dẫn ra các hàm tự tương quan chuẩn hoá của nhiệt độ không khí ở các mực khác nhau cho mùa đông [38]. Trên hình 7.5 là các hàm tự tương quan chuẩn hoá nhận được theo bộ số liệu như trên cho mùa hè [37].



Hình 7.4



Hình 7.5

Từ các hình thấy rằng có sự khác nhau giữa các hàm tự tương quan chuẩn hoá của nhiệt độ không khí ở các mực khác nhau, mặc dù sự khác nhau này không nhiều lắm, về bản chất các đường cong có nét giống nhau. Giữa các mùa cũng có những khác biệt.

Trong bảng 7.1 dẫn ra các giá trị phương sai tương ứng của độ lệch nhiệt độ trên các mực [38].

Việc so sánh các hàm tương quan chuẩn hoá nhận được trong các công trình [62] và [38] cho thấy rằng trên cùng một mực chúng gần trùng nhau, đặc biệt ở những khoảng cách dưới 1000–1500 km.

Bảng 7.1

Mực, mb	D (độ)^2	
	Mùa đông	Mùa hè
1000	49	7
850	45	14
700	32	8
500	23	7
400	20	8
300	13	8
200	30	14
100	18	7

Trong khi đó phương sai trong các trường hợp đang xét rất khác nhau. Ví dụ, phương sai nhiệt độ ở mực 700 mb đối với châu Âu bằng 24 (độ)^2 , còn đối với châu Mỹ là 34 (độ)^2.

Sự liên hệ giữa các giá trị của nhiệt độ ở các mực khác nhau của cùng một trạm được đặc trưng bằng các trị số của hàm tương quan quan hệ đã ngoại suy về 0. Chúng được dẫn ra trong bảng 7.2 [38].

Từ bảng 7.2 thấy rằng sự liên hệ chặt chẽ nhất giữa các giá trị nhiệt độ ở các mực kế cận quan sát thấy trong tầng đối lưu. Nhiệt độ ở các lớp trong tầng đối lưu và tầng bình lưu có tương quan dương. Khi tính tương quan giữa các số liệu tầng đối lưu với số liệu trong tầng bình lưu các hệ số tương quan trở nên âm và tăng về trị tuyệt đối khi các mặt đẳng áp cách xa dần đối lưu hạn.

Bảng 7.2

Mực, mb	1000	850	700	500	400	300	200	100
1000		0,67	0,36	0,47	0,45	0,34	-0,27	-0,14
850	0,67		0,47	0,68	0,57	0,29	-0,45	-0,45
700	0,56	0,74		0,48	0,43	0,28	-0,31	-0,29
500	0,51	0,55	0,72		0,94	0,53	-0,56	-0,61
400	0,49	0,53	0,68	0,99		0,67	-0,55	-0,70
300	0,21	0,43	0,54	0,75	-0,80		-0,02	-0,46
200	-0,21	-0,11	-0,14	-0,23	-0,23	-0,08		0,51
100	-0,36	-0,49	-0,64	-0,66	-0,68	-0,65	0,26	

Trong công trình [62] đã nhận được các biểu thức xấp xỉ giải tích của các hàm tự tương quan thống kê:

trên mặt đẳng áp 700 mb:

$$R_T(\ell) = De^{-0,747\ell^{0,96}} J_0(0,96\ell)\,, \tag{7.3.1}$$

trên mặt đẳng áp 850 mba:

$$R_T(\ell) = De^{-0,553\ell^{0,97}} J_0(0,83\ell)\,. \tag{7.3.2}$$

ở mặt đất:

$$R_T(\ell) = De^{-0,825\ell^{0,92}}\,, \tag{7.3.3}$$

ở đây $J_0(\gamma\ell)$ là hàm Bessel bậc không, ℓ biểu diễn bằng 10^3 km.

7.4 Cấu trúc thống kê trường gió

Về những quy luật cấu trúc trường gió đã có một loạt công trình nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm.

Các công trình của A. N. Kolmogorov [11] và A. M. Obukhov [69] là những công trình nền tảng theo hướng này.

Trong các công trình đó, đối với trường đồng nhất và đẳng hướng địa phương, bằng lý thuyết đã chứng minh được rằng hàm cấu trúc của xung tốc độ gió được mô tả bằng công thức

$$B_u(\ell) = A\ell^{2/3}\,, \tag{7.4.1}$$

trong đó A là hệ số tỷ lệ.

Quan hệ này được gọi là "qui luật 2/3". Kết quả xử lý thực nghiệm các số liệu thám không gió do M. B. Zavarina [52] và E. X. Xelezneva [74], và sau này do các tác giả khác [43, 56, 71, 83] thực hiện đã khẳng định sự đúng đắn của "qui luật 2/3" trong khí quyển thực ở một vùng không gian nhất định.

Sự hạn chế về quy mô không gian trong đó thoả mãn "qui luật 2/3" là điều tự nhiên, vì trường gió loạn lưu thực có thể xem là đồng nhất và đẳng hướng chỉ đối với những phạm vi không gian đủ nhỏ. Khi tăng dần quy mô thì tính bất đẳng hướng bắt đầu xuất hiện, biểu thị ở sự mất cân đối theo phương ngang và phương thẳng đứng của chuyển động khí quyển thực quy mô lớn. M. Iu. Iuđin [84] đã phân tích những điều kiện áp dụng của "qui luật 2/3" và cho biết rằng ở ngoài vùng tác động của quy luật này hàm cấu trúc của xung gió được mô tả bởi hệ thức

$$B_u(\ell) = C\ell\,, \tag{7.4.2}$$

trong đó C là hệ số tỷ lệ, tức là hàm cấu trúc của các xung gió tỷ lệ thuận với khoảng cách.

Tương quan (7.4.2) có tên là "qui luật bậc nhất".

Các kết quả xử lý thực nghiệm đã khẳng định rằng trong khí quyển thực "qui luật bậc nhất" được thoả mãn tương đối tốt trong phạm vi khoảng cách $\ell = 500 \div 1400$ km. Còn đối với các điều kiện rối vĩ mô, thì tính phức tạp của các quá trình diễn ra trong đó làm cho việc nghiên cứu lý thuyết về cấu trúc của các trường khí tượng vĩ mô gặp khó khăn. Để tìm hiểu cấu trúc của trường gió trong điều kiện rối vĩ mô, tức với những khoảng cách vài nghìn kilômét, người ta đã tiến hành xử lý thống kê các số liệu gió thám không. Trong công trình [56] đã sử dụng nguồn dữ liệu thực nghiệm phong phú.

Trường gió theo phương ngang trên mực 500 mb đã được khảo sát. Trường này được coi là đồng nhất và đẳng hướng. Nhờ máy tính điện tử, dựa theo phương pháp được đề xuất trong [42], đã tính các hàm tương quan và hàm cấu trúc đối với độ lệch khỏi chuẩn của thành phần vĩ hướng U và thành phần kinh hướng V của vectơ gió.

Đối với trường đồng nhất và đẳng hướng, điều kiện cần phải thoả mãn là phương sai không phụ thuộc vào hướng và không đổi tại tất cả các điểm của trường, tức thoả mãn luật phân bố hình tròn, trong đó có điều kiện $D_u = D_v$. Nếu tính đến độ chính xác không cao của việc đo gió, thông thường người ta cho rằng luật phân bố được coi là hình tròn khi $\frac{D_u}{D_v}$ biến thiên trong phạm vi 0,8–1,2.

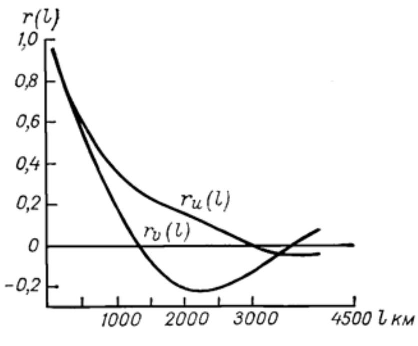
Khi tiến hành tính toán thì điều kiện này được chỉ thoả mãn ở vùng nước Anh và bán đảo Scanđinavia, nơi thường có dòng chảy xiết đi qua, các giá trị nhận được nằm trong khoảng 0,7–1,3.

Dựa vào kết quả tính đã dựng đồ thị của các hàm tương quan và hàm cấu trúc. Sai số trong dữ liệu ban đầu được khử bỏ bằng cách ngoại suy các hàm này về không và trừ đi các sai số nhận được.

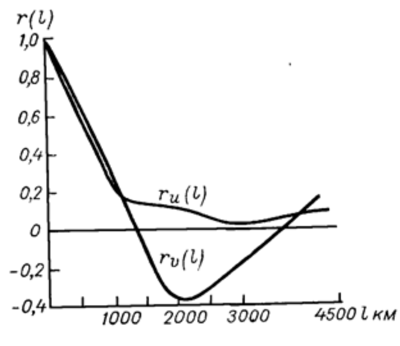
Trên các hình 7.6 và 7.7 đã dẫn ra đồ thị các hàm tương quan chuẩn hoá của thành phần gió vĩ hướng và kinh hướng tại mực 500 mb cho mùa đông và mùa hè.

Từ các hình thấy rằng ở những khoảng cách dưới 1000–1300 km "qui luật bậc nhất" của Iuđin thoả mãn tương đối tốt. Với những khoảng cách lớn hơn qui luật này bị vi phạm, đồ thị các hàm tương quan có đặc tính dao động với biên độ giảm dần, điều này nói lên sự hiện diện của yếu tố chu kỳ trong các quá trình khí quyển vĩ mô.

Trong mục 2.14 đã chỉ ra rằng, các đặc trưng của trường vectơ đồng nhất là các hàm tương quan dọc và ngang. Cần lưu ý rằng hàm tương quan của các thành phần vĩ hướng và kinh hướng nhận được trong công trình nhìn chung không phải là những đặc trưng đó. Đối với những khoảng cách ℓ không lớn, các cặp trạm thuộc cùng một nhóm trạm, các hướng giữa chúng khác nhau, và các hàm tương quan của các thành phần U và V nhận được là trung bình theo tất cả các hướng. Đối với những khoảng cách ℓ lớn, các trạm của từng cặp trạm về cơ bản thuộc các nhóm khác nhau, tức hướng giữa chúng gần với hướng của thành phần vĩ tuyến, do đó, hàm tương quan của thành phần U gần với hàm tương quan dọc của trường, còn hàm tương quan của thành phần V gần với hàm tương quan ngang.



Hình 7.6



Hình 7.7

7.5 Cấu trúc thống kê của trường độ cao thảm tuyết và sự tối ưu hoá công tác quan trắc thảm tuyết

Để đáp ứng yêu cầu của các ngành kinh tế quốc dân, trên mạng lưới trạm khí tượng thủy văn đang tiến hành nhiều quan trắc về thảm tuyết đòi hỏi công sức của nhiều người quan trắc. Khi đó xuất hiện vấn đề quan trọng về phân bố hợp lý các trạm quan trắc trên lãnh thổ.

Độ cao thảm tuyết có thể rất khác nhau giữa các điểm chỉ cách nhau một khoảng không lớn. Sự khác nhau về phân bố độ cao thảm tuyết trên lãnh thổ gây nên bởi sự phân bố không đồng đều của tốc độ gió trong lớp sát đất, địa hình và điều kiện địa phương, hướng sườn và độ dốc, tính chất mặt đệm và những đặc điểm của chế độ khí tượng.

Những nhân tố trên kết hợp với nhau tạo nên một bức tranh phân bố tuyết hết sức phức tạp. Do đó các số liệu về độ cao thảm tuyết ở một điểm riêng biệt không có ý nghĩa mấy, mà cần phải biết những đại lượng trung bình trên một diện tích nào đó. Nếu xem xét độ cao thảm tuyết như là một trường ngẫu nhiên hai chiều $H(x,y)$ thì việc lấy trung bình như vậy có thể được tiến hành một cách thuận tiện. Khi đó người ta coi trường này là đồng nhất, đẳng hướng và có tính egođic.

Bài toán đặt ra là từ những số liệu đo tại một số điểm quan trắc tuyết trên tuyến có chiều dài hạn chế, xác định giá trị trung bình của độ cao thảm tuyết trong một vùng rộng hơn một cách đáng kể. Để đơn giản ta sẽ xét trường hợp giá trị cần tìm có thể nhận được bằng cách lấy trung bình các số liệu đo trên một tuyến thẳng.

Giả sử trên đoạn $[0,L]$ phân bố đều n điểm $x_1=0, x_2, ..., x_n=L,$ tại các điểm này tiến hành đo độ cao thảm tuyết $h(x_i)$ và từ các số liệu đo xác định được giá trị trung bình số học $\overline{h}$, và nó được chấp nhận làm độ cao trung bình của thảm tuyết tại vùng nghiên cứu.

Khi đó bài toán về độ chính xác của việc xác định giá trị thực của đại lượng cần tìm hoàn toàn tương tự như bài toán về độ chính xác của việc xác định giá trị thống kê của kỳ vọng toán học hàm ngẫu nhiên theo chuỗi rời rạc các giá trị của nó đã xét trong các điểm 3 và 4 mục 6.3.

Như đã chỉ ra trong mục 6.3, ở đây xuất hiện hai loại sai số – sai số do sự hạn chế của khoảng $[0,L]$ trên đó ghi thể hiện và sai số do thay thế việc lấy trung bình tích phân theo toàn khoảng $[0,L]$ bằng việc lấy trung bình theo n điểm rời rạc $x_i (i=1,2,...,n)$. Sai số bình phương trung bình σ^2 xuất hiện do hạn chế độ dài khoảng ghi thể hiện (xem mục 6.3 điểm 3) được xác định bằng công thức (6.3.25), trong trường hợp này được viết dưới dạng

$$\sigma_1^2=\frac{2}{L}\int_l^L\left(1-\frac{l}{L}\right)R_H(l)dl. \tag{7.5.1}$$

ở đây $R_H(l)$ là hàm tương quan của độ cao thảm tuyết.

Sai số bình phương trung bình σ_2^2 xuất hiện do thay thế việc lấy trung bình tích phân bằng giá trị trung bình số học tại n điểm x_i cách đều nhau một khoảng Δ theo (6.3.36) được viết như sau

$$\sigma_2^2=\frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_H(k-j)\Delta.. \tag{7.5.2}$$

ở đây cũng có thể sử dụng hàm cấu trúc $B_H(l)$, nếu trước hết biến đổi các công thức

(7.5.1) và (7.5.2) nhờ (2.7.7):

$$\sigma_1^2 = \frac{B_H(\infty)}{2} - \frac{1}{L}\int_0^L \left(1 - \frac{l}{L}\right) B_H(l)dl, \tag{7.5.3}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{B_H(\infty)}{2} - \frac{2}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_H(k-j)\Delta. \tag{7.5.4}$$

Nếu có hàm tương quan hoặc hàm cấu trúc và tiến hành tính toán theo các công thức trên, có thể nhận được mối phụ thuộc của các đại lượng σ_1, σ_2 vào độ dài khoảng và số lượng điểm đo, và theo đó tìm số lượng điểm tối ưu, khoảng cách tối ưu giữa các điểm.

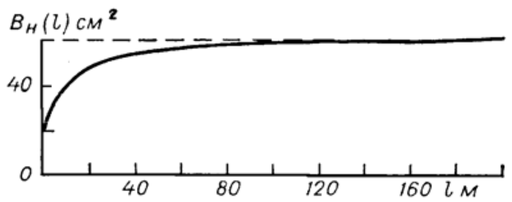
Cách tiếp cận như vậy để giải bài toán tối ưu hoá mạng lưới quan trắc tuyết đã được đề xuất trong công trình của D. L. Laikhtman và R. L. Kagan [59]. Để thực hiện phương pháp tính toán này đòi hỏi phải có số liệu về cấu trúc trường độ cao thảm tuyết. Những số liệu này nhận được trong các công trình nghiên cứu chuyên về xử lý thống kê tài liệu thực nghiệm hiện có theo các vùng khác nhau [51, 63, 76, 81].

Trong công trình [51] đã xác định hàm cấu trúc không gian $B_H(l)$ của độ cao thảm tuyết. Dữ liệu ban đầu là những số liệu đo độ cao tuyết thực hiện ngày 5 tháng 7 năm 1957 ở vùng trạm Dubrovskaja (gần 3000 số đo độ cao thảm tuyết). Toàn vùng được phủ bởi các tuyến đo song song cách nhau 200 m. Tất cả có 17 tuyến đo độ dài khác nhau – từ 1 đến 2 km. Trên các tuyến, độ cao thảm tuyết được đo cách nhau 10 m. Kết quả tính cho thấy rằng giá trị của các hàm cấu trúc trên mỗi tuyến riêng biệt rất khác nhau.

Sự tản mạn của các hàm cấu trúc nhận được có lẽ đặc trưng cho tính chất bất đồng nhất của phân bố độ cao thảm tuyết, mặt khác sự tản mạn đó gây nên bởi sai số đo và số lượng điểm đo nhỏ.

Để có đặc trưng tin cậy hơn về cấu trúc của trường đang xét, tất cả các hàm cấu trúc nhận được đã được lấy trung bình, và sau đó hàm cấu trúc trung bình được làm trơn. Hàm cấu trúc trung bình làm trơn $B_H(l)$ được dẫn ra trên hình 7.8. Hàm cấu trúc nhận được được mô tả tương đối tốt bởi công thức

$$B_H(l) = 58{,}7 - 40{,}8e^{-0{,}158l^{2/3}}. \tag{7.5.5}$$



Hình 7.8

Trong công trình [76] đã xác định các hàm cấu trúc không gian của độ cao thảm tuyết ở các vùng địa lý khác nhau.

Các tài liệu trắc đạc tuyết được tiến hành ở các vùng khác nhau của Liên Xô sau đây, đã được xử lý:

1) những đợt khảo sát trắc đạc tuyết của Viện thủy văn Nhà nước ở tỉnh Tselinograd tại ba vùng – vùng lưu vực sông Kzưlsu, thung lũng sông Karakol và vùng trạm Kolutan cuối tháng 3 năm 1956;

2) trắc đạc tuyết của Phòng thí nghiệm nghiên cứu khoa học thủy văn Valđai ở lưu vực sông Polomet, tháng 2 năm 1953;

3) tuyến trắc đạc tuyết theo tuyến tại trạm Oksochi trên lưu vực các sông Griđenki, mùa đông 1955–1956 và 1956–1957;

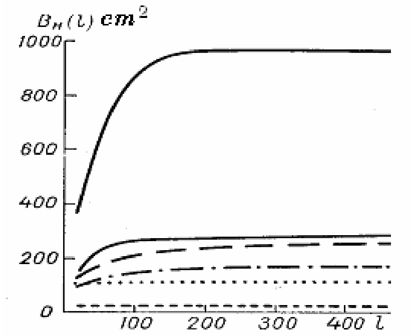
4) trắc đạc tuyết theo tuyến gần làng Koltushi (tỉnh Leningrad).

Các hàm cấu trúc nhận được theo số liệu các trạm Karakul (1), Kzưlsu (2), Valđai (3), Oksochi (4), Koltushi (5), Kolutan (6) dẫn ra trên hình 7.9.

Việc phân tích hình 7.9 cho thấy sự biến động của độ cao thảm tuyết ở những vùng khác nhau rất lớn. Phân tích của T. S. Triphonova [76] về mối phụ thuộc của các hàm cấu trúc vào những điều kiện đặc trưng vùng trắc đạc tuyết cho phép kết luận rằng biến động của độ cao thảm tuyết trên lãnh thổ được quy định trước hết bởi địa hình và tính chất của mặt đệm.

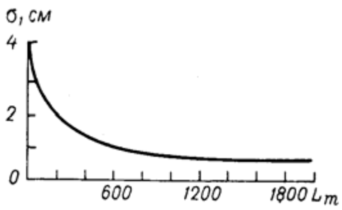
Trong công trình [59] dẫn ra những kết quả tính sai số σ_1 và σ_2 khi thay thế hàm cấu trúc (7.5.5) vào các công thức (7.5.3) và (7.5.4).

Trên hình 7.10 biểu diễn sai số bình phương trung bình σ_1 của việc xác định độ cao trung bình của thảm tuyết gây nên bởi sự hạn chế của độ dài tuyến trắc đạc tuyết L. Trên hình 7.11 biểu diễn sai số bình phương trung bình σ_2 gây nên bởi sự hạn chế của số lượng điểm đo trên tuyến đo.

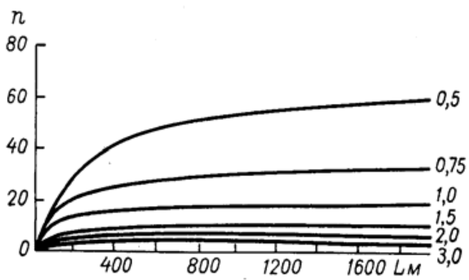


Hình 7.9

Nếu cho trước độ chính xác của việc xác định độ cao trung bình của thảm tuyết, theo hình 7.10 có thể xác định được độ dài cần thiết của tuyến trắc đạc tuyết. Với độ dài tuyến nhỏ hơn thì độ chính xác đã cho cũng không thể đạt được bằng cách tăng số lượng quan trắc.



Hình 7.10



Hình 7.11

Một cách tương tự, có thể xác định trên hình 7.11 số điểm đo cần thiết n. Với số điểm đo nhỏ hơn thì độ chính xác cho trước không thể đạt được bằng cách tăng độ dài tuyến trắc đạc tuyết. Nếu chú ý tới những khác biệt đáng kể của các hàm cấu trúc độ cao thảm tuyết ở những vùng khác nhau đã phát hiện trong công trình [76], thì thấy rằng chỉ có thể định ra những chỉ dẫn cụ thể về việc chọn tối ưu độ dài tuyến đo tuyết và khoảng cách giữa các điểm đo ứng với từng vùng địa lý căn cứ vào những dẫn liệu về cấu trúc thống kê của độ cao thảm tuyết ở vùng đã cho.

CHƯƠNG 8: KHAI TRIỂN QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN VÀ TRƯỜNG NGẪU NHIÊN THÀNH NHỮNG THÀNH PHẦN TRỰC GIAO TỰ NHIÊN

8.1. Thiết lập bài toán

Trong toán học, phương pháp khai triển các hàm thành chuỗi theo một hệ hàm trực giao chuẩn hoá nào đó được sử dụng rộng rãi. Hệ hàm $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$,..., $\varphi_n(t)$,... được gọi là trực giao chuẩn hoá (trực chuẩn) trên khoảng $[a,b]$ (hữu hạn hoặc vô hạn), nếu thoả mãn hệ thức

$$\int_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq k, \\ 1 & \text{khi } i = k. \end{cases} \tag{8.1.1}$$

Hệ hàm $\{\varphi_k(t)\}$ được gọi là đầy đủ nếu như một hàm $f(t)$ bất kỳ cho trên khoảng $[a,b]$, có thể khai triển thành chuỗi Fourier theo nó

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t). \tag{8.1.2}$$

Các hằng số a_k gọi là các hệ số Fourier và từ (8.1.1), (8.1.2) chúng được xác định theo công thức

$$a_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt, \tag{8.1.3}$$

Tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi (9.1.2)

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t). \tag{8.1.4}$$

được gọi là đa thức Fourier của hàm $f(t)$. Bây giờ, một cách gần đúng, nếu ta thay thế hàm $f(t)$ bằng tổng (8.1.4) thì với mỗi giá trị của đối số t xuất hiện sai số $\delta_n(t)$ bằng

$$\delta_n(t) = f(t) - f_n(t). \tag{8.1.5}$$

Người ta gọi đại lượng δ_n là sai số bình phương trung bình của phép xấp xỉ hàm $f(t)$ bằng tổng (8.1.4) trên khoảng $[a,b]$

$$\delta_n = \sqrt{\int_a^b [f(t) - f_n(t)]^2 dt} \tag{8.1.6}$$

Từ các đa thức dạng

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(t),$$

độ lệch bình phương trung bình nhỏ nhất của hàm $f(t)$ sẽ cho một đa thức Fourier, tức một đa thức mà các hệ số C_k là các hệ số Fourier a_k. Khi đó đại lượng δ_n^2 bằng

$$\delta_n^2 = \int_a^b f^2(t)dt - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 . \tag{8.1.7}$$

Thực vậy,

$$\delta_n^2 = \int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(t) \right]^2 dt =$$

$$= \int_a^b f^2(t)dt - 2\sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} C_k C_i \int_a^b \varphi_k(t)\varphi_i(t)dt =$$

$$= \int_a^b f^2(t)dt - \sum_{k=1}^{\infty} (C_k - a_k)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 . \tag{8.1.8}$$

Vế phải của (8.1.8) nhận giá trị nhỏ nhất bằng (8.1.7) khi $\sum_{k=1}^{n}(C_k - a_k)^2 = 0$, tức khi $C_k = a_k$.

Đại lượng δ_n^2 không âm, vì vậy ta có bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \le \int_a^b f^2(t)dt . \tag{8.1.9}$$

Từ đó thấy rằng, đối với các hàm khả tích với bình phương, tức khi $\int_a^b f^2(t)dt$ là một số hữu hạn, thì chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ hội tụ, hơn nữa, bất đẳng thức sau xảy ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \le \int_a^b f^2(t)dt \tag{8.1.10}$$

và nó được gọi là bất đẳng thức Bessel.

Nếu hệ hàm $\{\varphi_k(t)\}$ là đầy đủ thì đối với một hàm lấy được tổng bình phương bất kỳ $f(t)$ sẽ có đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b f^2(t)dt \tag{8.1.11}$$

và được gọi là phương trình khép kín.

Người ta ứng dụng việc khai triển các hàm theo những hệ hàm trực chuẩn khác nhau: khai triển thành chuỗi Fourier theo hệ hàm lượng giác, khai triển thành chuỗi Fourier–Bessel theo hệ hàm Bessel, khai triển theo các đa thức trực giao – Trebưsev, Ermit và các hệ hàm khác.

Phương pháp khai triển theo hệ các hàm trực chuẩn cũng có thể áp dụng vào các hàm ngẫu nhiên.

Giả sử $X(t)$ là một hàm ngẫu nhiên xác định trên khoảng $[a,b]$ có kỳ vọng toán học bằng không $m_x(t)=0$ và hàm tương quan cho trước $R_x(t_1,t_2)$, $t_1,t_2 \in [a,b]$; $\{\varphi_k(t)\}$ là hệ hàm trực chuẩn đầy đủ. Khi đó ta biểu diễn hàm ngẫu nhiên $X(t)$ dưới dạng chuỗi Fourier

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t) \tag{8.1.12}$$

Các hệ số Fourier A_k được xác định dưới dạng

$$A_k = \int_a^b X(t)\varphi_k(t)dt \tag{8.1.13}$$

là những đại lượng ngẫu nhiên.

Ta ký hiệu

$$X_n(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k(t) \tag{8.1.14}$$

là tổng của n số hạng đầu tiên của khai triển (8.1.12) và ta sẽ xấp xỉ hàm ngẫu nhiên $X(t)$ bằng tổng $X_n(t)$. Khi đó, sai số bình phương trung bình của phép xấp xỉ

$$\delta_n = \sqrt{\int_a^b \left[x(t) - X_n(t)\right]^2 dt} \tag{8.1.15}$$

sẽ là một đại lượng ngẫu nhiên.

Để làm thước đo độ chính xác của phép xấp xỉ ta sử dụng kỳ vọng toán học của bình phương đại lượng ngẫu nhiên δ_n

$$\sigma_n^2 = M\left[\delta_n^2\right]. \tag{8.1.16}$$

Đại lượng σ_n^2 biểu thị phương sai sai số của phép xấp xỉ đại lượng ngẫu nhiên, nó phụ thuộc vào việc chọn hệ hàm $\{\varphi_k(t)\}$ và số lượng hàm n của chúng. Khi đó, có thể không cho trước hệ hàm $\{\varphi_k(t)\}$ mà xác định hệ này xuất phát từ yêu cầu thoả mãn một điều kiện tự nhiên nào đó. Chẳng hạn, có thể xác định một hệ như vậy từ một số cho trước n hàm $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ sao cho đại lượng σ_n^2 trong (8.1.16) trở thành cực tiểu. Những hàm $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ như vậy được gọi là những hàm trực giao tự nhiên. Với hệ hàm được chọn như trên việc biểu diễn hàm ngẫu nhiên $X(t)$ dưới dạng tổng n số hạng

$$X(t) \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k(t) \tag{8.1.17}$$

được gọi là khai triển hàm thành tổng các thành phần trực giao tự nhiên.

Những vấn đề lý thuyết của việc khai triển theo các thành phần trực giao tự nhiên và các tính chất của phép khai triển như vậy đã được xét trong các công trình của Kh. Khoteling [92], A. M. Obukhov [67, 68], N. A. Bagrov [35, 36], V. S. Pugatrev [21].

Từ đẳng thức (8.1.7), có thể viết biểu thức (8.1.15) dưới dạng

$$\delta_n^2 = \int_a^b X^2(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k^2 . \tag{8.1.18}$$

Sử dụng (8.1.13) ta nhận được

$$\delta_n^2 = \int_a^b X^2(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\left[\int_a^b X(t)\varphi_k(t)dt\right]^2 =$$

$$= \int_a^b X^2(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b\int_a^b X(t_1)X(t_2)\varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2)\, dt_1 dt_2 . \tag{8.1.19}$$

Thế giá trị này của δ_n^2 vào (8.1.16) ta nhận được

$$\sigma_n^2 = \int_a^b R_x(t)dt - \sum_{k=1}^{n}\int_a^b\int_a^b R_x(t_1,t_2)\varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2)\,dt_1dt_2\ . \qquad (8.1.20)$$

Bài toán quy về tìm các hàm $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$ sao cho biểu thức (8.1.20) trở thành cực tiểu, hay nói cách khác, sao cho tổng

$$\sum_{k=1}^{n}\int_a^b\int_a^b R_x(t_1,t_2)\varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2)dt_1dt_2 \qquad (8.1.21)$$

trở thành cực đại.

8.2. Một số kiến thức về lý thuyết phương trình tích phân

Để tìm hệ hàm trực chuẩn làm cho (8.1.21) cực đại, ta sử dụng những kết quả đã biết từ lý thuyết phương trình tích phân với nhân đối xứng mà chúng ta sẽ liệt kê dưới đây và bỏ qua việc chứng minh. Trình bày chi tiết về lý thuyết này có thể tìm thấy, chẳng hạn, trong [66, 24].

Xét phương trình tích phân thuần nhất

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = \lambda\varphi(x)\ , \qquad (8.2.1)$$

trong đó hàm $K(x,s)$ là hàm hai biến thực cho trong hình chữ nhật $a \le x \le b,\ a \le s \le b; \lambda$ là một số nào đó; $\varphi(x)$ là hàm cần tìm cho trên khoảng $[a,b]$.

Ta sẽ xem các hàm $K(x,s)$ và $\varphi(x)$ giới nội và có số một hữu hạn điểm gián đoạn, tại đó tích phân trong (8.2.1) tồn tại.

Hàm $K(x,s)$ gọi là nhân của phương trình tích phân. Nếu thoả mãn hệ thức

$$K(x,s) = K^*(s,x)\ , \qquad (8.2.2)$$

đối với nhân thực, điều này tương đương với đẳng thức

$$K(x,s) = K(s,x)\ , \qquad (8.2.3)$$

thì nhân được gọi là đối xứng.

Các giá trị của tham số λ, tại đó phương trình tích phân (8.2.1) có nghiệm không đồng nhất bằng không, được gọi là giá trị riêng của nhân $K(x,s)$ hay của phương trình (8.2.1). Nếu $\lambda = \lambda_0$ là giá trị riêng của phương trình (8.2.1) và $\varphi_0(x)$ là nghiệm của phương trình này khi $\lambda = \lambda_0$, tức

$$\int_a^b K(x,s)\,\varphi_0(s)\,ds = \lambda_0\varphi_0(x)\ , \qquad (8.2.4)$$

thì hàm $\varphi_0(x)$ được gọi là hàm riêng ứng với giá trị riêng λ_0 của nhân $K(x,s)$ hay của phương trình tích phân.

Có thể chỉ ra rằng tất cả các giá trị riêng của nhân đối xứng là những số thực, và tất cả các hàm riêng cũng có thể coi là những hàm thực.

Các hàm riêng của nhân đối xứng, ứng với những giá trị riêng khác nhau, trực giao với nhau. Có thể làm cho các hàm riêng trở thành các hàm chuẩn hoá.

Ta quy ước liệt kê dãy các số riêng theo thứ tự giá trị tuyệt đối giảm dần. Như vậy, nếu

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \left(|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots\right) \tag{8.2.5}$$

là dãy các giá trị riêng của một nhân đối xứng nào đó, thì tương ứng với dãy này là hệ trực giao các hàm riêng

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x) \ldots \tag{8.2.6}$$

Trong trường hợp này định lý Gilbert–Smidth khẳng định rằng, có thể biểu diễn hàm $f(x)$ bất kỳ qua nhân $K(x,s)$ dưới dạng

$$f(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)ds, \tag{8.2.7}$$

trong đó $h(s)$ là một hàm giới nội nào đó có số hữu hạn điểm gián đoạn và khai triển được thành chuỗi Fourier hội tụ tuyệt đối và đều theo các hàm riêng của nhân. Do đó nếu viết chuỗi Fourier của hàm $h(x)$ theo các hàm riêng (8.2.6) của nhân $K(x,s)$ dưới dạng

$$h(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varphi_k(x), \tag{8.2.8}$$

thì hàm $f(x)$ (8.2.7) được khai triển thành chuỗi

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k \varphi_k(x), \tag{8.2.9}$$

trong đó λ_k là giá trị riêng, còn $\varphi_k(x)$ là hàm riêng của nhân $K(x,s)$.

Giả sử $p(x)$ và $q(x)$ là hai hàm giới nội có số hữu hạn điểm gián đoạn trên khoảng $[a,b]$. Lập tích phân kép

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)q(s)dxds \tag{8.2.10}$$

áp dụng định lý Gilbert-Smidth, ta được

$$\int_a^b K(x,s)q(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_k \varphi_k(x), \tag{8.2.11}$$

trong đó q_k là các hệ số Fourier của hàm $q(x)$ khi khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm riêng (8.2.6), và chuỗi ở vế phải hội tụ đều.

Nhân hai vế của (8.2.11) với $p(x)$, lấy tích phân theo x và ký hiệu p_k là những hệ số Fourier của hàm $p(x)$ khi khai triển nó thành chuỗi theo các hàm riêng (8.2.6), ta nhận được biểu diễn của tích phân (8.2.10) dưới đây:

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)q(s)dxds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k p_k q_k. \tag{8.2.12}$$

Đặc biệt, khi $p(x) \equiv q(x)$ ta được

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)p(s)dxds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k p_k^2. \tag{8.2.13}$$

Ta sẽ xét những tính chất cực trị của các hàm riêng của nhân đối xứng. Khi sắp xếp các giá trị riêng theo thứ tự giảm dần giá trị tuyệt đối của chúng, theo (8.2.13) ta có

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)q(s)dxds \leq |\lambda_1| \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2. \tag{8.2.14}$$

Theo phương trình khép kín (8.1.11),

$$\int_a^b p^2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 . \quad (8.2.15)$$

Đối với hàm chuẩn hoá $p(x)$, tích phân trong vế trái (8.2.15) bằng đơn vị, do đó

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 = 1. \quad (8.2.16)$$

Từ đó, đối với hàm chuẩn hoá $p(x)$ bất đẳng thức (8.2.14) được viết dưới dạng

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)q(s)dxds \le |\lambda_1|. \quad (8.2.17)$$

Trong (8.2.17) đẳng thức sẽ xảy ra khi $p(x) = \varphi_1(x)$, tức khi hàm $p(x)$ trùng với hàm riêng $\varphi_1(x)$.

Thực vậy, sau khi nhân hai vế đẳng thức

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ... \left(|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge ... \ge |\lambda_n| \ge ...\right) \quad (8.2.18)$$

với $\varphi_1(x)$ và lấy tích phân theo x, do tính chuẩn hoá của hàm $\varphi_1(x)$, ta nhận được:

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)\varphi_1(x)\varphi_1(s)dxds = \lambda_1 \int_a^b \varphi_1^2(x)dx = \lambda_1 . \quad (8.2.19)$$

Như vậy, định lý sau đây là đúng: Trên tập hợp các hàm chuẩn hoá $p(x)$ tích phân $\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)p(s)dxds$ có cực đại bằng $|\lambda_1|$ khi $p(x) = \varphi_1(x)$.

Bây giờ xét tập hợp các hàm chuẩn hoá $p(x)$ trực giao với $m-1$ hàm riêng đầu tiên của (8.2.6) của nhân $K(x,s)$. Khi đó trong (8.2.13) $m-1$ hệ số Fourier đầu tiên p_k của biểu thức khai triển hàm $p(x)$ thành chuỗi Fourier theo các hàm (8.2.6) sẽ bằng không. Khi đó (8.2.13) được viết dưới dạng

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)p(s)dxds = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k p_k^2 . \quad (8.2.20)$$

Từ đó

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)p(s)dxds \le |\lambda_m| . \quad (8.2.21)$$

Trong (8.2.21) đẳng thức đạt được khi $p(x) = \varphi_m(x)$, tức là định lý sau đây đúng: Trên tập hợp các hàm chuẩn tắc $p(x)$ trực giao với $m-1$ hàm riêng đầu tiên của nhân $K(x,s)$, tích phân $\int_a^b \int_a^b K(x,s)p(x)p(s)dxds$ có cực đại bằng $|\lambda_m|$, cực đại này đạt được khi $p(x) = \varphi_m(x)$.

8.3. Tìm các thành phần trực giao tự nhiên

Bây giờ trở lại bài toán tìm hệ các hàm $\{\varphi_k(x)\}$ làm cho tổng (8.1.21) trở thành cực đại, ta thấy rằng trên cơ sở lý thuyết đã trình bày trong mục 8.2, mỗi số hạng thứ k của nó có cực đại bằng $|\lambda_k|$ khi chọn hàm riêng của hàm tương quan $R_x(t_1, t_2)$ ứng với giá trị riêng λ_k làm hàm $\varphi_k(t)$. Như vậy, với tư cách là các hàm trực giao tự nhiên của phép khai triển hàm ngẫu nhiên $X(t)$ (8.1.17) phải lấy n hàm riêng đầu tiên của hàm tương quan $R_x(t_1,t_2)$ tương ứng với n giá trị riêng của hàm tương quan này được sắp xếp theo thứ tự giảm dần giá trị tuyệt đối.

Khi đó phương sai sai số của phép xấp xỉ σ_n^2 được xác định theo công thức

$$\sigma_n^2 = \int_a^b R_x(t,t)dt - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| . \tag{8.3.1}$$

Từ đẳng thức

$$\lambda_k = \int_a^b \int_a^b R_x(t_1,t_2)\varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2)dt_1dt_2 = M\left\{\left[\int_a^b X(t)\varphi_k(t)dt\right]^2\right\} = D[A_k] \tag{8.3.2}$$

thấy rằng, các giá trị riêng của hàm tương quan là phương sai của các hệ số A_k tương ứng của khai triển hàm ngẫu nhiên theo hệ các hàm riêng $\{\varphi_k(t)\}$. Do đó, các giá trị riêng của hàm tương quan thực sự là những số dương, và dấu giá trị tuyệt đối trong (8.3.1) có thể bỏ đi.

Hệ phương pháp đã trình bày hoàn toàn có thể áp dụng cả cho khai triển trường ngẫu nhiên thành các thành phần trực giao tự nhiên. Trong trường hợp này, tất cả các hàm được xét như hàm của điểm $N(\vec{\rho})$ cho trên miền giới hạn nào đó với số chiều đã cho. Chẳng hạn, giả sử $U(\vec{\rho}) = U(x,y,z)$ là trường không gian ngẫu nhiên xác định trong miền D, có kỳ vọng toán học bằng không và hàm tương quan $R_u(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2)$.

Ta biểu diễn trường ngẫu nhiên $U(\vec{\rho})$ dưới dạng tổng

$$U(\vec{\rho}) \approx \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_k(\vec{\rho}) , \tag{8.3.3}$$

trong đó $\{\varphi_k(\vec{\rho})\}$ là hệ hàm trực chuẩn đầy đủ trong miền D, tức là đối với nó điều kiện sau được thực hiện

$$\iiint_{(D)} \varphi_i(x,y,z)\,\varphi_k(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} 1 \text{ khi } i = k, \\ 0 \text{ khi } i \neq k. \end{cases} \tag{8.3.4}$$

Các hệ số Fourier A_k là những đại lượng ngẫu nhiên được xác định theo công thức

$$A_k = \iiint_{(D)} U(x,y,z)\,\varphi_k(x,y,z)dxdydz . \tag{8.3.5}$$

Trong trường hợp này bài toán xấp xỉ trường ngẫu nhiên bởi tổng các thành phần trực giao tự nhiên (8.3.3) được quy về việc tìm các hàm $\varphi_1(\vec{\rho}), \varphi_2(\vec{\rho}), ..., \varphi_n(\vec{\rho})$ làm cực đại tổng

$$\sum_{k=1}^{n} \iiint_{(D)} \left[\iiint_{(D)} R_u(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\varphi_k(x,y,z)dxdydz\right] \times \varphi_k(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta . \tag{8.3.6}$$

Khi xem xét lý thuyết đã trình bày trong mục 8.2 áp dụng vào phương trình tích phân

$$\iiint_{(D)} K(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\varphi(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta = \lambda\varphi(x,y,z) , \tag{8.3.7}$$

ta nhận được những hàm trực giao tự nhiên của khai triển trường ngẫu nhiên $U(\vec{\rho})$ (8.3.3) là n hàm riêng đầu tiên của hàm tương quan $R_u(\vec{\rho}_1,\vec{\rho}_2)$ tương ứng với n giá trị riêng đầu tiên của phương trình (8.3.7) được sắp xếp theo thứ tự không tăng giá trị của chúng. Khi đó phương sai sai số của phép xấp xỉ σ_n^2 được xác định theo công thức

$$\sigma_n^2 = \iiint\limits_{(D)} R_u(x,y,z;x,y,z)dxdydz - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \tag{8.3.8}$$

Từ những công thức đối với phương sai sai số của phép xấp xỉ (8.3.1) hay (8.3.8) thấy rằng, độ chính xác tăng lên khi tăng số các thành phần trực giao tự nhiên mà hàm ngẫu nhiên khai triển theo chúng. Tuy nhiên các số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ phân bố theo thứ tự giảm dần, do đó số thứ tự của thành phần trong công thức (8.1.14) hay (8.3.3) càng lớn thì, về trung bình, tỷ trọng của thành phần càng nhỏ. Nếu các giá trị riêng giảm khá nhanh, thì điều đó cho phép nhận những kết quả gần đúng khi chỉ cần chú ý tới một số không lớn các thành phần. ưu điểm cơ bản của phép khai triển theo các thành phần trực giao tự nhiên là ở chỗ nó tập trung tối đa thông tin về hàm ngẫu nhiên vào một số không nhiều các số hạng.

Khi đánh giá độ chính xác của phép xấp xỉ (8.1.17) bởi một số n các thành phần trực giao tự nhiên đã chọn, có thể sử dụng phương sai tương đối của sai số xấp xỉ

$$\eta_n^2 = \frac{M\left\{\int_a^b [X(t) - X_n(t)]^2 dt\right\}}{M\left[\int_a^b X^2(t)dt\right]} . \tag{8.3.9}$$

Theo (8.3.1) với giá trị cực tiểu của σ_n^2 ta nhận được

$$\eta_n^2 = \frac{\int_a^b R_x(t,t)dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}{\int_a^b R_x(t,t)dt} . \tag{8.3.10}$$

Sau khi dựng đồ thị phụ thuộc của đại lượng η_n vào số n, có thể ước lượng số số hạng khai triển cần thiết tuỳ theo độ chính xác đã cho của phép xấp xỉ.

Bây giờ ta xét trường hợp khi không có bản ghi liên tục của hàm ngẫu nhiên, mà chỉ có các lát cắt của nó ở những điểm rời rạc, điều mà thường xảy ra khi nghiên cứu thực nghiệm các hàm ngẫu nhiên.

Giả sử hàm ngẫu nhiên $X(t)$ có kỳ vọng toán học bằng không, được cho tại một số hữu hạn điểm $t_1, t_2, ..., t_m$, $\{\varphi_k(t)\}$ là hệ hàm bất kỳ, cũng được cho tại các điểm $t_1, t_2, ..., t_m$. Ta sẽ xem hàm ngẫu nhiên $X(t)$ như một vectơ m chiều $X(X_1, X_2, ..., X_m)$ mà mỗi thành phần của nó là một lát cắt của hàm ngẫu nhiên $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$,..., $X_m = X(t_m)$.

Ta cũng xem các hàm $\varphi_k(t)$ như những vectơ m chiều $\vec{\varphi}^k(\varphi_1^k, \varphi_2^k, ..., \varphi_m^k)$ mà các thành phần của chúng là những giá trị của hàm $\varphi_k(t)$ tại các điểm t_i, tức $\varphi_1^k = \varphi_k(t_1), \varphi_2^k = \varphi_k(t_2), \ ..., \varphi_m^k = \varphi_k(t_m)$.

Ta sẽ coi các vectơ $\vec{\varphi}^k$ là trực giao và chuẩn hoá (trực chuẩn). Hai vectơ $\vec{a}$ $(a_1, a_2,..., a_m)$ và $\vec{b}$ $(b_1, b_2,..., b_m)$ gọi là trực giao nếu tích vô hướng của chúng bằng không,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i = 0 . \tag{8.3.11}$$

Vectơ $\vec{a}$ gọi là chuẩn hoá nếu độ dài của nó bằng đơn vị

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2} = 1 . \qquad (8.3.12)$$

Điều kiện trực chuẩn của các vectơ $\{\vec{\varphi}^k\}$ được viết dưới dạng

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^k \varphi_i^l = \begin{cases} 1 \text{ khi } k = l, \\ 0 \text{ khi } k \neq l. \end{cases} \qquad (8.3.13)$$

Ta biểu diễn vectơ ngẫu nhiên $\vec{X}$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\{\vec{\varphi}^k\}$

$$\vec{X} \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \vec{\varphi}^k , \qquad (8.3.14)$$

trong đó các hệ số A_k là những tổ hợp tuyến tính của các thành phần của vectơ ngẫu nhiên

$$A_k = \sum_{j=1}^{m} X_j \varphi_j^k . \qquad (8.3.15)$$

Đẳng thức vectơ (8.3.14) viết cho các thành phần vectơ sẽ dẫn tới hệ các đẳng thức

$$X_i \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_i^k, \quad i = 1, 2, ..., m . \qquad (8.3.16)$$

Phương sai sai số của phép xấp xỉ vectơ ngẫu nhiên $\vec{X}$ bởi tổng (8.3.14) được xác định dưới dạng

$$\sigma_n^2 = M\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[X_i - \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_i^k\right]^2\right\} = = M\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[X_i^2 - 2X_i\sum_{k=1}^{n} A_k\varphi_i^k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k A_l \varphi_i^k \varphi_i^l\right]\right\} =$$

$$= M\left\{\sum_{i=1}^{m} X_i^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} X_i X_j \varphi_i^k \varphi_j^l + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k A_l \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^k \varphi_i^l\right\}. \qquad (8.3.17)$$

Do (8.3.13), tổng cuối cùng trong đẳng thức (8.3.17) bằng

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_k A_l \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^k \varphi_i^l = \sum_{k=1}^{n} A_k A_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} X_i X_j \varphi_i^k \varphi_j^k . \qquad (8.3.18)$$

Từ đó ta nhận được

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{m} R_{ii} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij} \varphi_i^k \varphi_j^k , \qquad (8.3.19)$$

trong đó R_{ij} là mômen tương quan giữa các lát cắt $X_i = X(t_i)$ và $X_j = X(t_j)$ của hàm ngẫu nhiên, tức là các phần tử của ma trận tương quan $\| R_{ij} \|$ của vectơ ngẫu nhiên $\vec{X}$.

Ta sẽ tìm một hệ các vectơ trực chuẩn $\{\vec{\varphi}^k\}$ sao cho đại lượng σ_n^2 nhận giá trị nhỏ nhất, hay nói cách khác, tổng ba lớp trong (8.3.19) nhận giá trị lớn nhất.

Những vectơ như vậy gọi là các vectơ trực giao tự nhiên của vectơ ngẫu nhiên $\vec{X}$, còn phép khai triển (8.3.14) với cách chọn các vectơ $\{\vec{\varphi}^k\}$ như vậy gọi là khai triển vectơ ngẫu nhiên thành các thành phẫn trực giao tự nhiên.

Vì hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên là hàm xác định dương, nên mỗi số hạng

$$b_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i^k\varphi_j^k \tag{8.3.20}$$

không âm, do đó, bài toán quy về việc xác định những vectơ trực chuẩn $\{\vec{\varphi}^k\}$ sao cho mỗi số hạng b_k nhận giá trị lớn nhất.

Ta sẽ xét hệ phương trình

$$\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_j = \lambda\varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{8.3.21}$$

Những giá trị của tham số λ tại đó hệ (8.3.21) có nghiệm $\vec{\varphi}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ khác vectơ không, được gọi là các giá trị riêng hay số riêng của ma trận các hệ số $\| R_{ij} \|$ của hệ này, còn các nghiệm $\vec{\varphi}^k$ nhận được ứng với số riêng đã cho λ_k được gọi là những vectơ riêng của ma trận $\| R_{ij} \|$.

Hệ (8.3.21) tương tự (analog) như phương trình tích phân (8.2.1) mà ta đã xét đối với trường hợp thể hiện của quá trình ngẫu nhiên được ghi liên tục, ma trận tương quan $\| R_{ij} \|$ của hệ (8.3.21), như đã biết, là ma trận đối xứng, tương tự như nhân đối xứng của phương trình tích phân.

Những vectơ riêng của ma trận thực đối xứng ứng với những số riêng khác nhau sẽ trực giao với nhau.

Thực vậy, ta xét vectơ riêng $\vec{\varphi}^k$ và $\vec{\varphi}^l$ ứng với các số riêng λ_k và λ_l, $k \neq l$, ta có

$$\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_j^k = \lambda_k\varphi_i^k, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{8.3.22}$$

$$\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_j^l = \lambda_l\varphi_i^l, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{8.3.23}$$

Nhân hai vế của các đẳng thức trong (8.3.22) với φ_i^l rồi cộng lại và nhân từng đẳng thức trong (8.3.23) với φ_i^k và cũng cộng lại:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_j^k\varphi_i^l = \lambda_k\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^k\varphi_i^l, \tag{8.3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_j^l\varphi_i^k = \lambda_l\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^k\varphi_i^l. \tag{8.3.25}$$

Trừ (8.3.25) cho (8.3.24) ta nhận được

$$(\lambda_k - \lambda_l)\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^k\varphi_i^l = 0. \tag{8.3.26}$$

Vì $\lambda_k - \lambda_l \neq 0$ nên $\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^k\varphi_i^l = 0$, tức các vectơ $\vec{\varphi}^k$ và $\vec{\varphi}^l$ trực giao.

Ta tính phương sai của các tổ hợp tuyến tính (8.3.15)

$$D[A_k] = M\left\{\left[\sum_{j=1}^{m} X_j\varphi_j^k\right]^2\right\} = M\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} X_i X_j\varphi_i^k\varphi_j^k\right\} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i^k\varphi_j^k \tag{8.3.27}$$

Nếu λ_k là một số riêng của ma trận tương quan, còn $\vec{\varphi}^k\ (\varphi_1^k, \varphi_2^k, ..., \varphi_m^k)$ là vectơ riêng tương ứng với nó, ta có thể viết (8.3.27) dưới dạng

$$D[A_k] = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^k \sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_j^k = \lambda_k \sum_{i=1}^{m} \varphi_i^k \varphi_i^k = \lambda_k \,. \tag{8.3.28}$$

Từ đó thấy rằng các số riêng của ma trận tương quan là phương sai của các tổ hợp tuyến tính A_k. Điều này chỉ ra rằng các số riêng của ma trận tương quan là những số không âm.

Ta sắp xếp các số riêng của ma trận tương quan theo thứ tự giảm dần $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots$, và giả sử $\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2, \vec{\varphi}^3, \ldots$ là những vectơ riêng tương ứng với chúng.

Có một định lý sau đây về tính chất cực trị của các số riêng và các vectơ riêng của ma trận đối xứng, tương tự tính chất cực trị của các giá trị riêng và hàm riêng của nhân đối xứng của phương trình tích phân.

Định lý: Trên tập hợp các vectơ chuẩn tắc $\vec{\varphi}\ (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ tổng

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j}^{m} R_{ij}\varphi_i\varphi_j \tag{8.3.29}$$

có cực đại bằng số riêng lớn nhất λ_1 của ma trận $\|R_{ij}\|$. Cực đại này đạt được khi vectơ $\vec{\varphi}$ bằng vectơ riêng $\vec{\varphi}_1$ ứng với số riêng λ_1.

Trên tập hợp các vectơ trực giao chuẩn hoá với $n-1$ vectơ riêng đầu tiên $\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2, \ldots, \vec{\varphi}^{n-1}$ của ma trận $\|R_{ij}\|$, tổng (8.3.29) có cực đại bằng số riêng λ_n đạt được khi $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}^n$.

Chứng minh: Giả sử $\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2, \ldots, \vec{\varphi}^m$ là những vectơ riêng độc lập tuyến tính của ma trận $\|R_{ij}\|$, khi đó vectơ $\vec{\varphi}$ có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của chúng

$$\vec{\varphi} = c_1\vec{\varphi}^1 + c_2\vec{\varphi}^2 + \ldots + c_m\vec{\varphi}^m \,. \tag{8.3.30}$$

Thế (8.3.30) vào (8.3.29), do tính chất trực giao của các vectơ riêng, ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i\varphi_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_k c_l \varphi_i^k \varphi_j^l = \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i^k\varphi_j^k \,. \tag{8.3.31}$$

Sử dụng (8.3.21) và điều kiện chuẩn hoá của các vectơ $\vec{\varphi}$, ta được

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i\varphi_j = \sum_{k=1}^{m} c_k^2\lambda_k \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i^k]^2 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k c_k^2 \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^{m} c_k^2 = \lambda_1 \,. \tag{8.3.32}$$

Tổng (8.3.29) sẽ có giá trị cực đại bằng λ_1 khi $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}^1$, vì trong trường hợp này

$$c_1 = 1,\ c_2 = \ \ldots\ = C_m = 0 \,.$$

Bây giờ giả sử vectơ $\vec{\varphi}$ trực giao với các vectơ riêng $\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2, \ldots, \vec{\varphi}^{n-1}$, khi đó trong khai triển (8.3.30) $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$ và từ (8.3.32) ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i\varphi_j = \sum_{k=n}^{m} \lambda_k c_k^2 \leq \lambda_n \,. \tag{8.3.33}$$

Đẳng thức trong (8.3.33) đạt được khi $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}^n$.

Nếu lấy các vectơ riêng của ma trận tương quan $\|R_{ij}\|$ làm hệ các vectơ $\{\vec{\varphi}^k\}$ trong khai triển vectơ ngẫu nhiên $\vec{X}$ (8.3.14) thì phương sai của sai số xấp xỉ σ_n^2 sẽ được xác định dưới dạng

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} R_{ii} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ , \qquad (8.3.34)$$

trong đó λ_k – các số riêng của ma trận tương quan.

Như vậy, với tư cách là những vectơ trực giao tự nhiên khi khai triển vectơ ngẫu nhiên thành tổng của n thành phần trực giao tự nhiên cần phải lấy n vectơ riêng của ma trận tương quan ứng với n số riêng đầu tiên của nó.

Khi chọn các vectơ riêng của ma trận tương quan làm các vectơ $\{\vec{\varphi}^k\}$, các hệ số khai triển A_k (8.3.14) đôi một không tương quan.

Thực vậy,

$$M[A_k A_l] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j}^{m} M[X_i X_j]\varphi_i^k \varphi_j^l = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i^k \sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i^l = \lambda_l \sum_{i=1}^{m}\varphi_i^k\varphi_i^l = 0 \ \text{ khi } \ k \neq l \qquad (8.3.35)$$

Vì các số riêng λ_k của ma trận tương quan là phương sai của các hệ số khai triển vectơ ngẫu nhiên theo các vectơ riêng của ma trận tương quan, nên bài toán khai triển vectơ ngẫu nhiên thành tổng các thành phần trực giao tự nhiên có thể đặt ra như sau. Chẳng hạn, giả sử có m giá trị của yếu tố khí tượng $x_1, x_2, ..., x_m$. Đây có thể là những giá trị tại m mực khác nhau hay tại m điểm khác nhau trên một mặt đẳng áp, hay những giá trị tại một điểm, nhưng ở những thời điểm khác nhau. Các vectơ trực chuẩn $\vec{\varphi}^k(\varphi_1^k, \varphi_2^k, ..., \varphi_m^k)$, tức là những tổ hợp tuyến tính của các giá trị của yếu tố khí tượng x_i, $i = 1, 2, ..., m$ dạng

$$A_k = \sum_{i=1}^{m} x_i \varphi_i^k \qquad (8.3.36)$$

được tìm sao cho phương sai của những tổ hợp tuyến tính này

$$D[A_k] = M\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} x_i \varphi_i^k\right]^2\right\} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{ij}\varphi_i^k\varphi_j^k \qquad (8.3.37)$$

cực đại.

Mỗi vectơ $\vec{\varphi}^k$ như vậy là một vectơ riêng của ma trận tương quan $\| R_{ij} \|$. Số riêng của ma trận $\| R_{ij} \|$ tương ứng với vectơ đó bằng phương sai của tổ hợp tuyến tính A_k.

Ý nghĩa của khai triển hàm ngẫu nhiên thành tổng các thành phần trực giao tự nhiên là ở chỗ, từ một số lượng lớn những số liệu thực nghiệm, trước hết tách ra tổ hợp tuyến tính A_1, có độ biến thiên (phương sai) lớn nhất. Tổ hợp tuyến tính này tương ứng với vectơ riêng $\vec{\varphi}^1$ ứng với số riêng lớn nhất trong các số riêng của ma trận tương quan. Tiếp theo xét đến những tổ hợp tuyến tính A_k, không tương quan với A_1, và chọn lấy tổ hợp A_2 trong số chúng có độ biến thiên lớn nhất, v.v... Sau khi chọn được một số không lớn những tổ hợp như thế, độ biến thiên của tất cả các tổ hợp tuyến tính còn lại trở nên nhỏ. Vì vậy, khi mong muốn mô tả phần lớn độ biến thiên đặc trưng của tập hợp các giá trị $x_1, x_2, ..., x_m$, chúng ta có thể sử dụng không phải tất cả các tổ hợp tuyến tính A_k, mà chỉ một số tổ hợp ứng với những số riêng lớn nhất λ_k.

Khi đó, để đánh giá sai số mắc phải, có thể sử dụng phương sai tương đối của sai số

$$\eta_n^2 = \frac{M\left\{\sum_{i=1}^{m}\left[X_i - \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_i^k\right]^2\right\}}{M\left\{\sum_{i=1}^{m} X_i^2\right\}} \tag{8.3.38}$$

để cho phương sai cực tiểu phù hợp với (8.3.34) và nếu tính đến đẳng thức đã biết

$$\sum_{i=1}^{m} R_{ii} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \tag{8.3.39}$$

sai số này sẽ được viết dưới dạng

$$\eta_n^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}. \tag{8.3.40}$$

Đại lượng

$$d_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k} \tag{8.3.41}$$

đặc trưng cho phần của n thành phần tự nhiên trong phương sai tổng.

Như vậy, so với khai triển hàm ngẫu nhiên theo những hệ hàm hay vectơ trực chuẩn bất kỳ nào khác, phép khai triển hàm ngẫu nhiên theo các thành phần trực giao tự nhiên đảm bảo sự giảm phương sai nhanh nhất từ thành phần này đến thành phần khác.

Bài toán tìm các số riêng và các vectơ riêng của ma trận là một trong những bài toán cơ bản của đại số tuyến tính. Nếu chuyển các số hạng từ vế phải sang vế trái, có thể viết lại hệ (8.3.21) dưới dạng

$$\begin{aligned} &(R_{11} - \lambda)\varphi_1 + R_{12}\varphi_2 + \ldots + R_{1m}\varphi_m = 0, \\ &R_{21}\varphi_1 + (R_{22} - \lambda)\varphi_2 + \ldots + R_{2m}\varphi_m = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &R_{m1}\varphi_1 + R_{m2}\varphi_2 + \ldots + (R_{mm} - \lambda)\varphi_m = 0. \end{aligned} \tag{8.3.42}$$

Hệ các phương trình thuần nhất (8.3.42) sẽ có nghiệm khác vectơ không chỉ trong trường hợp định thức của hệ bằng không, tức là ta có phương trình

$$\begin{vmatrix} R_{11} - \lambda & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} - \lambda & \cdots & R_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{8.3.43}$$

Phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận các hệ số $\| R_{ij} \|$ hay phương trình trọng lượng. Khai triển định thức (8.3.43), ta có thể viết nó dưới dạng một phương trình đại số đối với λ

$$\lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - \ldots - p_{m-1}\lambda - p_m = 0 \tag{8.3.44}$$

Như vậy, những số riêng của ma trận $\| R_{ij} \|$ là các nghiệm của phương trình bậc m (8.3.44), và do đó, nói chung có m số riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, có thể sắp xếp theo thứ tự giảm dần. Để xác định vectơ riêng $\vec{\varphi}^1(\varphi_1^1, \varphi_2^1, ..., \varphi_m^1)$, tương ứng với số riêng lớn nhất λ_1, là vectơ trực giao tự nhiên thứ nhất trong khai triển vectơ ngẫu nhiên (8.3.14), cần phải đặt $\lambda = \lambda_1$ vào hệ (8.3.42) và tìm nghiệm của hệ này. Mỗi vectơ trực giao tự nhiên tiếp theo $\vec{\varphi}^2, \vec{\varphi}^3, ..., \vec{\varphi}^n$ sẽ được tìm bằng cách giải hệ (8.3.42) với $\lambda = \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$.

Những hệ số của phương trình đặc trưng (8.3.44) là tổng của tất cả các định thức con của ma trận $\| R_{ij} \|$ bậc i dựa trên đường chéo chính. Tính trực tiếp các hệ số P_i là công việc nặng nề và đòi hỏi rất nhiều thao tác.

Trong đại số tuyến tính đã xây dựng nhiều phương pháp đơn giản hoá việc giải bài toán xác định các số riêng và các vectơ riêng của ma trận, trình bày chi tiết về vấn đề này có thể tìm được trong [77]. Phần lớn các phương pháp đó bao gồm việc tính trước các các hệ số của phương trình đặc trưng bỏ qua việc tính nhiều định thức con. Sau đó các số riêng được tính bằng một phương pháp nào đó để tính gần đúng các nghiệm của đa thức.

Khi khai triển vectơ ngẫu nhiên thành tổng các thành phần trực giao tự nhiên, như chúng ta đã thấy trên đây, thường người ta giới hạn ở một số thành phần đầu tiên, tức là chỉ sử dụng một số vectơ riêng của ma trận tương quan tương ứng với những số riêng lớn nhất của nó. Bài toán tìm một hoặc một số số riêng của ma trận và các vectơ riêng tương ứng với chúng trong đại số tuyến tính có tên là bài toán giá trị riêng bộ phận để phân biệt với bài toán đầy đủ khi đòi hỏi xác định tất cả các số riêng và các vectơ riêng của ma trận. Để giải bài toán bộ phận thì các phương pháp lặp là rất hiệu quả, trong đó các số riêng được nhận như là giới hạn của những chuỗi số nào đó, và các thành phần vectơ riêng tương ứng với chúng cũng như vậy. Trong các phương pháp lặp, các số riêng thường được tính trực tiếp mà không cần tính trước các hệ số của phương trình đặc trưng, điều đó làm đơn giản bài toán. Các phương pháp lặp thích hợp hơn cả đối với việc giải trên máy tính điện tử, do đó chúng rất quan trọng.

8.4. Biểu diễn các trường khí tượng dưới dạng tổng các thành phần trực giao tự nhiên

Phương pháp khai triển hàm ngẫu nhiên thành các thành phần trực giao tự nhiên cho phép tách ra những đặc điểm cơ bản nhất và loại bỏ những chi tiết nhỏ từ một số lượng lớn số liệu thực nghiệm; phương pháp này đã được ứng dụng rộng rãi để mô tả cấu trúc thống kê các trường khí tượng trong các công trình của N. A. Bagrov [35,36], A. M. Obukhov [67], M.I. Iuđin [87], L. V. Rukoves [73], G. Đ. Kuđashkin [58], A. V. Mesherskaija và N. I. Iakovleva [64,65,89,90] và các tác giả khác.

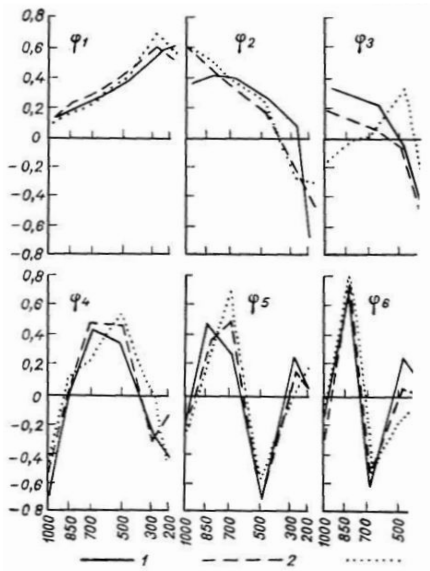
Để làm ví dụ chúng ta xét việc khai triển profile thẳng đứng trường địa thế vị theo các thành phần trực giao tự nhiên, được thực hiện trong công trình của L. V. Rukhoves. Số liệu thực nghiệm ban đầu được sử dụng là các giá trị địa thế vị trên sáu mặt đẳng áp (1000, 850, 700, 500, 300 và 200 mb) qua 3 giờ một và chúng được chia thành bốn tập: tập thứ nhất bao quát thời kỳ 10 ngày, từ 23/1 đến 1/2/1959, tập thứ hai – 10 ngày, từ 15 đến 24/4/1959, tập thứ ba – 11 ngày, từ 6 đến 16/7/1959, tập thứ tư – 10 ngày, từ 20 đến 29/10/1959.

Việc chọn một vài tập như vậy nhằm khảo sát vấn đề về độ ổn định của phép khai triển. Nếu các thành phần trực giao tự nhiên nhận được theo một tập mất tính ổn định khi chuyển sang những tập khác, thì việc ứng dụng khai triển như vậy vào thực tế trở thành ít hiệu quả và không ưu việt so với phép khai triển theo các hệ hàm trực giao khác.

Số liệu được lấy tại các điểm nút của lưới đều trên lãnh thổ châu Âu. Mỗi mùa có không ít hơn 990 giá trị biến đổi ngày đêm của địa thế vị, mặc dù, như tác giả [73] đã nêu, không phải tất cả các giá trị đều độc lập. Để nghiên cứu sự phụ thuộc của các hàm trực giao tự nhiên vào vĩ độ, toàn bộ lãnh thổ được chia thành ba vùng theo vĩ độ. Theo số liệu của tập thứ ba, tập có nhiều giá trị nhất, đã tính các ma trận tương quan $\| R_{ij} \|$ cho từng vùng trong số ba vùng, những ma trận tương quan này mô tả mối liên hệ của biến đổi ngày đêm của địa thế vị giữa các mực trên toàn bộ sáu mặt đẳng áp. Vì xét các số liệu trên sáu mực chuẩn, nên ma trận tương quan $\| R_{ij} \|$ là ma trận bậc sáu.

Việc tính các số riêng và vectơ riêng được thực hiện theo phương pháp Jacobi, tức là đưa ma trận về dạng đường chéo nhờ phép quay đơn giản [77]. Việc tính sự biến đổi ngày đêm, ma trận tương quan, các số riêng và vectơ riêng được thực hiện trên máy tính điện tử.

Giá trị các vectơ riêng của ma trận tương quan cho ba vùng (1, 2, 3), lấy từ [73], được biểu diễn trên hình 8.1. Do độ biến động của địa thế vị tăng theo vĩ độ mà các ma trận tương quan của các vùng khác biệt nhau một cách đáng kể. Nhưng, như ta thấy trên hình 8.1, các vectơ riêng của những ma trận đó khá gần nhau.



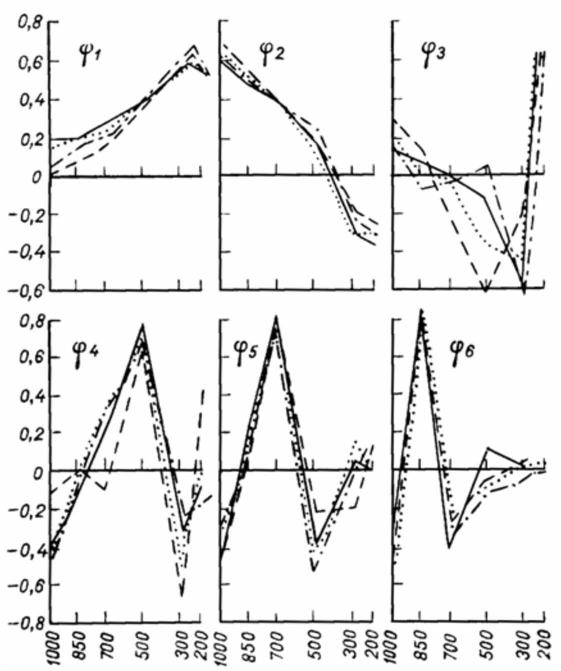
Hình 8.1

Để nhận định tính chất ổn định của các vectơ riêng, trên hình 8.2 đã dẫn ra các giá trị của chúng cho mỗi một trong bốn tập của một vùng. Từ hình 8.2 thấy rằng, đối với các mùa khác nhau hình dạng các vectơ riêng gần giống nhau, đặc biệt đối với hai vectơ riêng đầu tiên.

Trong bảng 8.1 dẫn ra giá trị các số riêng của ma trận tương quan đối với từng tập và các đại lượng

$$d_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}, \tag{8.4.1}$$

đặc trưng cho phần đóng góp của n thành phần trực giao tự nhiên vào phương sai của khai triển (8.3.14) với $n = 1, 2, ..., 6$, tức là khi hạn chế bởi một, hai, ba, v.v... số hạng trong tổng (8.3.14).



Hình 8.2

Bảng 8.1

k	Tập							
	1		2		3		4	
	λ_k	d_n %	λ_k	d_n %	λ_k	d_n %	λ_k	d_n %
1	559,8	80,9	195,2	66,2	184,7	73,5	625,2	50,2
2	93,4	94,4	59,4	86,3	40,8	89,7	115,5	95,0
3	22,5	97,6	18,5	92,6	14,2	95,3	21,0	97,7
4	10,6	99,2	11,0	96,3	5,5	97,5	10,7	99,0
5	3,6	99,7	8,7	99,3	4,2	99,2	5,1	99,7
6	2,1	100	2,1	100	1,9	100	2,4	100

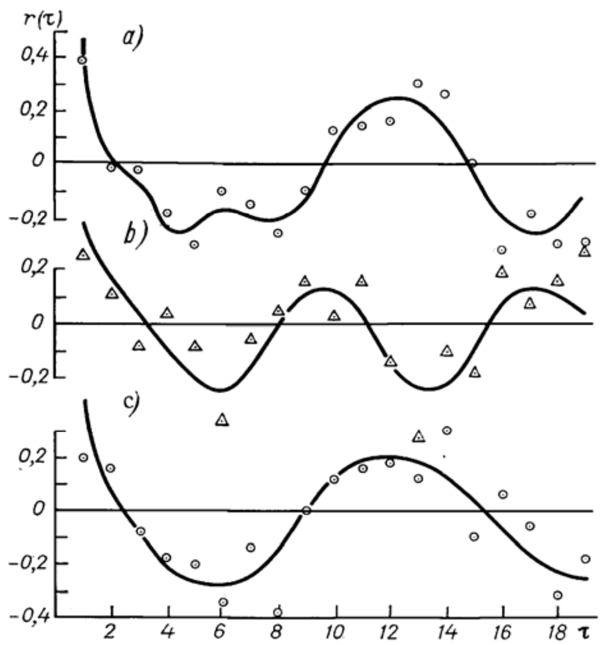
Từ bảng thấy rằng hai thành phần trực giao tự nhiên đầu tiên tập trung khoảng 90% phương sai tổng cộng, tức là khai triển theo các thành phần trực giao tự nhiên có tốc độ hội tụ cao.

CHƯƠNG 9: NHỮNG VÍ DỤ NGOẠI SUY TUYẾN TÍNH TỐI ƯU CÁC QUÁ TRÌNH KHÍ TƯỢNG THỦY VĂN

9.1. Ngoại suy tối ưu dòng chảy sông theo phương pháp I. M. Alekhin

I. M. Alekhin đã ứng dụng lý thuyết ngoại suy tuyến tính tối ưu các quá trình ngẫu nhiên dừng để dự báo dòng chảy sông ngòi [34]. Ông xem độ lệch của dòng chảy năm so với chuẩn như một hàm ngẫu nhiên dừng của thời gian cho tại những giá trị nguyên của đối số.

Để có thể dự báo quá trình ngẫu nhiên tại thời điểm $t+T, T>0$ theo các số liệu quan trắc trên khoảng đo của đối số trước thời điểm t, thì sự tồn tại mối phụ thuộc tương quan đáng kể giữa các lát cắt của quá trình ngẫu nhiên là cần thiết. Có thể nhận định về sự tồn tại mối phụ thuộc này, chẳng hạn, bằng đồ thị hàm tương quan. Trong [34] đã tính các hàm tương quan chuẩn hoá $r(\tau)$ của độ lệch dòng chảy năm so với chuẩn cho sáu con sông phân bố trên lãnh thổ châu Âu của Liên Xô. Số liệu ban đầu để tính là số liệu lưu lượng nước trung bình năm trong 50–70 năm lấy từ "Tài liệu chế độ sông ngòi Liên Xô" và các niên lịch thủy văn. Những ví dụ về các hàm tương quan đã tính được dẫn trên hình 9.1. (Những đường liền nét nhận được bằng cách làm trơn theo phương pháp bình phương tối thiểu). Từ hình 9.1, rút ra kết luận về nguyên tắc có thể dự báo dòng chảy sông, vì tương quan lưu lượng trung bình năm trong sáu trường hợp xem xét tỏ ra khá cao trong một dải rộng của khoảng τ. Điều này, theo Iu. M. Alokhin, được quyết định bởi hai nguyên nhân: sự điều chỉnh dòng chảy năm tạo nên mối liên hệ tương quan với những τ không lớn (không lớn hơn 2–3 năm), và tính chu kỳ của dòng chảy tạo nên sự tương quan biến thiên có tính tuần hoàn và làm cho tương quan tắt dần chậm trong dải τ rộng. Trong công trình [34] đã khảo sát ngoại suy "thuần tuý" (không làm trơn) dòng chảy năm của các con sông với thời hạn dự báo $T=1,2,3$ và 5 năm. Trong đó các tính toán được thực hiện bằng hai phương pháp: giải trực tiếp hệ phương trình đại số (5.2.11) (xem mục 5.2) và sử dụng lý thuyết Kolmogorov–Winer (xem mục 5.3 và 5.5).



Hình 9.1

1. Dự báo dòng chảy sông bằng cách giải trực tiếp hệ phương trình đại số

Bài toán dự báo dòng chảy sông được đặt ra như sau. Có số liệu độ lệch dòng chảy năm so với chuẩn $q(t), q(t-1), ..., q(t-n)$ ghi được trong n năm mà năm cuối cùng được ký hiệu là t. Giá trị dự báo $q(t+T)$, với $T-$ thời hạn dự báo, sẽ được tìm dưới dạng tổ hợp tuyến tính của m số trong số các số liệu này

$$q(t+T)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k q(t-k)\,. \qquad (9.1.1)$$

Các hệ số α_k đối với từng giá trị T đã cho, được xác định từ điều kiện cực tiểu phương sai sai số ngoại suy như đã trình bày trong mục 5.2, là nghiệm của hệ phương trình

$$R_q(T+j)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k R_q(k-j), \quad j=1,2,...,m\,, \qquad (9.1.2)$$

trong đó $R_q(\tau)$ là hàm tương quan của độ lệch dòng chảy năm. Số hạng tử m trong tổng (9.1.1) cần được chọn sao cho các mômen tương quan $R_q(k-j)$ xác định theo số liệu quan trắc tại n điểm phải đủ tin cậy. Trong [34], hệ phương trình (9.1.2) được giải bằng phương pháp Gauss [77].

Chúng ta sẽ xem xét kết quả tính cho sông Volga tại Kubưshev. Chuỗi ban đầu của lưu lượng trung bình năm lấy bằng các độ lệch so với chuẩn trong thời kỳ 1882–1935. Số hạng tử trong tổng (9.1.1) bằng 21.

Trong bảng 9.1 dẫn ra giá trị của các hệ số ngoại suy tối ưu α_k ứng với thời hạn dự báo $T=1,2,3$ và 5 năm.

Để đánh giá chất lượng dự báo tối ưu, trên hình 9.2 dẫn ra những giá trị thực của dòng chảy năm (đường liền nét) và những giá trị dự báo theo công thức (9.1.1) với các hệ số ở bảng 9.1.

Từ hình 9.2 thấy rằng, số liệu dự báo nhận được theo phương pháp ngoại suy tối ưu khá phù hợp với những giá trị thực của dòng chảy năm.

Bảng 9.1

T	k										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,56	–0,53	0,42	–0,22	0,03	0,08	–0,28	0,03	0,24	0,18	0,00
2	–0,22	0,19	–0,07	–0,28	–0,05	–0,17	0,02	0,25	0,19	0,13	0,19
3	–0,19	0,11	–0,55	0,16	–0,38	0,08	0,20	0,23	0,00	0,14	0,13
5	–0,85	–0,06	–0,52	0,53	–0,01	0,28	–0,18	0,25	–0,02	0,34	0,58

T	k									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,22	0,03	0,35	–0,17	–0,29	0,22	–0,48	0,08	–0,21	0,00
2	0,08	0,34	0,14	–0,17	0,08	–0,36	–0,07	–0,15	–0,16	–0,33
3	0,35	0,20	–0,23	0,31	–0,26	–0,17	0,00	–0,28	–0,15	–0,30
5	0,01	0,28	–0,44	0,07	0,00	–0,49	–0,42	–0,52	0,32	–0,04

Các hệ số tương quan giữa giá trị thực và dự báo bằng:

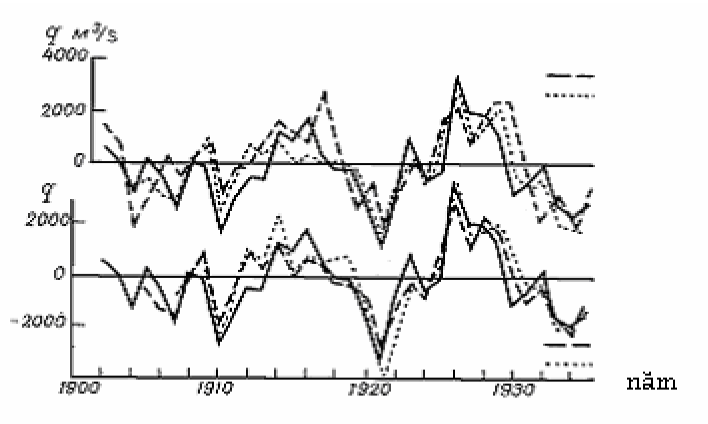
$0{,}84 \pm 0{,}03$ với $T = 1$ năm,

$0{,}84 \pm 0{,}03$ với $T = 2$ năm,

$0{,}84 \pm 0{,}03$ với $T = 3$ năm,

$0{,}80 \pm 0{,}03$ với $T = 5$ năm.

Thành công của việc đưa số liệu nhiều năm vào dự báo càng thể hiện rõ nếu chúng ta nhớ lại rằng các hệ số tương quan giữa lưu lượng trung bình năm của sông Volga (tại Kubưshev) với $\tau = 2, 3$ và 5 năm bằng $r(2) = 0{,}06$, $r(3) = -0{,}05$, $r(5) = -0.23$ (xem hình 9.1). Kết quả dự báo cho năm con sông khác cũng rất khả quan.



Hình 9.2

2. Dự báo dòng chảy sông khi sử dụng lý thuyết Kolmogorov– Winer

Giả thiết rằng độ lệch dòng chảy năm so với chuẩn là quá trình ngẫu nhiên dừng và khoảng thời gian cho quá trình này khá lớn, tức là thể hiện của quá trình có thể xem là được cho trên toàn khoảng trước thời điểm hiện tại.

Theo lý thuyết Kolmogorov–Winer giá trị dự báo $q(t+T)$ được tìm theo công thức (9.1.1), trong đó các hệ số α_k được xác định bằng cách giải phương trình Winer–Hopf theo phương pháp đã trình bày trong mục 5.5.

Phương pháp tính toán như sau:

1) tìm hàm tương quan $R_q(\tau)$ theo chuỗi các quan trắc $q(t)$, $q(t-1)$,..., $q(t-n)$,

2) tìm mật độ phổ $S_q(\omega)$ theo hàm tương quan $R_q(\tau)$,

3) xác định hàm truyền tối ưu theo công thức (5.5.19),

4) xác định các hệ số α_k như là giá trị của hàm trọng lượng tối ưu (5.4.11) khi thay thế t bởi $t-k$ trong công thức này,

5) xác định giá trị cần tìm $q(t+T)$ theo công thức (9.1.1).

Trong chương 5 chúng ta đã xét phương pháp xác định hàm trọng lượng tối ưu khi cho hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dưới dạng giải tích. Khi đó giả thiết rằng những giá trị thống kê của hàm tương quan tính theo số liệu thực nghiệm được xấp xỉ bằng biểu thức giải tích.

Trong [34] những giá trị thống kê của hàm tương quan được xấp xỉ bằng đường gấp khúc, ở đó tích phân trong các công thức xác định mật độ phổ, hàm truyền và hàm trọng lượng được thay thế gần đúng bằng tổng tích phân tương ứng khi tính toán.

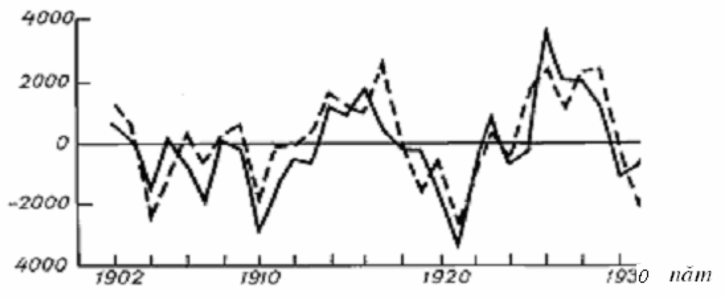
Bảng 9.2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_k	0,40	0,00	0,00	–0,30	0,53	0,25	0,21	0,10	0,21	–0,14	–0,11

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
α_k	0,14	–0,05	0,47	–0,06	–0,30	0,10	–0,06	–0,10	0,14	–0,11

Trong bảng 9.2 dẫn ra những giá trị nhận được của các hệ số α_k đối với sông Volga với thời gian báo trước bằng một năm.

Sử dụng các hệ số α_k trong bảng 9.2, theo công thức (9.1.1) đã làm dự báo dòng chảy sông Volga tại Kubưshev với thời hạn dự báo 1 năm cho thời kỳ 1902–1935. Trên hình 9.3 dẫn ra những số liệu tính toán dự báo (đường gạch nối) và giá trị quan trắc thực của độ lệch dòng chảy so với chuẩn trong những năm đó (đường liền nét). Từ hình vẽ thấy rằng, số liệu tính phản ánh đúng biến trình của giá trị thực và khá phù hợp với chúng. Hệ số tương quan của dòng chảy thực và dự báo bằng $0{,}86 \pm 0{,}03$. So sánh các kết quả này với những đánh giá dự báo nhận được bằng con đường giải trực tiếp hệ phương trình (9.1.2) (xem mục 1) thấy rằng độ chính xác của chúng xấp xỉ như nhau.



Hình 9.3

9.2. Phân tích phổ và ngoại suy chỉ số hoàn lưu vĩ hướng

Khi nghiên cứu các quá trình khí quyển quy mô lớn cần biết quy luật của mắt xích chủ yếu trong hoàn lưu chung của khí quyển, đó là hoàn lưu vĩ hướng, tức sự vận chuyển không khí từ phía tây sang phía đông gây nên bởi dòng nhiệt tới từ mặt trời và sự quay của trái đất quanh trục.

Khi tìm hiểu các quy luật hoàn lưu thường người ta sử dụng một số đặc trưng tích phân của các quá trình vĩ mô. Phổ biến nhất trong các đặc trưng đó là chỉ số hoàn lưu vĩ hướng.

Chỉ số hoàn lưu vĩ hướng J được định nghĩa như là một đại lượng không thứ nguyên, bằng tỷ số tốc độ góc quay của khí quyển α và tốc độ góc quay của trái đất ω

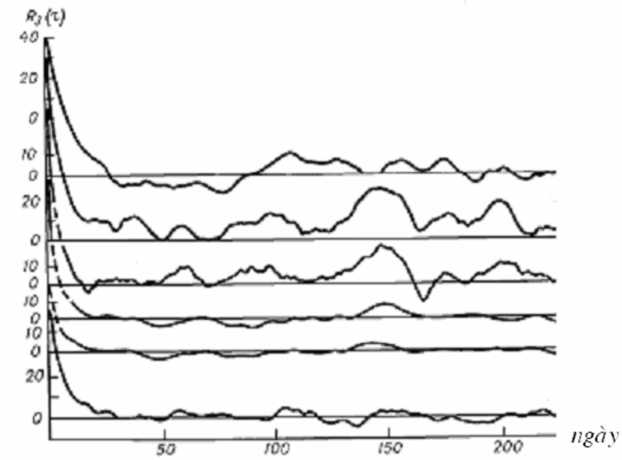
$$J = \frac{\alpha}{\omega}. \tag{9.2.1}$$

Đại lượng α liên hệ với tốc độ dài của chuyển động khí quyển bởi hệ thức

$$v_\lambda = \alpha(z) r_0 \cos\varphi, \tag{9.2.2}$$

trong đó v_λ là tốc độ của dòng vĩ hướng, r_0 – bán kính trung bình trái đất, φ là vĩ độ địa lý, z – độ cao trên mực nước biển.

Do tầm quan trọng của sự hiểu biết về những quy luật biến đổi theo thời gian của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng, đặc biệt cho mục đích hoàn thiện phương pháp dự báo thời tiết hạn dài, trong nhiều công trình đã nghiên cứu cấu trúc thống kê của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng và thử nghiệm dự báo nó bằng phương pháp thống kê.



Hình 9.4

Trong các công trình [49, 53, 54, 61, 82] đã tiến hành xử lý thống kê một số lượng khá lớn tài liệu thực nghiệm và tính các hàm tương quan, mật độ phổ của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng.

Trên hình 9.4 dẫn ra các hàm tương quan thời gian của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng theo [49] đối với các độ cao của các mặt đẳng áp 1000, 700, 500, 300, 200 và 100mb.

Các hàm tương quan được tính theo giá trị ngày của đại lượng chỉ số hoàn lưu vĩ hướng trong những năm quan trắc sau đây:

Mực, mb	Năm
1000	1955–1960
700, 500	1949–1960
300, 200	1954–1956
100	1958–1960
	1958–1960

Trên hình 9.4 nhận thấy sự phù hợp tốt giữa những hàm tương quan ở các mực 700–500 mb, và gần đối lưu hạn (200–300 mb), điều này cho phép sử dụng các hàm tương quan lấy trung bình cho từng lớp. Trên hình thấy rõ rằng, thoạt đầu các hàm tương quan giảm khá nhanh, sau đó có tính chất dao động ngẫu nhiên. Trong đó nhận thấy những dao động này biểu hiện tính tuần hoàn với chu kỳ trung bình khá gần nhau ở tất cả các đường cong.

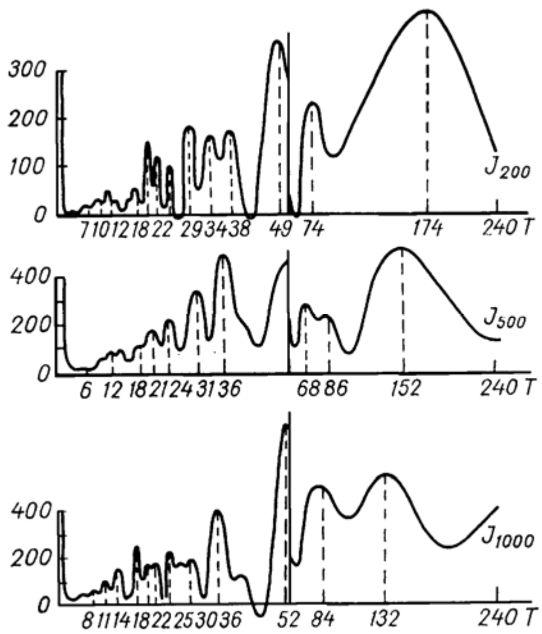
Để biểu thị rõ hơn tính tuần hoàn của các hàm tương quan nhận được đã tính các mật độ phổ $S_j(\omega)$ theo công thức

$$S_j(\omega) = R_j(0) + 2\sum_{i=1}^{n} R_j(\tau)\cos\omega\tau,$$

ở đây $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, T là chu kỳ.

Những tính toán được thực hiện với $T = 1, 2, ..., 240$ ngày.

Đồ thị mật độ phổ đối với các mực 1000, 500 và 200 mb từ [49] dẫn ra trên hình 9.5.



Hình 9.5

Sự tồn tại một loạt các cực đại thể hiện khá rõ trên các đồ thị mật độ phổ (ứng với $T = 12 \div 14, 20 \div 21...$ ngày) chứng tỏ về tính tuần hoàn trong sự biến đổi theo thời gian của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng.

Để làm rõ mức độ liên hệ của hoàn lưu trên các mặt đẳng áp khác nhau trong [82] đã tính các hàm tương quan quan hệ chuẩn hoá $r_{ij}(\tau)$ giữa các giá trị của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng trên các mực khác nhau. Đồ thị của các hàm đó được dẫn ra trên hình 9.6.

Những giá trị lớn nhất của các hàm tương quan quan hệ chuẩn hoá nhận được cho các giá trị trên hai mực ứng với cùng một thời điểm, tức khi $\tau = 0$. Khi đó đại lượng $r_{ij}(0)$ có các trị số lớn nhất trong tầng đối lưu giữa ($r_{500,700}(0) = 0{,}97$), các lớp đối lưu hạn có mức độ liên hệ nhỏ nhất ($r_{300,200}(0) = 0{,}87$). Khi khoảng cách giữa các mực tăng dần thì mối liên hệ của hoàn lưu vĩ hướng yếu đi.

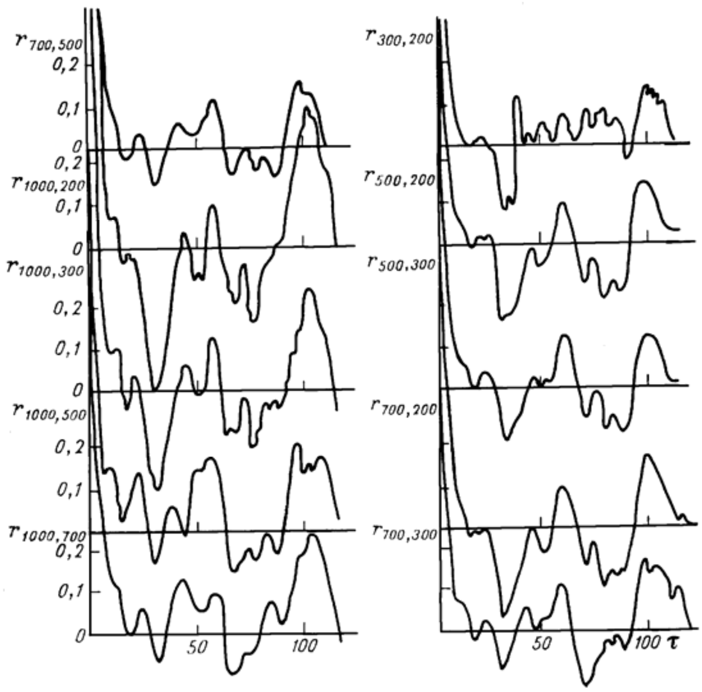
Trong các công trình [53, 54] đã nghiên cứu cấu trúc thống kê giá trị trung bình tháng của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng. Từ những giá trị của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng trung bình tháng tại mực 500 mb trong 15 năm (1949–1963), đã tính hàm tương quan chuẩn hoá thời gian $r(\tau)$ của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng. Kết quả được biểu diễn trên hình 9.7. Đặc điểm của đường cong trên hình này tương tự đặc điểm của các hàm tương quan đối với giá trị ngày của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng, ở đây cũng thể hiện rõ những dao động sóng ngẫu nhiên. Chu kỳ trung bình của các dao động bằng 6–9 tháng. Sự hiện diện của tính tuần hoàn này cũng được khẳng định trên đồ thị mật độ phổ giá trị trung bình tháng của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng [54], được dẫn ra trên hình 9.8.

Mối liên hệ tương quan đáng kể theo thời gian của các giá trị ngày lẫn các giá trị trung bình tháng của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng chứng tỏ tính đúng đắn của việc đặt bài toán dự báo thống kê chỉ số hoàn lưu vĩ hướng. Việc thử nghiệm giải quyết bài toán này đã được nêu ra trong các công trình [53,54,82].

Trong công trình [82] đã giải bài toán ngoại suy tuyến tính giá trị ngày của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng trên mặt đẳng áp 700 mb, tại đó mối liên hệ tương quan tỏ ra ổn định nhất.

Giá trị dự báo $J(t+m)$ với thời hạn dự báo m ngày đã được tìm theo chuỗi n giá trị của nó trước thời điểm t theo công thức

$$J(t+m) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i J(t-i) . \qquad (9.2.3)$$



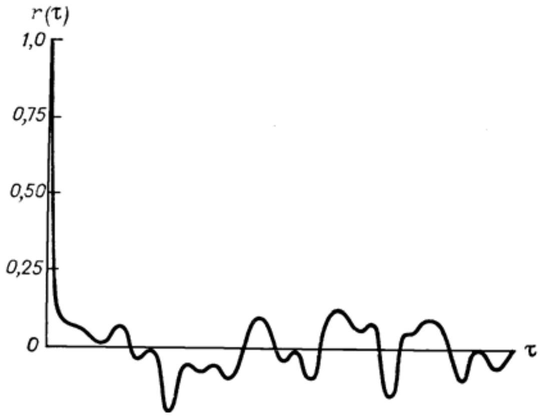
Hình 9.6

Bài toán về ngoại suy tuyến tính thuần tuý quá trình ngẫu nhiên dừng cho tại một số điểm hữu hạn đã được giải theo phương pháp trình bày trong mục 5.2. Các hệ số A_i được xác định bằng cách giải hệ phương trình dạng (5.2.11).

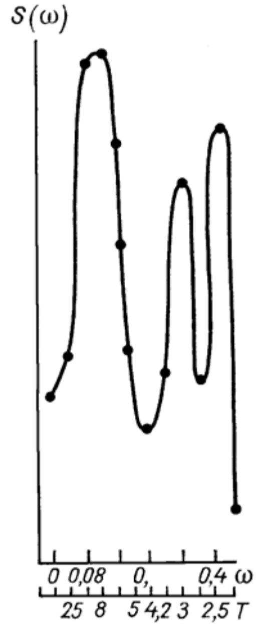
Những giá trị của các hệ số A_i với $n=30$ và thời hạn dự báo m bằng1, 3 và 7 ngày được dẫn trên hình 9.9. Từ hình này thấy rằng, ảnh hưởng mạnh nhất đến đại lượng được dự báo là các giá trị liền trước nó, sau đó khi $2<i<20$ ảnh hưởng của quá khứ giảm nhanh, cuối cùng với $i=21\div25$ sự ảnh hưởng này lại tăng mạnh lên. Sự phân bố trọng lượng như vậy dĩ nhiên phù hợp với sự phân bố các cực đại của mật độ phổ (xem hình 9.5).

Để đánh giá sự phù hợp giữa các giá trị nhận được bằng cách ngoại suy tuyến tính và các giá trị thực của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng đã xác định sai số tuyệt đối trung bình của phép ngoại suy $\rho=\left|\overline{J-J^*}\right|$, trong đó J^* là giá trị ngoại suy, $J-$ giá trị thực của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng.

Giá trị nhỏ nhất của sai số ρ nhận được khi m nhỏ, tức là khi chỉ sử dụng giá trị của những ngày liền trước gần nhất. Khi sử dụng số lượng lớn các số hạng trong công thức ngoại suy tối ưu thì độ chính xác không những không tăng lên, mà thậm chí giảm mạnh.



Hình 9.7



Hình 9.8

Thoạt nhìn có thể tưởng rằng càng nhiều hệ số A_i được sử dụng trong công thức ngoại suy tối ưu thì càng nhiều thông tin được đưa vào để nhận giá trị dự báo, và giá trị dự báo càng được xác định một cách chính xác. Thực tế thì không phải như vậy. Các hàm tương quan thực nghiệm dùng để xác định các hệ số A_i không phải là chính xác, vì chúng nhận được dựa theo tập mẫu không lớn lắm các thể hiện. Ngoài ra độ chính xác của chúng còn bị giảm vì một số thể hiện riêng biệt phụ thuộc lẫn nhau.

Khi số lượng các phương trình của hệ (5.2.11) lớn, độ chính xác của việc xác định các hệ số A_i có thể bị giảm còn vì tính căn cứ thấp của hệ này hay tính không ổn định của nó.

Vì vậy số lượng các hệ số A_i được tính tới khi dự báo phải chọn đủ nhỏ so với dung lượng mẫu. A. M. Iaglom [88] cho rằng khi dung lượng mẫu khoảng vài trăm giá trị, số hệ số A_i không được vượt quá một vài đơn vị.

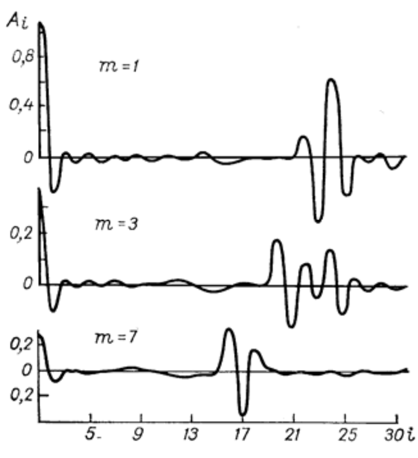
Để cắt giảm số số hạng trong công thức ngoại suy tối ưu và chọn một số không lớn các số hạng có tỷ trọng lớn nhất trong dự báo, thông thường phương pháp gọi là phương pháp sàng tỏ ra rất hiệu quả. Phương pháp này như sau. Giả sử có n giá trị của thể hiện của quá trình ngẫu nhiên $U(t)$ tại những thời điểm trước thời điểm t: $u(t), u(t-1), ..., u(t-n+1)$. Giá trị dự báo của thể hiện ở thời điểm $t+m$ được tìm theo công thức

$$u(t+m) = \sum_{j=1}^{k} A_j v_j \tag{9.2.4}$$

với số các số hạng k không lớn.

Khi đó với tư cách là giá trị của v_1 người ta chọn ra trong số các giá trị $u(t-i)$ một giá trị tương ứng với trị số lớn nhất của hệ số tương quan của v_1 với đại lượng cần dự báo. Sau đó với tư cách là v_2 người ta lấy từ trong số các giá trị còn lại một giá trị có phần đóng góp lớn nhất vào hệ số tương quan của cặp (v_1, v_2) với đại lượng cần dự báo, tiếp theo lấy từ trong các giá trị còn lại một giá trị v_3 có phần đóng góp lớn nhất vào hệ số tương quan của ba đại lượng (v_1, v_2, v_3) với đại lượng cần dự báo v.v...

Thông thường sau một vài bước thì phần bổ sung vào hệ số tương quan chỉ còn là rất nhỏ và thủ tục có thể kết thúc; số số hạng được chọn khi đó sẽ không lớn lắm. Tuy nhiên khi sử dụng phương pháp này, trong trường hợp có nhiều đại lượng ban đầu, cũng có nguy cơ ngẫu nhiên nhận được những hệ số tương quan tương đối lớn của các giá trị được chọn v_k do sự không chính xác của việc xác định các hệ số tương quan thực nghiệm. Khi đó dự báo theo phương pháp này cũng có thể trở nên không hiệu quả.



Hình 9.9

Trong công trình [53] để dự báo chỉ số hoàn lưu vĩ hướng trung bình tháng đã sử dụng lý thuyết ngoại suy tuyến tính các quá trình ngẫu nhiên dừng trình bày trong các mục 5.3 và 5.5.

Với mục đích đó, hàm tương quan của chỉ số hoàn lưu vĩ hướng trung bình tháng xác định theo số liệu thực nghiệm đã được xấp xỉ bằng biểu thức giải tích

$$R(\tau) = e^{-2,465|\tau|} + e^{-0,01|\tau|}(0,135\sin\sigma_1|\tau| + 0,51\sin\sigma_2|\tau|). \qquad (9.2.5)$$

Theo công thức (3.2.12) mật độ phổ tương ứng $S(\omega)$ đã được xác định dưới dạng

$$S(\omega) = \frac{(\omega^2 - 0,616)^2(\omega^2 - 8,834)^2}{[\omega^2 - (\alpha_1 - i\sigma_1)^2][\omega^2 + (\alpha_1 - i\sigma_1)^2][\omega^2 - (\alpha_1 - i\sigma_2)^2]} \times$$

$$\times \frac{1}{[\omega^2 + (\alpha_1 - i\alpha_2)^2](\omega^2 + \alpha_2^2)}, \qquad (9.2.6)$$

trong đó $\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 2,465$.

Sau đó, theo phương pháp được trình bày trong mục 5.5 đã tìm hàm truyền tối ưu theo công thức (5.5.19), và tiếp theo là tìm công thức ngoại suy tuyến tính tối ưu biểu thị giá trị dự báo của đại lượng cần tìm tại thời điểm $t+T$ qua giá trị của nó và giá trị của đạo hàm các bậc của nó tại thời điểm t.

Nếu chỉ giới hạn ở hai đạo hàm đầu tiên, thì nhận được những công thức ngoại suy tuyến tính tối ưu gần đúng chỉ số hoàn lưu vĩ hướng với thời hạn dự báo một và hai tháng dưới dạng

$$J(t+1) = 0,0673J(t) + 0,0027J'(t) - 0,8143J''(t), \qquad (9.2.7)$$

$$J(t+2) = 0,0057J(t) + 0,0002J'(t) - 0,0690J''(t). \qquad (9.2.8)$$

Khi tính các đạo hàm đã sử dụng các công thức nội suy Newton:

$$J' \approx \Delta J = J(t) - J(t-1),$$

$$J'' \approx \Delta^2 J = J(t) - 2J(t-1) + J(t-2). \qquad (9.2.9)$$

Kết quả dự báo J với thời hạn dự báo một tháng theo công thức (9.2.7) khá phù hợp với các giá trị thực. Dự báo đại lượng $J(t+2)$ không cho kết quả khả quan.

CHƯƠNG 10: MỘT SỐ VẤN ĐỀ MÔ TẢ TRƯỜNG TỐC ĐỘ GIÓ

10.1. Hàm tương quan của tốc độ gió

Trong chương 4 đã chỉ ra rằng để xác định kỳ vọng toán học và hàm tương quan của biến đổi tuyến tính hàm ngẫu nhiên dừng nào đó chỉ cần biết kỳ vọng toán học và hàm tương quan của hàm ngẫu nhiên được biến đổi. Nhưng trong thực tiễn thường xảy ra các trường hợp khi mối liên hệ giữa các hàm ngẫu nhiên thực sự không tuyến tính. Khi đó để nhận được các đặc trưng của hàm ngẫu nhiên là kết quả của phép biến đổi phi tuyến, thì biết kỳ vọng toán học và hàm tương quan của hàm ngẫu nhiên được biến đổi là chưa đủ, mà cần biết các mômen bậc cao hoặc các hàm phân bố nhiều chiều của nó. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, bằng cách sử dụng những thủ thuật nhân tạo có thể biểu diễn gần đúng kỳ vọng toán học và hàm tương quan của kết quả biến đổi phi tuyến qua những đặc trưng tương ứng của hàm ngẫu nhiên được biến đổi.

Để làm ví dụ cho biến đổi phi tuyến quá trình ngẫu nhiên dừng, ta xét phương pháp gần đúng xác định hàm tương quan của modul vận tốc gió, nếu biết trước kỳ vọng toán học và hàm tương quan của các thành phần của vectơ này. Thông thường vectơ gió được xem như vectơ ngẫu nhiên hai chiều, mà các thành phần $U_x(t)$ và $U_y(t)$ của nó là những hàm ngẫu nhiên không độc lập với nhau, tại mỗi giá trị t chúng tuân theo qui luật phân bố chuẩn có phương sai bằng nhau.

Có thể xác định được hàm tương quan của modul vectơ gió, nếu biết quy luật phân bố hai chiều $f(u_1, u_2)$, tức mật độ phân bố đồng thời các tốc độ gió U_1 và U_2 lấy ở những thời điểm khác nhau hay tại những điểm khác nhau trong không gian. Phương pháp này được A. S. Martrenko xem xét trong công trình [60], ở đó trên cơ sở xác định lý thuyết mật độ phân bố đồng thời của các modul $\left|\vec{\mathrm{U}}(t_1)\right|$ và $\left|\vec{\mathrm{U}}(t_2)\right|$, xác lập mối liên hệ giữa các hàm tương quan của trường vectơ $\vec{\mathrm{U}}(t)$ và trường vô hướng $\left|\vec{\mathrm{U}}(t)\right|$. Với một số giả thiết nào đó đã nhận được những công thức tương đối đơn giản, và thực tế ứng dụng được, để tính các hệ số tương quan cho trường hợp tốc độ gió trung bình gần bằng không. Nhưng thực ra, như đã nêu trong công trình [60], trong nhiều trường hợp tốc độ gió trung bình $M[U] = m$ khác không, và giá trị của chúng có thể vượt quá phương sai σ^2 một cách đáng kể. Ví dụ, trong các điều kiện điển hình đối với dòng chảy xiết thì $\dfrac{m^2}{\sigma^2} = 2{,}4 \div 12$. Biểu thức đối với mật độ phân bố đồng thời của tốc độ, nhận được trong các điều kiện đó, rất cồng kềnh và trên thực tế không cho phép nhận được những công thức khả dĩ để tính các hệ số tương quan.

Chúng ta sẽ xây dựng các công thức để xác định hàm tương quan tốc độ gió cho trường hợp giá trị trung bình của tốc độ gió lớn hơn đáng kể so với độ lệch bình phương trung bình của chúng. Phương pháp này dựa trên cơ sở sử dụng hàm đặc trưng của hệ các đại lượng ngẫu nhiên có dạng đơn giản đối với trường hợp các đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn.

Bài toán được phát biểu như sau. Xét vectơ ngẫu nhiên hai chiều

$$\mathrm{U}(t) = U_x(t)\mathrm{i} + U_y(t)\mathrm{j} \tag{10.1.1}$$

mà các thành phần $U_x(t)$ và $U_y(t)$ của nó là những hàm ngẫu nhiên dừng phân bố chuẩn có kỳ vọng toán học m_x và m_y, các phương sai $D_x = D_y = \sigma^2$ và các hàm tương quan $R_x(\tau)$ và $R_y(\tau)$.

Các thành phần của vectơ được coi là không phụ thuộc lẫn nhau, tức hàm tương quan quan hệ của chúng bằng không.

Yêu cầu xác định hàm tương quan $R_u(\tau)$ của modul vectơ ngẫu nhiên

$$U(t) = \sqrt{U_x^2(t) + U_y^2(t)}\,. \tag{10.1.2}$$

Muốn vậy, đầu tiên ta xác định hàm tương quan của bình phương modul

$$Z(t) = U_x^2(t) + U_y^2(t)\,. \tag{10.1.3}$$

Hiển nhiên hàm ngẫu nhiên $Z(t)$ không phân bố chuẩn, tuy vậy tính dừng của nó được giữ nguyên.

Ta xác định hàm tương quan $R_z(\tau)$

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= M\{[Z(t) - m_z][Z(t+\tau) - m_z]\} = M[Z(t)Z(t+\tau)] - m_z^2 = \\ &= M[U_x^2(t)U_x^2(t+\tau)] + M[U_x^2(t)U_y^2(t+\tau)] + \\ &+ M[U_y^2(t)U_x^2(t+\tau)] + M[U_y^2(t)U_y^2(t+\tau)] - m_z^2\,, \end{aligned} \tag{10.1.4}$$

trong đó

$$m_z = M[U_x^2] + M[U_y^2] = (\sigma^2 + m_x^2) + (\sigma^2 + m_y^2) = 2\sigma^2 + m_x^2 + m_y^2 . \qquad (10.1.5)$$

Ta xét hệ bốn đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn

$$U_1 = U_x(t), U_2 = U_x(t+\tau), U_3 = U_y(t), U_4 = U_y(t+\tau) .$$

Hàm đặc trưng của hệ này, như đã biết (xem mục 1.12), có dạng

$$E(u_1, u_2, u_3, u_4) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{4} R_{k,j} u_k u_j + i \sum_{k=1}^{4} m_k u_k \right\}, \qquad (10.1.6)$$

trong đó m_k là các kỳ vọng toán học của các đại lượng ngẫu nhiên U_k, $R_{k,j}$ là mômen quan hệ của các đại lượng ngẫu nhiên U_k và U_j, chúng là những phần tử của ma trận tương quan $\| R_{k,j} \|$

$$R_{k,j} = M[(U_k - m_k)(U_j - m_j)].$$

Đối với hệ các đại lượng ngẫu nhiên đang xét ta có:

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = \sigma^2 ;$$

$$R_{12} = R_x(\tau), \ R_{34} = R_y(\tau) ;$$

$$m_1 = m_2 = m_x, \ m_3 = m_4 = m_y . \qquad (10.1.7)$$

Vì các hàm ngẫu nhiên $U_x(t)$ và $U_y(t)$ không phụ thuộc lẫn nhau, nên

$$R_{13} = R_{23} = R_{14} = R_{24} = 0.$$

Như vậy ma trận tương quan có dạng

$$\| R_{k,j} \| = \begin{pmatrix} \sigma^2 & R_x(\tau) & 0 & 0 \\ & \sigma^2 & 0 & 0 \\ & & \sigma^2 & R_y(\tau) \\ & & & \sigma^2 \end{pmatrix} . \qquad (10.1.8)$$

Các kỳ vọng toán học ở vế phải công thức (10.1.4) thực chất là những mômen gốc bậc bốn của hệ các đại lượng ngẫu nhiên đang xét. Những mômen này có thể tìm được bằng cách lấy vi phân hàm đặc trưng của hệ

$$M[U_x^2(t) U_x^2(t+\tau)] = M[U_1^2 U_2^2] = \frac{1}{i^4} \frac{\partial^4 E(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial u_1^2 \partial u_2^2} \Big|_{u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0} =$$

$$= 2R_{12}^2 + R_{11} R_{12} + m_1^2 R_{22} + m_2^2 R_{11} + 4 m_1 m_2 R_{12} +$$

$$+ m_1^2 m_2^2 = 2R_x^2(\tau) + \sigma^4 + 2 m_x^2 \sigma^2 + 4 m_x^2 R_x(\tau) + m_x^4 \qquad (10.1.9)$$

Sau khi tính bằng cách tương tự những giá trị còn lại của các kỳ vọng toán học và thế chúng vào công thức (10.1.4), ta được

$$R_z(\tau) = 2[R_x^2(\tau) + R_y^2(\tau)] + 4[m_x^2 R_x(\tau) + m_y^2 R_y(\tau)]. \qquad (10.1.10)$$

Để xác định hàm tương quan của hàm ngẫu nhiên $U(t)$, khi biết hàm tương quan của bình phương của nó $Z(t)$, cần có quy luật phân bố của $U(t)$ tại từng giá trị t.

Như đã biết (xem mục 1.11) luật phân bố của modul của vectơ hai chiều $U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$, mà các thành phần của nó là những đại lượng ngẫu nhiên độc lập, phân bố chuẩn, có cùng phương sai σ^2 nhưng khác kỳ vọng toán học $M[U_x] = m_x, M[U_y] = m_y$, sẽ là hàm Releich tổng quát

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{u}{\sigma^2}e^{-\frac{u^2+m^2}{2\sigma^2}}I_0\left(\dfrac{mu}{\sigma^2}\right) & \text{khi } u>0,\\ 0 & \text{khi } u<0.\end{cases} \qquad (10.1.11)$$

Trong công thức này $m=\sqrt{m_x^2+m_y^2}$ là giá trị trung bình của modul vectơ U; $I_0\left(\dfrac{mu}{\sigma^2}\right)$ – hàm Bessel bậc không. Khi $\dfrac{m}{\sigma}>>1$ có thể thay hàm Bessel bằng biểu thức tiệm cận của nó

$$I_0(\omega)\approx\frac{e^{\omega}}{\sqrt{2\pi\omega}}\left(1+\frac{1}{8\omega}+...\right). \qquad (10.1.12)$$

Khi đó có thể viết

$$f(u)=\frac{u}{\sigma^2}e^{-\frac{u^2+m^2}{2\sigma^2}}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi um}}e^{-\frac{um}{\sigma^2}}\left(1+\frac{1}{8um}+...\right). \qquad (10.1.13)$$

Giới hạn ở hai số hạng của chuỗi, ta nhận được

$$f(u)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\left(1+\frac{\sigma^2}{8um}\right)\sqrt{\frac{u}{m}}. \qquad (10.1.14)$$

Từ công thức này thấy rằng khi $\dfrac{m}{\sigma}>>1$ với độ chính xác đến nhân tử $\left(1+\dfrac{\sigma^2}{8um}\sqrt{\dfrac{u}{m}}\right)$ hàm Rơle tổng quát có thể thay bằng luật phân bố chuẩn

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{khi } u>0 \qquad (10.1.15)$$

Hàm Releich tổng quát (10.1.11) có tính bất đối xứng thể hiện rõ với những trị số nhỏ của $\dfrac{m}{\sigma}$, khi tăng $\dfrac{m}{\sigma}$ tính bất đối xứng giảm. Khi $\dfrac{m}{\sigma}=2$ hệ số bất đối xứng bằng 0,24, khi $\dfrac{m}{\sigma}=3$ hệ số bất đối xứng chỉ bằng 0,07.

Để nâng độ chính xác ta sẽ xấp xỉ hàm Rơle tổng quát (10.1.11) bằng luật phân bố chuẩn không phải theo công thức (10.1.15), mà dưới dạng

$$f(u)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma'}e^{-\frac{(u-m')^2}{2\sigma'^2}} \quad \text{khi } u>0 \qquad (10.1.16)$$

sau khi chấp nhận những giá trị tương ứng của kỳ vọng toán học và phương sai phân bố (10.1.11) làm kỳ vọng toán học m' và phương sai σ'^2 của nó.

Như đã biết (xem mục 1.11) đối với phân bố (10.1.11) kỳ vọng toán học và phương sai có dạng

$$M[u]=m'=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{m^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{m^2}{4\sigma^2}\right)+\frac{m^2}{2\sigma^2}I_1\left(\frac{m^2}{4\sigma^2}\right)\right]e^{-\frac{m^2}{4\sigma^2}}, \qquad (10.1.17)$$

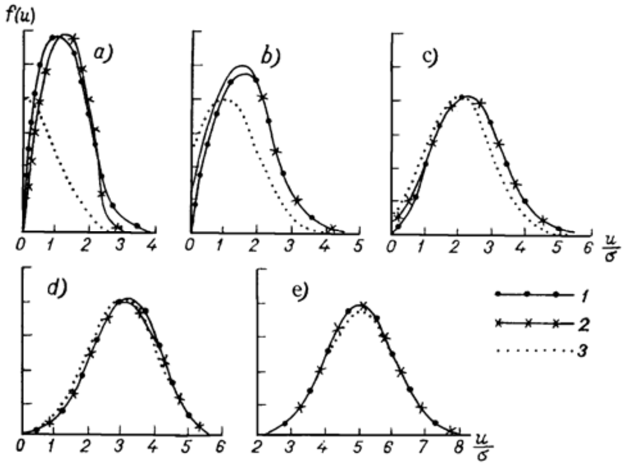
$$D[u]=\sigma'^2=2\sigma^2+m^2-m'^2. \qquad (10.1.18)$$

Trên hình 10.1 dẫn ra các đường cong phân bố tính theo các công thức (10.1.11) (đường cong 1), (10.1.15) (đường cong 2) và (10.1.16) (đường cong 3) với những giá trị

$\frac{m}{\sigma}=0,1,2,3,5$. Trên trục hoành đặt các giá trị u đơn vị bằng σ, trên trục tung đặt $f(u)$.

Phân tích hình vẽ thấy rằng khi $\frac{m}{\sigma}\geq 2$ sai số của phép xấp xỉ phân bố (10.1.11) bằng phân bố chuẩn (10.1.16) là rất nhỏ. Phép xấp xỉ bằng phân bố (10.1.15) cho kết quả kém hơn.

Bây giờ ta sẽ coi hàm ngẫu nhiên $U(t)$ tại mỗi giá trị t tuân theo qui luật phân bố chuẩn (10.1.16) với kỳ vọng toán học m' và độ lệch bình phương trung bình σ' xác định theo các công thức (10.1.17), (10.1.18).



Hình 10.1

Trước đây chúng ta đã nhận được hàm tương quan cho hàm ngẫu nhiên $Z(t)=U^2(t)$.

Bây giờ chúng ta thiết lập mối liên hệ giữa các hàm tương quan $R_z(\tau)$ và $R_u(\tau)$. Hàm tương quan $R_z(\tau)$ sẽ xác định theo công thức

$$R_z(\tau)=M\{[U^2(t)-M[U^2(t)]][U^2(t+\tau)-$$
$$-M[U^2(t+\tau)]]\}=M\{[U^2(t)-(\sigma'^2+m'^2)]\times[U^2(t+\tau)-(\sigma'^2+m'^2)]\}=$$
$$=M[U^2(t)U^2(t+\tau)]-(\sigma'^2+m'^2)^2\,. \qquad (10.1.19)$$

Ký hiệu $U(t)=U_1, U(t+\tau)=U_2$. Vì U_1 và U_2 là những đại lượng ngẫu nhiên phân bố chuẩn, nên hàm đặc trưng của hệ hai đại lượng ngẫu nhiên này sẽ có dạng

$$E(u_1,u_2)=\exp\left\{-\frac{1}{2}(R_{11}u_1^2+2R_{12}u_1u_2+R_{22}u_2^2)+i(m_1u_1+m_2u_2)\right\}, \qquad (10.1.20)$$

trong đó

$$m_1=m_2=m',\quad R_{11}=R_{22}=\sigma'^2,$$
$$R_{12}=M[(U_1-m_1)(U_2-m_2)]=R_u(\tau)\,. \qquad (10.1.21)$$

$R_u(\tau)$ là hàm tương quan cần tìm của hàm ngẫu nhiên $U(t)$.

Ta tính đại lượng $M[U^2(t)U^2(t+\tau)]$ trong công thức (10.1.19)

$$M[U^2(t)U^2(t+\tau)]=M[U_1^2U_2^2]=\frac{1}{i^4}\frac{\partial^4E(u_1,u_2)}{\partial u_1^2\partial u_2^2}\Bigg|_{u_1=u_2=0}=$$
$$=2R_u^2(\tau)-4m'^2R_u(t)-(m'^2+\sigma'^2)\,. \qquad (10.1.22)$$

Thế (10.1.22) vào (10.1.19), nhận được

$$R_z(\tau) = 2R_u^2(\tau) + 4m'^2 R_u(\tau) = 2[R_u(\tau) + m'^2]^2 - 2m'^4 . \qquad (10.1.23)$$

Từ đó

$$R_u(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{R_z(\tau) - 2m'^4} - m'^2 . \qquad (10.1.24)$$

Thay vì $R_z(\tau)$ ta thế biểu thức của nó theo (10.1.10), cuối cùng ta có

$$R_u(\tau) = \sqrt{R_x^2(\tau) + R_y^2(\tau) - 2[m_x^2 R_x(\tau) - m_y^2 R_y(\tau)]} - m'^2 . \qquad (10.1.25)$$

Hàm này cho khả năng xác định hàm tương quan của tốc độ gió theo giá trị của hàm tương quan của các thành phần vectơ gió. Nó thuận tiện cho việc tính toán với mọi trị số $\frac{m}{\sigma} \ge 2$.

10.2. Khuếch tán rối

Giả thiết rằng tại điểm nào đó của dòng rối chất lỏng hay chất khí có một tạp chất xâm nhập, chẳng hạn một số lớn các hạt rắn nhỏ thuốc nhuộm. Nhờ sự vận chuyển bởi các luồng xáo trộn hỗn loạn của dòng rối, chất này lan truyền nhanh và nhuộm màu một thể tích lớn. Hiện tượng này gọi là khuếch tán rối. Sự khuếch tán rối rất phổ biến trong tự nhiên. Nó quyết định sự lan truyền trong khí quyển những con vi khuẩn và siêu vi trùng, phấn hoa, làm ô nhiễm không khí bằng khói và các chất khí do công nghiệp và giao thông phát ra, vận chuyển hơi ẩm từ mặt đất, phân tán các vật thể nổi trên mặt thủy vực...

Tài liệu nghiên cứu vấn đề khuếch tán rối rất phong phú. Trình bày chi tiết về lý thuyết khuếch tán rối có trong cuốn chuyên khảo của A. S. Monin và A. M. Iaglom [18]. ở đây chúng ta xét tóm tắt phương pháp mô tả khuếch tán rối trong trường rối đồng nhất dừng. Để mô tả rối một cách thuận tiện sẽ sử dụng phương pháp Lagrăng, phương pháp này theo dõi chuyển động của một phần tử xác định của chất lỏng hay khí trong dòng bắt đầu từ một thời điểm ban đầu nào đó.

Giả sử tại thời điểm ban đầu $t_0 = 0$ phần tử nằm ở gốc của hệ toạ độ cố định, còn tại thời điểm t nó nằm ở điểm $\vec{X}$ có toạ độ x_1, x_2, x_3.

Hàm vectơ $\vec{X}(t)$, được xem như hàm ngẫu nhiên của thời gian, có thể dùng để đặc trưng cho rối.

Mỗi phụ thuộc vào thời gian của bán kính vectơ quỹ đạo của mỗi phần tử chuyển động trong dòng, mà ta nhận được nhờ thí nghiệm, là một thể hiện của hàm ngẫu nhiên này. Ta ký hiệu

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} \qquad (10.2.1)$$

là vận tốc Lagrăng của các phần tử, chúng ta sẽ xem vận tốc này như một hàm vectơ ngẫu nhiên đồng nhất dừng. Khi đó ta có thể viết

$$\vec{X}(t) = \int_0^t \vec{V}(s)ds . \qquad (10.2.2)$$

Ta sẽ xem rằng vận tốc trung bình (lấy trung bình theo tập hợp tất cả các phần tử) bằng không, $M[\vec{V}(t)] = 0$, khi đó kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên $\vec{X}(t)$ bằng không,

$M[\vec{X}(t)] = 0$.

Trong trường hợp này phương sai của sự phân tán các phần tử $\sigma_{x_i}^2(t)$ dọc theo trục toạ độ i có thể xác định theo công thức

$$\sigma_{x_i}^2 = M\left\{\left[\int_0^t V_i(s)ds\right]^2\right\} = \int_0^i \int_0^t M[V_i(s_1)V_i(s_2)]ds_1 ds_2 \,. \qquad (10.2.3)$$

Chúng ta đưa vào hàm

$$r_i(\tau) = \frac{M[V_i(t)V_i(t+\tau)]}{\sigma_{v_i}^2} \qquad (10.2.4)$$

gọi là hệ số rối Lagrăng. Đó chính là hàm tương quan chuẩn hoá của thành phần V_i của vectơ vận tốc Lagrăng dọc trục toạ độ i. Khi đó có thể viết (10.2.3) dưới dạng

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma_{v_i}^2 \int_0^t \int_0^t r_i(s_2 - s_1)ds_1 ds_2 \,. \qquad (10.2.5)$$

Do tính chẵn của các hàm $r_i(\tau)$, biểu thức (10.2.5) có thể đưa về dạng

$$\sigma_{x_i}^2(t) = 2\sigma_{v_i}^2 \int_0^t (t-\tau) r_i(\tau) d\tau \,. \qquad (10.2.6)$$

Sau một số biến đổi, ta nhận được

$$\sigma_{x_i}^2(t) = 2\sigma_{v_i}^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} r_i(\tau) d\tau \,. \qquad (10.2.7)$$

Công thức (10.2.7), biểu thị sự tản mạn của các phần tử qua hệ số rối Lagrăng, nhận được lần đầu tiên bởi Taylor [33]. Để đặc trưng cho khuếch tán rối, bên cạnh phương sai $\sigma_{x_i}^2(t)$, người ta còn dùng một đại lượng khác gọi là hệ số khuếch tán rối $D_i(t)$

$$D_i(t) = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{x_i}^2(t)}{dt} \,. \qquad (10.2.8)$$

Hệ số này đặc trưng cho tốc độ biến đổi phương sai phân tán của các phần tử trong dòng rối. Tương ứng với (10.2.7) ta có thể biểu diễn hệ số khuếch tán rối qua hệ số rối Lagrăng

$$D_i(t) = \sigma_{v_i}^2 \int_0^t r_i(\tau) d\tau \,. \qquad (10.2.9)$$

Như vậy để xác định phương sai phân tán của các phần tử trong dòng rối đồng nhất dừng hay hệ số khuếch tán rối cần biết hàm tương quan chuẩn của các vận tốc Lagrăng.

Taylor đã chỉ ra hai trường hợp tiệm cận, khi mà sự phụ thuộc vào dạng của hàm tương quan $r_i(\tau)$ của độ tản mạn và hệ số khuếch tán rối không đáng kể.

1. Giả sử hệ số rối Lagrăng $r_i(\tau)$ tiến tới không khi $\tau \to \infty$, và hơn nữa tích phân không kỳ dị, gọi là quy mô rối Lagrăng hay thời gian tương quan

$$T_i = \int_0^\infty r_i(\tau) d\tau \qquad (10.2.10)$$

cũng hội tụ nhanh như vậy. Giả thiết rằng cả tích phân $\int_0^\infty \tau r_i(\tau) d\tau$ cũng hữu hạn. Khi đó với những giá trị t đủ lớn $(t \geq T_i)$ (10.2.6) có thể thay thế bằng hệ thức tiệm cận

$$\sigma_{x_i}^2(t) \approx 2\sigma_{v_i}^2 t T_i - 2\sigma_{v_i}^2 \int_0^\infty \tau r_i(\tau) d\tau . \tag{10.2.11}$$

Với những giá trị lớn của thời gian t thì số hạng thứ nhất sẽ đóng vai trò chính trong vế phải, thành thử ta có thể viết đẳng thức gần đúng

$$\sigma_{x_i}^2(t) \approx 2\sigma_{v_i}^2 T_i\, t . \tag{10.2.12}$$

Điều này cho thấy rằng phương sai phân tán của các phần tử sau thời gian dài t tỷ lệ với thời gian khuếch tán. Kết quả này trùng hợp với định luật quen thuộc của Anhstanh về chuyển động Braonơ.

2. Với thời gian khuếch tán nhỏ $t \to 0$, nếu giả thiết tồn tại các đạo hàm hữu hạn của hệ số rối Lagrăng, thì hệ số rối Lagrăng có thể khai triển thành chuỗi ở lân cận điểm $\tau = 0$, và do tính chẵn của hàm tương quan, chuỗi chỉ chứa các luỹ thừa chẵn. Giới hạn bởi những số hạng không cao hơn bậc hai, ta nhận được công thức tiệm cận

$$r_i(\tau) \approx 1 + \frac{1}{2} r_i''(0)\tau^2 . \tag{10.2.13}$$

Thế (10.2.13) vào (10.2.6), ta được

$$\sigma_{x_i}^2(t) \approx \sigma_{v_i}^2 t^2 \left[1 + \frac{1}{12} r_i''(0) t^2\right]. \tag{10.2.14}$$

Khi $t \to 0$ ta có biểu thức tiệm cận

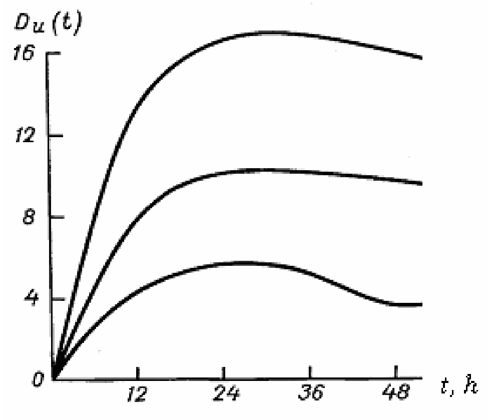
$$\sigma_{x_i}^2(t) \approx \sigma_{v_i}^2 t^2 . \tag{10.2.15}$$

Như vậy với thời gian khuếch tán rất nhỏ phương sai phân tán của các phần tử tỷ lệ với bình phương thời gian.

Với những trị số thời gian khuếch tán nằm giữa những trường hợp biên ấy thì phương sai phân tán của các phần tử phụ thuộc nhiều vào dạng hàm $r_i(\tau)$. Xác định bằng thực nghiệm hàm tương quan của các vận tốc Lagrăng rất khó, vì vậy người ta thường xấp xỉ $r_i(\tau)$ bằng những hàm giải tích đơn giản nào đó căn cứ vào những lập luận vật lý.

Trong khí tượng học hay sử dụng phương pháp xác định hàm tương quan của các vận tốc Lagrăng thông qua các số liệu nhận được bằng cách thả chuỗi quả cầu ám tiêu treo cách đều nhau hay bóng thám không tự do có trọng lượng được chọn sao cho chúng có thể trôi trong không khí dọc theo một mặt đẳng áp nào đó. Khi đó nên nhớ rằng những đặc trưng thực nghiệm về rối khí quyển nhận được bằng phương pháp này không chính xác lắm.

Chúng ta đã xét phương pháp này trong chương 6, ở đó trong một ví dụ đã tính các hàm tương quan $R_u(\tau)$ của thành phần vĩ hướng của các vận tốc Lagrăng theo những số liệu quan trắc bằng bóng thám không (xem hình 6.5). Để nhận được hệ số rối Lagrăng $r_u(\tau)$, tức những hàm tương quan chuẩn hoá tương ứng, phải chia các giá trị trên hình 6.5 cho các phương sai σ_u^2.



Hình 10.2

Theo công thức (10.2.9), ở đây có thể biểu diễn dưới dạng

$$D_u(t) = \int_0^t R_u(\tau) d\tau\,. \tag{10.2.16}$$

Các giá trị của hệ số khuếch tán rối của thành phần vĩ hướng đã được tính và dẫn ra trên hình 10.2.

Phân tích hình này cho thấy rằng, theo thời gian hệ số khuếch tán rối tăng lên, đạt đến cực đại sau 30 giờ, sau đó dần tiến đến giá trị giới hạn

$$D(\infty) = \int_0^\infty R_u(\tau) d\tau\,,$$

mà trên thực tế nó đạt được chỉ ở khoảng $\tau = 54 \div 60$ giờ.

CHƯƠNG 11: VỀ VIỆC TÍNH MẬT ĐỘ PHỔ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN DỪNG. PHỔ SÓNG BIỂN

11.1. Xác định mật độ phổ theo số liệu thực nghiệm

Trong chương 3 chúng ta đã thấy mật độ phổ $S(\omega)$ của quá trình ngẫu nhiên dừng là biến đổi Fourier hàm tương quan $R(\tau)$ của nó và có thể được xác định theo công thức (3.2.12). Khi đó cần biết hàm tương quan thực trên toàn khoảng vô hạn của sự biến đổi của đối số.

Khi xác định những đặc trưng thống kê của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ theo số liệu thực nghiệm chúng ta sử dụng các thể hiện của quá trình ngẫu nhiên được ghi trên một khoảng hữu hạn T nào đó của sự biến thiên của đối số t. Khi đó ta có thể xác định giá trị thống kê của hàm tương quan $\tilde{R}(\tau)$ trên khoảng $\tau_\varepsilon \in [-T, T]$. Đặc biệt, khi xác định hàm tương quan của quá trình ngẫu nhiên dừng có tính egodic theo một thể hiện $x(t)$ độ dài T, giá trị thống kê của nó được xác định theo công thức (2.6.2).

Như đã thấy trong chương 6, do nhiều nguyên nhân, giá trị thống kê của hàm tương quan là một hàm ngẫu nhiên nào đó, và giá trị tính được của nó $\widetilde{R}(\tau)$ có thể khác nhiều so với giá trị thực của hàm tương quan $R(\tau)$ và phương sai sai số tăng đáng kể khi đối số τ tăng.

Vì vậy việc sử dụng trực tiếp công thức (3.2.12) và thay hàm tương quan thực trong đó bằng giá trị thống kê của nó, thay khoảng tích phân vô hạn bằng khoảng hữu hạn, tức công thức

$$\widetilde{S}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}e^{-i\omega\tau}\widetilde{R}(\tau)d\tau,$$

là không hợp lý, vì việc không tính đến những trị số của hàm tương quan khi $|\tau|>T$ và những khác biệt đáng kể của hàm $\widetilde{R}(\tau)$ so với giá trị thực của hàm tương quan, đặc biệt tại những giá trị τ gần các cận của khoảng tích phân, có thể dẫn đến giá trị $\widetilde{S}(\omega)$ tìm được sẽ rất khác với giá trị thực của mật độ phổ.

Một vấn đề nảy sinh là, làm thế nào để xác định giá trị phù hợp nhất của mật độ phổ của quá trình ngẫu nhiên đang xét trong khi không có hàm tương quan thực, mà chỉ sử dụng giá trị thống kê của nó.

Ta xét hàm $\widetilde{R}(\tau)$, bằng giá trị thực của hàm tương quan $R(\tau)$ khi $|\tau|\le\tau_m$ và bằng 0 khi $|\tau|>\tau_m$. Hàm này có thể xem như tích của hàm $R(\tau)$ với hàm $\lambda(\tau)$

$$\widetilde{R}(\tau)=\lambda(\tau)R(\tau), \tag{11.1.1}$$

trong đó

$$\lambda(\tau)=\begin{cases}1 & \text{khi } |\tau|\le\tau_m,\\ 0 & \text{khi } |\tau|>\tau_m.\end{cases} \tag{11.1.2}$$

Hàm $\widetilde{R}(\tau)$ được cho trên khắp trục số thực. Ta sẽ tìm biến đổi Fourier của nó và xem đó là giá trị gần đúng $\widetilde{S}(\omega)$ của mật độ phổ $S(\omega)$, tức là tính $\widetilde{S}(\omega)$ theo công thức

$$\widetilde{S}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}\widetilde{R}(\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}\lambda(\tau)R(\tau)d\tau. \tag{11.1.3}$$

Ta ký hiệu $S(\omega)$ là mật độ phổ thực của quá trình ngẫu nhiên, tức biến đổi Fourier của hàm tương quan thực $R(\tau)$, ký hiệu $Q(\omega)$ là biến đổi Fourier, tức phổ, của hàm $\lambda(\tau)$

$$Q(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}\lambda(\tau)d\tau. \tag{11.1.4}$$

Theo (11.1.3) tích $\lambda(\tau)R(\tau)$ là biến đổi Fourier của hàm $\widetilde{S}(\omega)$

$$\lambda(\tau)R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\widetilde{S}(\omega)d\omega. \tag{11.1.5}$$

Mặt khác, ta có

$$\lambda(\tau)R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_1\tau}S(\omega_1)d\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega_2\tau}Q(\omega_2)d\omega_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_2+\omega_2)\tau}Q(\omega_2)d\omega_2\right]d\omega_1.$$

Khi thay thế $\omega_1+\omega_2=\omega$ ở tích phân bên trong và đổi thứ tự lấy tích phân, ta được

$$\lambda(\tau)R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega_1)Q(\omega-\omega_1)d\omega_1\right]d\omega\,. \tag{11.1.6}$$

So sánh (11.1.5) và (11.1.6) ta nhận được mối liên hệ giữa mật độ phổ thực $S(\omega)$ và giá trị gần đúng của nó (11.1.3)

$$\widetilde{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega_1)Q(\omega-\omega_1)d\omega_1\,. \tag{11.1.7}$$

Từ đó thấy rằng, $\widetilde{S}(\omega)$ chính là giá trị của mật độ phổ thực $S(\omega)$ được lấy trung bình theo toàn khoảng tần với hàm trọng lượng $Q(\omega-\omega_1)$.

Đối với hàm $\lambda(\tau)$ dạng (11.1.2) phổ $Q(\omega)$ của nó được xác định dưới dạng

$$Q(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau_m}^{\tau_m}e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{\sin\omega\tau_m}{\pi\omega}\,. \tag{11.1.8}$$

Như vậy, bằng cách sử dụng tích (11.1.1) làm giá trị thống kê của hàm tương quan trong khi xác định mật độ phổ, chúng ta nhận được không phải mật độ phổ thực $S(\omega)$, mà giá trị của nó được làm trơn nhờ hàm trọng lượng là phổ của hàm $\lambda(\tau)$. Khi đó phương pháp làm trơn được xác định bằng cách chọn hàm $\lambda(\tau)$. Từ đó nảy sinh ý tưởng lựa chọn hàm $\lambda(\tau)$ sao cho phép làm trơn (11.1.7) là tốt nhất, tức nó cho giá trị $\widetilde{S}(\omega)$ gần nhất với giá trị thực $S(\omega)$.

Như vậy bài toán xác định mật độ phổ có thể phát biểu dưới dạng sau: Giả sử có giá trị thống kê của hàm tương quan $\widetilde{R}(\tau)$ tại $|\tau|\le T$, ta sẽ tìm giá trị thống kê của mật độ phổ $\widetilde{S}(\omega)$ theo công thức

$$\widetilde{S}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau_m}^{\tau_m}e^{-i\omega\tau}\lambda(\tau)\widetilde{R}(\tau)d\tau \tag{11.1.9}$$

với điều kiện phải chọn hàm $\lambda(\tau)$ và giá trị τ_m sao cho thoả mãn một chỉ tiêu tối ưu nào đó. Hàm $\lambda(\tau)$ được gọi là hàm trọng lượng làm trơn, còn giá trị τ_m gọi là điểm cắt của hàm tương quan.

Ý nghĩa của hàm $\lambda(\tau)$ ở chỗ, nhờ nó người ta làm trơn giá trị thống kê của hàm tương quan để từ đó xác định mật độ phổ. Như ta đã thấy, việc chọn hàm làm trơn $\lambda(\tau)$ tương ứng với sự làm trơn phổ thực của quá trình ngẫu nhiên dạng (11.1.7) với hàm trọng lượng là phổ của hàm $\lambda(\tau)$.

Để làm tiêu chuẩn đánh giá đại lượng $\widetilde{S}(\omega)$ và chọn hàm làm trơn tối ưu $\lambda(\tau)$ có thể lấy sai số bình phương trung bình $\eta[\widetilde{S}(\omega)]$, xác định theo công thức

$$\eta^2\left[\widetilde{S}(\omega)\right]=M\left\{\left[\widetilde{S}(\omega)-S(\omega)\right]^2\right\}=\sigma^2\left[\widetilde{S}(\omega)\right]+b^2\left[\widetilde{S}(\omega)\right]. \tag{11.1.10}$$

Trong công thức này đại lượng

$$\sigma^2\left[\widetilde{S}(\omega)\right]=M\left\{\left[\widetilde{S}(\omega)-M\left[\widetilde{S}(\omega)\right]\right]^2\right\}=\sigma^2\left[\widetilde{S}(\omega)\right]-b^2\left[\widetilde{S}(\omega)\right] \tag{11.1.11}$$

là phương sai của các giá trị $\widetilde{S}(\omega)$ và đặc trưng cho sự tản mạn của các giá trị thống kê của mật độ phổ xung quanh kỳ vọng toán học của nó.

Đại lượng

$$b^2\left[\widetilde{S}(\omega)\right]=M\left[\widetilde{S}(\omega)-S(\omega)\right] \tag{11.1.12}$$

được gọi là độ chệch và đặc trưng cho sự lệch của kỳ vọng toán học của các trị số thống kê $\tilde{S}(\omega)$ khỏi giá trị thực $S(\omega)$. Độ chệch đặc trưng cho sự hiện diện của sai số hệ thống, vì nó mà các giá trị $\tilde{S}(\omega)$ sẽ tập trung không phải gần giá trị thực $S(\omega)$, mà gần một giá trị $M[\tilde{S}(\omega)]$ nào đó.

Tiêu chuẩn khác, nhờ đó có thể đánh giá độ chính xác của việc xác định đại lượng $\tilde{S}(\omega)$ và chọn hàm làm trơn tối ưu $\lambda(\tau)$, là sai số bình phương trung bình tích phân

$$J\left[\tilde{S}(\omega)\right] = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{S}(\omega) - S(\omega)\right|^2 d\omega\right\}. \qquad (11.1.13)$$

Bài toán chọn hàm làm trơn tối ưu là làm sao với giá trị độ dài khoảng T đã cho, phải chọn một hàm $\lambda(\tau)$ làm cho độ lớn của tiêu chuẩn đánh giá đã chọn trở thành cực tiểu. Nghiệm của bài toán này phụ thuộc nhiều vào dạng của hàm tương quan thực $R(\tau)$.

Trong công trình của E. Parzen [70] đã nhận được nghiệm bài toán này ứng với tiêu chuẩn (11.1.13) cho hai dạng hàm tương quan $R(\tau)$.

Dạng thứ nhất gồm lớp các hàm tương quan giảm theo quy luật hàm mũ với hệ số $\rho > 0$, tức những hàm thoả mãn bất đẳng thức $|R(\tau)| \le R_0 e^{-\rho|\tau|}$, trong đó R_0 là một hằng số nào đó.

Người ta đã chứng minh được rằng đối với những hàm tương quan như vậy các hàm làm trơn sau là tối ưu:

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{1+|u|}, \quad \lambda(\tau) = \begin{cases} 1-|u| & \text{khi } |u| \le 1 \\ 0 & \text{khi } |u| > 1 \end{cases}, \quad \lambda(\tau) = \frac{\sin u}{u}, \quad \left(u = \frac{\tau}{\tau_m}\right),$$

và một số hàm khác nữa.

Dạng thứ hai các hàm tương quan mà Parzen xét là lớp các hàm giảm theo kiểu đại số, tức những hàm có dạng τ^{-r} trong đó $r < 1$ với những giá trị τ lớn. Đối với các hàm dạng này những hàm trọng lượng tối ưu làm cho sai số bình phương trung bình tích phân cực tiểu có thể là những hàm dạng

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{1 + Bu^{2r}},$$

trong đó hằng số B được biểu diễn qua hàm tương quan thực $R(\tau)$.

Lomnhisky và Zaremba [96] đã chứng minh rằng hàm trọng lượng tối ưu $\lambda(\tau)$ làm cho sai số bình phương trung bình tích phân (11.1.13) cực tiểu, có dạng

$$\lambda(\tau) = \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau) + D\left[\tilde{R}(\tau)\right]}. \qquad (11.1.14)$$

Điều này cho thấy rằng hàm làm trơn tối ưu $\lambda(\tau)$ phụ thuộc vào hàm tương quan thực của quá trình ngẫu nhiên được khảo sát và do đó, không tồn tại một hàm làm trơn duy nhất áp dụng cho tất cả các quá trình ngẫu nhiên.

Ngoài ra, vì khi xác định thực nghiệm các đặc trưng thống kê của quá trình ngẫu nhiên ta chưa biết hàm tương quan thực, còn giá trị thống kê của nó chỉ là ước lượng gần đúng, nên ta không thể sử dụng trực tiếp các công thức đã dẫn để xác định hàm $\lambda(\tau)$. Những công thức này chỉ có thể sử dụng như là công thức định hướng khi chọn dạng cụ thể của hàm làm trơn trong công thức (11.1.9).

Hiện nay các tác giả khác nhau đề xướng nhiều dạng hàm làm riêng biệt có những tính chất khác nhau, mô tả chi tiết về các hàm này trình bày trong các công trình [2, 25, 70, 91–97].

Phổ dụng nhất trong số đó là những hàm sau:

1. Hàm Bartlette

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{khi } |\tau| \le \tau_m, \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (11.1.15)$$

2. Hàm Bartlette biến dạng

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{\tau_m} & \text{khi } |\tau| \le \tau_m, \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (11.1.16)$$

3. Hàm Tiukey

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a\cos\dfrac{\pi\tau}{\tau_m} & \text{khi } |\tau| \le \tau_m, \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (11.1.17)$$

Tiukey đề nghị lấy hệ số $a = 0{,}23$ mà không chỉ rõ lý do chọn trị số đó. Parzen cho biết rằng trị số $a = 0{,}25$ là tối ưu dưới góc độ tiêu chuẩn (11.1.13).

4. Hàm Hanning

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0{,}5\left(1 - \cos\dfrac{\pi\tau}{\tau_m}\right) & \text{khi } |\tau| \le \tau_m, \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (11.1.18)$$

5. Hàm Parzen

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{|\tau|}{\tau_m}\right)^q & \text{khi } |\tau| \le \tau_m, \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (11.1.19)$$

với $q > 1$, đặc biệt Parzen đã xét hàm này với $q = 2$.

6. Parzen cũng đã nghiên cứu hàm dạng

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{|\tau|}{\tau_m}\right)^q} & \text{khi } |\tau| \le \tau_m, \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_m, \end{cases} \qquad (11.1.20)$$

đối với những trị số $q = 1$ và $q = 2$.

7. Hàm Hemming

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos\dfrac{\pi\tau}{\tau_m} & \text{khi } |\tau| \le \tau_m, \\ 0 & \text{khi } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \qquad (11.1.21)$$

Tất cả những hàm đã trình bày là tốt nhất theo quan điểm tối ưu hoá một tính chất nào đó trong số các tính chất của giá trị thống kê của mật độ phổ.

Khi xác định giá trị thống kê của mật độ phổ theo công thức (11.1.9) với hàm làm trơn $\lambda(\tau)$ đã chọn, giá trị nhận được sẽ phụ thuộc nhiều vào việc chọn đại lượng τ_m.

Khi chọn điểm cắt τ_m của hàm tương quan cần tính đến hai loại sai số: độ chệch của ước lượng mật độ phổ, xuất hiện khi các giá trị của đại lượng τ_m nhỏ và tính biến động đáng kể do tập mẫu của các giá trị $\tilde{S}(\omega)$ tại những τ_m lớn.

Thực vậy, trong công thức (11.1.9), tại những trị số nhỏ của τ_m ta sử dụng giá trị thống kê của hàm tương quan, nó không khác nhiều lắm so với giá trị thực, tuy nhiên ta giả thiết nó bằng 0 với những giá trị $|\tau| > \tau_m$, mà tại đó hàm tương quan có thể rất khác không. Chính vì vậy chúng ta đã mắc sai số hệ thống gây nên độ chệch của ước lượng. Tăng τ_m dẫn tới làm giảm sai số hệ thống này, nhưng khi đó trong công thức (11.1.9), với những τ lớn giá trị thống kê $\tilde{R}(\tau)$ chúng ta sử dụng có thể khác xa so với giá trị thực $R(\tau)$. Vì lý do đó phương sai của ước lượng $\tilde{S}(\omega)$ tăng lên, đặc biệt là khi khoảng ghi thể hiện T của quá trình ngẫu nhiên không lớn.

Ý muốn chọn đại lượng τ_m làm cực tiểu cả độ chệch lẫn phương sai của ước lượng mật độ phổ dẫn tới sự cần thiết phải thoả mãn hai đòi hỏi mâu thuẫn nhau.

Ảnh hưởng của đại lượng τ_m đến dạng của giá trị thống kê mật độ phổ biểu lộ như sau: Tại những giá trị τ_m nhỏ trên đồ thị $\tilde{S}(\omega)$ các đỉnh mật độ phổ sẽ bị làm trơn. Khi tăng dần giá trị của τ_m những đỉnh đó dần lộ rõ ra, nhưng khi tiếp tục tăng τ_m, do sự khác nhau giữa giá trị thống kê và giá trị thực của hàm tương quan, đồ thị $\tilde{S}(\omega)$ sẽ không phản ánh đặc điểm của hàm $\tilde{S}(\omega)$, mà sẽ tiến dần tới thể hiện của quá trình ngẫu nhiên mà từ đó $\tilde{R}(\tau)$ được xác định.

11.2. Phân tích phổ sóng biển

Lý thuyết phổ các quá trình ngẫu nhiên dừng hiện nay được sử dụng rộng rãi khi phân tích sóng biển. ở đây người ta xem những dao động mực biển tại điểm xác định như là hàm ngẫu nhiên của thời gian. Những khảo sát thực nghiệm về sóng biển cho thấy: hàm ngẫu nhiên $Z(t)$ mô tả những dao động thẳng đứng của mặt nước theo thời gian tại một điểm cố định so với mực trung bình, ở một mức độ gần đúng nào đó, có thể xem như quá trình ngẫu nhiên tựa dừng, có tính egođic.

Giả định rằng mỗi thể hiện có thể chia thành những đoạn dừng, trong phạm vi đó các đặc trưng xác suất giữ nguyên không đổi, còn khi chuyển từ một đoạn dừng này sang đoạn dừng khác thì các đặc trưng xác suất biến đổi nhảy vọt. Tính tựa dừng của sóng thực cũng như những khó khăn kỹ thuật trong khi thực hiện những đợt đo sóng dài hạn dẫn tới chỗ, để xác định các đặc trưng thống kê buộc phải sử dụng một hoặc một số không nhiều các thể hiện với độ dài hạn chế.

Tương ứng với giả thiết về tính egođic, giá trị thống kê của hàm tương quan $\tilde{R}(\tau)$ theo một thể hiện độ dài T được xác định theo công thức (6.2.2).

Sự phân tích các băng ghi sóng gió ổn định ở đại dương, các biển và hồ nước đã cho thấy rằng các hàm tương quan của sóng gió có thể xấp xỉ bằng biểu thức dạng

$$R_z(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau \qquad (11.2.1)$$

hay

$$R_z(\tau) = De^{-\gamma|\tau|}\cos\beta\tau\cos B\tau\,, \qquad (11.2.2)$$

trong đó $D-$ phương sai của quá trình, $\beta-$ tần số các dao động thăng giáng, $B-$ tần số nhóm, $\alpha-$ hệ số suy giảm nội nhóm của đường bao hàm tương quan, $\gamma-$ hệ số suy giảm liên nhóm của đường bao hàm tương quan.

Ta sẽ xét phương pháp xác định mật độ phổ bằng ví dụ nghiên cứu phổ sóng biển. ở đây chúng ta sẽ dựa vào công trình [72]. Với kiểu hàm tương quan đã chọn, mật độ phổ được xác định theo công thức (11.1.9). Để phân tích ảnh hưởng của đại lượng τ_m trước tiên ta chọn hàm làm trơn $\lambda(\tau)$ là hàm Bartlette (11.1.15). Khi đó công thức (11.1.9) đối với quá trình ngẫu nhiên thực $Z(t)$ có thể viết lại dưới dạng

$$\tilde{S}_z(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau_m} R_z(\tau)\cos\omega\tau d\tau\,. \qquad (11.2.3)$$

Thế hàm tương quan (11.2.1) vào (11.2.3) và lấy tích phân, ta nhận được

$$\tilde{S}_z(\omega) = \frac{D\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha^2+(\beta+\omega)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2}\right]+\frac{De^{-\alpha\tau}}{2\pi}\left\{\frac{-\alpha\cos(\beta+\omega)\tau_m+(\beta+\omega)\sin(\beta+\omega)\tau_m}{\alpha^2+(\beta+\omega)^2}+\right.$$

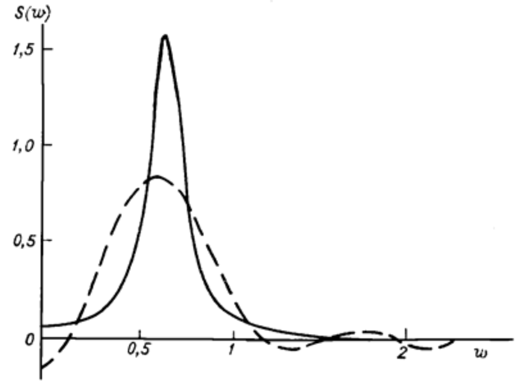
$$\left.+\frac{-\alpha\cos(\beta-\omega)\tau_m+(\beta-\omega)\sin(\beta-\omega)\tau_m}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2}\right\} \qquad (11.2.4)$$

Như đã chỉ ra trong chương 3, số hạng thứ nhất của (11.2.4) là mật độ phổ thực, ứng với hàm tương quan (11.2.1). Do đó, số hạng thứ hai biểu thị độ chệch hệ thống của đại lượng $\tilde{S}(\omega)$. Độ chệch này, như đã thấy từ (11.2.4), giảm dần khi τ_m tăng.

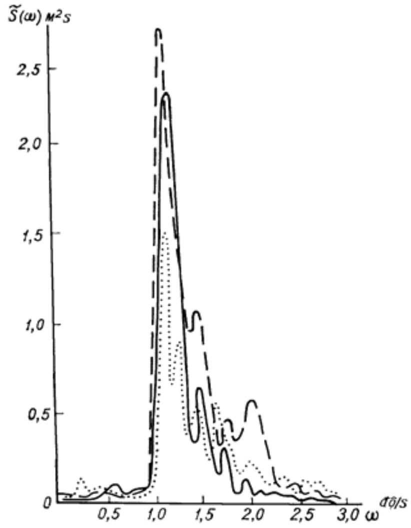
Như vậy nếu hàm tương quan xác định không có sai số, thì τ_m phải sao cho biểu thức trong dấu ngoặc nhọn của công thức (11.2.4) không ảnh hưởng đáng kể đến đại lượng $\tilde{S}(\omega)$.

Sự ảnh hưởng này của đại lượng τ_m phản ánh trên hình 11.1, ở đó biểu diễn các đồ thị mật độ phổ tính theo công thức (11.2.4) với $D=1$; $\alpha=0{,}1$; $\beta=0{,}644$ và các giá trị $\tau_m=7{,}3$ giây (đường liền nét) và $\tau_m=1000$ giây (đường gạch nối).

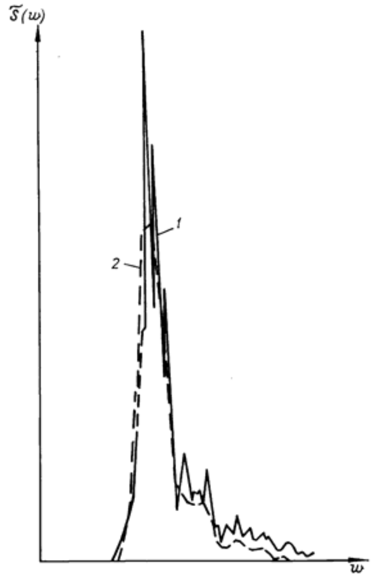
Để làm rõ tính biến động do tập mẫu của các giá trị thống kê của mật độ phổ vì thay thế hàm tương quan thực $R(\tau)$ trong công thức (11.2.3) bằng giá trị thống kê của nó $\tilde{R}(\tau)$, trên hình 11.2 dẫn ra các giá trị $\tilde{S}(\omega)$ nhận được theo chuỗi các trị số $\tilde{R}(\tau)$ tính theo những đoạn thể hiện dài 20 phút của sóng biển ổn định. Đại lượng τ_m được chấp nhận lấy bằng 112 giây.



Hình 11.1



Hình 11.2



Hình 11.3

Trên hình 11.2 thấy rõ các đồ thị hàm $\tilde{S}(\omega)$ rất khác nhau. Sự tản mạn này là do đã chọn giá trị τ_m lớn mà với giá trị đó, sự tản mạn của các giá trị thống kê của hàm tương quan $\tilde{R}(\tau)$ biểu lộ rất mạnh.

Các hình 11.1 và 11.2 cho thấy rằng khi chọn giá trị τ_m cần phải: một mặt lấy đủ lớn để không xảy ra sự chệch, mặt khác nó phải nằm trong miền các giá trị của đối số τ, tại đó chưa biểu lộ rõ sự tản mạn của các giá trị thống kê của hàm tương quan. Sự thoả hiệp hai đòi hỏi mâu thuẫn này có thể thực hiện bằng cách thay đổi các tham số T và τ_m nếu khoảng dừng của quá trình ngẫu nhiên đủ lớn. Còn nếu như khoảng dừng của quá trình không cho phép tăng đáng kể độ dài thể hiện, trên đó xác định các đặc trưng thống kê, thì lúc đó việc chọn hàm làm trơn $\lambda(\tau)$ có vai trò quan trọng. Trên hình 11.3 dẫn ra các giá trị mật độ phổ sóng gió $\tilde{S}(\omega)$ tính theo công thức (11.1.9) với hàm trọng lượng Hemming (11.1.21) (đường cong 1), và với hàm trọng lượng Bartlette (11.1.15) (đường cong 2).

Độ dài thể hiện của băng ghi sóng T bằng 30 phút. Đường cong 1 tính với giá trị của τ_m lớn, $\tau_m = 0{,}1\,T$, tương ứng với sự tản mạn đáng kể của đại lượng $\tilde{R}(\tau)$, đường cong 2 – với τ_m nhỏ, thuộc miền tin cậy của đại lượng $\tilde{R}(\tau)$. Như ta thấy từ hình 11.3, đường cong 2 cho những giá trị làm trơn của mật độ phổ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Phần 1

1. Ариель Н. З. Бютнер Э. К. Искажения и погрешности, возникающие при расчетах статист ичесих характеристик по экспериментальным данным. Труды ГГО, вып. 187,1966
2. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М., ИЛ, 1958
3. Бунимович В. И. Флуктуционные процессы в радиоприемных устройствах. М., "Советс кое радио", 1951
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей М., Физматгиз. 1958
5. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей Л., Гидрометеоиздат.,1963
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Гостехиздат.,1954
7. Дуб. Л. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956
8. Дунин - Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математичекая ста-тистик а в технике. М., Гостехиздат.,1955
9. Картвелишвили Н. А. Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулиро- вании р ечного стока. Л., Гидрометеоиздат., 1967
10. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных пос ледовательностей. Изв. АН СССР, сер. математ., т.5, $N_{0.}$1, 1941
11. Колмогоров А.И. Локальная структура турбулености в несжимаемой вязкой жид-кости п ри очень больших числах Рейнольдса. ДАН СССР, т. 30, $N_{0.}$4, 1941
12. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спетром. Юбилейн ый сб. "Академия наук СССР" т.1, 1947
13. Крамер Г. Математичекие методы статистики. М. ИЛ., 1948
14. Ламли Дж. Л., Пановский Г.А., Структура атмосферной турбулености. М., "Мир", 1966
15. Левин Б.Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., "Советское радио", 1957
16. Лившиц Н.А. Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматичекого управления. М., "Советское радио", 1958
17. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматичекого управления. М., ИЛ., 1958
18. Монин. А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М., "Наука", 1965
19. Обухов А.М. Статистическое описание непрерывных полей - Труды Геофиз. ин-та А.Н. СССР $N_{0.}$ 24 (151), 1954
20. Панчев С. Случайные функции и турбуленность. Л. Гидрометеоиздат, 1957
21. Пугачев В. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматиче-ского управления. М., Физматгиз. 1960
22. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
23. Солодовников В.В., Введение в статистическую динамику систем автоматиче-ского управления. М. Гостехиздат, 1952.
24. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т. IV., М., Физматгиз., 1959
25. Хеннан Э. Анализ временных рядов. М.., "Наука ", 1964
26. Хинчин А. Я. Основные законы теории вероятностей. М. Гостехиздат., 1932
27. Хинчин А. Я. Теория корреляции стохастических процессов. Успехи матем. наук. Вып. 5, 1938
28. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций . Успехи матем. наук. т.VII, вып. 5, 1952

29. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация случайных процессов с рациональной спектральной плотностью. Труды Моск. Матем. общества, No.4
30. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными *n*-ми приращениями. Матем. сб. 37. No.1, 1955
31. Яглом А. М. Эфективные решения линейных аппросимационых задач для много- мерных стационарных процессов с рациональным спектром. Теория вероятностей и ее применен ие. т.5, No.3, 1960
32. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, 1949
33. Taylor G. J. Diffusion by continuous movements. Proc. London Math. Soc. (2), 20

Phần 2

34. Алехин. Ю. М. Статистические прогнозы в геофизике. Л., изд. ЛГУ, 1963
35. Багров Н. А. Аналистическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляю- щих. Тр уды ЦИП, вып. 74, 1959
36. Багров Н. А. Разложение метеорологических полей по естественным ортогональным составляющим. Труды ЦИП, вып. 106, 1960
37. Болтенков В. П. Исследование статистической макроструктуры температуры воздуха. Труды ГГО. вып. 165, 1964
38. Болтенков В. П. Некоторые характеристики трехмерной макроструктуры температуры воздуха. Труды ГГО. вып. 191, 1966
39. Борисенков Е. П. Физико-статистические методы анализа и предвычисления метеополей. Труды ААНИИ, т. 263, 1963
40. Борисенков Е. П. Введение в статистические методы обработки гидрометео- рологической информации на ЭЦВМ. ААНИИ, 1966
41. Гандин. Л. С., Багров. Е. И. О структуре поля высот поверхности 500 мб. Труды ГГО, вып. 99, 1959
42. Гандин. Л. С. Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной макроструктуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964
43. Гандин. Л. С., Кузнецова Т. И. О структуре полей давления и ветра в средней тропосфере при различных формах циркуляции. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
44. Гандин. Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А.В., О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологиче- ских по лей. Труды ГГО, вып. 143, 1963
45. Глуховский Б. Х. Исследования морского ветрового волнения. Л., Гидрометео- издат, 1966
46. Груза Г. В., Казначеева В. Д. К вопросу о структуре поля высот изобариче- ских поверхностей. Изв. АН УзССР, сер. физ-мат. наук, No.3, 1962
47. Детяренко Г. А. Казакевич Д. И., Солонин С. В. О макротурбулентности в свободной атмосфере. Труды ЛГМИ, вып. 39, 1969
48. Демидович. Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз., 1960

49. Добрышман Е. М., Машкович С. А. Чубукова А.Л. Временные спектральные функ-ции инд есов циркуляции на различных уровнях - Труды ВНМС, Т.2. Л., Гидромете-оиздат, 1963
50. Дроздов О. А., Шепелевский А.А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорол огических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карти рационализа ции сети . Труды НИУ ГУМС, сер. 1, вып. 13, 1946
51.. Дунаева А. В., Занина М.С., Цыганова А. М. Изучение пространственной изменчивости характеристик снежного покрова. Труды ГГО, вып. 108, 1960
52. Заварина М. В. Исследование изменчивости ветра в свободной атмосфере. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1., вып. 21, 1946
53. Зверев Н. И. Долгосрочный прогноз интенсивности зональной циркуляции атмосферы. Труды ЦИП, вып. 153, 1966
54. Зверев Н. И., Кашлева Л.И. Статистический метод прогноза индеса зональ-ной циркуляции атмосферы. Труды ЦИП, вып. 153, 1966
55. Казакевич Д. И. Солонин С.В. Корреляционная функция скоростей ветра. Труды ЛГМИ, вып. 34, 1968
56. Кричак М. О. Некоторые результаты исследования статистических характе-ристик поля ветра. Труды ГГО, вып. 208, 1967
57. Крылов Ю. М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. Л., Гидрометеоиздат, 1966
58. Кудашкин Т. Д. Оценка аналогичности атмосферных состояний и процессов с помощью параметров разложения метеорологических полей по естественным ортогональным функциям. Труды ГГО, вып. 168, 1965
59. Лайхтман Д. Л., Каган Р. Л. Некоторые вопросы рационализации снего-съемок. Труды ГГО, вып. 108, 1960
60. Марченко А.С. Корреляционные функции v- процессов и v-полей. Вопросы гидрометеорологии Сибири. Новосибирськ, Западно-сибирьское книжное изд. 1965
61. Машкович С.А., Добрышман Е.М., Хейфец Я.М. Характеристики зональной циркуляции. Гидрометеоиздат, 1958
62. Мелешко В.П., Гусева И.П. Расчет некоторых статистических характеристик для полей температуры и влажности. Труды ГГО, вып. 165, 1964
63. Мельникова Т.В. О методике наблюдений над снежным покровом в условиях Северо-Востока СССР. Труды ГГО, вып. 168, 1965
64. Мещерская А.В., Яковлева Н.И. Уточнение естественных функций полей геопотенциала (давление) атлантико-европейского сектора. Труды ГГО, вып. 16, 1965
65. Мещерская А.В., Яковлева Н.И. Анализ барического поля над северным полушарием методом разложения по естественным ортогональным функциям. Труды ГГО, вып. 168, 1965
66. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, 1959
67. Обухов А.М. Нормальная корреляция векторов. Изв. АН СССР, сер. матем., N_0.3, 1938
68. Обухов А.М. О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., N_0. 3, 1960
69. Обухов А.М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Изв.

АН СССР, сер. геогр. и геоф., $N_{0.}$ 4-5, 1941.
70. Парзен Э. Об асимптотически эффективных и состоятельных оценках спектральной плотнотсти стационарного процесса. Математика, сборник перево- дов, т. 6, $N_{0.}$ 6, 1962
71. Пинус Н. З. О макротурбулентном обмене в свободной атмосфере. Труды ЦАО, вып. 34, 1960
72. Рожков В. А., Трапезников Ю. А. Методические рекомендации, алгоритмы и программы расчета вероятностных характеристик ветрового волнения на ЭЦВМ. ЛОГАИН, 1969
73. Руховец Л.В. О статистически оптимальных представлениях вертикальных распределении метеэлеметов в тропосфере и нижней страосфере. Труды ГГО, вып. 165, 1964
74. Селезнева Е. С. Об изменчивости метеорологических элеметов и сроках годности аэрологических наблюдений. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 21, 1946
75. Татарская М. С. Пространственная статистическая структура геопотенциала. Изв. АН СССР, сер. физики атмосферы и океана, т. 1, $N_{0.}$ 7, 1965
76. Трифонова Т. С. О Пространственной изменчивости характеристик снежного покрова. Труды ГГО, вып. 130, 1962
77. Фадеев Д. К. Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз., 1969
78. Фортус М.И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 165, 1964
79. Хатамкулов Г. Х. Об использовании наземной информации при объективном анализе аэрологических полей. Труды ГГО, вып. 208, 1967
80. Чаплыгина А.С. Статистическая структура полей метеорологических элементов в атмос фере и экстраполяция поля геопотенциала в пространстве. Труды ЦИП, т. 106, 1960
81. Чемеренко Е. П. О статистической структуре поля высоты снежного покрова. Метеорология и гидрология, $N_{0.}$ 1, 1968
82. Чубукова А.Л. Некоторые результаты статистической обработки характери- стик зональной циркуляции атмосферы северного полушария. Труды ЦИП, т. 126, 1963
83. Шнайдман В.А. Статистические характеристики поля ветра в верхней тропо- сфере. Труды ЦИП, т. 126, 1963
84. Юдин М.И. Вопросы теории турбулентности и структуры ветра с приложе- нием к задаче о колебаниях самолета. Труды НИУ ГУГМС, т. 1, вып. 35, 1946
85. Юдин М.И. Некоторые вопросы теории метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 19, 1950
86. Юдин М.И. Некоторые закономерности структуры поля геопотелциала. Труды ГГО, вып. 121, 1961
87. Юдин М.И. Физико-статистические методы прогнозов и возможность их внедрения. Метеорология и гидрология, $N_{0.}$ 11, 1967
88. Яглом А. М. Статистические методы экстраполяции метеорологических

полей . Труды ВНМС, т. 2, Л., Гидрометеоиздат., 1963

89. Яковлева Н.И. Мещерская А.В. Кудашкин Т.Д. Исследование полей давления (геопотециала) методом разложения на естественные составляющие. Труды ГГО, вып. 165, 1964

90. Яковлева Н.И. Мещерская А.В. Об исследовании параметров разложения по естественным функциям для решения некоторых метеорологических задач. Труды ГГО, вып. 168, 1965

91. Blackman R. B., Tykey Y.W. The measurement of power spestra from the point of view of communications engineering. Bell syst., Tech. J., v. 37, 1958

92. Hotelling H. Analysis of complex of statistical variables into principal component. J. Educ. Psycho., v. 24, 1933

93. Crenander U. On empirical spectral analysis of stochastic processes. Archives for Mathematics, v. 1, 1951

94. Crenander U. Rosenblatt M., Statistical analysis of stationary time series. N.Y., 1956

95. Jenkins G.M. General consideration in the analysis of spectra. Techno-metrics, v. 3, 1961

96. Lomniski Z.A. Zaremba S.K. On the estimation of autocorelation in time series. Ann. Math. Statist., v. 28, 1957

97. Priestiey M.B. Basis concideration in the estimation of spectra. Technometrics, v. 4, 1962