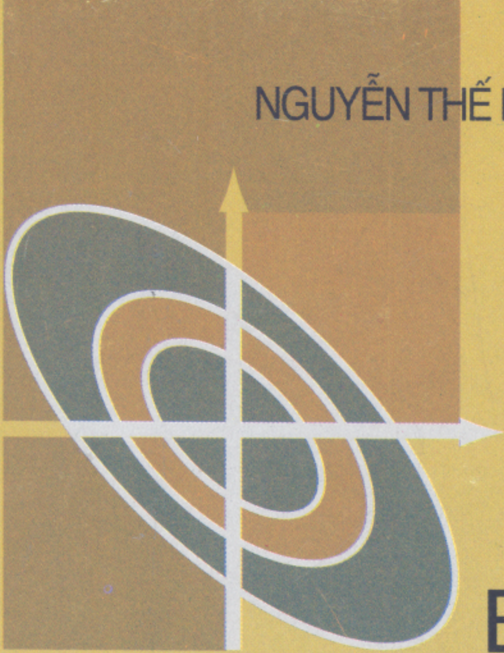
NGUYỄN THẾ HOÀN - TRẦN VĂN NHUNG



BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN THẾ HOÀN – TRẦN VĂN NHUNG

Bài tập
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Tóm tắt Lí thuyết - Bài giải mẫu - Bài tập và Hướng dẫn giải

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

11 – 2007/CXB/333 – 2119/GD Mã số : 7K607T7 – DAI

Lời nói đầu

Quyển sách này được soạn ra trên cơ sở nhiều năm dạy lí thuyết và bài tập môn "Phương trình vi phân" của anh em cán bộ nhóm "Phương trình vi phân" ở khoa Toán – Cơ Trường Đại học Tự nhiên Hà Nội.

Nhằm phục vụ đối tượng rộng rãi : sinh viên các trường đại học tự nhiên, các trường đại học kĩ thuật, đại học sư phạm, các lớp học tại chức, hàm thụ... các bài tập ở trong quyển sách này được chọn ra ở những mức độ khó, dễ khác nhau và nhiều dạng khác nhau. Để các bạn sử dụng sách được dễ dàng, trong mỗi tiết của mỗi chương chúng tôi trình bày tóm tắt những khái niệm và phương pháp cơ bản nhất để giải phần lớn các bài tập trong tiết đó. Những phần lí thuyết không trình bày ở đây bạn đọc có thể xem ở các tài liệu tham khảo [6], [7], [11] hoặc [3].

Các bài tập tương đối khó được đánh thêm dấu (*) ở trên số thứ tự. Riêng các bài tập trong chương V phần lớn là tương đối khó nên chúng tôi không đánh thêm dấu (*).

Phần lớn các bài tập trong quyển sách này được chọn từ các cuốn sách được nêu ra ở "Tài liệu tham khảo", từ các kì thi tuyển chọn nghiên cứu sinh ở Việt Nam và các kì thi vô địch sinh viên giỏi toán toàn Liên Xô.

Trong phần đáp số, hướng dẫn và lời giải chúng tôi đã giải hầu hết các bài tập có tính chất lí thuyết và các bài tập khác đều có đáp số. Cần nói rằng một số lời giải ở đây mang tính chất gợi ý *nhiều hơn. Bạn đọc chỉ nên xem đến phần này sau một thời gian suy nghĩ mà không đi đến kết quả.*

Chúng tôi chân thành cảm ơn đồng chí Hoàng Hữu Đường đã góp ý, giúp đỡ chúng tôi hoàn thành cuốn sách. Bản thân đồng chí đã nhiệt tình viết thêm phần "Phụ lục" cho cuốn sách này.

Trong khi biên soạn cuốn sách, chúng tôi đã tham khảo ý kiến của các đồng chí Vũ Tuấn, Đặng Đình Châu, Đỗ Quang Vinh. Nhân dịp này chúng tôi tỏ lòng cảm ơn các đồng chí đó.

Cuối cùng chúng tôi xin cảm ơn đồng chí Đoàn Văn Bản và các đồng chí trong Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp đã tạo điều kiện để cuốn sách có thể ra mắt bạn đọc.

Lần đầu tiên xuất bản, quyển sách này chắc không thể tránh khỏi những sai sót. Rất mong được các bạn đọc góp ý kiến.

CÁC TÁC GIẢ

Phần thứ nhất

TÓM TẮT LÍ THUYẾT VÀ ĐỀ BÀI TẬP

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

§1. Các khái niệm cơ bản

1. Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp 1 có dạng tổng quát là

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

trong đó $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Nghiệm của phương trình (1) là hàm $y = y(x)$ có tính chất là khi thế vào phương trình (1) thì ta được một đồng nhất thức. Phương trình (1) có vô số nghiệm. Quá trình tìm các nghiệm của phương trình (1) được gọi là *sự tích phân* phương trình đó.

Nếu từ phương trình (1) ta có thể giải được y', nghĩa là (1) có dạng

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

thì phương trình (2) được gọi là *phương trình cấp 1 đã giải ra đối với đạo hàm.*

2. Trường hướng. Giả sử hàm f(x, y) xác định và liên tục trong miền G của mặt phẳng (x, y). Qua điểm $(x_o ; y_o)$ thuộc G ta vẽ vectơ có độ dài bằng 1 và lập với chiều dương của trục hoành một góc α sao cho $\text{tg}\alpha = f(x_o, y_o)$. Làm như vậy đối với mọi điểm (x ; y) thuộc G chúng ta sẽ nhận được một trường vectơ, được gọi là *trường hướng*.

Giả sử $y = y(x)$ là một nghiệm nào đó của phương trình (2). Khi đó tập hợp những điểm (x ; y(x)) sẽ tạo nên một đường cong mà ta gọi là *đường cong tích phân* của phương trình (2). Dựa vào ý nghĩa hình học của đạo hàm ta suy ra rằng tại mỗi điểm của đường cong tích phân, hướng tiếp tuyến với đường cong trùng với hướng vectơ của trường hướng tại điểm đó.

Đường cong mà tại mỗi điểm của nó hướng trường không thay đổi được gọi là *đường đẳng phục*. Như vậy phương trình của đường đẳng phục có dạng

$$f(x, y) = k, \qquad k = \text{const}.$$

Đường đẳng phục có thể là đường tích phân nhưng nói chung nó không trùng với đường cong tích phân.

Ví dụ. Xét phương trình

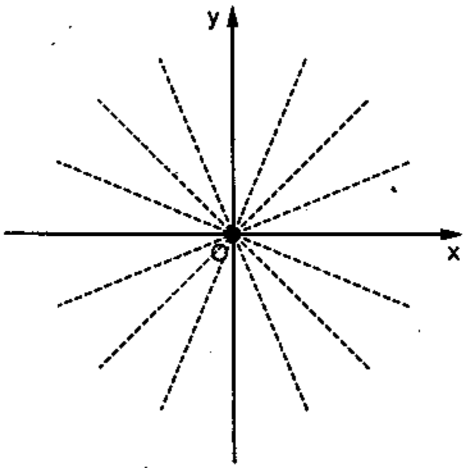
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

Ở đây các đường cong tích phân là các nửa đường thẳng

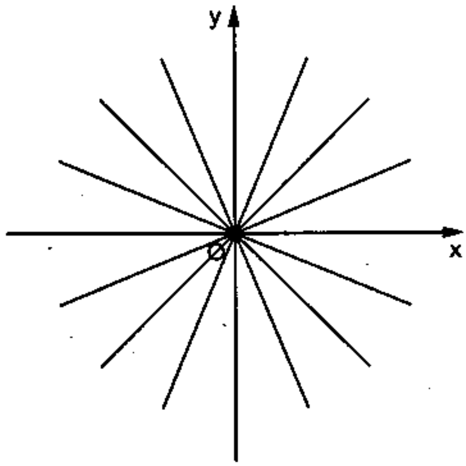
$$y = Cx \ (x \neq 0), \qquad x = 0 \ (y \neq 0),$$

C – số thực bất kì.

Dễ thấy rằng các đường cong tích phân ở đây đồng thời cũng là đường đẳng phục.



Hình 1



Hình 2

Xét phương trình

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Ở đây các đường cong tích phân là các đường tròn tâm tại gốc toạ độ :

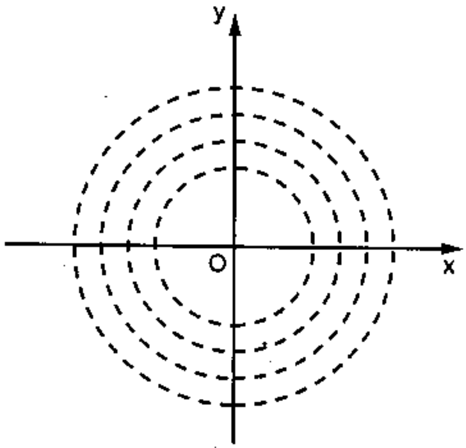
$$x^2 + y^2 = C^2,$$

C – số thực bất kì.

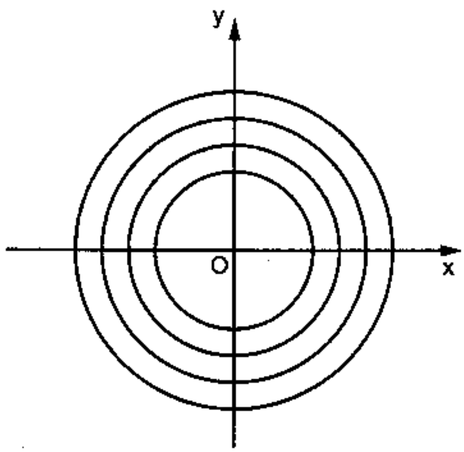
Phương trình đường đẳng phục có dạng

$$y = -kx \ (x \neq 0), \ x = 0 \ (y \neq 0)$$

tức là các nửa đường thẳng xuất phát từ gốc toạ độ. Bởi vậy trong trường hợp này, không một đường cong tích phân nào trùng với đường đẳng phục.



Hình 3



Hình 4

Qua hai ví dụ trên ta thấy tại điểm (0, 0) thì hướng trường không xác định. Nó là điểm kì dị của phương trình trên.

3. Bài toán Cô-si. Như trên ta đã thấy, nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 phụ thuộc hằng số tuỳ ý C. Trong thực tế người ta thường không quan tâm đến tất cả các nghiệm của phương trình mà chỉ chú ý đến những nghiệm thoả mãn điều kiện nào đó. Chẳng hạn, đòi hỏi tìm nghiệm y(x) của phương trình (1) hoặc (2) thoả mãn điều kiện

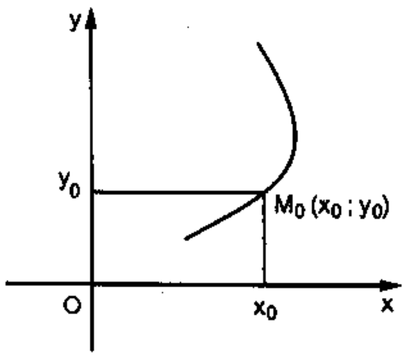
$$y(x_o) = y_o, \tag{4}$$

trong đó x_o, y_o là những giá trị cho trước.

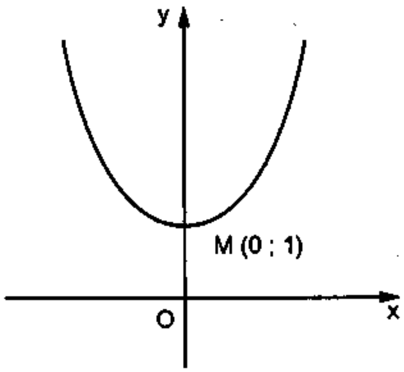
Bài toán đặt ra như vậy được gọi là *bài toán Cô-si*. Điều kiện (4) được gọi là điều kiện ban đầu ; x_o, y_o là các giá trị ban đầu.

Về phương diện hình học, bài toán Cô-si tương đương với việc tìm đường cong tích phân của phương trình đi qua điểm M_o (x_o ; y_o) cho trước.

Bài toán Cô-si không phải bao giờ cũng có nghiệm. Sau này chúng ta sẽ thấy với những giả thiết nào thì nghiệm bài toán Cô-si tồn tại và duy nhất.



Hình 5



Hình 6

Ví dụ. Tìm nghiệm của phương trình

$$y' = 2x$$

thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y(0) = 1.$$

Dễ thấy nghiệm của bài toán trên là hàm

$$y = x^2 + 1$$

tức là parabôn đi qua điểm M (0 ; 1).

4. Nghiệm tổng quát

Giả sử trong miền G của mặt phẳng (x, y) nghiệm của bài toán Cô-si đối với phương trình (2) tồn tại và duy nhất. Hàm số

$$y = \varphi(x, C) \tag{5}$$

được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình (2) trong G nếu trong miền biến thiên của x và C, nó có đạo hàm riêng liên tục theo x và thoả mãn các điều kiện sau :

a) Từ hệ thức (5) ta có thể giải được C :

$$C = \psi(x, y). \tag{6}$$

b) Hàm φ(x, C) thoả mãn phương trình (2) với mọi giá trị của C xác định từ (6) khi (x ; y) biến thiên trong G.

Nếu nghiệm tổng quát của phương trình (2) được cho dưới dạng ẩn

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{hay } \psi(x, y) = C$$

thì nó được gọi là *tích phân tổng quát*.

5. Nghiệm riêng. Nghiệm của phương trình (2) mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si được bảo đảm được gọi là *nghiệm riêng*. Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị cụ thể của hằng số C là nghiệm riêng.

6. Nghiệm kì dị. Nghiệm của phương trình (2) mà tại mỗi điểm của nó, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ được gọi là *nghiệm kì dị*. Như vậy, nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị cụ thể của hằng số C không thể cho ta nghiệm kì dị. Nghiệm kì dị có thể nhận được từ nghiệm tổng quát chỉ khi $C = C(x)$. Ngoài ra chúng ta còn có nghiệm hỗn hợp, tức là nghiệm bao gồm một phần nghiệm riêng và một phần nghiệm kì dị.

7. Lập phương trình vi phân của họ đường cong cho trước

Để lập phương trình vi phân của họ đường cong phụ thuộc một tham số

$$\varphi(x, y, C) = 0, \tag{7}$$

ta coi y là hàm của x rồi vi phân đẳng thức (7) theo x. Khử C từ phương trình nhận được và đẳng thức (7) ta lập phương trình vi phân của họ đường cong trên.

Ví dụ. Lập phương trình vi phân của họ đường cong

$$y - Ce^x = 0.$$

Coi y là hàm của x, vi phân 2 vế của đồng nhất thức trên ta có

$$\frac{dy}{dx} - Ce^x = 0.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{dy}{dx} = Ce^x = y$$

hay

$$\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Đó là phương trình vi phân của họ đường cong nói trên.

Hãy xây dựng trường hướng, đường đẳng phục và qua đó vẽ đường cong tích phân (gần đúng) của các phương trình vi phân sau đây :

1. $y' = y - x^2$.

2. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2} = 1$.

3. $yy' + x = 0$.

4. $(y^2 + 1)y' = y - x$.

5. $xy' = 2y$.

6. $y' + y = (x - y')^3$.

7. $2(y + y') = x + 3$.

Hãy lập phương trình vi phân của các họ đường cong sau đây :

8. $y = Cx^3$.

9. $y = \sin(x + C)$.

10. $x^2 + Cy^2 = 2y$.

11. $y = e^{Cx}$.

12. $Cy - \sin Cx = 0$.

13. $(x - a^2) + by^2 = 1$.

14. $y = ax^2 + be^x$.

15. $y = C(x - C^2)$.

16. $y = (x - C^3)$.

17. $y = ax^3 + bx^2 + Cx$.

18. $\ln y = ax + by$.

19. $x = ay^2 + by + C$.

20. Lập phương trình vi phân của họ đường tròn bán kính bằng 1 và tâm nằm trên đường thẳng $y = 2x$.

21. Lập phương trình vi phân của tất cả các parabôn có trục song song với trục Oy và đi qua gốc toạ độ.

22. Lập phương trình vi phân của những đường tròn tiếp xúc với các đường thẳng $x = 0$ và $y = 0$.

23. Lập phương trình vi phân của parabôn có trục song song với Oy và cùng tiếp xúc với các đường thẳng $y = 0$, $y = x$.

24. Lập phương trình vi phân của tất cả các đường tròn tiếp xúc với trục hoành.

25. Hãy viết phương trình của quỹ tích những điểm $(x ; y)$ là điểm cực đại hoặc điểm cực tiểu của nghiệm phương trình $y' = f(x, y)$. Làm thế nào để phận biệt được điểm cực đại và điểm cực tiểu ?

§2. Phương trình vi phân với biến số phân li

1. Phương trình không chứa hàm phải tìm

Đó là phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (1)$$

Giả sử f(x) xác định và liên tục trên khoảng (a ; b). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình trong miền

$$G = \{a < x < b \; ; -\infty < y < \infty\}$$

có dạng

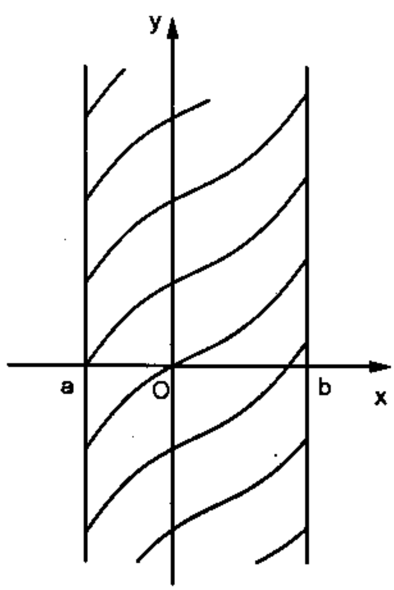
$$y = \int f(x)dx + C, \tag{2}$$

C – hằng số tuỳ ý.

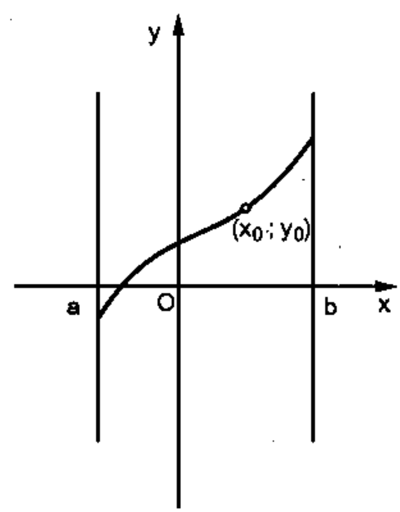
Nếu $(x_o \; ; y_o) \in G$ thì nghiệm của phương trình (1) đi qua điểm $(x_o \; ; y_o)$ có dạng

$$y = \int_{x_o}^{x} f(\tau)d\tau + y_o. \tag{3}$$

Từ công thức trên ta thấy rằng, toàn miền G được lấp đầy bởi các đường cong tích phân không giao nhau của phương trình (1) và mỗi đường cong tích phân có thể nhận được từ đường cong tích phân khác bằng một phép tịnh tiến dọc theo trục tung một đoạn nào đó (h.7).



Hình 7



Hình 8

Nếu hàm f(x) gián đoạn tại điểm trong ξ của khoảng (a ; b), chẳng hạn f(x) dần tới vô cực khi x dần tới ξ, thì biểu thức (2) sẽ cho ta nghiệm tổng quát ở trong mỗi miền con

$$a < x < \xi, \qquad -\infty < y < \infty \;;$$
$$\xi < x < b, \qquad -\infty < y < \infty$$

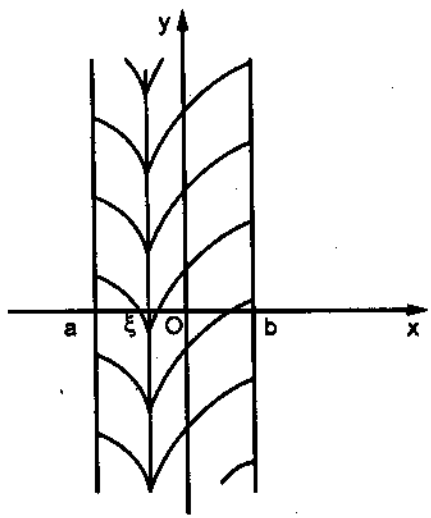
(h.10).

Đường thẳng $x = \xi$ hiển nhiên là nghiệm của phương trình đảo ngược

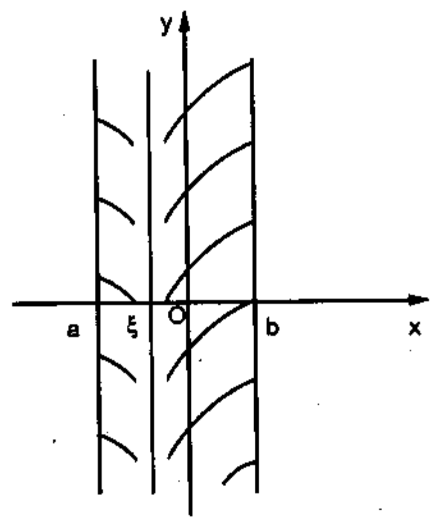
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}.$$

Nếu coi x và y tham gia vào phương trình với vai trò ngang nhau thì $x = \xi$ có thể xem như là nghiệm của phương trình (1). Nếu tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ thì nó là nghiệm kì dị. Nếu tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si được bảo đảm thì nó là nghiệm riêng (h.9).

Từ dạng của phương trình ta suy ra rằng, tại mỗi điểm của đường thẳng $x = x_o$ $(a < x_o < b)$ hướng của trường không thay đổi và có hệ số góc là $tg\alpha = f(x_o)$. Bởi thế, mỗi đường thẳng như vậy là đường đẳng phục của phương trình (1).



Hình 9



Hình 10

Nếu f(x) không đổi dấu ở trên (a ; b) thì mỗi nghiệm của phương trình (1) đều là hàm đơn điệu (tăng nếu $f'(x) > 0$; giảm nếu $f'(x) < 0$).

Nếu tại điểm $\eta \in (a ; b)$, $f(\eta) = 0$ và qua điểm η hàm f(x) đổi dấu thì mỗi đường cong tích phân của phương trình (1) sẽ có cực trị tại điểm $x = \eta$. Do đó đường thẳng $x = \eta$ là đường chứa các điểm cực đại hay cực tiểu của các đường cong tích phân.

Giả sử f(x) khả vi trên (a ; b). Nếu f'(x) không đổi dấu trên (a ; b) thì mỗi đường cong tích phân có cùng một hướng lõm tại mọi điểm của (a ; b). Nếu tại điểm $d \in (a ; b)$, $f'(x)$ nhận giá trị 0 và có dấu khác nhau khi $x < d$ và $x > d$ thì mỗi đường cong tích phân của phương trình (1) sẽ có điểm uốn tại điểm $x = d$. Bởi vậy, đường thẳng $x = d$ là đường chứa các điểm uốn của các đường cong tích phân của phương trình (1).

Ví dụ. Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Vế phải của phương trình xác định và liên tục với mọi x. Bởi vậy hàm số

$$y = \int 3x^2dx + C = x^3 + C$$

cho ta nghiệm tổng quát của phương trình đang xét trong miền

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

Phương trình không có nghiệm kì dị. Nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ có dạng

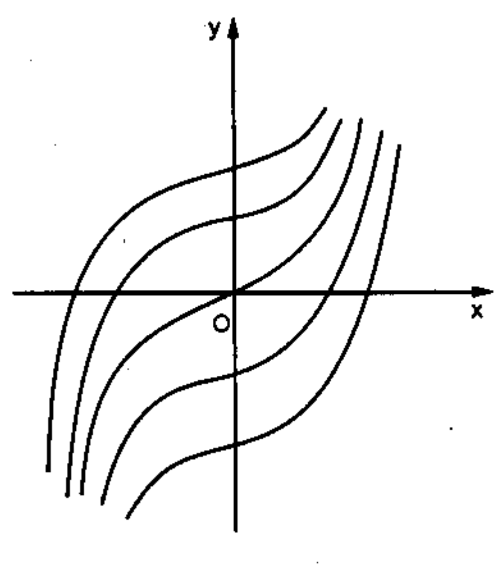
$$y = y_o + x^3 - x_o^3.$$

Trong trường hợp riêng, nếu $x_o = 0$, $y_o = 0$ thì ta có nghiệm đi qua gốc toạ độ là

$$y = x^3.$$

Đây là đường parabôn bậc 3. Mọi đường cong tích phân khác nhận được từ đường cong này bằng phép tịnh tiến dọc theo trục tung những khoảng thích hợp. Đường cong tích phân không có cực trị vì $f(x) = 0$ chỉ tại $x = 0$, nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x chuyển từ bên trái điểm 0 sang bên phải điểm 0.

Ta có $f'(x) = 6x = 0$ khi $x = 0$. Vì khi chuyển qua điểm 0, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên mỗi đường cong tích phân có điểm uốn tại giá trị $x = 0$. Do đó trục tung Oy là đường gồm các điểm uốn của mọi đường cong tích phân (h.11).



Hình 11

Bây giờ ta xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

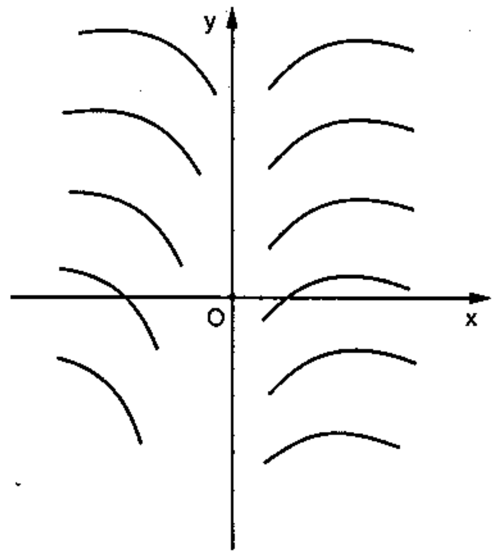
Ở đây, vế phải xác định và liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty ; 0)$, $(0 ; \infty)$. Do đó, biểu thức

$$y = \ln|x| + C$$

sẽ cho ta nghiệm tổng quát trên mỗi miền

$$-\infty < x < 0, -\infty < y < \infty ;$$
$$0 < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

Đường thẳng $x = 0$ là nghiệm riêng của phương trình đảo ngược. Nó là đường tiệm cận của các đường cong tích phân (h.12).



Hình 12

2. Phương trình không chứa biến số độc lập. Đó là phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{4}$$

Nếu coi x là hàm phải tìm, y là biến số độc lập thì từ (4) ta có phương trình đảo ngược

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \tag{5}$$

tức là ta đi đến phương trình không chứa hàm phải tìm đã xét ở mục 1.

Giả sử $f(y)$ liên tục trên khoảng $(c ; d)$ và khác 0 tại mọi điểm của khoảng đó. Với giả thiết như vậy, vế phải của phương trình (5) là hàm liên tục của y trên $(c ; d)$. Do đó, biểu thức

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + C$$

sẽ là nghiệm tổng quát của phương trình (5) trong miền

$$c < y < d, -\infty < x < \infty. \tag{6}$$

Bởi vậy, biểu thức

$$x - \int \frac{1}{f(y)} dy = C \tag{7}$$

sẽ cho ta tích phân tổng quát của phương trình (4) ở trong dải (6). Toàn dải (6) được lấp đầy bởi những đường cong tích phân của phương trình (4). Từ biểu thức tích phân tổng quát ta suy ra rằng, mỗi đường cong tích phân của phương trình (4) có thể được suy ra từ một đường cong tích phân nào đấy của phương trình đó bằng phép tịnh tiến dọc theo trục hoành một khoảng thích hợp.

Bài toán Cô-si với các giá trị ban đầu x_o, y_o thuộc dải (6) có nghiệm duy nhất và có lời giải là

$$x = \int_{y_o}^{y} \frac{1}{f(u)} du + x_o.$$

Bây giờ giả sử vế phải của phương trình (4) bằng 0 tại điểm $y = \eta$ nào đó của khoảng (c ; d). Khi ấy, dễ thấy rằng đường thẳng $y = \eta$ là nghiệm của phương trình (4). Nếu nó là bao hình của họ đường cong tích phân (7) thì ta được nghiệm kì dị. Nếu nó là đường tiệm cận của các đường cong tích phân thì ta được nghiệm riêng.

Chú ý : Biểu thức (7) trong trường hợp đang xét cho ta tích phân tổng quát trong mỗi miền con

$$c < y < \eta, \qquad -\infty < x < \infty ;$$

$$\eta < y < d, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Tại mọi điểm của đường thẳng $y = b$ $(c < b < d)$ hướng trường xác định bởi phương trình (4) không đổi : $\mathrm{tg}\alpha = f(b)$. Bởi vậy mỗi đường thẳng như thế sẽ là đường đẳng phục của phương trình (4).

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

Ở đây f(y) xác định và liên tục với mọi y. Nó luôn luôn dương. Do đó biểu thức

$$x = \mathrm{arctg}y + C$$

sẽ là tích phân tổng quát ở trong miền

$$-\infty < x < \infty, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ có dạng

$$x - x_o = \int_{y_o}^{y} \frac{du}{1 + u^2}$$

hay

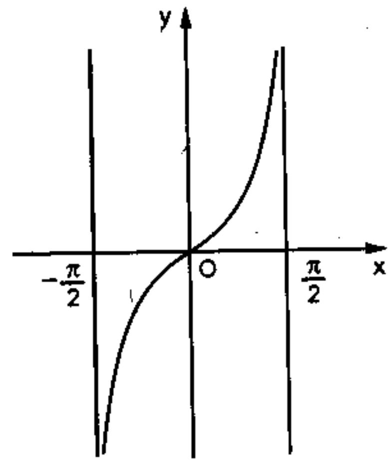
$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_o = x - x_o,$$

Trong trường hợp riêng, nếu $x_o = 0$, $y_o = 0$ thì nghiệm riêng tương ứng có dạng

$$\operatorname{arctg} y = x \text{ hay } y = \operatorname{tg} x,$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Các đường thẳng $x = \pm\frac{\pi}{2}$ là các đường tiệm cận đứng của nghiệm này (h.13).



Hình 13

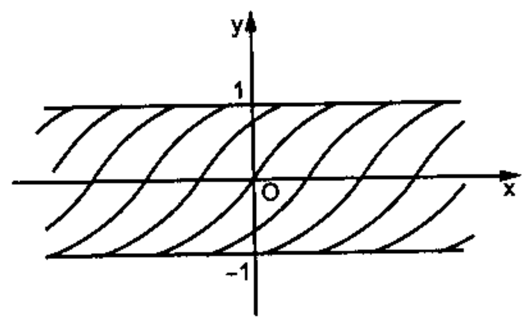
Ví dụ 2. Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Ở đây, vế phải xác định và liên tục ở trong khoảng kín $-1 \le y \le 1$. Tại hai đầu mút của khoảng đó thì f(y) bằng 0.

Tích phân tổng quát của phương trình trên có dạng

$$\arcsin y = x + C.$$



Hình 14

Các đường thẳng $y = \pm 1$ là các nghiệm kì dị của phương trình vì nó là bao hình của họ đường cong tích phân (h.14).

3. Xét phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by).$$

Bằng phép thế $z = ax + by$ ta đưa phương trình này về phương trình không chứa biến số độc lập.

Thật vậy, vì $z' = a + by'$ nên phương trình nhận được có dạng

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

tức là phương trình không chứa biến số độc lập x với hàm phải tìm là z.

Ví dụ. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2xy + y^2.$$

Phương trình trên có thể viết

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2.$$

Đặt $z = x + y$ thì

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + z^2.$$

Từ đây ta suy ra

$$x = \text{arctg } z + C.$$

Do đó tích phân tổng quát của phương trình đang xét là

$$x - \text{arctg } (x + y) = C.$$

4. Phương trình với biến số phân li. Nếu phương trình vi phân có dạng

$$X(x)\, dx + Y(y)\, dy = 0$$

thì ta nói rằng trong phương trình đó các biến số phân li.

Giả sử $X(x)$, $Y(y)$ là các hàm liên tục tương ứng của x và y. Khi đó tích phân tổng quát của phương trình là biểu thức

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C.$$

Phương trình không có nghiệm kì dị.

Nếu $X(x_o)$, $Y(y_o)$ không đồng thời triệt tiêu thì nghiệm với các giá trị ban đầu x_o, y_o nhận được bằng cách xác định C từ biểu thức của tích phân tổng quát.

Nếu $X(x_o) = Y(y_o) = 0$ thì nghiệm với giá trị ban đầu x_o, y_o có thể không tồn tại, hoặc tồn tại nhưng có thể không duy nhất.

Ví dụ 1. Tìm tích phân tổng quát và từ đó tìm đường cong tích phân đi qua điểm (0, 0) của phương trình

$$xdx + (y + 1)dy = 0.$$

Tích phân tổng quát có dạng

$$\int xdx + \int (y + 1)dy = C$$

hay là

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = C.$$

Thay $x = 0$, $y = 0$ vào biểu thức của tích phân tổng quát ta tìm được $C = 0$. Vậy đường cong tích phân đi qua gốc toạ độ là

$$x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$xdx + ydy = 0.$$

Tại gốc toạ độ hướng trường không xác định. Phương trình trên không có nghiệm đi qua điểm (0, 0).

Tích phân tổng quát của phương trình là

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Như vậy các đường cong tích phân là họ những đường tròn có tâm tại gốc toạ độ.

5. Phương trình với biến số phân li được

Phương trình vi phân với biến số phân li được có dạng

$$m_1(x)\, n_1(y)\, dx + m_2(x)\, n_2(y)\, dy = 0. \tag{8}$$

Giả sử $m_2(x)\, n_1(y) \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (8) cho $m_2(x)\, n_1(y)$ ta nhận được phương trình với biến số phân li

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)} dx + \frac{n_2(y)}{n_1(y)} dy = 0.$$

Do đó tích phân tổng quát của phương trình (8) trong trường hợp này có dạng

$$\int \frac{m_1(x)}{m_2(x)} dx + \int \frac{n_2(y)}{n_1(y)} dy = C.$$

Nếu tồn tại các giá trị a và b sao cho $m_2(a) = 0$, $n_1(b) = 0$ thì $x = a$ $(y \neq b)$ và $y = b$ $(x \neq a)$ sẽ là nghiệm của phương trình (8). Các nghiệm này có thể là nghiệm kì dị.

Với giả thiết $m_2(x_o) \neq 0$, $n_1(y_o) \neq 0$, $m_1(x_o)$ và $n_2(y_o)$ không đồng thời triệt tiêu, nghiệm với giá trị ban đầu x_o, y_o sẽ được xác định từ hệ thức

$$\int_{x_o}^{x} \frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx + \int_{y_o}^{y} \frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy = 0.$$

Nếu $m_1(x_o) = n_2(y_o) = 0$ thì nghiệm với giá trị ban đầu (x_o, y_o) có thể không tồn tại, hoặc tồn tại nhưng không duy nhất.

Nếu $x_o = a$, $y_o = b$ thì hướng trường tại điểm $(x_o ; y_o)$ không xác định. Các nghiệm $x = a(y \neq b)$, $y = b$ $(x \neq a)$ sẽ tiến đến điểm này.

Phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y) \tag{9}$$

rõ ràng là phương trình với biến số phân li được. Giả sử $f_2(y) \neq 0$. Khi đó tích phân tổng quát của phương trình có dạng

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Nếu $f_2(y) = 0$ tại điểm $y = b$ thì đường thẳng $y = b$ là nghiệm của phương trình (9). Nghiệm này có thể là nghiệm kì dị của phương trình (9).

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0.$$

Phân li biến số ta có

$$\frac{xdx}{1 + x^2} + \frac{ydy}{1 + y^2} = 0.$$

Tích phân tổng quát có dạng

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = C^2.$$

Tại gốc toạ độ hướng trường không xác định. Không có đường cong tích phân nào đi qua đó hoặc dẫn tới đó.

Ví dụ 2. Tích phân phương trình

$$2y\sqrt{by - y^2}\, dx - (b^2 + x^2)dy = 0.$$

Tìm đường cong tích phân đi qua điểm $(0 ; b)$. Giả sử $y\sqrt{by - y^2} \neq 0$, phân li biến số ta có

$$\frac{2dx}{b^2 + x^2} - \frac{dy}{y\sqrt{by - y^2}} = 0.$$

Từ đây suy ra tích phân tổng quát là

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{b-y}{y}} = C.$$

Ngoài ra, từ phương trình

$$y\sqrt{by - y^2} = 0$$

ta tìm được các nghiệm y = 0, y = b. Nghiệm thứ nhất là nghiệm riêng, nghiệm thứ hai là nghiệm kì dị.

Để tìm đường cong tích phân đi qua điểm (0 ; b), trước hết ta nhận thấy rằng, tại điểm này hướng của trường xác định nhưng điểm đang xét nằm trên nghiệm kì dị y = b. Bởi vậy tại điểm đó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ.

Thật vậy, ngoài nghiệm y = b, đường cong tích phân

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{b-y}{y}} = 0$$

nhận được từ nghiệm tổng quát với C = 0 rõ ràng cũng đi qua điểm (0 ; b).

Tích phân các phương trình

26. $y' = \sin^3 x$.

27. $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

28. $y' = \sqrt{1-x^2}$.

29. $y' = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

30. $y' = \dfrac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$.

31. $y' = x^2e^x$.

32. $y' = x\cos x$.

33. $y' = 2e^x\cos x$.

34. $y' = \operatorname{sh}x$.

35. $y' = \sin x \cos 3x$.

36. $y' = \dfrac{1}{x^2-1}$.

37. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

38. $y' = \dfrac{\ln x}{x}$.

39. $y' = \dfrac{x}{\ln x}$.

40. $y' = \dfrac{e^x}{x}$.

41. $y' = \ln x + 1$.

42. $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x^2+1)}$.

43. $y' = \dfrac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$.

44. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$.

45. $y' = \dfrac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}$.

46. $y' = |x|$.

47. $y' = \dfrac{\cos x}{x}$.

Tích phân các phương trình sau đây và tìm đường cong tích phân đi qua điểm $M(x_o ; y_o)$ cho trước :

48. $y' = 2xe^{-x^2}$; $M(0 ; 1)$.

49. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$; $M(1 ; 1)$, $M(-1 ; 1)$, $M(0 ; 1)$.

50. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}}$; $M(1 ; 1)$.

51. $y' = e^{-x^2}$; $M(0 ; 0)$.

52. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; $M(0 ; -1)$, $M(0 ; 1)$, $M(1 ; 0)$.

Hãy tìm các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên của các đường cong tích phân đi qua điểm $M(x_o ; y_o)$ của các phương trình sau đây :

53. $y' = -2xe^{-x^2}$; $M(0 ; 1)$.

54. $y' = -\dfrac{2x}{(x^3 - 1)^2}$; $M(0 ; -1)$.

55. $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $M(0 ; 0)$.

56. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $M(1 ; 0)$.

57. $y' = e^{-x^2}$; $M(0 ; 0)$.

58. $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $M(0 ; 0)$.

Tìm miền xác định của phương trình, miền tồn tại nghiệm của bài toán Cô-si, miền tồn tại và duy nhất nghiệm, các đường đẳng phục ; xác định hướng trường tại các điểm nằm trên các trục toạ độ ; chỉ ra các miền mà nghiệm tăng hoặc giảm ; tìm các đường chứa các điểm cực trị, đường chứa các điểm uốn của nghiệm và tích phân các phương trình sau đây :

59. $y' = 1.$

60. $y' = -2x.$

61. $y' = -x^2.$

62. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

63. $y' = -2xe^{-x^2}.$

64. $y' = e^{-x^2}.$

65. $y' = \frac{1}{1+x^2}.$

66. $y' = -\frac{1}{x}.$

67. $y' = \frac{x}{2\sqrt{x-1}}.$

68. $y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

69. $y' = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}.$

Hãy lập phương trình vi phân của các họ đường cong dưới đây. Phương trình nhận được biểu thị những tính chất chung gì của họ đường cong đó ?

70. $y = \frac{1}{3}x^3 + C.$

71. $y = \sqrt{1-x^2} + C.$

72. $y = \ln x + C.$

73. $y = (x + C)^2.$

Tích phân các phương trình sau đây :

74. $y' = e^y.$

75. $y' = y^2(1 + y^2)^2.$

76. $y' = e^{-y}.$

77. $y' = y + 1.$

78. $y' = \cos^2 y.$

79. $y' = \sin y.$

80. $y' = ky^n.$

81. $y' = \cos y.$

82. $y' = y^3 + 1.$

83. $y' = y^2 + a.$

84. $y' = 1 + \frac{1}{y^2}.$

85. $y' = 1 + \frac{1}{y}.$

86. $y' = \text{cotg}\, y.$

87. $y' = -y^2 - 2xy - x^2.$

88. $y' = y\ln y.$

89. $y' = y\sqrt{y}.$

90. $y' = 2\sqrt{|y|}.$

91. $y' = \ln y.$

92. $y' = (x + y)^2.$

93. $y' = x + y + 1.$

94. $y' = (4x + y - 1)^2.$

95. $y' = e^{x+y} - 1.$

96. $y' = \frac{1}{x+y-1}.$

Tìm đường tiệm cận của các đường cong tích phân của phương trình sau đây :

97. $y' = \sqrt{y - x}$.

98. $y' = \sqrt{y - x} + 1$.

99. $y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x$.

Chỉ dẫn : Đặt $x^2 - y = z$.

100. $(y - x)y'\sqrt{1 + x^2} = (1 + y^2)^{\frac{3}{2}}$.

101. $(qx - py)dx + (px + qy)dy = 0$.

Chỉ dẫn : Chuyển sang toạ độ cực.

Tích phân các phương trình sau đây và tìm đường cong đi qua điểm $M(x_o, y_o)$ cho trước. Sơ bộ giải thích sự tồn tại, tính duy nhất nghiệm, hướng của tiếp tuyến, tính lồi, lõm của đường cong tích phân tại điểm M. Vẽ đồ thị của nghiệm tìm được.

102. $y' = -y$; $M(0 ; 1)$.

103. $y' = -y^2$; $M(0 ; 0)$, $M(1 ; 1)$.

104. $y' = y$; $M(0 ; 1)$.

105. $y' = y - 1$; $M(1 ; 1)$.

106. $y' = \frac{1}{y}$; $M(0 ; 0)$.

107. $y' = 2\sqrt{y}$; $M(-1 ; 1)$, $M(0 ; 0)$.

108. $y' = \sqrt{4y^2 - 1}$; $M\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$.

109. $y' = 3\sqrt{y^2}$; $M(0 ; 1)$, $M(0 ; 0)$.

Tìm nghiệm dạng y = b của các phương trình sau :

110. $y' = y^2 - 1$.

111. $y' = \sin y$.

112. $y' = y^2 - 5y + 6$.

113. $y' = y^2 + 1$.

114. $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

115. $y' = \frac{1}{\text{tg}y}$.

116. $y' = y\ln y$.

117. $y' = 2\sqrt{y} + 1$.

Tìm đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đường cong tích phân đi qua điểm $M(x_o ; y_o)$ tương ứng :

118. $y' = 1 + y^2$; $M(0 ; 0)$.

119. $y' = y$; $M(0 ; 1)$.

120. $y' = -y^2$; $M(0 ; 1)$.

121. $y' = y^3 - 1$; $M(0 ; 1)$.

Xác định miền tồn tại của phương trình ; nghiên cứu trường hướng xác định bởi phương trình vi phân tương ứng ; tìm các đường đẳng phục ; xác định hướng trường tại những điểm nằm trên các trục toạ độ ; tìm đường cong chứa các điểm cực trị, đường cong chứa các điểm uốn và tích phân các phương trình sau :

122. $y' = -y$.

123. $y' = y^2$.

124. $y' = 1 + y^2$.

125. $y' = \dfrac{1}{y}$.

126. $y' = 2\sqrt{y}$.

127. $y' = 2\sqrt{|y|}$.

128. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

129. $y' = e^y$.

130. $y' = -y^2 - 2xy - x^2$.

Tìm nghiệm của các phương trình tích phân sau đây :

131. $y = \int_1^x e^{-y}\, dx$, $(x > 0)$.

132. $y = 2\int_0^x \sqrt{y}\, dx$.

133. $y = \int_0^x y dx + 1$.

134. $y = \int_0^x y dx$.

Tích phân các phương trình :

135. $(x + 2x^3)dx + (y + 2y^3)\, dy = 0$.

136. $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$.

137. $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.

138. $xydx + (x + 1)dy = 0$.

139. $\sqrt{y^2 + 1}\, dx = xydy$.

140. $2x^2yy' + y^2 = 2$.

141. $y' - xy^2 = 2xy$.

142. $2x\sqrt{1 - y^2}\, dx + ydy = 0$.

143. $y' = \dfrac{y - 1}{x + 1}$.

144. $y' = e^{x-y}$.

145. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

146. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$.

147. $y' = \cos(y - x)$.

148. $x\dfrac{dx}{dt} + t = 1$.

149. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

150. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$.

151. $(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1 + y)dy = 0$.

Tìm nghiệm y(x) thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ của các phương trình sau :

152. $(1 - x)dy - ydx = 0$; $y(0) = 1$.

153. $dx - \sqrt{1 - x^2}\ dy = 0$; $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

154. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.

155. $y'\mathrm{cotg}x + y = 2$; $y(0) = -1$.

156. $x\sqrt{1 - y^2}\ dx + y\sqrt{1 - x^2}\ dy = 0$; $y(1) = 0$, $y(0) = 0$.

157. $y' = y\cos x$; $y(0) = 1$.

158. $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0{,}5$.

159. $(x + 2y)y' = 1$; $y(0) = -1$.

160. $xdy - ydx = 0$; $y(1) = 1$, $y(1) = 0$, $y(0) = 1$.

Tìm nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện cho trước khi $x \to +\infty$:

161. $x^2y' - \cos 2y = 1$; $y(+\infty) = 9\pi/4$.

162. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; y(x) giới nội khi $x \to +\infty$.

Tìm miền xác định của phương trình ; miền tồn tại nghiệm của bài toán Cô-si ; nghiên cứu trường hướng, đường đẳng phục, xác định hướng trường tại những điểm nằm trên các trục toạ độ ; chỉ ra miền mà nghiệm tăng hoặc giảm ; tìm đường chứa các điểm cực trị và đường chứa các điểm uốn của nghiệm, nghiên cứu dáng điệu của đường cong tích phân tại điểm kì dị (nếu có), tại vô cực và tại biên của miền xác định của các phương trình sau đây :

163. $y' = \dfrac{2xy}{1 - x^2}$.

164. $y' = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{x^2}{y}$.

165. $y' = y\cos x$.

166. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$.

167. $y' = -y\sin x$.

168. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

169. $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

170. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

171*. Phương trình $y' = \sqrt[3]{\dfrac{y^2 + 1}{x^4 + 1}}$ có thể phân li biến số được nhưng tích phân nhận được không thể biểu diễn qua các hàm sơ cấp. Bằng cách nghiên cứu sự hội tụ của tích phân hãy chứng minh rằng mỗi đường cong tích phân có hai tiệm cận ngang.

172*. Nghiên cứu dáng điệu của các đường cong tích phân của phương trình $y' = \sqrt{\dfrac{\ln(1 + y)}{\sin x}}$ tại lân cận gốc toạ độ. Chứng minh rằng, qua mỗi điểm biên của góc toạ độ thứ nhất có một đường cong tích phân xuất phát từ phía trong của góc đi ra.

§3. Các bài toán hình học và vật lí

Trong thực tế có khá nhiều bài toán hình học, cơ học, vật lí, hoá học,... dẫn đến việc giải hoặc nghiên cứu các phương trình vi phân khác nhau. Trong phần này chúng tôi chỉ đề cập đến một số bài toán đưa về các phương trình vi phân biến số phân li. Các bài toán dẫn đến các phương trình vi phân dạng khác, chúng ta sẽ gặp ở các mục tương ứng sau.

Để giải các bài toán hình học dưới đây, cần phải vẽ hình, kí hiệu đường cong phải tìm là $y = y(x)$ (nếu bài toán được giải trong hệ toạ độ vuông góc) và biểu diễn các đại lượng trong bài toán qua x, y, y'. Khi đó hệ thức đã cho ở trong điều kiện bài toán sẽ biến thành một phương trình vi phân mà từ đó giải ra ta sẽ được hàm số phải tìm $y(x)$.

Trước khi giải các bài toán vật lí, nên biết đại lượng nào có thể chọn làm biến số độc lập, đại lượng nào có thể chọn làm hàm số phải tìm. Sau đó biểu diễn hiệu $y(x + \Delta x) - y(x)$ qua những đại lượng đã nói trong bài toán. Chia hiệu này cho Δx và chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$ ta sẽ được phương trình vi phân mà từ đó ta có thể tìm được đại lượng mong muốn. Hầu hết các bài toán này đều chứa điều kiện mà từ đó cho phép ta xác định giá trị cụ thể của hằng số C ở trong nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

Ngoài ra, để lập những phương trình vi phân tương ứng, ta có thể dùng ý nghĩa vật lí của đạo hàm (nếu biến số độc lập là thời gian t, thì $\frac{dy}{dt}$ là tốc độ thay đổi của đại lượng y), hoặc áp dụng các định luật vật lí.

Ví dụ 1. Tìm những đường cong mà tang của góc giữa tiếp tuyến của đường cong và chiều dương của trục hoành bằng bình phương tung độ của tiếp điểm. Trong số những đường cong có tính chất như vậy hãy tách ra đường cong đi qua điểm M(0 ; 1).

Gọi đường cong phải tìm là $y = y(x)$. Theo giả thiết bài toán và theo ý nghĩa hình học của đạo hàm ta có

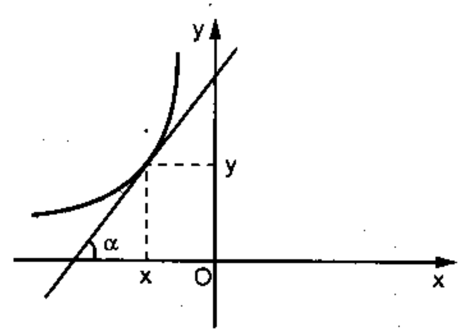
$$y' = y^2.$$

Đây là phương trình vi phân của những đường cong có tính chất trên.

Giải ra ta có

$$y = -\frac{1}{x + C}.$$

Ngoài ra ta còn có nghiệm $y = 0$.



Hình 15

Đường cong đi qua điểm M(0 ; 1) có dạng

$$y = \frac{1}{1 - x}.$$

Ví dụ 2. Biết rằng tốc độ phân rã của rađium tỉ lệ thuận với khối lượng hiện có của nó. Hãy tìm quy luật phân rã của rađium, nếu biết khối lượng ban đầu của nó và thời gian T cần thiết để phân rã hết một nửa khối lượng rađium ban đầu. Hỏi sau 100 năm sẽ phân rã hết bao nhiêu phần trăm khối lượng rađium ban đầu nếu biết T = 1600 năm ?

Kí hiệu R(t) là khối lượng rađium tại thời điểm t, R_o là khối lượng rađium ban đầu, tức là lượng rađium tại thời điểm t = 0. Khi đó tốc độ phân rã là $\frac{dR}{dt}$. Tốc độ này là một đại lượng âm vì R giảm dần theo thời gian. Theo điều kiện bài toán ta có

$$\frac{dR}{dt} = -kR, \qquad (R > 0),$$

k là hệ số tỉ lệ ($k > 0$).

Tích phân phương trình vi phân trên ta có

$$\ln R = -kt + \ln|C_1|$$

hay

$$R(t) = Ce^{-kt} \; (C = |C_1|).$$

Để xác định hằng số C, ta chú ý rằng $R = R_o$ khi $t = 0$. Thế các giá trị này vào biểu thức của nghiệm tổng quát ta tìm được $C = R_o$.

Do đó

$$R(t) = R_o e^{-kt}.$$

Để xác định hệ số tỉ lệ k, ta lại chú ý rằng, theo điều kiện bài toán thì $R = R_o/2$ khi $t = T$. Từ đây ta tìm được

$$k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-T} = \frac{\ln 2}{T}.$$

Như vậy quy luật phân rã của radium được biểu diễn bằng công thức

$$R = R_o e^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

Với $T = 1600$ ta có

$$R = R_o e^{-0,00043t}.$$

Do đó

$$R(100) = R_o e^{-0,043},$$

$$\frac{R(100)}{R_o} = e^{-0,043} = 0,958 = 95,8\%.$$

Vậy qua 100 năm sẽ phân rã hết 4,2% lượng radium ban đầu.

Ví dụ 3. Người ta đổ một dung dịch chứa 0,3 kg muối trong mỗi lít vào một bình chứa 10 lít nước với vận độ 2 lít trong mỗi phút. Dung dịch đổ vào bình hoà lẫn với nước và chảy ra khỏi bình cũng với vận độ 2 lít trong một phút. Hỏi sau 5 phút có bao nhiêu muối trong bình ?

Bài giải. Chọn thời gian t làm biến số độc lập, y(t) là lượng muối có trong bình tại thời điểm t. Ta tìm xem lượng muối ấy đã thay đổi thế nào trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$. Theo giả thiết, trong Δt phút có $2\Delta t$ lít dung dịch đổ vào bình. Trong số $2\Delta t$ lít dung dịch này chứa $0,3.2\Delta t = 0,6\Delta t$ kg muối. Mặt khác, trong khoảng thời gian Δt có $2\Delta t$ lít hỗn hợp chảy ra khỏi bình. Tại thời điểm t, trong bình chứa y(t) kg muối, do đó trong $2\Delta t$ lít hỗn hợp chảy ra có $0,2\Delta t.\ y(t)$ kg muốn nếu ta cho rằng trong khoảng thời gian Δt khá bé ấy, lượng muối trong bình không thay đổi. Nhưng vì lượng muối trong bình chỉ thay đổi một lượng vô cùng bé α trong khoảng thời gian $\Delta t \to 0$, nên trong $2\Delta t$ lít hỗn hợp chảy ra chứa $0,2\Delta t\ (y(t) + \alpha)$ kg muối, trong đó $\alpha \to 0$ khi $\Delta t \to 0$.

Như vậy, trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ trong số dung dịch đổ vào bình có $0,6\Delta t$ kg muối ; trong số hỗn hợp chảy ra khỏi bình chứa $0,2\Delta t\ (y(t) + \alpha)$ kg muối. Lượng muối trong bình với khoảng thời gian này thay đổi một đại lượng bằng $y(t + \Delta t) - y(t)$. Do đó ta phải có

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,6\Delta t - 0,2\Delta t\ (y(t) + \alpha).$$

Chia hai vế cho Δt và chuyển qua giới hạn khi $\Delta t \to 0$, ta được phương trình vi phân cần phải tìm là

$$y'(t) = 0,6 - 0,2y(t).$$

(Chú ý rằng $\alpha \to 0$ khi $\Delta t \to 0$).

Giải phương trình vi phân nhận được ta có

$$y(t) = 3 - Ce^{-0,2t}.$$

Vì tại thời điểm $t = 0$, lượng muối trong bình không có ($y(0) = 0$) nên thay giá trị này vào biểu thức nghiệm tổng quát ta được $C = 3$ và

$$y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}.$$

Vậy sau 5 phút, lượng muối trong bình sẽ là

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2.5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1,9 \text{ kg}.$$

173. Tìm những đường cong mà đối với chúng diện tích của tam giác được lập nên bởi tiếp tuyến với đường cong, tung độ của tiếp điểm và trục hoành là một đại lượng không đổi bằng a^2.

174. Tìm những đường cong mà đối với chúng tổng hai cạnh góc vuông của tam giác được lập nên ở bài toán 173 là một đại lượng không đổi bằng b.

175. Tìm những đường cong có tính chất sau : Đoạn thẳng của trục hoành bị cắt bởi tiếp tuyến và pháp tuyến kẻ từ điểm bất kì của đường cong, bằng 2a.

176. Hãy tìm những đường cong mà đối với chúng giao điểm của tiếp tuyến bất kì với trục hoành có hoành độ bằng nửa hoành độ của tiếp điểm.

177. Hãy tìm những đường cong mà đối với chúng tang của góc giữa tiếp tuyến với chiều dương của trục hoành tỉ lệ thuận với tung độ của tiếp điểm.

178. Hãy tìm những đường cong mà đối với chúng tang của góc giữa tiếp tuyến và chiều dương trục hoành là một đại lượng tỉ lệ nghịch với hoành độ của tiếp điểm.

179. Tìm những đường cong mà đoạn thẳng của tiếp tuyến bao gồm giữa hai trục toạ độ bị chia thành hai phần bằng nhau bởi tiếp điểm.

Trong số những đường cong ấy, hãy tách ra đường cong đi qua điểm M(2 ; 3).

180. Hãy tìm những đường cong có tính chất sau đây : Nếu qua điểm bất kì của đường cong ta vẽ các đường thẳng song song với các trục toạ độ thì diện tích của hình chữ nhật được lập nên bởi các đường thẳng này và các trục toạ độ sẽ bị chia bởi đường cong theo tỉ lệ 1 : 2.

181. Hãy tìm những đường cong mà tiếp tuyến của chúng tại điểm bất kì lập nên với bán kính vectơ và trục cực những góc như nhau.

182. Hãy tìm sự phụ thuộc vào thời gian t của quãng đường s trong chuyển động thẳng đều với vận độ v_o nếu biết $s = s_o$ tại thời điểm $t = t_o$.

183. Theo định luận Niutơn thì độ nguội dần của vật trong không khí tỉ lệ với hiệu số giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ của không khí. Hãy tìm quy luật nguội dần của vật nếu nhiệt độ của không khí là 20^oC và trong khoảng thời gian 20 phút vật nguội dần từ 100^oC xuống 60^oC. Sau bao lâu thì nhiệt độ của vật là 30^oC ?

184. Cho một bình có thể tích 20 lít, chứa không khí (80% nitơ và 20% ôxy). Trong mỗi giây người ta cho vào bình 0,1 lít nitơ và cho ra khỏi bình cùng một lượng như vậy hỗn hợp khí. Hỏi sau bao lâu thì trong bình sẽ có 99% nitơ ?

185. Một cái thùng đựng 100 lít dung dịch hoà tan 10 kg muối. Trong mỗi phút người ta đổ vào 5 lít nước và cho chảy ra khỏi thùng 5 lít hỗn hợp. Hỏi sau 1 giờ còn lại bao nhiêu muối trong thùng ?

Biết rằng tốc độ nguội dần hoặc nóng lên của vật tỉ lệ với hiệu số của nhiệt độ vật và nhiệt độ môi trường xung quanh. Áp dụng quy luật đó giải các bài toán sau :

186. Biết rằng trong 10 phút, vật nguội dần từ 100^o xuống 60^o. Hỏi sau bao lâu thì nhiệt độ của vật là 25^o, nếu nhiệt độ môi trường xung quanh (không khí) là 20^o ?

187. Một bình chứa 1 kg nước ở nhiệt độ 20^o. Người ta bỏ vào bình một vật bằng nhôm khối lượng 0,5 kg, nóng 75^o và có tỉ nhiệt là 0,2. Sau một phút nước trong bình nóng lên 2^o. Hỏi khi nào thì nhiệt độ của nước và vật chỉ sai khác nhau 1^o ? (Sự hao phí nhiệt lượng để làm nóng thành bình không đáng kể).

188. Tìm phương trình chuyển động của một vật được ném lên với vận độ 1 m/giây. Sau bao lâu thì vật sẽ đạt đến vị trí cao nhất ?

189. Một vật chuyển động thẳng có vận độ v tỉ lệ với bình phương của thời gian. Hãy thiết lập sự phụ thuộc giữa quãng đường đi a và thời gian t, biết rằng s = 0 khi t = 0.

190. Một chiếc thuyền đi chậm dần bởi lực cản của nước. Biết rằng lực cản của nước tỉ lệ với vận độ của thuyền ; vận độ ban đầu của thuyền là 1,5 m/s, sau 4 giây vận độ của nó chỉ còn 1 m/s. Hỏi khi nào thì vận độ của thuyền giảm đến 1 cm/s ? Cho đến khi dừng lại thì thuyền đã đi được một quãng đường bao nhiêu ?

191. Biết rằng khối lượng bị phân rã của một chất phóng xạ trong mỗi đơn vị thời gian tỉ lệ với khối lượng của chất đó tại thời điểm đang xét. Trong 30 ngày, chất đó đã phân rã 50% khối lượng ban đầu của nó. Hỏi sau bao lâu thì chỉ còn lại 1% khối lượng ban đầu của chất ?

192. Qua thí nghiệm người ta thấy rằng trong vòng một năm, mỗi gam radium phân rã 0,44 mg. Hỏi sau bao nhiêu năm sẽ phân rã một nửa lượng radium hiện có ?

Để lập phương trình vi phân của các bài toán sau đây, thuận lợi hơn cả là hãy chọn vận độ lầm hàm phải tìm. Gia tốc trọng trường coi bằng $10\ m/s^2$.

193. Một người nhảy dù từ độ cao 1,5 km. Khi cách mặt đất 0,5 km thì anh ta mở dù. Hỏi rằng khi dù mở thì anh đã rơi bao nhiêu lâu ? Biết rằng vận độ rơi của người trong không khí bình thường là 50 m/s, sức cản của không khí tỉ lệ với bình phương của vận độ.

194. Một quả bóng đá được ném lên cao với vận độ 20 m/s ; bóng nặng 0,4 kg. Sức cản của không khí tỉ lệ với bình phương của vận độ và bằng 0,48 g ở vận độ 1 m/s. Hãy tính thời gian bóng đi lên và độ cao nhất mà nó đạt được. Các kết quả này sẽ thay đổi thế nào nếu không kể đến sức cản của không khí ?

195. Một quả bóng bắt đầu rơi từ độ cao 16,3 m. Sức cản của không khí tỉ lệ với bình phương của vận độ (xem bài 194). Hãy tìm vận độ của bóng tại thời điểm cuối khi chạm đất, nếu vận độ ban đầu bằng không.

§4. Phương trình thuần nhất và các phương trình đưa được về phương trình thuần nhất

1. Phương trình thuần nhất

Hàm f(x, y) được gọi là *hàm thuần nhất* cấp *m*, nếu với mọi t ta luôn có đồng nhất thức

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Nếu đồng nhất thức này chỉ thoả mãn với $t > 0$ thì ta nói rằng f(x, y) là hàm thuần nhất dương. Tương tự ta có định nghĩa về hàm thuần nhất âm.

Phương trình vi phân

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

được gọi là *phương trình thuần nhất* nếu M(x, y), N(x, y) là những hàm thuần nhất cùng bậc.

Nếu (1) là phương trình thuần nhất thì có thể đưa nó về dạng

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Từ đây ta suy ra rằng trường hướng được lập nên bởi phương trình thuần nhất không xác định tại gốc toạ độ. Bởi vậy gốc toạ độ là điểm kì dị của phương trình thuần nhất.

Rõ ràng trên mỗi tia $y = kx$ $(x \neq 0)$ thì hướng trường của phương trình thuần nhất không thay đổi : $\text{tg}\alpha = \varphi(k)$. Bởi vậy mỗi nửa đường thẳng $y = kx$ $(x \neq 0)$ là đường đẳng phục của phương trình thuần nhất. Nếu tại giá trị k, $\varphi(k) = k$ thì đường đẳng phục $y = kx$ $(x \neq 0)$ đồng thời cũng là đường cong tích phân của phương trình.

Để giải phương trình thuần nhất ta đưa nó về phương trình với biến số phân li được bằng phép thế

$$y = zx \tag{3}$$

trong đó z là hàm phải tìm mới. Thực hiện phép thế (3) vào (2) ta đi đến phương trình

$$xdz + [z - \varphi(z)]dx = 0.$$

Giả sử $\varphi(z) \neq z$; tích phân phương trình với biến số phân li ở trên ta có

$$\psi(z) + \ln|x| = C,$$

ở đây
$$\psi(z) = \int \frac{dz}{z - \varphi(z)}.$$

Trở lại biến cũ ta được tích phân tổng quát của phương trình thuần nhất (2) là

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ln|x| = C.$$

Nghiệm kì dị của phương trình thuần nhất có thể là các bán trục Oy $(x = 0,\ y \neq 0)$ và các nửa đường thẳng $y = k_j x$ $(x \neq 0)$; trong đó k_j là nghiệm của phương trình

$$z - \varphi(z) = 0.$$

Nếu $z \equiv \varphi(z)$ thì phương trình thuần nhất có dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Đây là phương trình biến số phân li.

Nghiệm của nó, như chúng ta đã biết, có dạng

$$y = Cx \qquad (x \neq 0) ;$$
$$x = 0 \qquad (y \neq 0).$$

Để tích phân phương trình thuần nhất (1), không nhất thiết phải đưa nó về dạng (2) mà có thể áp dụng ngay phép thế (3) để đưa (1) về phương trình với biến số phân li.

2. Phương trình đơn giản đưa được về phương trình thuần nhất

Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{4}$$

Nếu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

thì bằng phép thế

$$x = u + \alpha$$
$$y = v + \beta.$$

trong đó u, v là các biến số mới, α, β xác định từ hệ phương trình đại số

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$$

ta đưa phương trình (4) về phương trình thuần nhất

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Nếu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

thì $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$. Do đó phương trình (4) có dạng

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y).$$

Đây là loại phương trình ta đã xét ở §2.

Ví dụ 1. Tích phân phương trình

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0 \tag{5}$$

và tìm đường cong tích phân đi qua điểm (2 ; 2).

Đặt y = zx. Khi đó dy = zdx + xdz.

Thế vào phương trình (5) ta có

$$(x^2 + 2zx^2 - z^2x^2)dx + (z^2x^2 + 2x^2z - x^2)(zdx + xdz) = 0$$

hay là

$$(z^3 + z^2 + z + 1)dx + (z^2 + 2z - 1)xdz = 0.$$

Tích phân phương trình biến số phân li này ta được

$$\ln|x| - \ln|z + 1| + \ln|z^2 + 1| = \ln|C_1|$$

hay là

$$\frac{x(z^2 + 1)}{z + 1} = C \quad (C = \pm C_1).$$

Trở lại biến cũ ta nhận được tích phân tổng quát của phương trình ban đầu :

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = C.$$

Đây là họ các đường tròn

$$x^2 + y^2 - C(x + y) = 0.$$

Ngoài ra phương trình còn có nghiệm $y + x = 0$ (ứng với $z + 1 = 0$).

Phương trình (5) không có nghiệm kì dị.

Nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y\,(2) = 2$$

có dạng

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Ví dụ 2. Tìm tích phân tổng quát và đường cong tích phân đi qua điểm (1 ; 2) của phương trình

$$xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2}. \tag{6}$$

Trước hết ta nhận thấy rằng phương trình (6) thuần nhất dương, nghĩa là hàm $f(x, y)$ tương ứng của nó thuần nhất dương. Vế phải của phương trình xác định với những $(x ; y)$ mà $xy - x^2 \geq 0$, nghĩa là phương trình được cho ở trên các nửa đường thẳng : $x = 0$, $(y \neq 0)$, $y = x$ $(x \neq 0)$ và trên miền được xác định bởi bất đẳng thức

$$xy - x^2 > 0 \text{ hay } x(y - x) > 0.$$

Bằng phép thế $y = xz$ ta đưa phương trình trên về dạng

$$xz' - 2z + 2 + 2\sqrt{z - 1} = 0,$$

hay

$$\frac{dz}{2(z - 1) - 2\sqrt{z - 1}} - \frac{dx}{x} = 0,$$

với giả thiết $2(z - 1) - 2\sqrt{z - 1} \neq 0$.

Từ đây suy ra

$$\ln|\sqrt{z-1}-1| - \ln|x| = \ln|C_1|,$$

$$\frac{\sqrt{z-1}-1}{x} = C \quad (C = \pm C_1)$$

hay

$$z = 1 + (1 + Cx)^2.$$

Trở lại biến cũ y ta có

$$y = x[1 + (1 + Cx)^2] \quad (x \neq 0,\ 1 + Cx > 0).$$

Đây là nghiệm tổng quát của phương trình (6).

Ngoài ra, các nửa đường thẳng $x = 0$ $(y \neq 0)$ cũng là nghiệm của phương trình (nghiệm riêng).

Từ phương trình

$$z - 1 - \sqrt{z-1} = 0$$

ta tìm được $z = 1$, $z = 2$. Trở lại biến y ta thấy $y = x$, $y' = 2x$ cũng là nghiệm của phương trình (6). Nghiệm thứ nhất là nghiệm kì dị, nghiệm thứ hai là nghiệm riêng.

Để xác định đường cong tích phân đi qua điểm (1 ; 2) ta thay $x = 1$, $y = 2$ vào biểu thức của nghiệm tổng quát và xác định hằng số C tương ứng. Kết quả tính toán cho ta biểu thức của nghiệm phải tìm là

$$y = 2x.$$

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)\,dy = 0. \tag{7}$$

Phương trình (7) có thể viết

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y - 2}{x - y + 4}.$$

Vì

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

do đó ta áp dụng phép thế

$$x = u + \alpha,$$

$$y = v + \beta$$

trong đó α, β được xác định từ hệ phương trình đại số

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 4 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình cuối ta được

$$\alpha = -1, \beta = 3.$$

Như vậy đối với biến mới u, v ta có phương trình

$$\frac{dv}{du} = -\frac{v + u}{u - v}$$

hay

$$(u + v)du + (u - v)dv = 6.$$

Đây là phương trình thuần nhất. Tích phân nó ta được

$$u^2 + 2uv - v^2 = C. \tag{8}$$

Nhưng

$$x = u - 1,$$
$$y = v + 3,$$

do đó, biểu diễn u, v qua x, y và thế vào (8) ta có tích phân tổng quát của phương trình (7) là

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

Ví dụ 4. Xét phương trình

$$(2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0.$$

Ở đây định thức phải xét có dạng

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0.$$

Bởi vậy đặt

$$z = x - y$$

ta đưa phương trình trên về dạng biến số phân li được :

$$3zdx - (z + 1)dz = 0.$$

Tích phân phương trình cuối ta có

$$3x - z - \ln|z| = C.$$

Trở lại biến cũ ta được tích phân tổng quát của phương trình đang xét :

$$2x + y - \ln|x - y| = C.$$

Tích phân các phương trình sau đây :

196. $(x + 2y)dx - xdy = 0.$

197. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0.$

198. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$

199. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$

200. $y^2 + x^2y' = xyy'.$

201. $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$

202. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$

203. $(py - qx)dx + (px + qy)dy = 0.$

204. $y' = \dfrac{ax + by}{x}$ $(b \neq 0).$

205. $y' = \dfrac{x + 3y}{2x}.$

206. $(x + y^2)\,y' = 2xy.$

207. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}.$

208. $xy' = y - xe^{y/x}.$

209. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}.$

210. $y' = \dfrac{2x + y}{x}.$

211. $y' = \dfrac{y}{x + y}.$

212. $xdy - ydx = ydy.$

213. $\dfrac{dx}{y + x} = \dfrac{dy}{y - x}.$

214. $\dfrac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \dfrac{dy}{y^2 - 4xy}.$

215. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}.$

216. $(y + \sqrt{xy})\,dx = xdy.$

217. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

218. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$

219. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$

220. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0.$

221. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5.$

222. $(y + 2)\,dx = (2x + y - 4)dy.$

223. $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2.$

224. $(y' + 1)\ln\dfrac{y + x}{x + 3} = \dfrac{y + x}{x + 3}.$

Tích phân các phương trình sau đây và tìm đường cong tích phân đi qua điểm $M(x_o\,;\,y_o)$ tương ứng. Giải thích sơ bộ về sự tồn tại và duy nhất của các đường cong tích phân ấy.

225. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$; $M(0\,;\,1).$

226. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$; $M(1\,;\,1),\ M(1\,;\,0).$

227. $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$; M(1 ; 0).

228. $xy' = x + \frac{1}{2}y$; M(0 ; 0).

229. $xy' = x - y$; M(0 ; 0).

230. $xdy - (x + y)dx = 0$; M(0 ; 0).

Tìm nghiệm dạng $y = kx$ của các phương trình sau :

231. $y' = \frac{x + 2y}{x}$.

232. $y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}$.

233. $y' = -\frac{x}{y}$.

234. $xdy - (y + x)dx = 0$.

235. $y' = e^{\frac{y}{x}} - 1$.

236. $y' = -\frac{y}{x}$

237. $ydx + (x - y)dy = 0$.

Lập phương trình vi phân của họ các đường cong :

238. $y = Cx^2$.

239. $y = \frac{C}{x}$.

240. $x^2 + y^2 = -Cy$.

241. $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$.

242. $y\sqrt{x^2 + y^2} = C$.

243. $x = Ce^{\frac{y}{x}}$.

244. Tìm đường cong mà đối với nó giao điểm của tiếp tuyến bất kì với trục hoành cách đều tiếp điểm và gốc toạ độ.

245. Tìm đường cong sao cho khoảng cách giữa tiếp tuyến bất kì của nó tới gốc toạ độ bằng hoành độ của tiếp điểm.

246. Tìm đường cong mà đối với nó tam giác được lập nên bởi trục Oy, tiếp tuyến và bán kính vectơ của tiếp điểm là tam giác cân.

247. Tìm đường cong sao cho tỉ số giữa đoạn thẳng trên trục Oy bị cắt bởi tiếp tuyến và đoạn thẳng trên trục Ox bị cắt bởi pháp tuyến kẻ từ tiếp điểm là đại lượng không đổi.

248. Tìm đường cong mà đối với nó tỉ số giữa đoạn thẳng bị cắt bởi pháp tuyến trên trục Ox và bán kính vectơ tại tiếp điểm là đại lượng không đổi bằng k.

249. Tìm đường cong có tính chất là tam giác được lập nên bởi pháp tuyến và các trục toạ độ tương đương với tam giác được lập nên bởi trục Ox, tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong.

250. Tìm đường cong sao cho tại mỗi điểm của nó độ dài của đoạn thẳng tiếp tuyến đến trục hoành bằng độ dài của đoạn thẳng trên trục hoành bị cắt bởi tiếp tuyến đó.

251. Chứng minh rằng bất kì đường cong nào nhận được từ đường cong tích phân của phương trình thuần nhất bằng phép biến đổi đồng dạng, tâm tại gốc toạ độ cũng là đường cong tích phân. Ngược lại ?

252*. Giả sử k_0 là nghiệm của phương trình

$$f(k) = k.$$

Chứng minh rằng

1. Nếu $f'(k_0) < 1$ thì không có nghiệm nào của phương trình

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

tiếp xúc với đường thẳng $y = k_0x$ tại gốc toạ độ.

2. Nếu $f'(k_0) > 1$ thì có vô số nghiệm của phương trình trên tiếp xúc với đường thẳng đó tại gốc toạ độ.

253*. Chứng minh rằng, phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + y)\sqrt{x^2 + y^2} - y}{(x - y)\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

chỉ có một đường cong tích phân kín.

§5. Phương trình thuần nhất suy rộng

1. Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

được gọi là phương trình *thuần nhất suy rộng* nếu có thể chọn được số k sao cho vế trái của phương trình trở thành hàm thuần nhất cấp m nào đấy đối với x, y, dx, dy ; ở đây ta coi x là đại lượng bậc 1, y là đại lượng bậc k, dx là bậc không và dy là bậc k – 1.

Chẳng hạn phương trình sau đây là phương trình thuần nhất suy rộng :

$$\left(\frac{2}{x^2} - y^2\right)dx + dy = 0. \qquad (2)$$

Thật vậy, với giả thiết trên, các số hạng $\frac{2}{x^2}dx$, $-y^2dx$, dy ở vế trái của phương trình (2) sẽ có bậc tương ứng là -2, $2k$, $k-1$. Để vế trái là thuần nhất đối với các biến trên ta phải có

$$-2 = 2k = k - 1.$$

Từ đây ta tìm được $k = -1$ (với giá trị này của k, các số hạng ở vế trái sẽ có bậc -2). Bằng phép thế

$$y = zx^k$$

ta đưa phương trình thuần nhất suy rộng về phương trình với biến số phân li.

Ví dụ 1. Xét phương trình (2). Vì ở đây $k = -1$ nên ta đặt $y = \frac{z}{x}$. Thế vào phương trình (2) ta đi đến phương trình với hàm phải tìm z :

$$(z^2 + z - 2)dx - xdz = 0.$$

Đây là phương trình biến số phân li.

Tích phân nó ta có

$$z = \frac{C + 2x^3}{C - x^3}.$$

Bởi vậy

$$y = \frac{C + 2x^3}{x(C - x^3)}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (2).

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1})dx + 2xdy = 0. \qquad (3)$$

Trước hết ta chọn số k sao cho hai số hạng dưới dấu căn thức x^2y^4, -1 có cùng bậc. Vì số hạng thứ nhất có bậc là $2 + 4k$, số hạng thứ hai có bậc là 0 nên k phải thoả mãn điều kiện

$$4k + 2 = 0.$$

Từ đây suy ra $k = -\frac{1}{2}$. Dễ kiểm chứng rằng, với số k như vậy, tất cả các số hạng ở vế trái của phương trình (3) sẽ có cùng một bậc $\left(\text{bằng } -\frac{1}{2}\right)$ đối với x, y, dx, dy. Cho nên phương trình (3) là phương trình thuần nhất suy rộng. Giả sử $x > 0$, đặt $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ ta đưa phương trình (3) về phương trình

$$z\sqrt{z^4 - 1}\,dx + 2xdz = 0.$$

Phương trình cuối có tích phân tổng quát là

$$\ln x + \operatorname{arctg}\sqrt{z^4 - 1} = C$$

và các nghiệm kì dị $z = \pm 1$. Bởi vậy phương trình (3) có tích phân tổng quát

$$\ln x + \operatorname{arctg}\sqrt{x^2y^4 - 1} = C$$

và các nghiệm kì dị $y = \pm\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Đối với $x < 0$, ta dùng phép thế $y = \frac{z}{\sqrt{-x}}$.

2. Nhiều khi ta gặp những phương trình có thể đưa được về phương trình thuần nhất bằng phép thế $y = z^m$, trong đó m là số ta cần chọn. Muốn tìm nó ta thay $y = z^m$ vào phương trình rồi chọn m sao cho phương trình nhận được là phương trình thuần nhất (nếu điều này có thể được). Nếu không tồn tại số m như vậy thì phương trình đang xét không đưa được về phương trình thuần nhất bằng phương pháp này.

Ví dụ. Xét phương trình

$$2x^4yy' + y^4 = 4x^6. \tag{4}$$

Sau khi thế $y = z^m$ vào phương trình trên ta được phương trình mới

$$2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6.$$

Phương trình này sẽ trở thành phương trình thuần nhất khi

$$4 + (2m - 1) = 4m = 6.$$

Các đẳng thức này sẽ thoả mãn khi $m = \frac{3}{2}$. Cho nên bằng phép thế $y = z^{3/2}$ ta đưa phương trình (4) về phương trình thuần nhất

$$3x^4z^2z' + z^6 = 4x^6.$$

Giải phương trình thuần nhất này và trở lại biến cũ y ta sẽ được tích phân tổng quát của phương trình (4).

Tích phân các phương trình sau đây :

254. $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0.$

255. $(x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0.$

256. $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0.$

257. $\left(1 + \sqrt{\frac{y^2}{x} - 1}\right)dx - 2ydy = 0.$

258. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0.$

259. $2y' + x = 4\sqrt{y}.$

260. $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}.$

261. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$

262. $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$

263. $2y + (x^2y + 1)xy' = 0.$

264. $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0.$

265. $2x^2y' = y^3 + xy.$

266. $x^3(y' - x) = y^2.$

§6. Phương trình tuyến tính

Phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp 1 có dạng

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (1)$$

Nếu $q(x) \equiv 0$ thì phương trình (1) được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất. Như vậy, phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 1 có dạng tổng quát là

$$y' + p(x)y = 0. \qquad (2)$$

Dưới đây chúng ta sẽ giả thiết $p(x)$, $q(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a ; b)$. Khi đó, như sau này chúng ta sẽ thấy (xem §10), qua mỗi điểm $(x_o ; y_o)$ của dải

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \qquad (3)$$

chỉ có duy nhất một đường cong tích phân $y = y(x)$ của phương trình (1) đi qua, và đường cong này xác định trên toàn khoảng $(a ; b)$. Như vậy mọi nghiệm của phương trình (1) đều là nghiệm riêng.

Phương trình thuần nhất (2) có nghiệm $y \equiv 0$: đó là nghiệm tầm thường.

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất cấp 1 trong dải (3) có dạng

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{4}$$

hoặc dưới dạng Cô-si :

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d(\tau)} \tag{5}$$

Tất cả mọi nghiệm của phương trình (2) đều chứa trong biểu thức nghiệm tổng quát (4) hoặc (5). Bất kì nghiệm không tầm thường của phương trình thuần nhất (2) đều nằm hoàn toàn về phía trên hoặc phía dưới của trục hoành. Nếu $y_1(x)$ là một nghiệm không tầm thường nào đó của phương trình (2) thì nghiệm tổng quát của nó có dạng

$$y = Cy_1(x).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) bằng tổng của nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng nào đó của chính phương trình không thuần nhất. Như vậy, nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất (1) có dạng

$$y(x) = y_1(x) + Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{6}$$

Mọi nghiệm của phương trình (1) đều được chứa trong biểu thức (6).

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất ta áp dụng phương pháp biến thiên hằng số như sau : Xem C ở trong biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) không phải là hằng số mà là hàm của x : $C = C(x)$ và chọn nó sao cho

$$y = C(x)\ e^{-\int p(x)dx} \tag{7}$$

thoả mãn phương trình (1).

Thay (7) vào (1) ta suy ra C(x) phải thoả mãn phương trình

$$C'(x)\ e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Do đó

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + \mathscr{C}. \tag{8}$$

Ở đây $\mathscr{C}$ là hằng số tuỳ ý.

Thay (8) vào (7) ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất :

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\mathscr{C} + \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx\right]$$

hoặc dưới dạng Cô-si

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} q(\tau)\, e^{\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds} d\tau\right].$$

Từ biểu thức cuối ta suy ra rằng, nghiệm của phương trình tuyến tính là hàm khả vi liên tục theo biến số độc lập x và các giá trị ban đầu x_o, y_o.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' - \frac{2x}{1 + x^2} y = 0. \tag{9}$$

và đường cong tích phân đi qua điểm (1 ; 2). Theo công thức (4), nghiệm tổng quát của phương trình (9) có dạng

$$y = Ce^{\int \frac{2xdx}{1+x^2}} = Ce^{\ln(1+x^2)} = C(1 + x^2).$$

Nghiệm đi qua điểm (1 ; 2) sẽ là

$$y = 2e^{\int_1^x \frac{2\tau}{1+\tau^2} d\tau} = 1 + x^2.$$

Ví dụ 2. Hãy tích phân phương trình

$$y' + \frac{1}{x} y = 3x \qquad (x > 0) \tag{10}$$

và tìm nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu y(1) = 1.

Theo công thức chung ta có

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[C + 3\int xe^{\int \frac{dx}{x}} dx\right] = \frac{C}{x} + x^2$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (10).

Nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu y(1) = 1 có dạng

$$y = e^{-\int_1^x \frac{dx}{\tau}}\left[1 + 3\int_1^x \tau e^{\int_1^\tau \frac{ds}{s}} d\tau\right] = \frac{1}{x}\left(1 + 3\int_1^x \tau^2 d\tau\right) =$$

$$= \frac{1}{x}(1 + x^3 - 1) = x^2.$$

Vậy $y = x^2$ là nghiệm phải tìm.

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0. \tag{11}$$

Nếu coi y là hàm phải tìm, x là biến số thì phương trình (11) không phải là phương trình tuyến tính. Tuy nhiên nếu coi x như hàm phải tìm, y là biến số độc lập thì phương trình (11) có thể đưa về phương trình tuyến tính sau đây :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}x - \frac{y}{2}.$$

Tích phân nó ta được

$$x = Cy - \frac{y^2}{2}.$$

Ví dụ 4. Bài toán về dòng điện với cuộn tự cảm. Giả sử I, U, R là cường độ dòng điện, thế hiệu và điện trở tại thời điểm t, L là hệ số tự cảm. Khi đó ta có

$$U = IR + L\frac{dI}{dt}$$

hay là

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}. \tag{12}$$

Kí hiệu I_o là cường độ dòng điện tại thời điểm $t_o = 0$. Để tìm quy luật thay đổi của dòng điện trong mạng điện đang xét, ta tìm nghiệm của phương trình (12) thoả mãn điều kiện ban đầu $I = I_o$ khi $t = 0$.

Áp dụng công thức nghiệm tổng quát dưới dạng Cô-si ta có

$$I = e^{-\int_0^t \frac{R}{L}d\tau}\left(I_o + \int_0^t \frac{U}{L}e^{\int_0^\tau \frac{R}{L}ds}d\tau\right).$$

Nếu coi U, R, L không đổi thì

$$I = \frac{U}{R} + e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_o - \frac{U}{R}\right).$$

Từ biểu thức cuối ta suy ra rằng, khi $t \to \infty$ thì $I \to \frac{U}{R}$. Như vậy, với t khá lớn ta có thể coi

$$I = \frac{U}{R}.$$

Đó là nội dung định luật Ôm.

Áp dụng công thức nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính, hãy tích phân các phương trình sau đây :

267. $xy' - 2y = 2x^4$.

268. $y' + y\operatorname{tg}x = \sec x$.

269. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

270. $y' - y\sin x = \sin x\cos x$.

271. $y' + ay = e^{mx}$. Chứng minh rằng phương trình này có nghiệm riêng dạng $y_1 = be^{mx}$ nếu $m \neq -a$, và $y_1 = bxe^{mx}$ nếu $m = -a$.

272. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

273. $(2e^y - x)y' = 1$.

274. $xy' = ax + by$.

275. $ydx + 2(x + y)dy = 0$.

276. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

277. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.

278. $2x(x^2 + y)dx = dy$.

279. $y = x(y' - x\cos x)$.

280. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$.

281. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

282. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.

283. $y' + \operatorname{tg}y = \dfrac{x}{\cos y}$.

284. $(x + y^2)dy = ydx$.

285. $(\sin^2 y + x\operatorname{cotg} y)y' = 1$.

286. $y' - \dfrac{1 + 2x}{x + x^2}y = \dfrac{1 + 2x}{x + x^2}$.

287. $y' + y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

288. $y' + xy = x^2 + 1$.

289. Chứng minh rằng, phương trình

$$y' + ay = P(x),$$

trong đó $a = \text{const}$, $P(x)$ là đa thức cấp m của x, có nghiệm riêng dạng

$$y_1 = Q(x),$$

$Q(x)$ là đa thức cấp m.

290. Chứng minh rằng bất kì phương trình tuyến tính

$$y' + p(x)y = q(x)$$

có nghiệm riêng dạng $y_1 = b$, là phương trình với biến số phân li.

Tìm nghiệm của các bài toán Cô-si sau :

291. $y' - 2xy = 1$; $y(0) = 0$.

292. $y' + \dfrac{3}{x}y = \dfrac{2}{x^3}$; $y(1) = 1$.

293. $xy' = x + 2y$; $y(0) = 0$.

294. $xy' = x - y$; $y(0) = 0$.

295. $xy' = x + \dfrac{1}{2}y$; $y(0) = 0$.

296. $xy' = x + y$; $y(0) = 0$.

Xác định miền tồn tại và duy nhất nghiệm ; nghiên cứu hướng trường, đường đẳng phục ; tìm các đường chứa các điểm cực trị, đường chứa các điểm uốn ; xác định hướng lồi, lõm của đường cong tích phân ; giải phương trình và nghiên cứu dáng điệu nghiệm tại lân cận điểm kì dị của các phương trình sau :

297. $y' - xy = 1$.

298. $y' + 2xy = 0$.

299. $y' - \frac{1}{x}y = x$.

300. Tìm những đường cong mà đối với chúng diện tích của tam giác được lập nên bởi trục Ox, tiếp tuyến và bán kính vectơ tại tiếp điểm là đại lượng không đổi bằng a^2.

301. Tìm đường cong sao cho hình thang giới hạn bởi các trục toạ độ, tiếp tuyến với đường cong và tung độ tiếp điểm có diện tích không đổi bằng $3a^2$.

Áp dụng phương pháp đổi biến hoặc đạo hàm hai vế, hãy đưa các phương trình sau đây về dạng phương trình tuyến tính và giải chúng :

302. $(x + 1)(yy' - 1) = y^2$.

303. $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$.

304. $x(e^y - y') = 2$.

305. $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$.

306. $y(x) = \int_0^x y(t)dt + 1 + x$.

307. $\int_0^x (x - t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt$.

308. Tìm quy luật biến thiên của dòng điện trong mạng điện có cuộn tự cảm nếu $I = I_0$ khi $t = 0$, $U = A \sin \omega t$ ($A = \text{const}$).

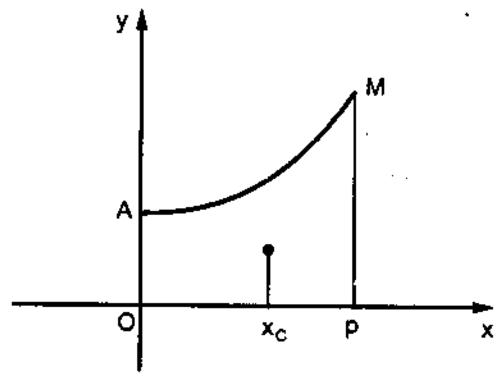
309. Tìm đường cong mà tiếp tuyến của nó cắt trục Oy một đoạn bằng $\frac{1}{n}$ tổng các toạ độ của tiếp điểm.

310. Tìm đường cong sao cho tung độ trung bình của nó trong khoảng $[0 ; x]$ (tức là đại lượng $\frac{1}{x}\int_0^x ydx$) tỉ lệ với tung độ của điểm ứng với cận bên phải của đoạn $[0 ; x]$.

311. Tìm đường cong AM (xem hình 16) sao cho hoành độ của trọng tâm của hình OAMP bằng $\frac{3}{4}$ hoành độ của điểm M.

Chỉ dẫn : Nếu điểm M có toạ độ x, y và phương trình đường cong là y = y(x) thì hoành độ của trọng tâm của hình OAMP được tính bằng công thức

$$x_c = \frac{\int_0^x \tau y(\tau)d\tau}{\int_0^x y(\tau)d\tau}.$$



Hình 16

312. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình tuyến tính

$$y' + p(x)y = q(x)$$

với các giá trị ban đầu x_0, y_0 có thể viết dưới dạng

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(\tau)d\tau} + \int_{x_0}^x q(\xi)e^{-\int_\xi^x p(\tau)d\tau}d\xi.$$

313. Tìm nghiệm y(x) của phương trình tích phân

$$x\int_0^x y(\tau)d\tau = (x+1)\int_0^x \tau y(\tau)d\tau.$$

314. Chứng minh rằng, phương trình tuyến tính

$$y' = ky + f(x),$$

trong đó $k \neq 0$, f(x) là hàm tuần hoàn chu kì ω có một nghiệm riêng duy nhất là hàm tuần hoàn, chu kì ω. Hãy tìm nghiệm riêng đó.

315. Cho hai nghiệm khác nhau y_1, y_2 của phương trình tuyến tính cấp 1. Hãy biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình đó qua hai nghiệm này.

316. Cho phương trình

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x).$$

Hãy tìm nghiệm giới nội khi $x \to \frac{\pi}{2}$ của phương trình trên.

317. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' + p(x)y = 0,$$

nếu biết một nghiệm không tầm thường $y_1(x)$ của nó.

318. Tìm phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 1 nếu biết một nghiệm không tầm thường $y_1(x)$ của nó.

319. Chứng minh rằng, một trong các nghiệm của phương trình

$$y' + ky = kq(x) \qquad (0 \leq x < +\infty),$$

trong đó k là hằng số, là biểu thức

$$y(x) = k\int_0^{\infty} q(x-t)e^{-kt}dt .$$

320. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất $y' + p(x)y = 0$, bằng cách đưa nó về phương trình không chứa số hạng có hàm phải tìm qua phép thế $y = \alpha(x)z$, trong đó $\alpha(x)$ là hàm khả vi liên tục theo x.

321. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất $y' + p(x)y = 0$ bằng cách đưa nó về phương trình với hệ số hằng số qua phép thế biến số độc lập $t = \psi(x)$.

322. Tìm các đạo hàm riêng theo các giá trị ban đầu x_o, y_o của nghiệm phương trình tuyến tính cấp 1 đi qua điểm $(x_o ; y_o)$.

323. Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 1 có dạng

$$y = A(x)\,C + B(x).$$

Hãy chứng minh nhận xét ngược lại : bất kì phương trình vi phân có nghiệm tổng quát dạng trên đều là phương trình tuyến tính cấp 1.

324. Chứng minh rằng đường cong tích phân bất kì của phương trình tuyến tính chia đoạn thẳng tung độ nằm giữa hai đường cong tích phân bất kì khác của chính phương trình đó theo một tỉ số không đổi.

325. Chứng minh rằng phép đổi biến số độc lập $x = \varphi(t)$ và phép biến đổi tuyến tính hàm phải tìm $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ không làm mất tính tuyến tính của phương trình.

326. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của mọi đường cong tích phân của phương trình tuyến tính, kẻ tại những giao điểm của những đường cong ấy và đường thẳng song song với trục Oy, hoặc là cắt nhau tại một điểm, hoặc là song song với nhau.

327*. Cho phương trình tuyến tính

$$y' + ky = q(x),$$

trong đó k là số thực, q(x) là hàm liên tục theo x và có giới hạn hữu hạn tại vô cực :

$$\lim_{x\to+\infty} q(x) = b.$$

Chứng minh rằng nếu $k > 0$ thì mọi nghiệm của phương trình trên đều dần tới $\frac{b}{k}$ khi $x \to +\infty$; nếu $k < 0$ thì chỉ có một nghiệm có tính chất như vậy. Hãy tìm nghiệm đó.

328. Biết rằng quy luật biến thiên của dòng điện trong mạng điện có cuộn tự cảm được mô tả bởi phương trình

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L},$$

(xem Ví dụ 4 trong phần tóm tắt lí thuyết) ở đây U, R, L là những số dương. Không tích phân phương trình trên, hãy chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình đó đều dần tới $\frac{U}{R}$ khi $t \to +\infty$.

329. Bằng phép thế hàm phải tìm, hãy đưa phương trình

$$a\varphi'(y)y' + p(x)\varphi(y) = q(x)$$

về phương trình tuyến tính cấp 1.

330. Đưa phương trình

$$y' + P(x) = Q(x)e^{my}$$

về phương trình tuyến tính cấp 1.

331. Hãy chứng tỏ rằng, một trong những nghiệm của phương trình

$$xy' - xy + 1 = 0 \qquad (x > 0)$$

là hàm

$$y = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\,dt.$$

332*. Giả sử trong phương trình

$$xy' + ay = f(x),$$

$a = \text{const} > 0$, $f(x) \to b$ khi $x \to 0$. Chứng minh rằng chỉ có một nghiệm của phương trình là giới nội khi $x \to 0$. Tìm giới hạn của nghiệm đó khi $x \to 0$.

333*. Giả sử trong phương trình trên $a < 0$, $f(x) \to b$ khi $x \to 0$. Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình đó đều có cùng một giới hạn khi $x \to 0$. Tìm giới hạn đó.

334*. Chứng minh rằng, nếu

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)| \leq M < \infty,$$

thì phương trình tuyến tính

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t)$$

chỉ có một nghiệm giới nội trên toàn trục số. Tìm nghiệm đó và chứng minh rằng, nếu $f(t)$ là hàm tuần hoàn thì nghiệm tìm được cũng là hàm tuần hoàn.

335*. Chứng minh rằng, chỉ có một nghiệm của phương trình

$$xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$$

dẫn tới giới hạn hữu hạn khi $x \to +\infty$. Tìm nghiệm đó.

336*. Cho phương trình

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t),$$

$$a(t) \geq C > 0,\ f(t) \to 0 \text{ khi } t \to +\infty.$$

Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình trên đều dẫn tới 0 khi $t \to +\infty$.

337*. Tìm nghiệm tuần hoàn của phương trình

$$y' = 2y\cos^2 x - \sin x.$$

§7. Phương trình đưa được về phương trình tuyến tính

1. Phương trình Becnuli. Đó là phương trình dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{1}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm mà chúng ta giả thiết là liên tục trên khoảng $(a\,;\,b)$; α là số thực bất kì khác 1 và 0 (vì nếu $\alpha = 1$ thì (1) là phương trình biến số phân li, nếu $\alpha = 0$ thì (1) trở thành phương trình tuyến tính).

Với các giả thiết trên, tồn tại duy nhất đường cong tích phân của phương trình (1) đi qua điểm $(x_o ; y_o)$, ở đây $x_o \in (a ; b)$, $y_o \neq 0$ và $y_o > 0$ nếu α không phải là số nguyên.

Phương trình Becnuli đưa được về phương trình tuyến tính nhờ phép biến đổi

$$y^{-\alpha+1} = z,$$

z là hàm mới phải tìm. Nếu $\alpha > 0$ thì phương trình Becnuli còn có nghiệm $y \equiv 0$. Nghiệm này sẽ là nghiệm riêng nếu $\alpha > 1$, sẽ là nghiệm kì dị nếu $0 < \alpha < 1$.

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$y' - 2xy = 3x^3y^2. \tag{2}$$

Đây là phương trình Becnuli với $\alpha = 2$. Đặt

$$z = y^{1-\alpha} = y^{-1},$$

ta đưa phương trình (2) về phương trình tuyến tính

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Tích phân phương trình này ta có

$$z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2.$$

Bởi vậy, nghiệm tổng quát của phương trình (2) là

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}.$$

Nghiệm $y \equiv 0$ là nghiệm riêng vì $\alpha = 2 > 1$. Dễ kiểm chứng rằng, nghiệm đi qua điểm (0 ; 1) có dạng

$$y = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Ví dụ 2. Tích phân phương trình

$$y' + \frac{x}{1 - x^2}y = x\sqrt{y}. \tag{3}$$

Đây là phương trình Becnuli với $\alpha = \frac{1}{2}$.

Đặt

$$z = y^{1-\alpha} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y},$$

ta đưa phương trình (3) về dạng tuyến tính

$$z' + \frac{x}{2(1-x^2)} z = \frac{1}{2} x.$$

Tích phân phương trình cuối này ta được

$$z = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2).$$

Do đó, biểu thức

$$\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$$

là tích phân tổng quát của phương trình (3). Nghiệm $y \equiv 0$ là nghiệm kì dị vì $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

2. Phương trình Đacbu

Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0, \quad (4)$$

trong đó M, N là các hàm thuần nhất cấp m ; P là hàm thuần nhất cấp l ($l \neq m - 1$), được gọi là *phương trình Đacbu*. Ở đây một trong hai hàm $M(x, y)$, $N(x, y)$ có thể đồng nhất bằng 0.

Nếu $N \not\equiv 0$, bằng phép thế

$$y = zx, \quad (5)$$

trong đó z là hàm mới phải tìm, ta đưa được phương trình Đacbu về phương trình Becnuli với hàm phải tìm x, biến độc lập z và biến đổi tiếp ta đưa phương trình đang xét về dạng phương trình tuyến tính. Nếu $N \equiv 0$ thì phép biến đổi (5) sẽ đưa phương trình (4) về phương trình với biến số phân li. Các nửa đường thẳng $y = k_i x$ ($x \neq 0$), trong đó k_i là nghiệm của phương trình $M(1, k) + N(1, k)k = 0$, có thể cho ta nghiệm kì dị của phương trình.

Ví dụ 1. Dễ thấy rằng, phương trình

$$xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$$

là phương trình Đacbu.

Đặt $y = zx$, ta đưa phương trình trên về dạng

$$(1 + z^2)dx + (xz + x^2)dz = 0,$$

hay

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2} x = -\frac{1}{1+z^2} x^2.$$

Đây là phương trình Becnuli với $\alpha = 2$. Tích phân tổng quát của nó có dạng

$$\frac{1}{x} = C\sqrt{1 + z^2} + z.$$

Thay $z = \frac{y}{x}$ ta được tích phân tổng quát của phương trình ban đầu :

$$C\sqrt{x^2 + y^2} + y - 1 = 0.$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$xy' - y = x\sqrt{x^2 - y^2}.$$

Đây là phương trình Đacbu với $N \equiv 0$. Đặt $y = zx$ ta đưa nó về phương trình với biến số phân li

$$x(z'x + z) - zx = x\sqrt{x^2 - x^2z^2}$$

hay

$$z' = \sqrt{1 - z^2}.$$

Tích phân phương trình này ta được

$$z = \sin(x + C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} - C \le x \le \frac{\pi}{2} - C\right).$$

$z = \pm 1$ cũng là nghiệm của phương trình trên, chúng là nghiệm kì dị.

Bởi vậy phương trình đang xét có nghiệm tổng quát

$$y = x\sin(x + C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} - C \le x \le \frac{\pi}{2} - C\right)$$

và nghiệm kì dị $y = \pm x$.

Tích phân các phương trình sau :

338. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

339. $3y^2y' + y^3 + x = 0$.

340. $y' + 2y = y^2e^x$.

341. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.

342. $y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}x$.

343. $xy^2y' = x^2 + y^3$.

344. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

345. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$.

346. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

347. $(2x^2 y\ln y - x)y' = y$.

348. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$.

349. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2\cos y + a\sin 2y}$.

Tìm nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ và tích phân các phương trình sau :

350. $xy' + y = y^2\ln x$; $y(1) = 1$.

351. $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$; $y(0) = 0$.

352. $y' - y = xy^2$; $y(0) = 0$.

353. $xy' + y = xy^2$; $y(0) = 0$.

354. $xy' - y = y^2$; $y(0) = 0$.

Giải các phương trình Đacbu sau :

355. $(x^2 + 2y^2)dx - xydy - (xdy - ydx) = 0$.

356. $dx - dy + x(xdy - ydx) = 0$.

357. $(x^3 - y)dx + (x^2y + x)dy = 0$.

358. $xy' - y = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

359. Hãy tìm những đường cong mà đoạn thẳng bị cắt bởi pháp tuyến của đường cong trên trục Ox bằng $\frac{y^2}{x^2}$.

360. Xác định đường cong mà đoạn thẳng bị cắt bởi pháp tuyến trên trục Oy bằng $\frac{x^2}{y^2}$.

361. Tìm những đường cong mà đoạn thẳng trên trục Oy bị cắt bởi tiếp tuyến bằng bình phương tung độ của tiếp điểm.

362. Dựa vào dạng của phương trình Becnuli hãy chứng minh rằng, trục Ox là đường cong duy nhất có thể cho ta nghiệm kì dị của phương trình đó.

§8. Phương trình Ricati

Phương trình

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (1)$$

được gọi là *phương trình Ricati*.

Ta sẽ giả thiết các hàm P(x), Q(x), R(x) xác định và liên tục trên khoảng (a ; b). Khi đó, như sau này chúng ta sẽ thấy (xem §10), qua mỗi điểm (x_o ; y_o) của dải

$$a < x < b, \qquad |y| < +\infty \tag{2}$$

chỉ có duy nhất một đường cong tích phân của phương trình (1) đi qua. Tuy nhiên khác với trường hợp phương trình tuyến tính, ở đây đường cong tích phân, nói chung, không xác định trên toàn khoảng (a ; b) mà chỉ tại lân cận điểm x_o . Chẳng hạn, phương trình $y' = y^2$ có đường cong tích phân đi qua điểm (0 ; 1) là $y = \dfrac{1}{1-x}$. Đường cong này chỉ xác định khi $x < 1$, mặc dầu vế phải của phương trình đang xét xác định và liên tục trên toàn trục số.

Như vậy, với các giả thiết trên, mọi nghiệm của phương trình Ricati đều là nghiệm riêng và do đó phương trình Ricati không có nghiệm kì dị.

Chỉ trừ một số trường hợp ngoại lệ, còn nói chung, phương trình Ricati không tích phân được bằng cầu phương. Tuy nhiên, nếu biết một nghiệm riêng y_1 của phương trình Ricati thì qua phép thế

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

ta đưa được phương trình Ricati về phương trình tuyến tính cấp 1 với hàm phải tìm z và do đó có thể tích phân được bằng cầu phương.

Nếu phương trình Ricati có dạng

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \tag{3}$$

trong đó A, B, C là những hằng số và $(B + 1)^2 > 4AC$, thì nó có nghiệm riêng dạng

$$y_1 = \frac{a}{x},$$

ở đây hằng số a được xác định bằng cách thay giá trị của y_1 vào phương trình (3).

Tuy nhiên phương trình (3) là phương trình thuần nhất suy rộng với $k = -1$, do đó bằng phép thế $y = \dfrac{z}{x}$, ta đưa được nó về dạng phương trình với biến số phân li.

Phương trình Ricati dạng

$$y' = \frac{ay^2}{x} + \frac{y}{2x} + c$$

hay

$$xy' - \frac{1}{2}y - ay^2 = cx \tag{4}$$

đưa được về phương trình biến số phân li nhờ phép thế

$$y = z\sqrt{x},$$

và do đó có thể tích phân được bằng cầu phương.

Bây giờ ta xét phương trình Ricati dạng

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m. \tag{5}$$

Dễ thấy rằng, với $m = 0$ và $m = -2$ phương trình trên tích phân được bằng cầu phương.

Ngoài ra nó còn tích phân được bằng cầu phương với những giá trị của m thoả mãn phương trình

$$\frac{m}{2m+4} = k \qquad \text{(k là số nguyên).}$$

Thật vậy, đặt $y = \dfrac{z}{x}$, $\quad x^{m+2} = t$.

Thay các giá trị này vào phương trình trên ta có

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t \qquad \left(\alpha = k - \frac{1}{2}\right).$$

Phương trình cuối có thể đưa về phương trình dạng (4) nhờ các phép thế liên tiếp

$$z = \frac{t}{a+u}, \qquad a = \frac{1+\alpha}{\gamma}$$

hay

$$z = a + \frac{t}{u}, \qquad a = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Bằng phép thế

$$y = \alpha(x)z,$$

ta có thể đưa phương trình Ricati dạng (1) về phương trình Ricati mới mà trong đó hệ số của y^2 bằng 1 hoặc -1.

Phép thế

$$y = z + \beta(x)$$

có thể đưa phương trình Ricati (1) về phương trình Ricati khác mà trong đó hệ số của y^2 vẫn giữ nguyên như cũ, còn hệ số của y bằng 0.

Như vậy, kết hợp hai phép thế trên ta có thể đưa một phương trình Ricati bất kì về dạng

$$y' = \pm y^2 + R(x).$$

Nếu $R(x) = Bx^m$ thì ta đã đưa phương trình (1) về dạng đặc biệt (5).

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' = -y^2 + x^2 + 1.$$

Dễ kiểm chứng rằng, $y_1 = x$ là nghiệm của phương trình. Đặt

$$y = x + \frac{1}{z},$$

ta đưa phương trình về dạng

$$z' - 2xz = 1.$$

Do đó

$$z = e^{x^2}\left(C + \int e^{-x^2}dx\right).$$

Trở lại biến cũ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét :

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2}dx}$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2}.$$

Đây là phương trình dạng (3). Ta tìm nghiệm riêng dạng $y_1 = \frac{a}{x}$. Thế vào phương trình ta tìm được a thoả mãn hệ thức

$$a^2 + 2a + 1 = 0.$$

Từ đây giải ra $a = -1$. Bây giờ chỉ cần áp dụng phép thế $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, ta đưa được phương trình về dạng tuyến tính

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}.$$

Do đó

$$z = \frac{x}{2}(C - \ln|x|)$$

và

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C - \ln|x|)}.$$

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$y' = y^2 + x^{-4}.$$

Ở đây $m = -4$, do đó

$$\frac{m}{2m+4} = \frac{-4}{-8+4} = 1.$$

Bởi thế ta đặt

$$y = \frac{z}{x},\ x^{-2} = t.$$

Thay vào phương trình đang xét ta được phương trình mới

$$tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t\left(\alpha = \frac{1}{2}\right).$$

Bây giờ áp dụng phép thế

$$z = -1 + \frac{t}{u}$$

ta đưa phương trình cuối về phương trình

$$tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t.$$

Đặt

$u = v\sqrt{t}$ ta được

$$\sqrt{t}\,v' = \frac{1+v^2}{2}.$$

Do đó

$$v = \mathrm{tg}(\sqrt{t} + C)\left(-C - \frac{\pi}{2} < \sqrt{t} < -C + \frac{\pi}{2}\right)$$

hay

$$u = \sqrt{t}\ \mathrm{tg}(\sqrt{t} + C), \quad z = -1 + \sqrt{t}\,\mathrm{cotg}(\sqrt{t} + C).$$

Bởi vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu có dạng

$$y = \frac{1}{x^2}\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}.$$

Bằng cách đoán nhận nghiệm riêng, hãy đưa các phương trình Ricati sau đây về phương trình Becnuli tương ứng và giải chúng :

363. $3y' + y^2 = -\dfrac{2}{x^2}$.

364. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 0$.

365. $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$.

366. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

367. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

Biết rằng các phương trình sau đây có nghiệm riêng dạng y = ax + b. Hãy tích phân các phương trình đó.

368. $y' = y^2 - xy - x$.

369. $xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$.

370. Hãy tìm các quỹ đạo trực giao với họ các đường cong

$$y^2 = Ce^x + x + 1.$$

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình :

371. $y' = y^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

372. $y' + y^2 = -\dfrac{1}{4x^2}$.

373. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

374. $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$.

375. $y' = y^2 + x^{-\frac{4}{3}}$.

376. $y' = -y^2 + x^{-4}$.

377. $y' = -y^2 + x^{-\frac{8}{3}}$.

378. $y' - y^2 = x^{-\frac{8}{5}}$.

Hãy đưa các phương trình Ricati sau đây về phương trình có hệ số của y^2 bằng 1 hoặc có hệ số của y bằng 0 và giải chúng :

379. $xy' - x^2y^2 = y + 1$.

380. $xy' - x^2y^2 + (2x + 1)y = 1$.

381. $y' - 4y^2 + 4x^2y = x^4 + x + 4$.

382. $y' = y^2 - 2x^2y + x^4 + 2x + 4$.

383. $xy' = y^2x^2 + y + \dfrac{2}{x^2} + 2$.

384. $xy' - y^2 + 3y = 4x^2 + 2$.

385*. Tìm tích phân tổng quát của phương trình Ricati nếu biết ba nghiệm riêng của nó.

386*. Chứng minh rằng nếu phương trình Ricati có ba nghiệm riêng tuần hoàn chu kì ω thì mọi nghiệm của phương trình đó đều là hàm tuần hoàn chu kì ω.

387*. Chứng minh rằng, bốn nghiệm riêng y_1, y_2, y_3, y_4 của phương trình Ricati thoả mãn hệ thức điều hoà sau :

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{const}.$$

388*. Chứng minh rằng phương trình vi phân của họ đường cong

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}$$

là phương trình Ricati.

389. Chứng minh rằng nghiệm tổng quát của phương trình Ricati là hàm phân tuyến tính đối với hằng số bất kì C.

390*. Chứng minh rằng, phương trình

$$y' = x + y^2$$

không có nghiệm xác định trên toàn trục số.

391*. Chứng minh rằng, nghiệm $y = y(x)$ của phương trình

$$y' = x^2 - y^2$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, xác định với mọi $x \geq 0$, đơn điệu tăng, thoả mãn đánh giá

$$0 < y(x) < x, \qquad (x > 0)$$

và tiệm cận với đường thẳng $y = x$ khi $x \to +\infty$, nghĩa là

$$\lim_{x \to +\infty} [y(x) - x] = 0.$$

392. Lập phương trình Ricati theo ba nghiệm liên tục y_1, y_2, y_3. Chứng minh rằng, nếu các nghiệm này thoả mãn điều kiện $y_1 < y_2 < y_3$ thì hệ số của phương trình nhận được là liên tục.

393. Chứng minh rằng, phương trình Ricati dạng

$$y' = y^2 + p(x)y + q(x)$$

hoàn toàn được xác định bởi hai nghiệm liên tục. Lập phương trình Ricati dạng trên theo hai nghiệm liên tục đó.

394*. Chứng minh rằng nghiệm $y = y(x)$ của phương trình

$$y' = x^2 + y^2$$

thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y(0) = 0$$

xác định không phải với mọi x và là đường cong đối xứng qua gốc toạ độ.

395*. Chứng minh rằng, nếu $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ là những hàm liên tục thì đối với bất kì ba nghiệm y_1, y_2, y_3 của phương trình

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

luôn luôn có hệ thức

$$y_1 < y_2 < y_3.$$

396*. Chứng minh rằng, nếy y_1, y_2 là hai nghiệm khác nhau của phương trình Ricati

$$y' = y^2 + p(x)y + q(x),$$

thì

$$\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1} = y_1 + y_2 + p(x).$$

397*. Chứng minh rằng phương trình Ricati

$$y' = y^2 + p(x)y + q(x)$$

với hệ số $p(x)$, $q(x)$ tuần hoàn liên tục, không thể có quá hai nghiệm tuần hoàn.

§9. Phương trình vi phân hoàn chỉnh, thừa số tích phân

1. Phương trình vi phân hoàn chỉnh. Phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

được gọi là *phương trình vi phân hoàn chỉnh* nếu vế trái của nó là vi phân toàn phần của hàm $U(x, y)$ nào đó :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y).$$

Như vậy, nếu (1) là phương trình vi phân hoàn chỉnh thì nó có tích phân tổng quát dạng

$$U(x, y) = C.$$

Giả sử các hàm M(x, y), N(x, y) xác định và liên tục trong miền đơn liên G và trong G, M(x, y) có đạo hàm riêng liên tục theo y, N(x, y) có đạo hàm riêng liên tục theo x. Khi đó để (1) là phương trình vi phân hoàn chỉnh thì điều kiện cần và đủ là trong G thoả mãn đồng nhất thức :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Nếu (2) thoả mãn thì tích phân tổng quát của phương trình (1) có thể viết dưới dạng

$$\int_{x_o}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_o}^{y} N(x_o, y)dy = C$$

hoặc

$$\int_{x_o}^{x} M(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} N(x, y)dy = C.$$

Ở đây $(x_o ; y_o)$ là điểm bất kì thuộc miền G mà tại đó M, N không đồng thời triệt tiêu.

Phương trình vi phân hoàn chỉnh (1) không có nghiệm kì dị. Nếu tại điểm $(x_o ; y_o) \in G$, các hàm M, N không đồng thời triệt tiêu thì nghiệm của phương trình vi phân hoàn chỉnh (1) đi qua điểm $(x_o ; y_o)$ là

$$\int_{x_o}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_o}^{y} N(x_o, y)dy = 0$$

hoặc

$$\int_{x_o}^{x} M(x, y_o)dx + \int_{y_o}^{y} N(x, y)dy = 0.$$

Nếu tại điểm $(x_o ; y_o)$ các hàm M, N đồng thời triệt tiêu thì nghiệm của phương trình (1) đi qua điểm đó có thể không tồn tại, hoặc tồn tại mà không duy nhất.

2. Thừa số tích phân. Nếu điều kiện (2) không thoả mãn thì phương trình (1) không phải là phương trình vi phân hoàn chỉnh.

Tuy nhiên trong một số trường hợp người ta có thể chọn hàm số $\mu(x, y)$ có tính chất : Nếu nhân hai vế của phương trình (1) với $\mu(x, y)$ thì phương trình nhận được sẽ trở thành phương trình vi phân hoàn chỉnh. Hàm số $\mu(x, y)$ có tính chất như vậy được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình (1). Như vậy nếu (1) là phương trình vi phân hoàn chỉnh thì ta có thể coi $\mu(x, y) = 1$.

Nếu đối với phương trình (1) ta tìm được thừa số tích phân $\mu(x, y)$ thì để giải nó ta chỉ cần nhân hai vế của phương trình với $\mu(x, y)$ rồi tích phân phương trình vi phân hoàn chỉnh nhận được. Tuy vậy, ở đây cần chú ý rằng khi nhân phương trình với $\mu(x, y)$ ta có thể làm mất một số nghiệm của phương trình. Các nghiệm này có thể là nghiệm riêng hoặc nghiệm kì dị.

Nếu $\mu(x, y)$ khả vi liên tục theo x, y thì để tìm $\mu(x, y)$ ta có hệ thức

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Từ đây ta suy ra thừa số tích phân $\mu(x, y)$ thoả mãn phương trình đạo hàm riêng cấp 1 sau đây :

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{3}$$

Nếu biết $\mu = \mu(\omega)$, trong đó $\omega = \omega(x, y)$ thì từ (3) ta suy ra μ thoả mãn phương trình vi phân thường với biến số độc lập ω sau đây :

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \psi(\omega)\mu,$$

trong đó

$$\psi(\omega) = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}. \tag{4}$$

Như vậy, để có thừa số tích phân dạng $\mu = \mu(\omega)$ thì vế phải của (4) phải là hàm của ω. Trong trường hợp này ta tìm được

$$\mu = e^{\int\psi(\omega)d\omega}.$$

Đặc biệt, nếu phương trình (1) có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x ($\omega = x$) hoặc y ($\omega = y$) thì các điều kiện tương ứng sau đây sẽ được thoả mãn :

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x) \qquad \left(\mu(x) = e^{\int \psi(x)dx}\right)$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y) \qquad \left(\mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}\right).$$

Phương trình thuần nhất $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ có thừa số tích phân

$$\mu = \frac{1}{xM + yN}$$

nếu $xM + yN \not\equiv 0$.

Giả sử đối với phương trình (1) ta tìm được hai thừa số tích phân $\mu_1(x, y)$, $\mu_2(x, y)$. Khi đó nếu $\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} \not\equiv$ const thì phương trình (1) có tích phân tổng quát là $\dfrac{\mu_1(x,y)}{\mu_2(x,y)} = C$. Từ đây ta suy ra rằng, nếu (1) là phương trình vi phân hoàn chỉnh và $\mu(x, y) \not\equiv$ const là thừa số tích phân nào đấy của nó thì phương trình (1) có tích phân tổng quát

$$\mu(x, y) = C.$$

Trong trường hợp riêng, phương trình thuần nhất hoàn chỉnh có tích phân tổng quát dạng

$$xM(x, y) + yN(x, y) = C$$

nếu $xM(x, y) + yN(x, y) \not\equiv$ const.

Đôi khi để tìm thừa số tích phân của phương trình (1) người ta chia nó ra từng nhóm con sao cho đối với mỗi nhóm con, ta dễ dàng tìm được thừa số tích phân. Chẳng hạn, giả sử phương trình (1) được chia thành hai nhóm :

$$[M_1(x, y)dx + N_1(x, y)dy] + [M_2(x, y)dx + N_2(x, y)dy] = 0$$

và giả sử $\mu_1(x, y)$, $\mu_2(x, y)$ là các thừa số tích phân tương ứng của hai nhóm này :

$$\mu_1(M_1dx + N_1dy) = dU_1,$$

$$\mu_2(M_2dx + N_2dy) = dU_2.$$

Bây giờ ta tìm cách chọn $\varphi(U_1)$, $\psi(U_2)$ sao cho

$$\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2).$$

Khi đó $\mu = \mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2)$ sẽ là thừa số tích phân của phương trình (1).

Nhân μ vào hai vế của phương trình (1) ta được hệ thức

$$\varphi(U_1)dU_1 + \psi(U_2)dU_2 = 0.$$

Do đó, phương trình (1) có tích phân tổng quát dạng

$$\int\varphi(U_1)dU_1 + \int\psi(U_2)dU_2 = C.$$

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0. \qquad (5)$$

Ở đây $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy$. Bởi vậy (5) là phương trình vi phân hoàn chỉnh.

Ta viết lại phương trình (5) dưới dạng

$$3x^2dx + 6xy(ydx + xdy) + 4y^3dy = 0.$$

hay

$$d(x^3) + d(3(yx)^2) + d(y^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d(x^3 + 3(xy)^2 + y^4) = 0.$$

Cho nên, phương trình đang xét có tích phân tổng quát là

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Ta cũng có thể đi đến kết quả này bằng cách chọn $(x_o ; y_o) = (1 ; 0)$ và áp dụng công thức

$$\int_1^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y 4y^3dy = C.$$

Đường cong tích phân đi qua điểm (1 ; 0) có dạng

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = 1.$$

Ví dụ 2. Cho phương trình

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0. \qquad (6)$$

Dễ kiểm tra rằng (6) là phương trình vi phân hoàn chỉnh. Chọn $(x_o ; y_o) = (1 ; 2)$ và áp dụng công thức ta có

$$\int_1^x \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \int_2^y \left[\frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = C,$$

hay

$$\ln\frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = C$$

là tích phân tổng quát của phương trình (6).

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0. \qquad (7)$$

Ở đây $\dfrac{\partial M}{\partial y} = -x^2$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$. Do đó (7) không phải là phương trình vi phân hoàn chỉnh.

Ta có

$$\frac{\dfrac{\partial \mu}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x} = \psi(x).$$

Bởi vậy phương trình (7) có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc x là

$$\mu(x) = e^{\int \psi(x)dx} = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân hai vế phương trình (7) với $\dfrac{1}{x^2}$ và tích phân phương trình vi phân hoàn chỉnh nhận được, ta có

$$-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C$$

là tích phân tổng quát của phương trình (7). Ngoài ra phương trình (7) còn có nghiệm $x = 0$; đây là nghiệm riêng.

Ví dụ 4. Tích phân phương trình

$$(\sqrt{x^2 - y} + 2x)dx - dy = 0. \qquad (8)$$

Dễ kiểm chứng rằng (8) không phải là phương trình vi phân hoàn chỉnh. Đặt $\omega = x^2 - y$.

Khi đó

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}}{-2x + \sqrt{x^2 - y} + 2x} = -\frac{1}{2(x^2 - y)} = -\frac{1}{2\omega}.$$

Cho nên phương trình (8) có thừa số tích phân

$$\mu(\omega) = e^{-\int \frac{d\omega}{2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Nhân μ vào hai vế phương trình (8) và tích phân phương trình vi phân hoàn chỉnh nhận được ta đi đến kết luận rằng, biểu thức

$$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C$$

cho ta tích phân tổng quát của phương trình (8). Ngoài ra phương trình còn có nghiệm $y = x^2$. Nó là nghiệm kì dị.

Ví dụ 5. Tích phân phương trình

$$(x - y^2)dx + 2xydy = 0. \tag{9}$$

Ta viết lại (9) dưới dạng

$$xdx + (-y^2dx + 2xydy) = 0. \tag{10}$$

Số hạng xdx có thể viết $xdx = d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$

nên $\mu_1 \equiv 1$, $U_1(x, y) = \dfrac{x^2}{2}$.

Biểu thức trong ngoặc đơn có thừa số tích phân dạng

$$\frac{1}{-y^2x + 2xy^2} = \frac{1}{xy^2}.$$

Do đó $\mu_2(x, y) = \dfrac{1}{xy^2}$ và dễ kiểm tra rằng

$$U_2(x, y) = \frac{y^2}{x}.$$

Bây giờ ta chọn φ và ψ sao cho

$$1.\,\varphi\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{xy^2}\psi\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

Chọn $\varphi(u) = \dfrac{1}{2u}$ và $\psi(u) = u$.

Khi đó

$$1.\,\varphi\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2}{2x^2} = \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{1}{xy^2}\psi\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{1}{xy^2}.\frac{y^2}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Do đó phương trình (9) có thừa số tích phân là

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Nhân $\mu(x)$ vào hai vế của phương trình (9) và tích phân phương trình vi phân hoàn chỉnh nhận được ta suy ra tích phân tổng quát của phương trình (9) có dạng

$$\ln x + \frac{y^2}{x} = C.$$

Chứng minh rằng các phương trình sau đây là phương trình vi phân hoàn chỉnh và tìm tích phân tổng quát của chúng :

398. $\dfrac{1}{y}dx - \dfrac{x}{y^2}dy = 0.$

399. $\dfrac{1}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0.$

400. $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$

401. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$

402. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$

403. $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$

404. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$

405. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$

406. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0.$

407. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$

408. $(1 + y^2\sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0.$

409. $xdx + ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$

410. $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$

411. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \dfrac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$

412. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{y^3}{x}\right)dy.$

413. $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0.$

414. $\dfrac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}dx + \dfrac{e^y}{1 + x^2}dy = 0.$

415. $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$

416. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0.$

Tìm nghiệm đi qua điểm $(x_o\ ;\ y_o)$ tương ứng của các phương trình sau đây :

417. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0\ ;\qquad y(0) = 0.$

418. $(x - y)dx + (2y - x)dy = 0\ ;\qquad y(0) = 0.$

419. $\dfrac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2} = 0\ ;\qquad y(1) = 0.$

Tích phân các phương trình sau đây, biết rằng chúng có thừa số tích phân dạng $\mu = \mu(x)$ hoặc $\mu = \mu(y)$:

420. $(x^2 + y)dx = xdy.$

421. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$

422. $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)dy=0.$

423. $(xy^2+y)dx-xdy=0.$

424. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0.$

Biết rằng, các phương trình sau đây có thừa số tích phân dạng $\mu=\mu(x)$, $\mu=\mu(y)$ hoặc $\mu=\mu(\omega(x, y))$. Hãy tìm chúng và giải các phương trình tương ứng.

425. $(x^2+y^2+y)dx=xdy.$

426. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$

427. $ydy=(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}.$

428. $xy^2(xy'+y)=1.$

429. $y^2dx-(xy+x^3)dy=0.$

430. $\left(y-\dfrac{1}{x}\right)dx+\dfrac{dy}{y}=0.$

431. $y^2dx+(xy+\mathrm{tg}\,xy)dy=0.$

432. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0.$

433. $(x^2+3\ln y)ydx=xdy.$

434. $y(y^2+1)dx+x(y^2-x+1)dy=0.$

435. $(x^2+2x+y)dx=(x-3x^2y)dy.$

436. $ydx-xdy=2x^3\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}dx.$

437. $xydx=(y^2+x^2y+x^2)dy.$

438. $y^2dx+(e^x-y)dy=0.$

439. $x^2y\,(ydx+xdy)=2ydx+xdy.$

440. $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0.$

441. $(2x^2y^2+y)dx+(x^3y-x)dy=0.$

442. $(2x^2y^3-1)ydx+(4x^2y^3-1)xdy=0.$

443. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0.$

444. $x\left(4+\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)dx-y\left(4-\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)dy=0.$

445. $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0.$

446. $\left[2y + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right]dx + \left[3y + x + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right]dy = 0.$

447. $y(x + y^2)dx + x^2(y - 1)dy = 0.$

448. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0.$

449. $x(\ln y + 2\ln x - 1)dy = 2ydx.$

450. $(x^2 + 1)(2xdx + \cos ydy) = 2x \sin ydx.$

451. $(2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0.$

452. $(x^2 - y)dx + x(y + 1)dy = 0.$

453. $y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx).$

Bằng cách tìm thừa số tích phân, hãy tích phân các phương trình thuần nhất sau :

454. $xdy - (x + y)dx = 0.$

455. $(py - qx)dx - (px + qy)dy = 0.$

456. $y' = 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}.$

Tích phân các phương trình sau bằng cách chia phương trình thành từng nhóm :

457. $\left(\dfrac{2}{y} + \dfrac{y}{x^3}\right)dx + \left(\dfrac{1}{xy} - \dfrac{2}{x^2}\right)dy = 0.$

458. $axdy + bydx + x^m y^n(\alpha xdy + \beta ydx) = 0.$

§10. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (1)$$

f(x, y) xác định trong một miền G nào đấy. Như ta đã biết, bài toán Cô-si đòi hỏi chúng ta tìm nghiệm của phương trình (1) đi qua điểm $(x_o ; y_o)$ cho trước, hay nói cách khác, tìm nghiệm y(x) của (1) sao cho $y(x_o) = y_o$.

Nói chung nghiệm của bài toán Cô-si không phải bao giờ cũng tồn tại, hoặc tồn tại nhưng không nhất thiết duy nhất. Sau đây chúng ta sẽ thấy một số tiêu chuẩn đủ để cho nghiệm của bài toán Cô-si tồn tại và duy nhất.

Ta nói rằng, hàm f(x, y) thoả mãn điều kiện Lipsit theo y trong miền G, nếu đối với bất kì hai điểm $(x ; y_1) \in G$, $(x ; y_2) \in G$ ta luôn có bất đẳng thức

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|, \tag{2}$$

trong đó L là hằng số không phụ thuộc x và các điểm $(x ; y_1)$, $(x ; y_2)$.

Điều kiện Lipsit sẽ thoả mãn, chẳng hạn nếu G là miền lồi theo y và $\frac{\partial f}{\partial y}$ giới nội trong G.

Định lí Picar. *Giả sử trong miền G hàm f(x, y) liên tục theo x và thoả mãn điều kiện Lipsit theo y. Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm y(x) của phương trình (1) đi qua điểm $(x_o ; y_o) \in G$. Nghiệm này xác định trên khoảng $(x_o - \eta, x_o + \eta)$, trong đó $\eta > 0$ nói chung khá bé.*

Như vậy, định lí Picar cho điều kiện đủ để nghiệm bài toán Cô-si tồn tại và duy nhất. Nếu chỉ đòi hỏi sự tồn tại nghiệm thì điều kiện của định lí trên có thể giảm nhẹ hơn :

Định lí Pêanô. *Nếu trong miền G hàm f(x, y) giới nội và liên tục thì qua mỗi điểm $(x_o ; y_o) \in G$ tồn tại ít nhất một đường cong tích phân của phương trình (1) đi qua.*

Cũng như định lí Picar, ở đây đường cong tích phân đi qua điểm $(x_o ; y_o)$ nói chung chỉ xác định tại lân cận khá bé của điểm x_o. Bởi vậy định lí Pêanô cũng như định lí Picar mang tính chất "địa phương", nghĩa là chúng chỉ khẳng định sự tồn tại nghiệm (hoặc duy nhất) tại một lân cận nào đó. Tuy nhiên, trong một số trường hợp người ta có thể thác triển nghiệm lên miền xác định rộng hơn :

Nếu phương trình (1) thoả mãn định lí tồn tại nghiệm trong miền đóng giới nội thì nghiệm của bài toán Cô-si có thể thác triển đến tận biên của miền đó.

Nếu f(x, y) liên tục ở trong miền

$$G = \begin{cases} \alpha < x < \beta, \\ |y| < +\infty, \end{cases}$$

và ở trong miền đó

$$|f(x, y)| \le a(x)\,|y| + b(x)$$

với a(x), b(x) liên tục thì nghiệm của bài toán Cô-si có thể thác triển lên toàn khoảng $(\alpha ; \beta)$.

Ở đây α, β có thể hữu hạn hoặc vô hạn.

Tìm những miền mà trong đó nghiệm của bài toán Cô-si của những phương trình sau đây tồn tại và duy nhất :

459. $y' = \dfrac{x}{y}$.

460. $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$.

461. $y' = \sqrt{x - y}$.

462. $y' = \dfrac{y+1}{x-y}$.

463. $y' = \sin y - \cos x$.

464. $y' = 1 - \operatorname{cotg} y$.

Dùng điều kiện đủ về tính duy nhất nghiệm, tìm miền bảo đảm tính duy nhất nghiệm cho các phương trình sau :

465. $y' = 2xy + y^2$.

466. $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$.

467. $(x - 2)y' = \sqrt{y} - x$.

468. $(y - x)y' = y \ln x$.

469. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$.

470. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

471. Với những giá trị nào của $a \ge 0$ và tại những điểm nào thì nghiệm của phương trình $y' = |y|^a$ không duy nhất ?

472*. Giả sử f(x, y) liên tục theo (x, y) và không tăng theo y với mọi x cố định. Chứng minh rằng nếu hai nghiệm của phương trình

$$y' = f(x, y)$$

thoả mãn cùng một điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ thì chúng trùng nhau với mọi $x \ge x_o$.

473*. Với những giá trị nào của a, nghiệm của các phương trình sau đây có thể thác triển lên khoảng $(-\infty ; +\infty)$:

a) $y' = |y|^a$?

b) $y' = (y^2 + e^x)^a$?

c) $y' = |y|^{a-1} + (x\sqrt[3]{y})^{2a}$?

474*. Chứng minh rằng, nghiệm $y(x)$ với điều kiện ban đầu bất kì $y(x_o) = y_o$ của các phương trình sau đây tồn tại trên khoảng $[x_o ; +\infty)$:

a) $y' = x^3 - y^3$;

b) $y' = xy + e^{-y}$.

475*. Biết rằng $f(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ xác định và liên tục trên toàn mặt phẳng (x, y) ; $f'_y(x, y) \le k(x)$, trong đó $k(x)$ liên tục. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình

$$y' = f(x, y)$$

với điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ tồn tại trên khoảng $(x_o ; +\infty)$.

§11. Phương trình cấp 1 chưa giải ra đối với đạo hàm

Phương trình vi phân cấp 1 chưa giải ra đối với đạo hàm có dạng tổng quát :

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Nghiệm của phương trình (1) là hàm $y = y(x)$ có đạo hàm liên tục sao cho khi thế vào (1) thì (1) trở thành đồng nhất thức. Nghiệm của (1) có thể cho dưới dạng ẩn $\Phi(x, y) = 0$ hoặc dưới dạng tham số : $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Đồ thị của nghiệm trong mặt phẳng (x, y) được gọi là đường cong tích phân. Cũng như phương trình cấp 1 đã giải ra đạo hàm, ở đây ta cũng có các khái niệm tương tự về trường hướng, về bài toán Cô-si và các loại nghiệm. Cần chú ý rằng, đối với phương trình (1) tại mỗi điểm $(x_o ; y_o)$ có thể có một số hướng của trường. Các hướng này được xác định bằng cách giải y' từ phương trình

$$F(x_o, y_o, y') = 0.$$

1. Phương trình bậc n. Phương trình dạng

$$a_o(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0 \tag{2}$$

được gọi là phương trình bậc n (vì vế trái của nó là đa thức bậc n đối với y').

Giả sử từ phương trình (2) ta có thể giải ra được m nghiệm thực $(m \le n)$ đối với y' :

$$y' = f_k(x, y), \qquad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{3}$$

Nếu đối với mỗi phương trình (3) ta tìm được tích phân tổng quát

$$\psi_k(x, y) = C, \qquad (k = 1, 2, ..., m),$$

thì hệ thức

$$[\psi_1(x, y) - C][\psi_2(x, y) - C] \dots [\psi_m(x, y) - C] = 0$$

cho ta tích phân tổng quát của phương trình (2). Trong trường hợp riêng, nếu (2) có dạng

$$y'^2 + 2p(x, y)y' + q(x, y) = 0 \qquad (4)$$

thì giải y' từ phương trình này ta có

$$y' = -p(x, y) \pm \sqrt{p^2(x, y) - q(x, y)}. \qquad (5)$$

Các phương trình (5) được cho ở trong miền $p^2 - q \geq 0$. Tích phân các phương trình (5) ta tìm được tích phân tổng quát của phương trình (4).

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y'^2 - 4x^2 = 0 \qquad (6)$$

và tìm đường cong tích phân qua điểm M(1 ; 1).

Giải (6) qua y' ta có

$$y' = 2x,\ y' = -2x.$$

Tích phân hai phương trình cuối này ta được

$$y = x^2 + C, \qquad y = -x^2 + C. \qquad (7)$$

Bởi vậy, tích phân tổng quát của phương trình (6) có dạng

$$(y - x^2 - C)(y + x^2 - C) = 0.$$

Đây là hai họ parabôn có đỉnh đối nhau. Đường cong tích phân đi qua điểm M(1 ; 1) có dạng $y = x^2$ và $y = -x^2 + 2$. Điều này dễ dàng kiểm chứng bằng cách lần lượt thay $x_o = 1$, $y_o = 1$ vào các biểu thức của (7) rồi xác định hằng số C tương ứng.

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0. \qquad (8)$$

Biểu diễn y' qua x, y ta được

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{2}.\sqrt{x^2 - y^2}}{y}.$$

Tích phân lần lượt các phương trình này ta được các tích phân tổng quát tương ứng là

$$\pm\sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{2x} + C, \ (x^2 - y^2 \neq 0)$$

hay

$$x^2 - y^2 = (\sqrt{2x} + C)^2, \ (x^2 - y^2 \neq 0).$$

cho nên, tích phân tổng quát của phương trình (8) có dạng

$$(x + C\sqrt{2})^2 + y^2 = C^2.$$

Đây là họ các đường tròn có bán kính bằng C ($C > 0$) và tâm tại điểm $(-C\sqrt{2}\,;0)$. Ngoài ra, từ hệ thức

$$x^2 - y^2 = 0$$

ta tìm được các nghiệm $y = x$, $y = -x$.

Chúng là những nghiệm kì dị của phương trình đang xét.

2. Phương trình không đầy đủ

a) *Phương trình chỉ chứa đạo hàm :*

$$F(y') = 0. \qquad (9)$$

Giả sử phương trình $F(k) = 0$ có các nghiệm thực $k = k_j$, $(j = 1, 2, ...)$. Như vậy, $y' = k_j$ là nghiệm của phương trình (9). Tích phân phương trình

$$y' = k_j$$

ta có
$$y = k_jx + C.$$

Do đó

$$k_j = \frac{y - C}{x}.$$

Thay giá trị này của k_j vào (9) ta được tích phân tổng quát của phương trình (9) là

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0.$$

b) *Phương trình không chứa hàm phải tìm :*

$$F(x, y') = 0. \qquad (10)$$

Ta chia ra hai trường hợp :

1. Từ phương trình (10) ta giải ra được y', chẳng hạn

$$y' = f_k(x) \qquad (k = 1, 2, ..., m).$$

Giải riêng biệt các phương trình cuối cùng này ta được

$$y = \int f_k(x)dx + C \qquad (k = 1, 2, ..., m).$$

2. Từ phương trình (10) ta không giải ra được y' nhưng qua phương trình đó ta có thể biểu diễn được x, y' qua tham số t :

$$x = \varphi(t),$$

$$y' = \psi(t). \tag{11}$$

Chú ý rằng $dy = y'dx$, từ (11) ta suy ra

$$dy = \psi(t).\ \varphi'(t)dt.$$

Do đó

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Như vậy, ta được nghiệm tổng quát của phương trình (10) dưới dạng tham số

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

c) *Phương trình không chứa biến số độc lập :*

$$F(y, y') = 0. \tag{12}$$

Ở đây ta cũng chia ra hai trường hợp :

1. Từ phương trình (12) ta giải ra được y' :

$$y' = f_k(y) \qquad (k = 1, ..., m).$$

Tích phân lần lượt các phương trình cuối ta được

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + C \qquad (k = 1, 2, ..., m).$$

2. Từ phương trình (12) ta không giải ra được y', nhưng trong phương trình đó ta có thể biểu diễn được y, y' qua tham số t :

$$y = \varphi(t),$$

$$y' = \psi(t).$$

Khi đó

$$dy = y'dx,$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}.$$

Cho nên trong trường hợp này ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình (12) dưới dạng tham số :

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C,$$

$$y = \varphi(t).$$

Ngoài ra phương trình (12) có thể có nghiệm kì dị dạng $y = b$, trong đó b được xác định từ hệ thức

$$F(b, 0) = 0.$$

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$e^{y'} + y' = 1.$$

Đây là phương trình dạng a). Do đó tích phân tổng quát của nó là biểu thức

$$e^{\frac{y-C}{x}} + \frac{y-C}{x} = 1.$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$e^{y'} + y' = x.$$

Từ phương trình này ta không giải được y' theo x. Tuy nhiên nếu đặt $y' = t$ thì qua phương trình trên ta biểu diễn được x, y' theo tham số t :

$$x = e^t + t,$$

$$y' = t.$$

$$dy = y'dx = t(e^t + 1)dt,$$

$$y = \int t(e^t + 1)dt + C = e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C.$$

Như vậy, ta được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét dưới dạng tham số :

$$x = e^t + t,$$

$$y = e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C.$$

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$y = y'^2 e^{y'}.$$

Đây là phương trình không chứa biến số độc lập và không giải được y' qua y. Đặt y' = t, thông qua phương trình trên ta biểu diễn được y, y' theo tham số t :

$$y = t^2 e^t,$$

$$y' = t.$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2te^t + t^2 e^t}{t} dt = (2 + t)e^t dt.$$

Do đó $x = \int (2 + t)e^t dt + C = e^t(1 + t) + C.$

Bởi vậy, phương trình đang xét có nghiệm tổng quát dưới dạng tham số :

$$x = e^t(1 + t) + C,$$

$$y = t^2 e^t.$$

Ngoài ra phương trình còn có nghiệm kì dị $y \equiv 0$.

3. Phương trình Lagrăng và phương trình Clerô

a) *Phương trình Lagrăng.* Đó là phương trình dạng

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \qquad (\varphi(y') \not\equiv y'). \tag{13}$$

Để giải nó ta đặt y' = p và coi p như là tham số. Khi đó từ (13) ta có

$$y = \varphi(p)x + \psi(p).$$

Từ đây ta suy ra

$$\varphi(p)dx + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp = pdx$$

hay

$$[\varphi(p) - p]dx + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp = 0. \tag{14}$$

Coi x là hàm số, p là biến số, với giả thiết $\varphi(p) - p \neq 0$, từ phương trình (14) ta đưa về phương trình tuyến tính cấp 1 sau :

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{15}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (15), như ta đã biết, có dạng

$$x = A(p)C + B(p).$$

Thay giá trị này vào (13) ta được nghiệm tổng quát của phương trình Lagrăng dưới dạng tham số

$$x = A(p)C + B(p),$$
$$y = A_1(p)C + B_1(p).$$

Nếu phương trình $\varphi(p) - p = 0$ có các nghiệm thực $p = p_j$ $(j = 1, 2, ..., m)$ thì thay chúng vào phương trình (13) và chú ý rằng $\varphi(p_i) = p_i$, ta được

$$y = p_i x + \psi(p_i) \qquad (i = 1, 2, ..., m).$$

Đây là các đường thẳng. Chúng có thể cho ta nghiệm kì dị của phương trình Lagrăng.

b) *Phương trình Clerô*. Đó là phương trình dạng

$$y = xy' + \psi(y') \tag{16}$$

trong đó $\psi(y') \not\equiv ay' + b$; $a = \text{const}$, $b = \text{const}$. Như vậy phương trình Clerô là trường hợp riêng của phương trình Lagrăng : Nó nhận được từ phương trình Lagrăng khi $\varphi(y') \equiv y'$. Để tích phân phương trình Clerô, ta đặt $y' = p$.

Khi đó (16) có dạng

$$y = xp + \psi(p). \tag{17}$$

$$dy = y'dx,\ pdx + xdp + \psi'(p)dp = pdx.$$

Do đó

$$[x + \psi'(p)]dp = 0.$$

Hai khả năng có thể xảy ra :

α) $\qquad dp = 0,\ p = C.$

Thế p vào (17) ta được nghiệm tổng quát của phương trình Clerô :

$$y = Cx + \psi(C).$$

Đây là họ các đường thẳng.

β) $x + \psi'(p) = 0$. Kết hợp hệ thức này với (17) ta được nghiệm của phương trình Clerô dưới dạng tham số :

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -\psi'(p)p + \psi(p). \end{cases} \tag{18}$$

Nghiệm này thường là nghiệm kì dị. Nó sẽ là nghiệm kì dị nếu $\psi''(p)$ có dấu không đổi vì khi đó (18) là bao hình của họ đường cong tích phân.

Tóm lại, nghiệm tổng quát của phương trình Clerô nhận được bằng cách thay y' trong phương trình bằng hằng số C, còn nghiệm kì dị có thể tìm được bằng cách tìm bao hình của họ nghiệm tổng quát.

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$y = 2xy' - y'^2.$$

Đây là phương trình Lagrăng. Đặt y' = p ta có

$$y = 2xp - p^2.$$

$$dy = y'dx,\ 2pdx + (2x - 2p)dp = pdx,$$

$$pdx + (2x - 2p)dp = 0,\ \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2 \quad (p \neq 0).$$

Giải phương trình cuối ta tìm được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét dưới dạng tham số :

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p,$$

$$y = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}.$$

Ngoài ra phương trình còn có nghiệm riêng y = 0.

Ví dụ 2. Tích phân phương trình

$$y = xy' + y'^2.$$

Đây là phương trình Clerô. Thay y' = C ta được nghiệm tổng quát :

$$y = Cx + C^2.$$

Bằng cách tìm bao hình của họ đường cong tích phân ta đi đến kết luận, đường parabôn $y = -\frac{x^2}{4}$ là nghiệm kì dị của phương trình.

4. Các phương trình giải được đối với y hoặc x

a) *Phương trình giải được đối với y :*

$$y = \varphi(x, y').$$

Đặt y' = p ta có

$$y = \varphi(x, p).$$

Từ hệ thức dy = y'dx ta suy ra

$$\varphi'_x dx + \varphi'_p dp = pdx.$$

Trong phương trình cuối ta có thể coi p hoặc x là hàm phải tìm và nếu nó giải được thì ta sẽ đi đến hệ thức $p = \omega(x, C)$ hoặc $x = \theta(p, C)$. Thay các hệ thức này vào biểu thức của y ta được nghiệm tổng quát

$$y = \varphi(x, \omega(x, C))$$

hay

$$x = \theta(p, C),$$

$$y = \varphi(\theta(p, C), p).$$

b) *Phương trình giải được đối với x :*

$$x = \varphi(y, y').$$

Đặt y' = p ta có

$$x = \varphi(y, p).$$

Kết hợp với hệ thức dy = y'dx = pdx ta suy ra

$$dy = p(\varphi'_y dy + \varphi'_p dp).$$

Nếu phương trình vi phân cuối này tích phân được bằng cầu phương thì tương tự như ở phần a, ta suy ra phương trình ban đầu cũng tích phân được bằng cầu phương.

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Đặt y' = p ta được

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

Do đó

$$(-p + x)dx + (2p - x)dp = pdx,$$

$$(-2p + x)dx + (2p - x)dp = 0$$

hay

$$(2p - x)(-dx + dp) = 0.$$

Nếu $-dx + dp = 0$ thì $p = x + C$. Thay vào biểu thức của y ta được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét :

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Từ hệ thức

$$2p - x = 0$$

ta suy ra $p = \frac{1}{2}x$. Thay giá trị này của p vào biểu thức của y ta được nghiệm

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Đây là nghiệm kì dị.

Ví dụ 2. Tích phân phương trình

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$$

Giải ra đối với x ta có

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'} \quad (y \neq 0).$$

Đặt y' = p ta được

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}.$$

Do đó

$$dy = p\left[\left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right)dp + \left(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\right)dy\right],$$

$$\left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p}\right)dp + \left(-\frac{p^3}{4y^2} + 1\right)dy = 0$$

hay

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2py}dp + \frac{-p^3 + 4y^2}{4y^2}dy = 0,$$

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2y}\left(\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y}\right) = 0.$$

Từ hệ thức cuối ta suy ra

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y} = 0, \quad \frac{p^3 - 4y^2}{2y} = 0.$$

Đẳng thức đầu cho ta $p = C_1\sqrt{y}$ $(y > 0)$. Thay giá trị này của p vào biểu thức của x ta được

$$x = \frac{C_1^2}{4} + \frac{2}{C_1}\sqrt{y}.$$

Do đó

$$y = C(x - C)^2\left(C = \frac{C_1^2}{4}\right).$$

Đẳng thức

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2y} = 0$$

cho ta

$$p = (4y^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Thay giá trị này của p vào biểu thức của x và sau đó giải ra y ta được

$$y = \frac{4}{27}x^3.$$

Đây là nghiệm kì dị của phương trình đang xét.

Ngoài ra dễ thấy rằng phương trình còn có nghiệm $y = 0$. Nó cũng là nghiệm kì dị.

Tích phân các phương trình sau đây và tìm đường cong tích phân đi qua điểm $M(x_o ; y_o)$ tương ứng.

476. $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0$; $M(1 ; 1)$.

477. $y'^2 - 4y = 0$; $M(1 ; 1)$, $M(1 ; 0)$.

478. $y'^2 = 4|y|$.

479. $y' = \frac{1}{4|x|}$.

480. $y'^3 - \frac{1}{4x}y' = 0$.

481. $y^2(1 + y'^2) = a^2$.

482. $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$;
$M(0 ; 1)$, $M(1 ; 0)$, $M(0 ; 0)$.

483. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$.

484. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

485. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$.

486. $y'^3 + 1 = 0$.

487. $y'^3 - 3y' + 1 = 0$.

488. $y' - \sin y' = 0$.

489. $y' - |y'| = 0$.

490. $x = ay' + by'^2$.

491. $x(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = a$.

492. $xy'^3 = 1 + y'$.

493. $x = y'^3 + 1$.

494. $x = y'\ln y$.

495. Hãy tìm tất cả các nghiệm của phương trình $yF(y') = 0$, trong đó F là hàm tuỳ ý.

496. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $x^3 - y'^3 = xy'$.

497. Tìm những đường cong mà đoạn thẳng trên trục hoành bị cắt bởi tiếp tuyến của đường cong bằng bán kính vectơ tại tiếp điểm.

498. Tìm những đường cong mà độ dài đoạn thẳng pháp tuyến bằng bán kính vectơ tại tiếp điểm.

499. Lập phương trình vi phân của họ đường cong

$$(\sqrt{y - x^2} - C)^2 - \frac{x^2}{4} = 0.$$

500. Tìm đường cong mà độ dài đoạn thẳng trên tiếp tuyến của đường cong bao gồm giữa các trục toạ độ là một đại lượng không đổi bằng a.

501. Tìm đường cong sao cho tổng của các đoạn thẳng trên các trục toạ độ bị cắt bởi tiếp tuyến của đường cong là đại lượng không đổi bằng 2a.

502. Tìm đường cong mà tiếp tuyến với nó lập với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng $2a^2$.

503. Tìm những đường cong mà đối với chúng tích các khoảng cách từ tiếp tuyến đến hai điểm cho trước là một đại lượng không đổi.

504. Tìm đường cong đi qua gốc toạ độ sao cho đoạn thẳng trên pháp tuyến của nó bị cắt bởi các cạnh của góc toạ độ thứ nhất có độ dài không đổi bằng 2.

505. Tìm đường cong sao cho tiếp tuyến của nó cắt trên các trục toạ độ những đoạn thẳng mà tổng của nghịch đảo các độ dài của chúng bằng 1.

Tìm nghiệm tổng quát hoặc tích phân tổng quát của các phương trình sau :

506. $y = \frac{y'^2}{2} + \ln y'$.

507. $y^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

508. $y = y'^2 + 2y'^3$.

509. $y^3 + y'^3 - 3ayy' = 0$.

510. $\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = a$.

511. $y'^3 + (x + 2)e^y = 0$.

512. $(xy' + 3y)^2 = 7x$.

513. $y'(2y - y') = y^2\sin^2 x$.

514. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.

515. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.

516. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.

517. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.

518. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

519. $xy'(xy' + y) = 2y^2$.

520. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$.

521. $xy'^2 = y(2y' - 1)$.

522. $y = y'^2 + 2y'^3$.

523. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$.

524. $y'^4 - y'^2 = y^2$.

525. $y'(x - \ln y') = 1$.

526. $y = \ln(1 + y'^2)$.

527. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.

528. $x^2y'^2 = xyy' + 1$.

529. $y'^4 = 2yy' + y^2$.

530. $5y + y'^2 = x(x + y')$.

531. $y'^3 + y^2 = xyy'$.

532. $2xy' - y = y'\ln yy'$.

533. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.

534. $y = xy' - x^2y'^3$.

535. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

536. $y = 2xy' + y^2y'^3$.

Hãy giải các phương trình Lagrăng và Clerô sau :

537. $y = xy' - y'^2$.

538. $y = 2xy' - 4y'^3$.

539. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

540. $y = xy' - (2 + y')$.

541. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

542. $2y = xy'^2 - 2y'^3$.

543. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

544. $y = x(1 + y') + y'^2$.

545. $y + xy' - y'^2 = 0$.

546. $2y(y' + 2) = xy'^2$.

547. $y = xy' - y'^2$.

548. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$.

549. $xy' - y = \ln y'$.

550. $xy'(y' + 2) = y$.

551. $2y'^2(y - xy') = 1$.

552. $2xy' - y = \ln y'$.

553. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

554. $y = x + y'^2 - y'$.

555. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.

Tích phân các phương trình sau đây :

556. $y = \dfrac{xy'}{2} + \dfrac{y'^2}{x^2}$.

557. $6x^2y - 6y'^2 + (-3x^3 + 12x^2)y' - 6x^4 + x^5 = 0.$

558. $y = -\frac{y'^3}{12} + \frac{xy'}{2} + \frac{y'^2}{4} + x + \frac{x^2}{y'^2}.$

559. $x = \frac{y}{y'}\ln y - \frac{y'^2}{y^2}.$

§12. Cách tìm nghiệm kì dị

1. Phương trình y' = f(x, y) (1)

Giả sử vế phải f(x, y) xác định và liên tục trong một miền G nào đó của mặt phẳng xOy. Nếu trong G đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ giới nội thì như ta đã biết, phương trình (1) không có nghiệm kì dị, vì qua mỗi điểm của G chỉ có duy nhất một đường cong tích phân của (1) đi qua. Như vậy, nghiệm kì dị chỉ có thể xuất hiện tại những điểm mà $\frac{\partial f}{\partial y}$ không giới nội. Từ đây ta suy ra cách tìm nghiệm kì dị của phương trình (1) như sau.

Giả sử vế phải f(x, y) xác định và liên tục trong G, có đạo hàm riêng theo y trong G. Khi đó muốn tìm nghiệm kì dị của (1) thì ta tìm những đường cong mà dọc theo đó $\frac{\partial f}{\partial y}$ không giới nội, và sau đó :

a) Thử xem đường cong vừa tìm được có phải là nghiệm của phương trình vi phân đang xét hay không ?

b) Nếu là nghiệm thì phải thử xem tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si có bị phá vỡ hay không ? Nếu tính duy nhất nghiệm bị phá vỡ thì đó là nghiệm kì dị của phương trình đang xét.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm kì dị của phương trình

$$y' = y^{\frac{2}{3}}. \tag{2}$$

Ta có $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} = \infty \text{ khi } y = 0.$$

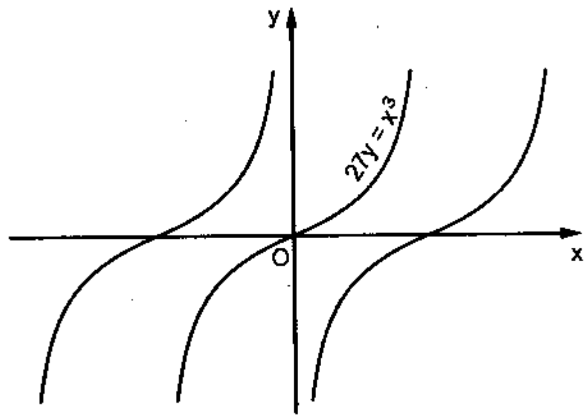
Thay y = 0 vào (2) ta thấy nó là nghiệm của phương trình.

Nghiệm tổng quát của phương trình (2) có dạng

$$y = \frac{1}{27}(x + C)^3.$$

(Điều này dễ thấy bằng cách giải phương trình trên).

Đây là họ các đường parabôn bậc 3. Từ tính chất của các đường parabôn bậc 3 ta suy ra rằng tại mỗi điểm của đường thẳng y = 0, tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ. Bởi vậy y = 0 là nghiệm kì dị của phương trình (2) (h.17).



Hình 17

2. Phương trình F(x, y, y') = 0 (3)

Giả sử phương trình (3) xác định một số hữu hạn hay vô hạn giá trị thực y' :

$$y' = f_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, ...). \tag{4}$$

Giả sử các hàm f_i liên tục và có đạo hàm riêng theo y. Khi đó ta có thể áp dụng lí luận đã trình bày ở mục 1 để tìm nghiệm kì dị của mỗi phương trình thuộc họ (4). Ta thấy rằng những đường cong mà dọc theo nó $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ không giới nội có thể chứa nghiệm kì dị của phương trình (4) và do đó của phương trình (3).

Tuy nhiên, trong thực hành để tìm nghiệm kì dị của phương trình (3) ta không cần giải ra y' mà có thể tính trực tiếp $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ từ chính phương trình đó.

Thật vậy, ta có :

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y}.$$

Mặt khác, vi phân (3) theo y ta được

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = 0.$$

Do đó

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}} \quad \left(\text{giả thiết } \frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0\right).$$

Từ đây ta suy ra rằng $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ sẽ không giới nội tại những điểm mà

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Bởi vậy ta đi đến quy tắc tìm nghiệm kì dị của phương trình (3) như sau :

a) Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0, \end{cases}$$

khử y' ta được hệ thức

$$R(x, y) = 0.$$

Hệ thức này được gọi là y' – biệt tuyến (hay p – biệt tuyến) của phương trình (3).

b) Thử lại xem y' – biệt tuyến có phải là nghiệm của phương trình (3) hay không ?

c) Nếu nó là nghiệm thì phải thử xem tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si có bị phá vỡ hay không ? Nếu tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ thì nó là nghiệm kì dị.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm kì dị của phương trình

$$y'^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{5}$$

a) Khử y' từ hệ phương trình

$$\begin{cases} y'^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 2y' = 0, \end{cases}$$

ta được p – biệt tuyến là $y = \pm 1$.

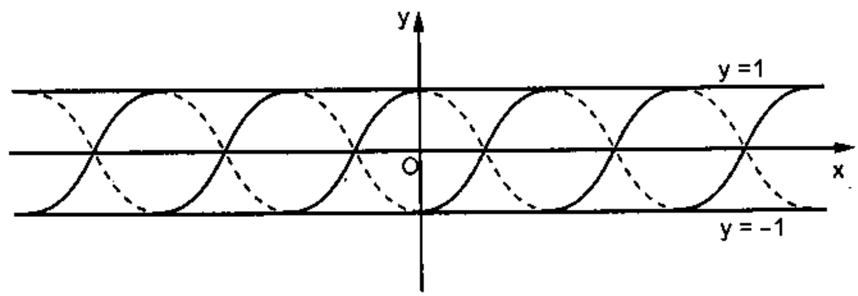
b) Thay $y = \pm 1$ vào (5) ta thấy nó nghiệm đúng.

Vậy p – biệt tuyến là nghiệm.

c) Giải phương trình (5) ta tìm được nghiệm tổng quát dạng

$$y = \sin(x + C).$$

Từ tính chất của hàm sin ta suy ra rằng, tại mọi điểm của p – biệt tuyến tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ. Bởi vậy các đường thẳng $y = \pm 1$ là nghiệm kì dị của phương trình (5) (h.18).



Hình 18

3. Tìm nghiệm kì dị từ nghiệm tổng quát

Giả sử tích phân tổng quát của phương trình (3) có dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{6}$$

Ta tìm bao hình của họ nghiệm tổng quát (6). Muốn vậy, trước hết ta tìm C – biệt tuyến bằng cách khử C từ hệ phương trình

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C} = 0. \end{cases}$$

Khi đó nếu C – biệt tuyến là bao hình của họ nghiệm tổng quát thì nó là nghiệm kì dị. Thật vậy, tại mỗi điểm của mình, bao hình tiếp xúc với ít nhất một đường cong tích phân của họ. Do đó bao hình là nghiệm. Ngoài ra, tại mỗi điểm của bao hình có ít nhất hai đường cong tích phân đi qua : đó là chính bản thân nó và đường cong tích phân của họ tiếp xúc với nó.

Tóm lại, ta đi đến kết luận về cách tìm nghiệm kì dị từ họ nghiệm tổng quát như sau :

a) Tìm C – biệt tuyến từ hệ

$$\begin{cases}\Phi(x, y, C) = 0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial C} = 0.\end{cases}$$

b) Thử xem C – biệt tuyến có phải là bao hình hay không ? Nếu là bao hình thì nó là nghiệm kì dị.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm kì dị của phương trình

$$x - y = \frac{4}{y}y'^2 - \frac{8}{27}y^3 \tag{7}$$

biết rằng nó có tích phân tổng quát dạng

$$(y - C)^2 = (x - C)^3. \tag{8}$$

Tìm C – biệt tuyến của họ đường cong tích phân tổng quát : Từ (8) ta suy ra

$$2\ln(y - C) = 3\ln(x - C).$$

Vi phân hai vế theo C ta được

$$\frac{2}{y - C} = \frac{3}{x - C}. \tag{9}$$

Khử C từ các hệ thức (8), (9) ta có

$$y = x \text{ và } y = x - \frac{4}{27}.$$

Dễ kiểm chứng rằng ở đây $y = x$ không phải là bao hình mà là quỹ tích những điểm lùi, còn $y = x - \frac{4}{27}$ là bao hình của họ (8).

Do đó phương trình (7) có nghiệm kì dị là đường thẳng

$$y = x - \frac{4}{27}.$$

Theo dạng của phương trình, hãy tìm những đường cong có thể cho ta nghiệm kì dị và kiểm tra xem chúng có phải nghiệm kì dị hay không :

560. $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0.$

561. $y'^2 - 2yy' + x^2 = 0.$

562. $y'^2 - 4y = 0.$

563. $y'^2 - 2xy' + 2x^2 - y = 0.$

564. $y'^3 - 4yy' - y'^2 + 4y = 0.$

565. $y'^2 + y^2 - 1 = 0.$

566. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0.$

567. $y = xy' + 4y'^2.$

568. $y'^2 - 4xy' + 3x^2 - y^2 = 0.$

569. $y'^2 - 2xy' + 2x^2 - y = 0.$

570. $y' = (y-1)^{\frac{2}{3}}.$

571. $y' = \sqrt{y} + a.$

572. $y' = ax + \sqrt{x^2 - y}.$

573. $y' = \sqrt{y - x} + a.$

574. $y' = \sqrt{y - x} + ax.$

575. $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}.$

576. $y'^2 - y^3 = 0.$

577. $[(x-y)^2 - 1]y'^2 - 2y' + (x-y)^2 - 1 = 0.$

578. $y'^3 - 4yy' = 0.$

579. $y'^3 - 2y'^2 - 4yy' + 8y = 0.$

580. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$

581. $x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3 = 0.$

Theo dạng của tích phân tổng quát hãy tìm những đường cong có thể chứa nghiệm kì dị và kiểm tra xem chúng có phải là nghiệm kì dị hay không :

582. $y' = 2\sqrt{y}$; $y = (x + C)^2$ $(x \geq -C).$

583. $xy = y + \sqrt{\frac{y}{x}}$; $y = x\left(C - \frac{1}{x}\right)^2$ $\left(x \neq 0, C \geq \frac{1}{x}\right).$

584. $y' = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y}$; $(x - C)^2 + y^2 = b^2$, $(x \leq C).$

585. $y^2(1 + y'^2) = a^2$; $(x + C)^2 + y^2 = a^2.$

586. $y'^2 - 4y = 0$; $(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0.$

587. $y'^2 = 1 - y^2$; $y = \sin(x + C).$

588. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$; $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x + C}{a}.$

589. $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$; $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

590. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$; $C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0$.

591. $[(x - y)^2 - 1]y'^2 - 2y' + (x - y)^2 - 1 = 0$; $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$.

592. $4x^2y'^2 - 4xyy' + y^2 - 4x^3 = 0$; $y^2 = x(x - C)^2$.

593. $y'^2 - y^3 = 0$; $y = \frac{4}{(x + C)^2}$.

594. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$; $y = C(x - C)^2$.

595. $x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3$; $(y - C)^2 = (x - C)^3$.

§13. Bài toán quỹ đạo

Xét họ đường cong phụ thuộc một tham số

$$F(x, y, \lambda) = 0. \tag{1}$$

Đường cong L_1 cắt tất cả các đường cong L của họ (1) dưới một góc không đổi α được gọi là *quỹ đạo đẳng giác* của họ ấy. Trong trường hợp riêng, nếu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì quỹ đạo đẳng giác gọi là *quỹ đạo trực giao* của họ.

Muốn tìm quỹ đạo đẳng giác của họ (1) ta tiến hành như sau :

a) Lập phương trình vi phân của họ (1). Chẳng hạn phương trình đó có dạng

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

b) Trong phương trình vi phân nhận được ta thay $\frac{dy}{dx}$ bởi

$$\frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k\frac{dy}{dx}} \text{ nếu } \alpha \neq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ nếu } \alpha = \frac{\pi}{2},$$

trong đó $k = \mathrm{tg}\alpha$.

Như vậy, phương trình vi phân của quỹ đạo đẳng giác có dạng

$$\Phi\left(x, y, \frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \qquad (2)$$

c) Giải phương trình (2) ta sẽ tìm được quỹ đạo mong muốn.

Ví dụ 1. Cho họ đường thẳng

$$y - ax = 0. \qquad (3)$$

Tìm quỹ đạo cắt họ đó dưới một góc α không đổi.

a) Trường hợp $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Trước hết ta lập phương trình vi phân của họ (3). Muốn vậy, vi phân hai vế của (3) theo x (chú ý rằng $y = y(x)$) và khử a từ hệ phương trình

$$\begin{cases} y - ax = 0, \\ y' - a = 0, \end{cases}$$

ta được

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Như vậy, phương trình vi phân của quỹ đạo đẳng giác có dạng

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{dy}{dx} - k}{1 + k\frac{dy}{dx}}, \ (k = \mathrm{tg}\alpha)$$

hay

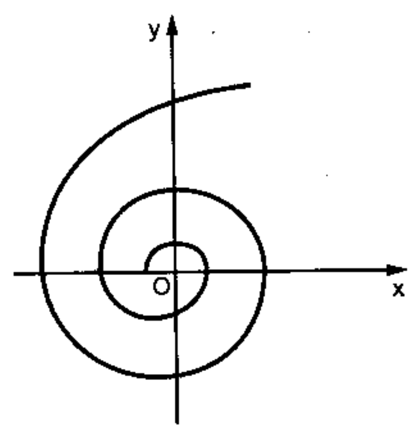
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}.$$

Tích phân phương trình cuối ta được

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\mathrm{arctg}\frac{x}{y}}$$

Chuyển sang toạ độ cực ta có $r = Ce^{\frac{1}{k}\theta}$, trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

Như vậy, quỹ đạo đẳng giác phải tìm là những đường xoắn ốc lôga (h.19).



Hình 19

b) Trường hợp $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Lúc này phương trình của quỹ đạo trực giao có dạng

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{y'}$$

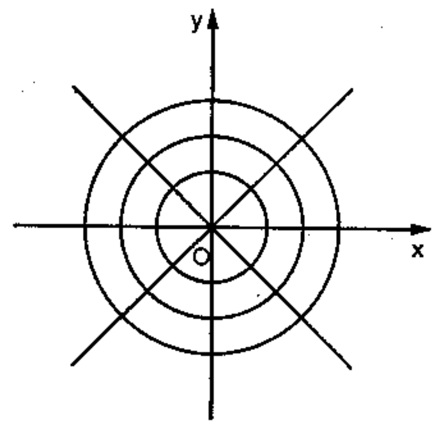
hay

$$xdx + ydy = 0.$$

Tích phân hai vế ta được

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Như vậy, quỹ đạo trực giao là những đường tròn tâm tại gốc toạ độ (h.20).



Hình 20

Chú ý :

Nếu họ đường cong (1) được cho dưới dạng toạ độ cực

$$\Phi(r, \theta, a) = 0 \qquad (4)$$

thì để tìm phương trình vi phân của họ quỹ đạo đẳng giác (quỹ đạo trực giao) ta cần :

a) Lập phương trình vi phân của họ (4) ;

b) Thay $\frac{dr}{d\theta}$ trong phương trình vi phân nhận được bởi

$$\frac{1 + k\frac{r}{\dot{r}}}{\frac{r}{\dot{r}} - k}\left(-\frac{r^2}{\dot{r}}\right),$$

ở đây $k = tg\alpha$, $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}$.

Ví dụ 2. Tìm quỹ đạo trực giao của họ những đường cong

$$r = 2a\sin\theta.$$

Trước hết, ta tìm phương trình vi phân của họ đường cong từ hệ

$$\begin{cases} r = 2a\sin\theta \\ \frac{dr}{d\theta} = 2a\cos\theta. \end{cases}$$

Khử a ta được

$$\frac{dr}{d\theta} = r\cot g\theta.$$

Như vậy, phương trình của họ quỹ đạo trực giao có dạng

$$-\frac{r^2}{\frac{dr}{d\theta}} = r\cot g\theta,$$

hay

$$\frac{dr}{d\theta} = -r tg\theta.$$

Tích phân phương trình này ta tìm được họ quỹ đạo trực giao là

$$r = 2C\cos\theta.$$

596. Tìm các quỹ đạo trực giao của họ đường tròn tâm tại điểm M(a ; b).

597. Tìm quỹ đạo trực giao của họ parabôn

$$y = ax^2.$$

598. Tìm các đường cong cắt tất cả các đường cong của họ xoắn ốc lôga

$$r = ae^{\theta}$$

dưới cùng một góc $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

599. Tìm các đường cong cắt các nửa đường thẳng xuất phát từ gốc toạ độ dưới một góc không đổi bằng $\frac{\pi}{4}$.

Tìm quỹ đạo trực giao của các họ đường cong sau đây :

600. $(x^2 + y^2)^2 = a^2xy$.

Hướng dẫn : Chuyển sang toạ độ cực.

601. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda$, với a, b cho trước.

602. $(x - \lambda)^2 + y^2 = a^2$ với a cho trước.

603. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$.

604. $x^3 + (x - 2a)y^2 = 0$.

605. $r^2 = \ln tg\varphi + c$.

606. $r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\varphi + a^{2n} = b^{2n}$ với a, n cho trước.

§14. Các bài tập thuộc loại khác nhau

Giải các phương trình sau đây :

607. $(2xy^2 - y)dx + xdy = 0$.

608. $(xy' + y)^2 = x^2y'$.

609. $(x + 2y^3)y' = y$.

610. $x^2y' = y(x + y)$.

611. $2xy' + y^2 = 1$.

612. $y - y' = y^2 + xy'$.

613. $y'^3 - y'e^{2x} = 0$.

614. $(1 - x^2)dy + xydx = 0$.

615. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$.

616. $x + yy' = y^2(1 + y'^2)$.

617. $y' = \dfrac{1}{x - y^2}$.

618. $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$.

619. $y'^2 + 2(x - 1)y' - 2y = 0$.

620. $x^2y' - 2xy = 3y$.

621. $y = (xy' + 2y)^2$.

622. $y'^3 + (3x - 6)y' = 3y$.

623. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$.

624. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$.

625. $(x + y)^2y' = 1$.

626. $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy$.

627. $2(x - y^2)dy = ydx$.

628. $xy' = e^y + 2y'$.

629. $x^2y'^2 + y^2 = 2x(2 - yy')$.

630. $2x^2y' - y^2(2xy' - y) = 0$.

631. $dy + (xy - xy^3)dx = 0$.

632. $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$.

633. $xy(xy' - y)^2 + 2y' = 0$.

634. $y' + y = xy^3$.

635. $x(x - 1)y' + 2xy = 1$.

636. $(1 - x^2)y' - 2xy^2 - xy = 0$.

637. $(xy^4 - x)dx + (y + xy)dy = 0$.

638. $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$.

639. $yy' + y^2\operatorname{cotg} x = \cos x$.

640. $xy'^2 - y + y' = 0$.

641. $y(y - xy') - \sqrt{x^4 + y^4} = 0$.

642. $3y'^3 - xy' + 1 = 0$.

643. $(e^y + 2xy)dx + (e^y + x)xdy = 0$.

644. $x(x + 1)(y' - 1) = y$.

645. $xy' + y = \ln y'$.

646. $x^2(dy - dx) = (x + y)ydx$.

647. $(x\cos y + \sin 2y)y' - 1 = 0$.

648. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$.

649. $(4xy - 3)y' + y^2 - 1 = 0$.

650. $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

651. $y' + x\sqrt[3]{y} - 3y = 0$.

652. $(xy' - y^3) - y'^3 = 1$.

653. $y'\sqrt{x} - \sqrt{y-x} = \sqrt{x}$.

654. $3y'^4 - y' - y = 0$.

655. $xy' - 2\sqrt{y}\cos x = 2y$.

656. $y^2(y - xy') - x^3y' = 0$.

657. $(\cos x - x\sin x)ydx + (x\cos x - 2y)dy = 0$.

658. $\dfrac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0$.

659. $y' = (4x + y - 3)^2$.

660. $x^2y'^2 - 2xyy' = x^2 + 3y^2$.

661. $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$.

662. $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$.

663. $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$.

664. $xy'(\ln y - \ln x) + y = 0$.

665. $(2x^2y - 3y^2)y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1$.

666. $y^2y' + x^2\sin^3x - y^3\mathrm{cotg}x = 0$.

667. $2y' - x = \ln y'$.

668. $yy' = 4x + 3y - 2$.

669. $2xy' - y = \sin y'$.

670. $y^2 + x^2y'^5 = xy(y'^2 + y'^3)$.

671. $(x^2y^2 + 1)y + (xy - 1)^2xy' = 0$.

672. $xdy - ydx - x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx = 0$.

673. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$.

674. $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})dx + x^3dy = 0$.

675. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$.

676. $(y' - x\sqrt{y})(x^2 - 1) = xy$.

677. $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$.

678. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}$.

679. $y'^3 + (y'^2 - 2y')x = 3y' - y$.

680. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

681. $y^2 = (xyy' + 1)\ln x$.

682. $4y = x^2 + y'^2$.

683. $2xdy + ydx + xy^2(xdy + ydx) = 0$.

684. $xdx + (x^2\mathrm{cotg}y - 3\cos y)dy = 0$.

685. $x^2y'^2 - 2(xy - 2)y' + y^2 = 0$.

686. $xy' + 1 - e^{x-y} = 0$.

687. $y' - \operatorname{tg}(y - 2x) = 0.$

688. $3x^2 - y = y'\sqrt{x^2 + 1}.$

689. $yy' + xy = x^3.$

690. $x(x - 1)y' + y^3 = xy.$

691. $xy' = 2y + \sqrt{1 + y'^2}.$

692. $y' + \operatorname{tg}y = x\sec y.$

693. $y' = \dfrac{y^2 - x}{2y(x + 1)}.$

694. $y' - 3x = \sqrt{y - x^2}.$

695. $(2x + y + 5)y' = 3x + 6.$

696. $y'^4 = 4y(xy' - 2y)^2.$

697. $xy' = x^2e^{-y} + 2.$

698. $xdy - 2ydx + xy^2(2xdy + ydx) = 0.$

699. $(x^3 - 2xy^2)dx + 3x^2ydy = xdy - ydx.$

700. $(yy')^3 = 27x(y^2 - 2x^2).$

701. $y' - 8x\sqrt{y} = \dfrac{4xy}{x^2 - 1}.$

702. $[2x - \ln(y + 1)]dx - \dfrac{x + y}{y + 1}dy = 0.$

703. $xy' - (x^2 + \operatorname{tg}y)\cos^2 y = 0.$

704. $x^2(y - xy') = yy'^2.$

705. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}.$

706. $(y - 2xy')^2 = 4yy'^3.$

707. $6x^5ydx + (y^4\ln y - 3x^6)dy = 0.$

708. $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}.$

709. $2xy' + 1 - y = \dfrac{x^2}{y - 1}.$

710. $y' = \left(\dfrac{3x + y^3 - 1}{y}\right)^2.$

711. $yy' + x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)^2.$

712. $(x\sqrt{y^2 + 1})(y^2 + 1)dx = -(y^2 + 1)dx + xydy.$

713. $(x^2 + y^2 + 1)yy' + (x^2 + y^2 - 1)x = 0.$

714. $y^2(x - 1)dx = x(xy + x - 2y)dy.$

715. $(xy' - y)^2 = x^2y^2 - x^4.$

716. $xyy' - x^2\sqrt{y^2 + 1} = (x + 1)(y^2 + 1).$

717. $(x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0.$

718. $y'\mathrm{tg}y + 4x^3\cos y = 2x.$

719. $(xy' - y)^2 = y'^2 - \dfrac{2yy'}{x} + 1.$

720. $(x + y)(1 - xy)dx + (x + 2y)dy = 0.$

721. $(3xy + x + y)ydx + (4xy + x + 2y)xdy = 0.$

722. $(x^2 - 1)dx + (x^2y^2 + x^3 + x)dy = 0.$

723. $x(y'^2 + e^{2y}) + 2y' = 0.$

724*. Giải phương trình hàm (f(x) – hàm phải tìm)

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}.$$

725. Tìm nghiệm của phương trình $y' = \sin(xy)$ với $y(0) = 0$.

726*. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

có thừa số tích phân dạng $\mu = X(x)Y(y)$.

727*. Cho phương trình

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t),$$

$a(t) \geq c > 0$ và giả sử $x_o(t)$ là nghiệm riêng thoả mãn điều kiện ban đầu $x_o(0) = b$. Chứng minh rằng đối với bất kì $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu hàm f(t) và b thay đổi một lượng nhỏ hơn δ (về giá trị tuyệt đối) thì $x_o(t)$, $t \geq 0$, thay đổi một lượng nhỏ hơn ε.

728*. Giả sử f(y) liên tục và dương với $y_o \leq y < \infty$. Tìm điều kiện cần và đủ để nghiệm của phương trình $y' = f(y)$ có các đường tiệm cận.

729*. Cho hàm số f(y) liên tục trên khoảng (a ; b). Biết rằng tồn tại nghiệm $y = \varphi(x)$ của phương trình $y' = f(y)$ thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = c$ với $a < c < b$. Chứng minh rằng khi đó $y = c$ cũng là nghiệm của phương trình trên.

730*. Giả sử M(x, y), N(x, y) là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ và thoả mãn điều kiện $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ trong một miền đơn liên. Chứng minh rằng, với các giả thiết trên, nếu phương trình

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ có đường cong tích phân kín, thì trong miền giới hạn bởi đường cong tích phân ấy tồn tại ít nhất một điểm $(x_o ; y_o)$ sao cho $M(x_o ; y_o) = N(x_o ; y_o) = 0$.

731*. Cho phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y),$$

$f_1(x)$, $f_2(y)$ liên tục trong miền $G = \begin{cases} a < x < b, \\ c < y < d. \end{cases}$

Chứng minh rằng tại mỗi điểm $(x_o ; y_o)$ của miền G có một và chỉ một đường cong tích phân của phương trình trên đi qua.

732*. Giả sử y(x), z(x) là nghiệm của các bài toán :

$$y' = f_1(x, y),\ y(x_o) = y_o ;$$
$$z' = f_2(x, z),\ z(x_o) = z_o$$

xác định trên $(x_o ; b)$. Biết rằng $f_1(x, u) > f_2(x, u)$ với mọi x, u và $y_o > z_o$. Chứng minh rằng $y(x) > z(x)$ với mọi $x \in (x_o ; b)$.

733*. Chứng minh rằng nếu hàm y(x) liên tục trên đoạn $[x_o ; b]$, thoả mãn bất đẳng thức

$$0 \le y(x) \le A + \int_{x_o}^{x} B(s)y(s)ds,\ A = \text{const} \ge 0,$$

với $B(x) \ge 0$ liên tục thì nó cũng thoả mãn bất đẳng thức

$$y(x) \le A\, e^{\int_{x_o}^{x} B(s)ds} \qquad (x_o \le x \le b).$$

(Kết quả này mang tên là bổ đề Grônuon – Benman).

734*. Chứng minh rằng phương trình

$$y' = y^2 + p(x)y + q(x) \qquad (1)$$

không có nghiệm tuần hoàn liên tục nếu các nghiệm $\overline{y}_1, \overline{y}_2$ của phương trình

$$y^2 + p(x)y + q(x) = 0 \qquad (2)$$

là phức.

735*. (Bài thi vô địch sinh viên giỏi toàn Liên Xô năm 1975). Cho hàm số f(x) liên tục cùng với đạo hàm f'(x) trên $[0, +\infty)$. Biết rằng

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) + f'(x)] = a \qquad (a - \text{hữu hạn}). \qquad (1)$$

Chứng minh rằng $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$. Hãy suy rộng. Nhận xét trên còn đúng không nếu ta thay dấu cộng của biểu thức trong (1) bằng dấu trừ ?

736. Chứng minh rằng nếu tất cả các đường cong tích phân của một phương trình vi phân nào đó đồng dạng với nhau qua phép biến đổi đồng dạng tâm tại gốc toạ độ thì phương trình vi phân ấy là phương trình thuần nhất.

737*. Cho hai phương trình

$$dy - f(x, y)dx = 0,$$
$$dx + f(x, y)dy = 0.$$

Tìm điều kiện mà f cần thoả mãn để cho cả hai phương trình đó có cùng một thừa số tích phân $\mu(x, y)$.

738*. Giả sử trong miền $G = \begin{cases} a < x < a', \\ -\infty < y < \infty, \end{cases}$

hàm số f(x, y) liên tục và giới nội. Nói chung tại mỗi điểm $(x_o ; y_o) \in G$ có thể có quá một đường cong tích phân của phương trình $y' = f(x, y)$ đi qua. Chứng minh rằng khi đó tồn tại hai đường cong tích phân $y = \varphi_1(x)$ và $y = \varphi_2(x)$ của phương trình trên (nghiệm lớn nhất và nghiệm bé nhất) đi qua điểm $(x_o ; y_o)$ sao cho $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ với $x \in (a ; a')$ và toàn thể phần miền G giới hạn giữa hai đường cong tích phân đó được lấp đầy bởi các đường cong tích phân đi qua điểm $(x_o ; y_o)$ của phương trình trên. Ngoài phần đó không còn đường cong tích phân nào đi qua điểm $(x_o ; y_o)$.

Chương II

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP CAO

§1. Các khái niệm cơ bản

Phương trình vi phân cấp n có dạng tổng quát :

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Nếu từ (1) ta có thể giải ra được $y^{(n)}$, nghĩa là nó có dạng

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

thì (2) được gọi là phương trình vi phân cấp n đã giải ra đối với đạo hàm cấp cao nhất.

Giả sử hàm f xác định và liên tục trong miền biến thiên G nào đó của các biến số $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$.

Hàm $y = y(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình (2) trên khoảng (a ; b) nếu :

1. y(x) liên tục và có đạo hàm đến cấp n liên tục trên (a ; b) sao cho khi $x \in (a ; b)$ thì điểm $(x ; y(x) ; y'(x) ; .... ; y^{(n-1)}(x)) \in G$;

2. Trên (a ; b) với $y = y(x)$ thì (2) trở thành đồng nhất thức.

Nghiệm của phương trình (2) có thể tìm dưới dạng ẩn $\Phi(x, y) = 0$ hoặc dưới dạng tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Đồ thị của nghiệm được gọi là đường cong tích phân.

Tương tự ta định nghĩa nghiệm của phương trình (1).

Bài toán Cô-si. Tìm nghiệm của phương trình (2) thoả mãn điều kiện ban đầu :

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

trong đó x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ là các số cho trước và được gọi là các giá trị ban đầu.

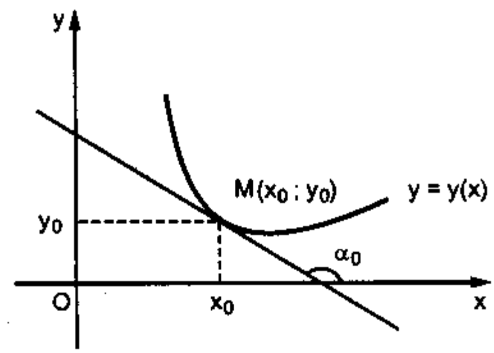
Trong trường hợp phương trình vi phân cấp 2

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{4}$$

bài toán Cô-si đòi hỏi tìm nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (4) thoả mãn điều kiện

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o.$$

Về quan điểm hình học, điều này có nghĩa là tìm đường cong tích phân của phương trình (4) đi qua điểm $M(x_o\ ;\ y_o)$ cho trước sao cho tiếp tuyến của đường cong tại điểm M tạo với chiều dương của trục hoành một góc $\alpha_o = \operatorname{arctg} y'_o$.



Hình 21

Một câu hỏi đặt ra là với những giả thiết nào thì bài toán Cô-si (2) – (3) có nghiệm và nghiệm duy nhất ?

Định lí Pêanô. Giả sử $(x_o, y_o, y'_o, ..., y_o^{(n-1)})$ là điểm trong của miền G và hàm f liên tục theo tập hợp các biến của nó trong G. Khi đó tồn tại nghiệm $y = y(x)$ của bài toán (2) – (3) xác định trong lân cận (nói chung khá bé) của điểm x_o.

Như vậy định lí Pêanô cho ta điều kiện đủ để nghiệm bài toán Cô-si tồn tại. Tuy vậy, ở đây nghiệm bài toán Cô-si có thể không duy nhất. Định lí sau đây cho ta điều kiện để nghiệm bài toán Cô-si tồn tại và duy nhất.

Định lí Cô-si – Picar. Giả sử trong G hàm f liên tục và thoả mãn điều kiện Lipsit theo $y, y', ..., y^{(n-1)}$. Khi đó đối với mỗi điểm trong $(x_o, y_o, y'_o, ..., y_o^{(n-1)}) \in G$ tồn tại duy nhất nghiệm bài toán Cô-si (2) – (3). Nghiệm này xác định trong lân cận (nói chung khá bé) của x_o.

Điều kiện Lipsit sẽ thoả mãn, chẳng hạn nếu G là miền lồi theo $y, y', ..., y^{(n-1)}$ và f có đạo hàm riêng theo các biến đó giới nội trong G.

Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ xác định trong miền biến thiên của x ; $C_1, ..., C_n$, có đạo hàm riêng liên tục theo x đến cấp n được gọi là *nghiệm* *tổng quát* của phương trình (2) trong miền G (là miền mà tại đó sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si được bảo đảm) nếu :

a) Từ hệ

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n), \end{cases} \quad (5)$$

ta có thể giải ra được $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \\ C_2 = \psi_2(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \end{cases} \quad (6)$$

b) Hàm $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ nghiệm đúng phương trình (2) với mọi giá trị của hằng số $C_1, C_2, ..., C_n$ xác định từ hệ (6) khi $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ chạy trong G. Để tìm nghiệm bài toán Cô-si ta chỉ việc thay x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$ trong (5) bằng $x_o, y_o, y_o', ..., y_o^{(n-1)}$ tương ứng rồi giải hệ phương trình nhận được đối với C_i $(i = \overline{1, n})$: $C_i = C_i^o$ $(i = \overline{1, n})$. Thay C_i trong biểu thức của hàm φ bằng C_i^o ta sẽ được nghiệm phải tìm.

Nhiều khi nghiệm tổng quát của phương trình (2) tìm được dưới dạng ẩn :

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0.$$

Nó được gọi là tích phân tổng quát của phương trình (2). Người ta cũng có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình (2) dưới dạng tham số

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, ..., C_n),$$
$$y = \psi(t, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Nghiệm riêng của phương trình (2) là nghiệm mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si được bảo đảm. Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị cụ thể của hằng số C_i $(i = \overline{1, n})$ là nghiệm riêng.

Nghiệm mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ được gọi là nghiệm kì dị. Nghiệm kì dị của phương trình vi phân cấp n có thể phụ thuộc vào k tham số ($k \le n - 1$).

Nếu trong quá trình tích phân phương trình (2) ta nhận được hệ thức

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-k)}, C_1, ..., C_k) = 0,$$

thì nó được gọi là *tích phân trung gian cấp k* của phương trình (2).

Tích phân trung gian cấp n – 1 được gọi là *tích phân đầu*. Biết k tích phân đầu độc lập ta có thể hạ cấp của phương trình xuống k lần ; biết n tích phân đầu độc lập ta có thể nhận được tích phân tổng quát của phượng trình.

Trong một số trường hợp, phương trình vi phân cấp n (1), (2) có thể tích phân được bằng cầu phương bằng cách hạ cấp của phương trình và đưa về những phương trình cấp thấp hơn có thể giải được. Sau đây chúng ta sẽ điểm qua một số loại phương trình có thể hạ cấp được.

§2. Các phương trình có thể hạ cấp được

1. Phương trình chỉ chứa biến số và đạo hàm cấp cao nhất

Đó là phương trình có dạng

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

a) Từ phương trình (1) ta có thể biểu diễn được $y^{(n)}$ qua x :

$$y^{(n)} = f(x). \tag{2}$$

Giả sử f(x) liên tục trên khoảng (a ; b). Khi đó bài toán Cô-si có nghiệm duy nhất đối với bất kì $x_o \in (a ; b)$ và $y_o, y_o', ..., y_o^{(n-1)}$ nhận giá trị bất kì. Nghiệm bài toán Cô-si có dạng

$$y = y_o + y_o'(x - x_o) + ... + \frac{y_o^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_o)^{n-2} +$$

$$+ \frac{y_o^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_o)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_o}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Tích phân lần lượt hai vế của phương trình (2) ta được nghiệm tổng quát

$$y(x) = \underbrace{\int\int...\int}_{\text{n lần}} f(x)dx \ldots dx + C_1x^{n-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

b) Giả sử từ (1) ta không giải ra được $y^{(n)}$ nhưng qua phương trình (1) ta có thể biểu thị x, $y^{(n)}$ dưới dạng tham số :

$$x = \varphi(t),$$
$$y^{(n)} = \psi(t).$$

Chú ý rằng $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$ ta có

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Tương tự như trên ta tìm được $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, ... và cuối cùng

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Do đó phương trình (1) có nghiệm tổng quát dưới dạng tham số :

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' = xe^x.$$

Tích phân lần lượt hai vế ta được

$$y = (x-2)e^x + C_1x + C_2.$$

Nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu y(0) = 1, y'(0) = 0 có dạng

$$y = (x-2)e^x + x + 3.$$

Ví dụ 2. Tích phân phương trình

$$x - e^{y''} + y''^2 = 0.$$

Đặt y" = t ta có

$$x = e^t - t^2,$$
$$y'' = t.$$
$$dy' = y''dx = t(e^t - 2t)dt.$$

$$y' = \int t(e^t - 2t)dt + C_1 = e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1 \,;$$

$$dy = y'dx = \left[e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1\right](e^t - 2t)dt,$$

$$y = \int\left[e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1\right](e^t - 2t)dt + C_2.$$

Thực hiện phép tính tích phân trong biểu thức cuối, ta được nghiệm tổng quát của phương trình đang xét dưới dạng tham số

$$x = e^t - t^2,$$

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} - \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1\right)e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1t^2 + C_2.$$

2. Phương trình không chứa hàm phải tìm và các đạo hàm của nó đến cấp k − 1

Đó là phương trình dạng

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (1 \le k < n). \qquad (3)$$

Bằng phép thế $y^{(k)} = z$ với z là hàm mới phải tìm, phương trình (3) đưa về phương trình cấp $n - k$ sau :

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0. \qquad (4)$$

Nếu (4) giải được bằng cầu phương, nghĩa là ta tìm được

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) \text{ hay } \Phi(x, z, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) = 0$$

thì trở lại biến y ta có

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) \text{ hay } \Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, ..., C_{n-k}) = 0.$$

Như vậy ta đã đi đến các trường hợp đã xét ở phần 1.

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$y' = xy'' + y''^2.$$

Đặt $y' = z$ ta có

$$z = xz' + z'^2.$$

Đây là phương trình Clerô. Giải nó ta được nghiệm tổng quát

$$z = xC_1 + C_1^2$$

và nghiệm kì dị $$z = -\frac{x^2}{4}.$$

Trở lại biến cũ y :

$$y' = C_1x + C_1^2, \qquad y' = -\frac{x^2}{4}.$$

Tích phân các phương trình cuối này ta được nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 + C_1^2 x + C_2$$

và họ nghiệm kì dị

$$y = -\frac{x^3}{12} + C.$$

3. Phương trình không chứa biến số độc lập. Đó là phương trình dạng

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{5}$$

Đặt $y' = z$ và coi $z = z(y)$ ta được

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}y'' = \frac{d}{dy}y''\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]z,$$

....

$$y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dx}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right).$$

Thay các giá trị này của $y', y'', ..., y^{(n)}$ vào phương trình (5) ta đưa nó về phương trình cấp $n - 1$:

$$\Phi\left(y, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Ví dụ 4. Tích phân phương trình

$$2yy'' = y'^2 + y^2.$$

Đặt $y' = z$ ta có

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}y' = \frac{dz}{dy}z.$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được

$$2yz\frac{dz}{dy} = z^2 + y^2$$

hay

$$y\frac{du}{dy} = u + y^2,$$

ở đây $u = z^2$.

Giải phương trình cuối ta có

$$u = C_1y + y^2.$$

Bởi vậy

$$z^2 = C_1y + y^2$$

hay

$$y'^2 = C_1y + y^2.$$

Tích phân phương trình này ta được

$$\ln\left|y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{C_1y + y^2}\right| = \pm x + C_2.$$

Ngoài ra phương trình còn có nghiệm $y = 0$. Nó là nghiệm riêng.

4. Phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó

Nếu phương trình

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

thuần nhất đối với $y, y', ..., y^{(n)}$ thì có thể hạ nó xuống một cấp bằng phép thế

$$y' = yz,$$

z là hàm số mới phải tìm.

Thật vậy, khi đó

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$
$$y''' = y(z^3 + 3zz' + z''),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = y(z, z', ..., z^{(n-1)}).$$

Thay các biểu thức này của $y', y'', ..., y^{(n)}$ vào phương trình ban đầu và chú ý rằng F là hàm thuần nhất (chẳng hạn bậc m) đối với $y, y', ..., y^{(n)}$ ta được

$$y^mF(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

hay $$F(x, 1, z, z^2 + z', ..., \omega(z, z', ..., z^{(n-1)})) = 0$$

(giả sử $y \neq 0$).

Đây là phương trình cấp $n - 1$. Giả sử

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$$

là nghiệm tổng quát của nó. Khi đó

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Bởi vậy

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})dx}$$

là nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu.

Ví dụ 5. Xét phương trình

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0.$$

Đặt $y' = yz$ ta có $y'' = y(z^2 + z')$. Bởi vậy sau khi thay giá trị y', y'' vào phương trình trên và đơn giản cho y^2 ta được

$$x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0,$$

hay

$$xz' - z = 0.$$

Tích phân phương trình này ta được

$$z = C_1 x,$$

hay

$$\frac{y'}{y} = C_1 x.$$

Do đó

$$y = C_2 e^{\frac{C_1}{2}x^2}$$

Nghiệm $y = 0$ rõ ràng có thể nhận được từ biểu thức tích phân tổng quát với $C_2 = 0$.

5. Phương trình thuần nhất suy rộng. Phương trình

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (6)$$

được gọi là phương trình thuần nhất suy rộng, nếu tồn tại số k sao cho vế phải của phương trình (6) trở thành hàm thuần nhất (chẳng hạn bậc m) theo các biến x, y, y', ..., $y^{(n)}$ với giả thiết rằng x, y, y', ..., $y^{(n)}$ là các đại lượng bậc 1, bậc k, bậc k − 1, ..., k − n. Bằng phép thế

$$x = e^t, \; y = ze^{kt},$$

ta đưa được phương trình (6) về phương trình không chứa biến độc lập t :

$$\Phi(z, z', ..., z^{(n)}) = 0. \tag{7}$$

Thật vậy, vì

$$\frac{d}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}$$

nên

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dz}{dt}e^{kt} + kze^{kt}\right)e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \left[\frac{d^2z}{dt^2} + (2k-1)\frac{dz}{dt} + k(k-1)z\right]e^{(k-2)t},$$

....

$$y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, ..., \frac{d^nz}{dt^n}\right)e^{(k-n)t}.$$

Thế các giá trị này vào (6), chú ý giả thiết đã cho, ta đi đến phương trình (7) sau khi đã đơn giản cho thừa số e^{mt}.

Vì theo phần 3, phương trình (7) có thể hạ xuống một cấp nên phương trình (6) qua phép thế ở trên có thể hạ xuống cấp n − 1.

Ví dụ 6. Xét phương trình

$$x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0. \tag{8}$$

Ta chứng minh rằng đây là phương trình thuần nhất suy rộng. Thật vậy, coi x, y, y', y'' là các đại lượng bậc 1, k, k − 1, k − 2 và đồng nhất bậc của các số hạng ta có

$$4 + k - 2 = 3k.$$

Bởi vậy k = 1.

Áp dụng phép thế

$$x = e^t, \; y = ze^t.$$

Khi đó

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \frac{dz}{dt} + z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right)e^{-t}.$$

Thế vào (8) ta được

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right)e^{3t} + \left[e^t\left(\frac{dz}{dt} + z\right) - ze^t\right]^3 = 0$$

hay

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^3 = 0. \tag{9}$$

Đây là phương trình không chứa biến số độc lập.

Đặt $\dfrac{dz}{dt} = u$ và coi $u = u(z)$ ta được

$$u\frac{du}{dz} + u + u^3 = 0$$

hay

$$\frac{du}{dz} + 1 + u^2 = 0 \ (u \neq 0).$$

Tích phân tổng quát của phương trình cuối là

$$u = \operatorname{tg}(C_1 - z).$$

Bởi vậy

$$\frac{dz}{dt} = \operatorname{tg}(C_1 - z),$$

$$\ln|\sin(z - C_1)| + t = \ln|C_2|.$$

Trở lại biến cũ x, y ta có

$$\ln\left|\sin\left(\frac{y}{x} - C_1\right)\right| + \ln x = \ln|C_2|.$$

Do đó

$$y = x\left(A + \arcsin\frac{B}{x}\right) \ (A = C_1, B = \pm C_2).$$

6. Phương trình với vế trái là đạo hàm đúng

Nếu vế trái của phương trình

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{10}$$

là đạo hàm đúng của hàm $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ nào đó thì phương trình trên được gọi là phương trình với vế trái là đạo hàm đúng. Vì theo giả thiết

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

nên

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C_1 \tag{11}$$

là tích phân đầu của phương trình (10). Có thể xảy ra là (11) cũng là phương trình với vế trái là đạo hàm đúng. Trong trường hợp này ta lại có thể tìm được tích phân thứ hai của phương trình (10).

Ví dụ 7. Xét phương trình

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1 + y^2} = 0.$$

Dễ kiểm chứng rằng

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1 + y^2} = [\ln|y'| - \ln(1 + y^2)]'$$

nên phương trình đang xét là phương trình với vế trái là đạo hàm đúng. Nó có tích phân đầu

$$\ln|y'| - \ln(1 + y^2) = \ln|C_1|$$

hay

$$y' = A(1 + y^2) \quad (A = \pm C_1).$$

Tích phân phương trình cuối ta được

$$\text{arctg}y = Ax + B.$$

Đây là tích phân tổng quát của phương trình đang xét.

Tích phân các phương trình sau đây :

739. $x - \sin y'' + 2y'' = 0.$

740. $xy''' = \sin x.$

741. $x = e^{-y''} + y''.$

742. $x = \dfrac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}}.$

743. $y''^3 - 1 = 0.$

744. $x^2y'' = y'^2.$

745. $2xy'y'' = y'^2 - 1.$

746. $y^3y'' - 1 = 0.$

747. $y'' = 2yy'.$

748. $yy'' + 1 = y'^2.$

749. $y''(e^x + 1) + y' = 0.$

750. $y''' - y''^2 = 0.$

751. $y''' = 2(y'' - 1)\mathrm{cotg}\, x.$

752. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0.$

753. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}.$

754. $xy'' - y' = 0.$

755. $y'(1 + y'^2) = ay''.$

756. $x\ln x . y'' - y' = 0.$

757. $2yy'' = y + y'^2.$

758. $y''^2 + y' = xy''.$

759. $y''^3 + xy'' = 2y'.$

760. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}.$

761. $xy''' = y'' - xy''.$

762. $y'' = e^y.$

763. $2y'(y'' + 2) = xy''^2.$

764. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0.$

765. $y^{(4)} - y^3y'' = 1.$

766. $y''(2y' + x) = 1.$

767. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2.$

768. $yy'' = y'^3.$

769. $yy''^2 - 1 = 0.$

770. $1 + y'^2 = 2yy''.$

771. $2yy'' + y'^2 + y''' = 0.$

772. $y'^2 = (3y - 2y')y''.$

773. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0.$

774. $xy'' = y' + x\sin\dfrac{y'}{x}.$

775. $yy'' + y = y'^2.$

776. $(y' + 2y)y'' = y'^2.$

777. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2).$

778. $xy^{(4)} + y''' = e^x.$

Bằng phương pháp hạ cấp, giải các phương trình thuần nhất và thuần nhất suy rộng sau đây :

779. $xyy'' - xy'^2 = yy'.$

780. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'.$

781. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

782. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.

783. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

784. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{y'^2}{y}$.

785. $xyy'' - xy'^2 - yy' - \dfrac{bxy'^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$.

786. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$.

787. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

788. $x^2yy'' = y'(y + y')$.

789. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.

790. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^{(4)}$.

791. $xyy'' = y'(y + y')$.

792. $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.

793. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}$.

794. $y'' = \left(2xy - \dfrac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \dfrac{4y}{x^2}$.

795. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$.

796. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' =$

$= (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$.

797. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$.

798. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

799. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

800. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$.

801. $xyy'' + yy' - x^2y'^3 = 0$.

802. $x^4y'' - x^3y'^3 + 2x^2yy'^2 - (3xy^2 + 2x^3)\,y' + 2x^2y + y^3 = 0$.

803. $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$.

Bằng cách đưa về phương trình với vế trái là đạo hàm đúng, giải các phương trình sau :

804. $y'' = 2yy'$.

805. $y'' - y'^2y = 0$.

806. $yy'' = y'$.

807. $yy''' - y'y'' = 0$.

808. $yy''' + 3y'y'' = 0$.

809. $y'y''' = 2y''^2$.

810. $yy'' = y'(y' + 1)$.

811. $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$.

812. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

813. $(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$

814. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1.$

815. $y'' + \cos x.y' - \sin x.y = 0$

816. $yy'' + y'^2 = 1.$

817. $y'' = xy' + y + 1.$

818. $xy'' = 2yy' - y'.$

819. $xy'' - y' = x^2yy'.$

Tìm nghiệm của các bài toán Cô-si sau :

820. $y''' = e^{-x}$; $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ khi $x = 0$.

821. $y''' = \frac{e^x}{x}$; $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = 0$.

822. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$; $y = 1$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

823. $y''^2 = y'$; $y = 0$, $y' = 1$ khi $x = 0$; $y = 0$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

824. $4y' + y''^2 = 4xy''$; $y = 0$, $y' = -1$ khi $x = 0$; $y = 0$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

825. $yy'' = 2xy'^2$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 0,5$.

826. $2y''' - 3y'^2 = 0$; $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

827. $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$.

828. $y''' = 3yy'$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4,5$.

829. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$; $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$.

830. $3y'y'' = e^y$; $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$.

831. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; $y = 1$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

832. $2xy'' + y''' = 0$; $y = y_o$, $y' = y'_o$, $y'' = y''_o$ khi $x = 0$.

833. Tìm đường cong tích phân của phương trình

$$yy'' + y'^2 = 1,$$

đi qua điểm (0 ; 1) và tiếp xúc với đường thẳng $x + y = 1$ tại điểm đó. Có bao nhiêu đường cong như vậy ?

834. Tìm đường cong tích phân của phương trình

$$yy'y'' = y'^3 + y''^2,$$

tiếp xúc với đường thẳng x = y tại gốc toạ độ. Có bao nhiêu đường cong như vậy ?

835. Tìm đường cong sao cho bán kính độ cong của nó tỉ lệ với độ dài đoạn thẳng pháp tuyến (tức là độ dài đoạn thẳng nằm trên pháp tuyến, kể từ tiếp điểm đến trục hoành). Xét các trường hợp khi hệ số tỉ lệ bằng ±1, ± 2.

836. Tìm đường cong sao cho bán kính độ cong của nó tỉ lệ với lập phương độ dài đoạn thẳng pháp tuyến.

837. Tìm đường cong sao cho bán kính độ cong tỉ lệ nghịch với côsin của góc giữa tiếp tuyến và trục hoành.

838. Tìm tích phân đầu của phương trình

$$(y'' - 2x)y - 2(y' - x^2)y' = 0$$

và nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y = \frac{1}{3},\ y' = 1 \text{ khi } x = 1.$$

839. Tìm tích phân thứ hai của phương trình

$$y''' = yy'' + y'^2$$

và nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y = 0,\ y' = \frac{1}{2},\ y'' = 0 \text{ khi } x = 0.$$

840*. Chứng minh rằng phương trình chuyển động con lắc

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$$

có nghiệm riêng $\varphi_0(t)$ dần tới π khi $t \to \infty$.

§3. Phương trình tuyến tính cấp n với hệ số hằng số

1. Phương trình tuyến tính thuần nhất. Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n với hệ số hằng số có dạng

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0, \qquad (1)$$

trong đó a_i (i = 1, ..., n) là các hằng số thực. Để xây dựng nghiệm tổng quát của phương trình (1) ta xét phương trình đặc trưng tương ứng với (1) sau :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0. \qquad (2)$$

Nghiệm của phương trình (2) gọi là nghiệm đặc trưng của (1). Cấu trúc hệ nghiệm cơ bản của (1) phụ thuộc vào dạng của các nghiệm phương trình đặc trưng. Có những khả năng sau xảy ra :

1. Mọi nghiệm của phương trình đặc trưng (2) thực và khác nhau. Giả sử các nghiệm đó là λ_1 , λ_2, ..., λ_n. Khi đó $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ là hệ nghiệm cơ bản của (1) và do đó (1) có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Mọi nghiệm của phương trình đặc trưng (2) khác nhau nhưng trong số chúng có nghiệm phức. Giả sử, chẳng hạn $\lambda_1 = a + ib$ là một trong những nghiệm phức của (2). Khi đó $\lambda_2 = a - ib$ cũng là nghiệm của phương trình này. Cặp nghiệm phức liên hợp này sẽ ứng với hai nghiệm thực độc lập tuyến tính là

$$y_1 = e^{ax}\cos bx,\ y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Làm như vậy với mọi cặp nghiệm phức liên hợp khác và kết hợp với số nghiệm thực còn lại ta sẽ được hệ nghiệm cơ bản của (1). Tổ hợp tuyến tính của chúng sẽ cho ta nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu.

3. Trong số nghiệm của phương trình đặc trưng có những nghiệm bội. Chẳng hạn, giả sử λ_1 là nghiệm thực bội k. Khi đó ứng với λ_1 ta có k nghiệm riêng độc lập tuyến tính là

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda_1}.$$

Nếu $\lambda_1 = a + ib$ là nghiệm phức bội k của phương trình đặc trưng (2) thì $\lambda_2 = a - ib$ cũng là nghiệm bội k của phương trình đó. Cặp nghiệm này sẽ ứng với 2k nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (1) là

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ ...,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ ...,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

Làm tương tự với mọi nghiệm bội khác và kết hợp với những nghiệm của (1) ứng với những nghiệm đặc trưng đơn của (2) ta sẽ xây dựng được hệ nghiệm cơ bản của phương trình (1) và do đó nghiệm tổng quát của (1).

Ví dụ 1. Xét phương trình

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

có các nghiệm thực khác nhau là $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Bởi vậy phương trình đang xét có nghiệm tổng quát

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0$$

có nghiệm $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 + 3i$, $\lambda_3 = -2 - 3i$. Do đó phương trình đang xét có hệ nghiệm cơ bản

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-2x}\cos 3x,\ y_3 = e^{-2x}\sin 3x$$

và nghiệm tổng quát

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}\cos 3x + C_3e^{-2x}\sin 3x.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Dễ thấy rằng phương trình đặc trưng tương ứng có một nghiệm đơn $\lambda_1 = 1$ và nghiệm kép $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}.$$

Ví dụ 4. Xét phương trình

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Ở đây, phương trình đặc trưng

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

có cặp nghiệm phức liên hợp bội 2 là

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i.$$

Bởi vậy

$$y_1 = e^{-x}\cos x,\ y_2 = xe^{-x}\cos x,\ y_3 = e^{-x}\sin x,\ y_4 = xe^{-x}\sin x$$

là hệ nghiệm cơ bản của phương trình đang xét và

$$y = C_1e^{-x}\cos x + C_2xe^{-x}\cos x + C_3e^{-x}\sin x + C_4xe^{-x}\sin x$$

là nghiệm tổng quát của nó.

2. Phương trình tuyến tính không thuần nhất. Phương trình tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng số có dạng

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x). \tag{3}$$

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (3) ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng và cộng với một nghiệm riêng nào đấy của phương trình tuyến tính không thuần nhất. Ở phần 1 ta đã biết cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Để tìm nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất ta có thể áp dụng phương pháp biến thiên hằng số sau đây.

Giả sử $y_1, y_2, \dots, y_n$ là một hệ nghiệm cơ bản nào đấy của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng. Khi đó

$$y^*(x) = \alpha_1(x)\, y_1(x) + \alpha_2(x)\, y_2(x) + \dots + \alpha_n(x)\, y_n(x)$$

sẽ cho ta nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (3), ở đây $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ được xác định từ hệ phương trình đại số

$$\begin{cases} \alpha_1'(x)y_1 + \alpha_2'(x)y_2 + \dots + \alpha_n'(x)y_n = 0, \\ \alpha_1'(x)y_1' + \alpha_2'(x)y_2' + \dots + \alpha_n'(x)y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1'(x)y_1^{(n-1)} + \alpha_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Trong một số trường hợp ta có thể tìm nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (3) một cách đơn giản hơn. Ta lần lượt xét các trường hợp đó.

a) $f(x) = P_m(x)$, ở đây $P_m(x)$ là đa thức bậc m của x ($m \geq 0$). Khi đó nếu 0 không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{4}$$

thì phương trình (3) có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = Q_m(x)$$

trong đó $Q_m(x)$ là đa thức bậc m với các hệ số chưa xác định. Muốn xác định các hệ số của $Q_m(x)$ ta thay nó vào phương trình (3) rồi đồng nhất các hệ số theo lũy thừa của x.

Nếu 0 là nghiệm của phương trình đặc trưng bội k thì phương trình (3) có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = x^k Q_m(x).$$

b) $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$. Nếu α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (4) thì (3) có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = e^{\alpha x}Q_m(x).$$

Nếu α là nghiệm của phương trình đặc trưng bội k thì (3) có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x).$$

c) $f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + P_{m_2}(x)\sin\beta x]$. Ở đây $P_{m_1}(x), P_{m_2}(x)$ là các đa thức bậc m_1, m_2 tương ứng của x. Giả sử $m = \max\{m_1, m_2\}$. Khi đó nếu $\alpha + i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (4) thì (3) có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = e^{\alpha x}[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x].$$

Ở đây $Q_m(x)$, $R_m(x)$ là các đa thức bậc m của x với các hệ số cần xác định.

Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng bội k thì (3) có nghiệm riêng dạng

$$y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x].$$

Trong tất cả các trường hợp trên, để xác định các hệ số của các đa thức phải tìm ta thế chúng vào phương trình (3) rồi đồng nhất các hệ sô của các số hạng tương ứng.

d) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_i(x)$ trong đó $f_i(x)$ $(i = 1, \dots, j)$ có một trong các dạng đã xét ở trên. Giả sử $y_1(x), y_2(x), \dots, y_j(x)$ là các nghiệm riêng ứng với $f_1(x), f_2(x), \dots, f_j(x)$. Khi đó (3) có nghiệm riêng

$$y^*(x) = y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_j(x).$$

Ví dụ 5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x.$$

Phương trình thuần nhất tương ứng có dạng

$$y'' - y' = 0,$$

ở đây đa thức đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y = C_1 + C_2e^x.$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) + y_3^*(x),$$

trong đó $y_1^*(x), y_2^*(x), y_3^*(x)$ là nghiệm riêng tương ứng của các phương trình

$$\begin{aligned} &y'' - y' = x, \\ &y'' - y' = e^x, \\ &y'' - y' = e^{2x}. \end{aligned} \tag{5}$$

Vì $\lambda_1 = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên

$$y_1^*(x) = x(Ax + B).$$

Thế vào phương trình thứ nhất của (5) và ước lược ta được

$$-2Ax - B + 2A = x.$$

Từ đây suy ra

$$-2A = 1$$
$$2A - B = 0$$

Do đó $\quad A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$ và $y_1^*(x) = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

Do 1 là nghiệm của phương trình đặc trưng nên

$$y_2^*(x) = Axe^x.$$

Thế vào phương trình thứ hai của (5) và ước lược ta được

$$Ae^x = e^x.$$

Từ đây suy ra $A = 1$ và $y_2^*(x) = xe^x$.

Phương trình thứ ba của (5) có nghiệm riêng dạng

$$y_3^*(x) = Ae^{2x}.$$

Thế vào phương trình và ước lược ta tìm được $A = \frac{1}{2}$ và do đó

$$y_3^*(x) = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Cho nên nghiệm riêng phải tìm của phương trình ban đầu là

$$y^*(x) = -x\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + xe^x + \frac{1}{2}e^{2x}$$

và nghiệm tổng quát của nó là

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + xe^x - \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Ví dụ 6. Tích phân phương trình

$$y'' + y = \sin x + \cos 2x.$$

Trước hết ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$z'' + z = 0.$$

Dễ thấy rằng phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Bởi vậy

$$z(x) = C_1\cos x + C_2 \sin x.$$

Vì i là nghiệm của phương trình đặc trưng nên phương trình

$$y'' + y = \sin x$$

có nghiệm riêng dạng

$$y_1^*(x) = x(A\sin x + B\cos x).$$

Thế vào phương trình trên và sau khi ước lược ta có

$$2A\cos x - 2B\sin x = \sin x.$$

Bởi vậy

$$2A = 0, -2B = 1$$

hay

$$A = 0, B = -\frac{1}{2}$$

và

$$y_1^*(x) = -\frac{1}{2}x \cos x$$

Phương trình

$$y'' + y = \cos 2x$$

có nghiệm riêng dạng

$$y_2^*(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Thế vào phương trình và ước lược ta tìm được

$$A = -\frac{1}{3}, B = 0.$$

Như vậy $$y_2^*(x) = -\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Kết hợp với $y_1^*(x)$ ta đi đến kết luận là phương trình ban đầu có nghiệm riêng

$$y^*(x) = -\frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x$$

và nghiệm tổng quát

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x.$$

Ví dụ 7. Xét phương trình

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}. \tag{6}$$

Dễ thấy rằng phương trình thuần nhất tương ứng

$$z'' - z = 0$$

có nghiệm tổng quát

$$z(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Vì ở đây hàm $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ không có dạng đặc biệt nên để tìm nghiệm riêng của phương trình đang xét ta áp dụng phương pháp biến thiên hằng số.

Đặt

$$y^*(x) = \alpha_1(x)e^x + \alpha_2(x)e^{-x},$$

trong đó $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ được xác định từ hệ

$$\begin{cases} \alpha_1'(x)e^x + \alpha_2'(x)e^{-x} = 0, \\ \alpha_1'(x)e^x - \alpha_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1}. \end{cases} \tag{7}$$

Giải hệ phương trình đại số này ta tìm được

$$\alpha_1'(x) = \frac{1}{2(e^x + 1)}, \qquad \alpha_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{2(e^x + 1)}.$$

Do đó

$$\alpha_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x + 1);$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\ln(e^x + 1).$$

(Ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng nên các hằng số sau khi tích phân đặt bằng 0). Như vậy nghiệm

$$y^*(x) = -\frac{1}{2}[x - \ln(1 + e^x)]e^x + 1 - [\ln(e^x + 1)]e^{-x}$$

và do đó nghiệm tổng quát của phương trình (6) có dạng

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\{[x - \ln(e^x + 1)]e^x + [\ln(e^x + 1)]e^{-x} - 1\}.$$

Tích phân các phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây :

841. $y'' - 2y' = 0.$

842. $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

843. $y'' + 4y' + 3y = 0.$

844. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

845. $y'' + 2y' + 10y = 0.$

846. $y'' + 4y = 0.$

847. $y''' - 8y = 0.$

848. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

849. $y'' + 3y' + 2y = 0.$

850. $y'' - y' - 2y = 0.$

851. $y''' - 13y' - 12y = 0.$

852. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

853. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$

854. $y''' + 8y = 0.$

855. $y''' - 2y'' + 9y - 18y = 0.$

856. $y''' - y = 0.$

857. $y^{(4)} - y = 0.$

858. $y^{(6)} + 64y = 0.$

859. $y^{(5)} - 10y'' + 9y' = 0.$

860. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$

861. $y^{(4)} + 4y = 0.$

862. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

863. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

864. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0.$

865. $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0.$

866. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$

867. $y^{(4)} + y = 0.$

868. $y^{(6)} - y = 0.$

869. $y^{(6)} + y = 0.$

870. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$

871. $y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0.$

872. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$

873. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0.$

874. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

875. $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

Giải các phương trình tuyến tính không thuần nhất sau đây bằng phương pháp hệ số bất định :

876. $y'' - y = x^2 - x + 1$.

877. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$.

878. $y'' + y' = 3$.

879. $y'' + 5y' + 6y = 3$.

880. $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

881. $y'' - y = 4e^x$.

882. $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$.

883. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$.

884. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$.

885. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

886. $y'' - y = 2e^x - x^2$.

887. $y'' + y = 4xe^x$.

888. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

889. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$.

890. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

891. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y =$

$= 3e^{-2x}$.

892. $y^{(4)} - y = 4e^x$.

893. $y''' - y'' = -3x + 1$.

894. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.

895. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

896. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

897. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.

898. $y'' + y = x\sin x$.

899. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

900. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.

901. $y'' + y = e^x + \cos x$.

902. $y'' + y = 6\sin 2x$.

903. $y'' - y' + y = -13\sin 2x$.

904. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$.

905. $y'' - 4y =$

$= e^x[(-4x + 4)\cos x - (2x + 6)\sin x]$.

906. $y'' - 2y' + 2y =$

$= e^x(2\cos x - 4x\sin x)$.

907. $y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x$.

908. $y''' - y'' + 4y' - 4y =$

$= 3e^{2x} - 4\sin 2x$.

909. $y^{(4)} - y = 4\sin x - 8e^{-x} + 1$.

910. $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$.

911. $y'' - y = \cos^2 x$.

912. $y'' + 4y = \cos^2 x$.

913. $y'' + y = \sin x\cos 3x$.

Bằng phương pháp biến thiên hằng số, hãy giải các phương trình không thuần nhất sau:

914. $y'' - y = \frac{1}{x}$.

915. $y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

916. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

917. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

918. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

919. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

920. $y'' - y' = \frac{2 - x}{x^3}e^x$.

921. $y'' + y = \operatorname{tg}x$.

922. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

923. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg}x$.

924. $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

925. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

926. $y'' + y = -\frac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$.

Tìm nghiệm của các bài toán sau :

927. $y'' - 2y' + y = 0$; $y = 1$, $y' = 2$ khi $x = 2$.

928. $y''' - y' = 0$; $y = 3$, $y' = -1$, $y'' = 1$ khi $x = 0$.

929. $y'' - y = 0$; $y = 2$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

930. $y'' + 2y = 0$; $y = 0$, $y' = 0$ khi $x = 3$.

931. $y'' + y = 0$; $y = 0$ khi $x = 0$, $y = 1$ khi $x = \frac{\pi}{2}$.

932. $y'' + y = 0$; $y = 0$ khi $x = 0$, $y = 0$ khi $x = \pi$.

933. $y^{(4)} - y = 0$; $y = 1$, $y' = 1$, $y'' = 1$, $y''' = 1$ khi $x = 0$.

934. $y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0$; $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$, $y''' = 0$, $y^{(4)} = 0$ khi $x = 1$.

935. $y'' + y = 4e^x$; $y = 1$, $y' = -3$ khi $x = 0$.

936. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y = -1$, $y' = 0$ khi $x = 1$.

937. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y = y' = 0$ khi $x = 0$.

938. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$; $y = 0$, $y' = -3$, $y'' = 3$ khi $x = 0$.

939. $y'' + 4y = \sin 2x$; $y = y' = 0$ khi $x = 0$.

940. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$; $y = y' = 0$ khi $x = 2$.

941. $y^{(4)} + y'' = 2\cos x$; $y = -2$, $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$ khi $x = 0$.

942. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = f(t), \qquad (k = \text{const})$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = x'(0) = 0$, là

$$x = \frac{1}{k}\int_0^t f(u)\sin k(t-u)du .$$

943. Với giá trị nào của hằng số h, tất cả mọi nghiệm không tầm thường của phương trình

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + x = 0$$

sẽ biểu diễn những quá trình dao động tắt dần ?

944. Với giá trị nào của hằng số q phương trình

$$y'' + qy = 0$$

có nghiệm không tầm thường dần tới 0 khi $x \to \infty$?

945. Với những giá trị nào của các hằng số p, q phương trình

$$y'' + py' + qy = 0$$

có mọi nghiệm dần tới 0 khi $x \to \infty$?

946. Với những giá trị nào của các hằng số p, q phương trình

$$y'' + py' + qy = 0$$

có mọi nghiệm giới nội trên $(0 ; \infty)$?

947. Với những giá trị nào của a, b, mỗi nghiệm không tầm thường của phương trình $y'' + ay' + by = 0$ bắt đầu từ một giá trị x_0 nào đó sẽ là hàm đơn điệu tăng về giá trị tuyệt đối ?

948. Với những giá trị a, b nào mỗi nghiệm của phương trình

$$y'' + ay' + by = 0$$

có vô số không điểm ?

949. Tìm những giá trị a, b để cho mọi nghiệm của phương trình

$$y'' + ay' + by = 0$$

thoả mãn hệ thức $y = 0\,(e^{-x})$ khi $x \to \infty$.

950. Với $b > 0$ cho trước hãy chọn a sao cho nghiệm của phương trình $y'' + ay' + by = 0$ với điều kiện ban đầu $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ có thể tiến nhanh nhất đến 0 khi $x \to \infty$.

951. Tìm mọi giá trị p, q để cho mọi nghiệm của phương trình

$$y'' + py' + qy = 0$$

là những hàm tuần hoàn của x.

952. Với những giá trị k và ω nào phương trình

$$y'' + k^2y = \sin\omega t$$

có ít nhất một nghiệm tuần hoàn ?

953*. Cho phương trình

$$y'' + ay' + by = f(t),$$

trong đó $|f(t)| \le m \le \infty$ với mọi $t \in (-\infty ; \infty)$. Biết rằng nghiệm của phương trình đặc trưng $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Tìm nghiệm giới nội trên toàn trục số. Chứng minh rằng : a) Tất cả các nghiệm còn lại dần tới nghiệm trên khi $t \to \infty$.

b) Nếu f(t) tuần hoàn thì nghiệm giới nội ấy cũng tuần hoàn.

954. Một mạch điện gồm nguồn điện với điện áp V, điện trở R, cuộn tự cảm L và công tắc. Công tắc được đóng tại thời điểm $t = 0$. Tìm sự phụ thuộc vào thời gian t của cường độ dòng điện ($t > 0$).

955. Giải bài toán trên nếu thay cuộn tự cảm bằng tụ điện với điện dung C, biết rằng trước khi đóng mạch tụ điện chưa tích điện.

956. Một mạch điện được mắc nối tiếp bởi biến trở R, tụ điện C với điện tích q tại thời điểm $t = 0$. Mạch được đóng tại thời điểm $t = 0$. Tìm cường độ dòng điện khi $t > 0$.

957. Người ta mắc nối tiếp một nguồn điện với điện áp thay đổi theo quy luật $E = V\sin\omega t$, điện trở R và cuộn tự cảm L. Hãy tìm cường độ dòng điện.

958*. Cho phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = f(t),$$

trong đó a_k là các số thực, f(t) là hàm thực của t ($t > 0$). Biết rằng phần thực của các nghiệm của phương trình đặc trưng là âm. Chứng minh rằng nghiệm $y = y(t)$ của phương trình trên với điều kiện ban đầu

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ ...,\ y^{(n-1)}(0) = 0,$$

thoả mãn đánh giá

$$|y(t)| < \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda(t-\tau)} |f(\tau)| \, d\tau, \; (t > 0),$$

ở đây λ là số lớn nhất trong các phần thực của các nghiệm đặc trưng.

§4. Phương trình tuyến tính với hệ số biến thiên

Phương trình tuyến tính cấp n với hệ số biến thiên có dạng

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x). \tag{1}$$

Phương trình

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{2}$$

là phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng với (1).

Giả sử các hàm $p_j(x)$, $j = 1, 2, ..., n$, $f(x)$ liên tục trên khoảng (a ; b). Khi đó với bất kì $x_o \in (a\,;\,b)$ phương trình (1) – (2) có nghiệm duy nhất $y(x)$ thoả mãn điều kiện

$$y(x_o) = y_o,\; y'(x_o) = y'_o, ..., y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)},$$

trong đó $y_o, y'_o, ..., y_o^{(n-1)}$ là các số thực bất kì cho trước. Nghiệm $y(x)$ của bài toán trên xác định trên toàn khoảng (a ; b).

Nếu $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ là n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2) thì biểu thức

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$$

cho ta nghiệm tổng quát của phương trình (2). Ngoài ra nếu $y^*(x)$ là một nghiệm riêng nào đó của phương trình (1) thì biểu thức

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x) + y^*(x)$$

sẽ là nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Để tập hợp n nghiệm của (2) : $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ là một hệ nghiệm cơ bản thì cần và đủ là định thức Vrônxki

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

không triệt tiêu ít nhất tại một điểm của khoảng (a ; b) (và do đó không triệt tiêu trên toàn khoảng (a ; b)).

Nếu biết n nghiệm riêng độc lập tuyến tính $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ của (2) thì ta có thể tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ của phương trình không thuần nhất (1) từ biểu thức

$$y^*(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x) + \dots + \alpha_n(x)y_n(x),$$

trong đó $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ được xác định từ hệ phương trình đại số

$$\begin{cases} \alpha_1'(x)y_1 + \alpha_2'(x)y_2 + \dots + \alpha_n'(x)y_n = 0, \\ \alpha_1'(x)y_1' + \alpha_2'(x)y_2' + \dots + \alpha_n'(x)y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1'(x)y_1^{(n-1)} + \alpha_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Nếu biết một nghiệm không tầm thường $y_1(x)$ của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n thì bằng phép thế $y = y_1z$ với hàm số mới phải tìm z ta có thể đưa phương trình này về phương trình tuyến tính thuần nhất cấp $n - 1$. Trong trường hợp riêng nếu $n = 2$ thì việc giải phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2 sẽ hoàn toàn thực hiện được nếu biết một nghiệm riêng y_1 khác 0 của nó. Tuy nhiên trong trường hợp này để tìm nghiệm riêng y_2 độc lập tuyến tính với y_1, thuận lợi hơn cả là áp dụng công thức Ôxtrôgrátxki – Liuvin.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}$$

ở đây p(x) là hệ số của y'.

Ví dụ 1. Biết rằng $y_1 = x$ là nghiệm của phương trình

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Áp dụng công thức Ôxtrôgratxki – Liuvin ta có

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{-2x}{x^2+1}dx}$$

hay là

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C(x^2 + 1).$$

Do đó

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{C(x^2 + 1)}{y_1^2}.$$

Thay giá trị của y_1 vào ta được

$$\frac{y_2}{x} = C\int\frac{(x^2 + 1)}{x^2}dx = C\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2 .$$

Từ đây suy ra rằng một trong những nghiệm riêng độc lập tuyến tính với y_1 là

$$y_2 = x^2 - 1. \qquad \text{(Đặt } C = 1,\ C_2 = 0).$$

Bởi vậy nghiệm tổng quát của phương trình đang xét là

$$y = \mathscr{C}_1 x + \mathscr{C}_2(x^2 - 1),$$

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ là những hằng số tuỳ ý.

Nói chung hầu hết các phương trình tuyến tính với hệ số biến thiên cấp $n \geq 2$ đều không giải được. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt bằng các phép biến đổi khác nhau ta có thể đưa phương trình tuyến tính với hệ số biến thiên về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số và do đó có thể tìm được nghiệm tổng quát của nó. Một trong những phép biến đổi đó là phép biến đổi biến số độc lập

$$t = \varphi(x) \tag{3}$$

và phép biến đổi tuyến tính hàm phải tìm

$$y = \alpha(x)\, z. \tag{4}$$

Có thể chứng minh rằng phép biến đổi (3) và (4) không làm mất tính tuyến tính và tính thuần nhất của các phương trình (1), (2). Ngoài ra nếu phương trình (2) có thể đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số bằng phép biến đổi biến số độc lập thì chỉ có thể theo công thức

$$t = C\int\sqrt[n]{p_n(x)}dx .$$

Một trong các phương trình tuyến tính thuần nhất có thể đưa về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số là phương trình Ơ-le. Nó có dạng

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \qquad (5)$$

Nếu $x > 0$ ($x < 0$) thì phép biến đổi

$$x = e^t \ (x = -e^t)$$

sẽ đưa phương trình (5) về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số.

Phương trình

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

đưa được về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số bằng phép biến đổi

$$ax + b = e^t.$$

Ví dụ 2. Xét phương trình

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Đây là phương trình Ơ-le cấp 2. Đặt $x = e^t$ ta có

$$y' = y_t' e^{-t},\ y_x'' = (y_t'' - y_t') e^{-2t}.$$

Thay các giá trị này vào phương trình trên và giản ước ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình cuối là

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đang xét có dạng

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Ví dụ 3. Xét phương trình

$$y'' - 2xy' + x^2 y = 0.$$

Dễ kiểm tra rằng phép biến đổi $y = e^{-\frac{x^2}{2}} z$

sẽ đưa phương trình này về phương trình

$$z'' + z = 0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình cuối là

$$z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Bởi vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu có dạng

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 2

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Bằng phép biến đổi

$$y(x) = e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx}.z$$

bao giờ cũng đưa được về dạng đơn giản hơn

$$y'' + Q(x)y = 0,$$

với

$$Q = -\frac{p'}{2} - \frac{p^2}{4} + q.$$

Nhiều khi để đưa phương trình tuyến tính với hệ số biến thiên về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số người ta có thể kết hợp hai phép biến đổi (3), (4) với nhau.

Giải các phương trình Ơ-le sau :

959. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

960. $x^2y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0.$

961. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$

962. $x^2y'' + xy' + 4y = 0.$

963. $x^2y'' + y = 0.$

964. $x^3y''' + xy' - y = 0.$

965. $x^2y''' = 2y'.$

966. $xy''' + y'' = 0.$

967. $x^2y'' + 5xy' + 13y = 0.$

968. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$

969. $(x + 1)^2y'' - 2(x + 1)y' + 2y = 0.$

970. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$

971. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2.$

972. $(2x + 1)^2y'' - 4(2x + 1)y' + 8y = -8x - 4.$

973. $x^2y'' - xy' + y = 6x\ln x.$

974. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x.$

975. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x.$

976. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin\ln x.$

977. $(x - 2)^2y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x.$

978. $(2x + 3)^3y''' + 3(2x + 3)y' - 6y = 0.$

979. Tìm tất cả các phương trình dạng

$$y'' + q(x)y = 0$$

mà có thể đưa về phương trình tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số nhờ phép thế biến độc lập.

980. Cũng bài toán trên đối với phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Chứng minh rằng điều kiện tìm được thoả mãn đối với phương trình Ơ-le.

Tích phân các phương trình sau bằng cách đưa chúng về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số nhờ những phép biến đổi khác nhau :

981. $2xy'' + y' - 2y = 0.$

982. $xy'' + \frac{1}{2}y' + y = 0.$

983. $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0.$

984. $y'' - y' + e^{2x}y = 0.$

985. $(\sin x \cos x)y'' - y' + (m \operatorname{tg} x \sin^2 x)y = 0.$

986. $y'' + \frac{2}{x}y' - a^2y = 2.$

987. $xy'' + 2y' - xy = e^x.$

988. $x^4y'' + k^2y = 0.$

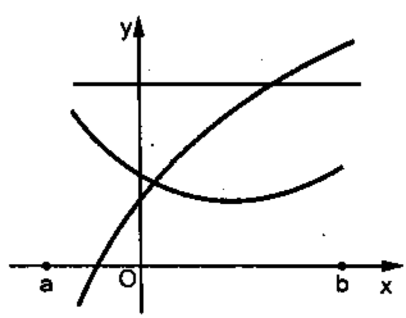
989. $y'' + 2xy' + \left(\frac{1}{x^2} + 1 + x^2\right)y = 0.$

990. $y'' - 2xy' - \left(\frac{1}{x^2} + 1 - x^2\right)y = 0.$

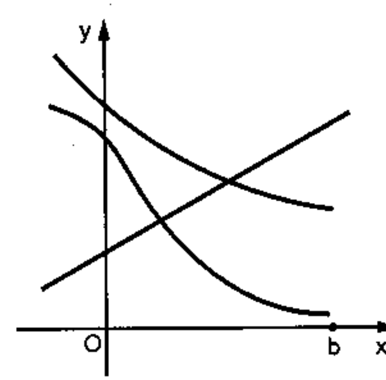
991. $xy'' - y' - 4x^3y = 0.$

992. $(1 + x^2)y'' + xy' + y = 0.$

993. Các hàm số có đồ thị dưới đây có phụ thuộc tuyến tính trên đoạn [a ; b] không ? (Hình 22, 23).



Hình 22



Hình 23

Hãy xét xem các hàm số sau đây có phụ thuộc tuyến tính hay không ?

994. $1, \sin^2 x, \cos 2x$.

995. $\ln(x^2), \ln 3x, 7$.

996. $\sin x, \sin(x+2), \cos(x-5)$.

997. $x, 0, e^x$.

998. $\sin x, \cos x, \sin 2x$.

999. $x^2, x|x|$.

1000. $x|x|, 2x + \sqrt{4x^2}$.

1001. $x, x^3, |x^3|$.

Xây dựng các phương trình tuyến tính có hệ nghiệm cơ bản sau :

1002. $y_1 = \dfrac{1}{x}, y_2 = x$.

1003. $y_1 = x, y_2 = x\ln x$.

1004. $y_1 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}, y_2 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

1005. $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}, y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$.

1006. $y_1 = x, y_2 = \sqrt{1-x^2}$.

1007. Biết rằng định thức Wrônxki của các hàm số $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ bằng 0 tại điểm x_o và khác 0 tại điểm x_1. Có thể nói gì về sự phụ thuộc tuyến tính hoặc độc lập tuyến tính của hệ hàm trên không ?

1008. Các hàm số $y_1 = x, y_2 = x^5, y_3 = |x^5|$ là nghiệm của phương trình $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Chúng có phụ thuộc tuyến tính trên khoảng $(-1 ; 1)$ không ?

1009. Chứng minh rằng nếu hai nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(với các hệ số $p(x), q(x)$ liên tục) cùng đạt cực đại tại một điểm thì chúng phụ thuộc tuyến tính.

1010. Cho phương trình

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0,$$

với $p_i(x)$ liên tục. Đồ thị của hai nghiệm bất kì của phương trình trên trong mặt phẳng (x, y) có thể : a) Cắt nhau không ? b) Tiếp xúc với nhau không ?

1011. Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp nào trên khoảng $(-1 ; 1)$ có thể có bốn nghiệm riêng

$$y_1 = x^2 - 2x + 2, y_2 = (x-2)^2, y_3 = x^2 + x - 1, y_4 = 1 - x ?$$

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau đây nếu biết một nghiệm riêng của chúng :

1012. $x^2(x + 1)y'' - 2y = 0$; $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$.

1013. $xy'' + 2y' - xy = 0$; $y_1 = \frac{e^x}{x}$.

1014. $y'' - 2(1 + tg^2x)y = 0$; $y_1 = tgx$.

1015. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0$; $y_1 = e^x - 1$.

1016. $y'' - y'tgx + 2y = 0$; $y_1 = \sin x$.

1017. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$; $y_1 = e^{ax^2}$.

1018. $xy''' - y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

1019. $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1 = x$.

$$y_2 = \frac{1}{x}.$$

Trong các bài tập dưới đây, cho biết một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng, hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất :

1020. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$; $y_1 = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} - x$.

1021. $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$; $y_1 = (x + 1)^2 - 2x$.

1022. Có thể nói gì về hàm p(x) nếu biết rằng mọi nghiệm của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

đều dần tới 0 cùng với đạo hàm cấp 1 của chúng ?

1023. Chứng minh rằng nếu $q(x) < 0$ thì nghiệm của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

không thể có giá trị cực đại dương.

1024. Chứng minh rằng tỉ số của hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kì của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(với hệ số liên tục) không thể có điểm cực đại địa phương.

1025. Chứng minh rằng nếu $q(x) \leq 0$ thì nghiệm $y(x)$ của phương trình

$$y'' + q(x)y = 0$$

với điều kiện ban đầu $y(x_o) > 0$, $y'(x_o) > 0$, luôn luôn dương với mọi $x \geq x_o$.

1026. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình

$$y'' - x^2y = 0,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ là hàm chẵn và dương khắp nơi.

1027. Tìm khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường của phương trình

$$y'' + my = 0,\ m = \text{const} > 0.$$

Có bao nhiêu không điểm ở trên đoạn $[a ; b]$?

Hãy tìm cận trên và cận dưới của khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường của các phương trình sau :

1028. $y'' + 2xy = 0$, $20 \leq x \leq 45$.

1029. $y'' - 2xy' + (x + 1)^2y = 0$, $4 \leq x \leq 19$.

1030. $y'' - 2e^xy' + e^{2x}y = 0$, $2 \leq x \leq 6$.

1031. Giả sử $x_1, x_2, \ldots$ là các không điểm liên tiếp của nghiệm của phương trình

$$y'' + q(x)y = 0$$

phân bố theo thứ tự tăng dần ($q(x) > 0$), liên tục và đơn điệu tăng trên khoảng $[x_1 ; \infty)$. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm không tầm thường của phương trình trên là đơn điệu giảm, nghĩa là $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$.

1032. Trong bài toán trên ta kí hiệu c là giới hạn hữu hạn hoặc vô hạn của $q(x)$ khi $x \to \infty$.

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi / \sqrt{c}\,.$$

1033*. Chứng minh rằng nghiệm bất kì của phương trình $y'' + xy = 0$ có ít nhất là 15 không điểm trên đoạn $[-25 ; 25]$.

1034*. Giả sử y và z là nghiệm của các phương trình

$$y'' + q(x)y = 0,$$
$$z'' + Q(x)z = 0$$

thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = z(x_o)$, $y'(x_o) = z'(x_o)$; giả sử trên khoảng $(x_o ; x_1)$: $Q(x) > q(x)$; $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Chứng minh rằng trên khoảng đó tỉ số $\frac{z(x)}{y(x)}$ đơn điệu giảm.

1035*. Cho phương trình

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)y = 0,$$

trong đó p(x) là hàm tuần hoàn liên tục chu kì ω. Giả sử $y_1(x)$ là nghiệm của phương trình trên thoả mãn điều kiện

$$y_1(x_o) = y_o,\ y_1'(x_o) = y_o'.$$

Chứng minh rằng nếu $y_2(x)$ là nghiệm thoả mãn điều kiện

$$y_2(x_o + m\omega) = y_o,\ y_2'(x_o + m\omega) = y_o'$$

(trong đó m – nguyên) thì nó thoả mãn đồng nhất thức

$$y_2(x + m\omega) = y_1(x).$$

Chứng minh rằng nếu một nghiệm không tầm thường nào đó của phương trình trên có ít nhất hai không điểm thì mọi nghiệm sẽ có vô số không điểm.

§5. Bài toán biên

Cho phương trình

$$a_o(x)\,y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad (1)$$
$$x_o \le x \le x_1$$

tìm nghiệm của (1) thoả mãn điều kiện

$$\alpha y'(x_o) + \beta y(x_o) = 0\ ; \qquad (2)$$
$$\gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0.$$

Bài toán (1) – (2) được gọi là bài toán biên. Điều kiện (2) là điều kiện biên.

Để tìm nghiệm của bài toán biên ta thay điều kiện biên (2) vào biểu thức của nghiệm tổng quát rồi xác định giá trị cụ thể của hằng số bất kì (nếu điều này có thể) trong biểu thức của nghiệm tổng quát. Khác với bài toán Cô-si, bài toán biên không phải bao giờ cũng có nghiệm mặc dù các hệ số trong phương trình liên tục.

Trong khi giải bài toán biên, người ta thường dựa vào hàm số G(x, s) có các tính chất sau :

G(x, s) xác định trong hình vuông $x_o \le x \le x_1$, $x_o \le s \le x_1$ và với s cố định $s \in (x_o ; x_1)$ nó thoả mãn các điều kiện :

1) Là nghiệm của phương trình

$$a_o(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{3}$$

tại $x \ne s$;

2) G(x, s) thoả mãn điều kiện biên (2) tại $x = x_o$ và $x = x_1$;

3) Tại x = s, G(x, s) liên tục theo x nhưng đạo hàm của nó theo x có bước nhảy bằng $1/a_o(s)$, nghĩa là

$$\begin{aligned} &G(s + 0, s) = G(s - 0, s), \\ &G'(s + 0, s) = G'_x(s - 0, s) + \frac{1}{a_o(s)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Hàm G(x, s) có các tính chất trên được gọi là *hàm Grin* của bài toán biên (1) – (2). Muốn xây dựng hàm Grin của bài toán (1) – (2), trước hết tìm hai nghiệm không tầm thường $y_1(x)$, $y_2(x)$ của phương trình (3) thoả mãn tương ứng các điều kiện biên thứ nhất và thứ hai của (2). Nếu $y_1(x)$ không đồng thời thoả mãn cả hai điều kiện biên thì hàm Grin tồn tại và có thể tìm dưới dạng

$$G(x, s) = \begin{cases} ay_1(x) & (x_o \le x \le s), \\ by_2(x) & (s \le x \le x_1). \end{cases} \tag{5}$$

Các hàm số a, b là hàm của biến s và được xác định sao cho (5) thoả mãn điều kiện (4), nghĩa là

$$by_2(s) = ay_1(s),\ by'_2(s) = ay'_1(s) + \frac{1}{a_o(s)}$$

Nếu hàm Grin G(x, s) tồn tại thì nghiệm của bài toán biên (1) – (2) được biểu thị bằng công thức

$$y(x) = \int_{x_o}^{x_1} G(x,s)f(s)ds.$$

Bây giờ ta xét bài toán sau :

$$a_o(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y ; \tag{6}$$

$$\alpha y'(x_o) + \beta y(x_o) = 0, \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0. \tag{7}$$

Giá trị λ để cho bài toán (6) – (7) có nghiệm không tầm thường y(x) được gọi là giá trị riêng của bài toán biên (6) – (7). Bản thân nghiệm y(x) được gọi là hàm riêng.

Tìm nghiệm của các bài toán biên sau :

1036. $y'' + y = 0$; $y(x) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

1037. $y'' + y = 0$; $y(x) = 0$, $y(\pi) = 0$.

1038. $y'' + y = x$; $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1039. $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{e^2+1}{2e}$.

1040. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

1041. $y'' - y' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$.

1042. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

1043. $y'' + y = 2x - \pi$; $y(x) = 0$, $y(\pi) = 0$.

1044. $y'' - y' - 2y = 0$, $y'(0) = 2$, $y(+\infty) = 0$.

1045. $y'' - y = 1$; $y(0) = 0$, y(x) giới nội khi $x \to +\infty$.

1046. $x^2y'' - 6y = 0$; y(0) hữu hạn, $y(1) = 2$.

1047. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y(x) = o(x)$ khi $x \to 0$, $y(1) = 3$.

1048. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$; $y'(1) = 3$, $y(x) = 2(x^{-2})$ khi $x \to \infty$.

1049*. Với những giá trị nào của a, bài toán biên

$$y'' + ay = 1,$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0$$

không có nghiệm ?

Hãy lập hàm Grin cho các bài toán biên sau :

1050. $y'' + y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

1051. $y'' - y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$.

1052. $y'' + y = f(x)$; $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

1053. $x^2y'' + 2xy' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y'(3) = 0$.

1054. $xy'' - y' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.

1055. $x^2y'' - 2y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.

1056. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(x)$ giới nội khi $x \to \infty$.

1057. $xy'' + y' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(x)$ giới nội khi $x \to \infty$.

1058. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$; $y(0)$ giới nội, $y(1) = 0$.

1059. $y'' - y = f(x)$; $y(x)$ giới nội khi $x \to \pm\infty$.

1060. $x^2y'' - y = f(x)$; $y(x)$ giới nội khi $x \to 0$ và $x \to +\infty$.

1061. Với giá trị nào của a hàm Grin của bài toán biên

$$y'' + ay = f(x) ;$$
$$y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

sẽ tồn tại ?

Hãy tìm giá trị riêng và hàm riêng của các bài toán sau đây :

1062. $y'' = \lambda y$; $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

1063. $y'' = \lambda y$; $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$.

1064. $x^2y'' = \lambda y$; $y(1) = 0$, $y(a) = 0$.

§6. Các bài tập thuộc loại khác nhau

1065. Dùng định lí Picar hãy chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của các bài toán sau, đồng thời đánh giá miền tồn tại nghiệm của nó :

a) $y'' + 2xy = 0$; $y = 2$, $y' = 3$ khi $x = 1$.

b) $y'' + \dfrac{1}{4 + x^2}y' - \dfrac{1}{x - 1} = x$; $y = 1$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

Hãy tích phân các phương trình sau đây :

1066. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$.

1067. $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$.

1068. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$.

1069. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$.

1070. $y'' - 5y = -5x^2 + 2x$.

1071. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

1072. $y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2$.

1073. $y'' + y = 2\sin x$.

1074. $y'' + 9y = \cos 2x.\cos 3x$.

1075. $y'' - y = e^x x\cos x$.

1076. $y'' + 4y = x\sin^2 x$.

1077. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = \dfrac{25}{4}\cos 2x + 8e^x$.

1078. $y''' + y' = x\cos^2 x$.

1079. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$.

1080. $y''' + y = \dfrac{x^3 - 6}{x^4}$.

1081. $y''' - 2y'' + y' = \dfrac{2x^2 + 12x + 24}{x^5}$.

Bằng phép thế biến độc lập hoặc hàm phải tìm hãy đưa các phương trình sau đây về phương trình với hệ số hằng số và giải chúng :

1082. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

1083. $x^2y'' + xy' + y = 0$.

1084. $x^2y'' - xy' + y = 0$.

1085. $x^2y'' - 3y' + 13y = 0$.

1086. $(1 - x^2)y'' - xy' + 2y = 0.$

1087. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$

1088. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$

1089. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}y = 0.$

1090. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$

1091. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau đây, biết rằng chúng có nghiệm riêng dưới dạng đa thức :

1092. $(3x^3 - x)y'' - 2y' - 6xy = 0.$

1093. $y'' + xy' - y = 0.$

1094. $x(x + 2)y'' - 2(x + 1)y' + 2y = 0.$

1095. $y'' + 2xy' - 2y = 0.$

1096*. Chứng minh rằng nếu $q(x) \leq 0$ thì bài toán biên

$$y'' + q(x)y = 0 ;$$

$$y(x_1) = a,\ y(x_2) = b,$$

với bất kì a, b, $x_1 \neq x_2$, có nghiệm duy nhất. Chứng minh rằng nghiệm này là hàm đơn điệu nếu b = 0.

1097. Chứng minh rằng phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp n :

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),$$

trong đó các $p_i(x)$, f(x) liên tục trên (a ; b), (i = 1, 2, ..., n), có đúng n + 1 nghiệm độc lập tuyến tính.

1098. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của nghiệm phương trình Betxen

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,\ \left(n \neq \pm\frac{1}{2}\right)$$

dần tới π khi $x \to \infty$. Khoảng cách trên bằng bao nhiêu nếu $n = \pm\frac{1}{2}$?

1099*. Giả sử f(t) là hàm khả tích và $\int_1^{\infty} t\,|f(t)|\,dt < \infty.$

Chứng minh rằng phương trình

$$x'' + f(t)x = 0$$

có nghiệm $\varphi(t)$ sao cho $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$;

$$\lim_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0,$$

và tồn tại nghiệm $\psi(t)$ sao cho

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 1 \ ; \ \lim_{t\to\infty} \psi'(t) = 1.$$

1100*. Cho phương trình

$$x'' + (1 + r(t))x = 0$$

với

$$\int_1^{\infty} |r(t)|\, dt < \infty.$$

Chứng minh rằng phương trình trên có các nghiệm $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sao cho :

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi_1(t) - e^{it}) = 0 \ ; \ \lim_{t\to\infty} (\varphi_1'(t) - ie^{it}) = 0 \ ;$$

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi_2(t) - e^{-it}) = 0 \ ; \ \lim_{t\to\infty} (\varphi_2'(t) + ie^{-it}) = 0.$$

1101*. Giả sử f(t) là hàm có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn [a ; b] và f(a) = f(b) = 0 ; f(t) > 0 trên (a ; b).

Chứng minh rằng

$$(b - a) \int_a^b \frac{|f''(t)|}{f(t)} dt > 4.$$

1102*. Cho phương trình tuyến tính

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (1)$$

Tìm điều kiện cần và đủ mà p(x), q(x) phải thoả mãn để phương trình trên có hai nghiệm $y_1(x)$, $y_2(x)$ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$y_2(x) = xy_1(x).$$

Chứng minh rằng nếu điều kiện đó được thoả mãn thì phương trình (1) có thể tích phân được bằng cầu phương. Hãy tổng quát hoá.

Ứng dụng :

1) Cho $p(x) = \frac{1}{x} - 2$, xác định q(x) sao cho điều kiện trên được thoả mãn và tìm biểu thức của nghiệm tổng quát.

2) Giả sử $p(x) = \frac{1}{x} - 2$ và q(x) lấy giá trị vừa tìm được. Hãy tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \sqrt{|x|}.$$

1103*. Cho phương trình

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0.$$

Tìm điều kiện mà p(x), q(x), r(x) phải thoả mãn để phương trình trên có một tích phân đầu dạng

$$H(x)y'' + K(x)y = C.$$

1104. Giải phương trình

$$y''' = (x^2y'' - 2xy' + 2y)p(x) + q(x).$$

1105*. Giả sử $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình cấp 3

$$\frac{d^3y}{dx^3} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0. \qquad (1)$$

Chứng minh rằng phương trình đó thừa nhận mọi nghiệm của phương trình cấp 2 :

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = C,$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý. Từ đó suy ra nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu.

Ứng dụng : Tìm điều kiện mà p(x), q(x) phải thoả mãn để cho phương trình cấp 2 trên có hai nghiệm riêng thoả mãn hệ thức

$$y_1y_2' - y_2y_1' = 1.$$

Hãy kiểm chứng kết quả nhận được với giả thiết $p = \frac{k}{x^2}$ (k = const).

1106. Cho hệ hàm $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ liên tục trên $[a ; b]$. Chứng minh rằng hệ đó phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi

$$\det\left(\int_a^b y_k(x)y_j(x)dx\right)_{k,j=1}^n = 0.$$

1107*. Cho n hàm số $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ xác định trên $(a ; b)$. Chứng minh rằng hệ hàm trên độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các điểm $x_j \in (a ; b)$, $(j = 1, 2, ..., n)$ sao cho

$$\det\left(y_k(x_j)\right)_{k,j=1}^n \neq 0.$$

(Bài thi vô địch sinh viên giỏi toàn Liên Xô năm 1975).

1108*. Cho phương trình vi phân :

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y' & y'' & y''' \\ y'' & y''' & y^{(4)} \end{vmatrix} = 0.$$

Chứng minh rằng mỗi nghiệm của phương trình này sẽ thoả mãn một phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính với hệ số hằng số nào đấy.

Chương III

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. Một số khái niệm cơ bản

Hệ phương trình vi phân *dạng chuẩn tắc* là hệ có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \quad (1)$$

Ở đây $y_1, y_2, ..., y_n$ là các hàm của x mà chúng ta cần tìm, $f_1, f_2, ..., f_n$ là các hàm cho trước, xác định và liên tục trong một miền G nào đó của các biến $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. Số n được gọi là bậc của hệ (1).

Tập hợp n hàm $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ xác định và khả vi liên tục trên khoảng (a ; b) được gọi là nghiệm của hệ (1) trên khoảng đó nếu khi thay chúng vào hệ (1) ta được n đồng nhất thức với mọi $x \in (a\ ;\ b)$. Đường cong trong không gian (n + 1) chiều $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ ứng với nghiệm của hệ (1) được gọi là đường cong tích phân.

Bài toán Cô-si : Tìm nghiệm $(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ của hệ (1) thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y_1(x_o) = y_1^o, y_2(x_o) = y_2^o, ..., y_n(x_o) = y_n^o$$

trong đó x_o, y_1^o, y_2^o, ..., y_n^o là các số cho trước mà ta gọi là điều kiện ban đầu.

Nói chung bài toán Cô-si không phải bao giờ cũng có nghiệm, hoặc có nghiệm nhưng nghiệm có thể không duy nhất. Tuy nhiên người ta đã chứng minh được rằng nếu $(x_o, y_1^o, ..., y_n^o) \in G$ và $f_1, f_2, ..., f_n$ liên tục trong G thì bài toán Cô-si luôn luôn có nghiệm (định lí Pêanô). Nếu ngoài các điều kiện trên, các hàm $f_1, f_2, ..., f_n$ còn thoả mãn điều kiện Lipsit theo $y_1, y_2, ..., y_n$ trong G thì bài toán Cô-si có nghiệm duy nhất. Điều kiện Lipsit sẽ thoả mãn, chẳng hạn, nếu các hàm $f_1, f_2, ..., f_n$ có các đạo hàm riêng theo $y_1, y_2, ..., y_n$ giới nội.

Tập hợp n hàm số

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n), \end{aligned} \tag{2}$$

xác định trong miền biến thiên của x, $C_1, C_2, ..., C_n$, có đạo hàm riêng liên tục theo x, gọi là nghiệm tổng quát của hệ (1) trong miền G (miền mà tại đó sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si được bảo đảm) nếu chúng có các tính chất sau :

1. Từ hệ (2) ta có thể giải ra được $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ C_2 &= \psi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{aligned} \tag{3}$$

2. Hệ hàm (2) là nghiệm của hệ (1) với mọi giá trị của hằng số C_i (i = 1, 2, ..., n) xác định từ (3) khi $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ biến thiên trong G.

Nghiệm của hệ (1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si được bảo đảm được gọi là nghiệm riêng. Rõ ràng nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát với giá trị xác định của hằng số C_i (i = 1, 2, ..., n) là nghiệm riêng.

Nghiệm của hệ (1) mà tại mỗi điểm của nó tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si bị phá vỡ được gọi là nghiệm kì dị.

Hàm $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ xác định, khả vi liên tục và không đồng nhất bằng hằng số được gọi là tích phân của hệ (1) nếu nó trở thành đồng nhất bằng hằng số khi ta thay $y_1, y_2, ..., y_n$ bằng bất kì nghiệm riêng nào của hệ (1).

Hệ thức

$$\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C$$

được gọi là tích phân đầu của hệ (1).

Nếu các vế phải của hệ (1) không phụ thuộc trực tiếp vào x, nghĩa là nó có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = Y_1(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = Y_2(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = Y_n(y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{4}$$

thì hệ (4) được gọi là *ôtônôm* (hay hệ dừng). Hình chiếu của đường cong tích phân hệ (4) lên không gian pha $(y_1, y_2, ..., y_n)$ được gọi là quỹ đạo pha của hệ (4). Người ta đã chứng minh được rằng quỹ đạo pha của hệ (4) chỉ có thể ở một trong ba dạng : điểm đứng yên, quỹ đạo tuần hoàn và quỹ đạo không tuần hoàn.

Hệ

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \tag{5}$$

được gọi là hệ phương trình vi phân *dạng đối xứng*.

Nếu tại lân cận điểm $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ có ít nhất một trong các hàm $X_1, X_2, ..., X_n$ không triệt tiêu, thì hệ phương trình trên có thể thay bằng hệ $n-1$ phương trình dạng chuẩn tắc. Chẳng hạn tại lân cận $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ X_n không triệt tiêu. Khi đó hệ (5) có thể thay bằng hệ chuẩn tắc

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{X_1}{X_n}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_n} = \dfrac{X_2}{X_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{X_{n-1}}{X_n}. \end{cases}$$

Ngược lại, bất kì hệ chuẩn tắc (1) đều có thể viết dưới dạng đối xứng :

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}.$$

§2. Phương pháp tích phân hệ phương trình vi phân

Nếu hệ (1) có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_n) \end{cases}$$

thì ta chỉ việc tích phân từng phương trình riêng biệt của hệ.

Nếu (1) có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

thì sau khi tích phân phương trình vi phân cấp 1 đầu, ta thay y_1 nhận được vào phương trình thứ hai và tiếp tục tích phân phương trình vi phân cấp 1 thu được đó. Tiếp đến ta lại thay y_2 nhận được vào phương trình thứ ba và tích phân phương trình thu được,...

Nếu hệ (1) không có các dạng trên thì ta có thể tích phân nó bằng cách đưa nó về một phương trình vi phân cấp cao (cấp n). Thực chất của phương pháp này là vi phân liên tiếp một trong các phương trình của hệ rồi loại bỏ n – 1 hàm phải tìm khác. Cuối cùng nhận được một phương trình vi phân cấp n đối với hàm phải tìm còn lại. Sau khi tích phân phương trình này ta có thể tìm được nghiệm tổng quát của hệ.

Nhiều khi để tích phân hệ (1) ta có thể tìm các tích phân đầu độc lập của chúng, nhờ lập những tổ hợp khả tích, nghĩa là những phương trình vi phân có thể dễ dàng tích phân, nhận được từ hệ đã cho bằng những phép biến đổi không phức tạp lắm. Phương pháp tích phân như vậy được gọi là *phương pháp tổ hợp khả tích*. Nếu bằng phương pháp này ta tìm được n tích phân đầu độc lập của hệ (1) thì quá trình tích phân hệ (1) được kết thúc.

Ví dụ 1. Tích phân hệ phương trình

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -x.$$

Vi phân hai vế phương trình thứ hai ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} = -y.$$

Do đó

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y \text{ hay } \frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

Đây là phương trình cấp 2 đối với hàm phải tìm y.

Giải nó ta được

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t,$$

$$x = -\frac{dy}{dt} = C_1\sin t - C_2\cos t.$$

Bởi vậy, nghiệm tổng quát của hệ là

$$x = C_1\sin t - C_2\cos t,$$

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

Ví dụ 2. Tích phân hệ phương trình

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}.$$

Ta sẽ tích phân hệ trên bằng phương pháp tổ hợp khả tích. Cộng tử số và mẫu số tương ứng của các phân số trên và áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Do đó

$$d(x + y + z) = 0$$

hay

$$x + y + z = C_1.$$

Bây giờ ta nhân tử số và mẫu số của từng phân số trong hệ lần lượt với 2x, 2y, 2z, rồi áp dụng cho các phân số nhận được quá trình trên ta có

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-z)} = \frac{2zdz}{2z(y-x)} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{0}$$

Từ đây suy ra

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$$

hay

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2, \ (C_2 \geq 0).$$

Do đó hệ phương trình đã cho có tích phân tổng quát là

$$x + y + z = C_1,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2, (C_2 \geq 0).$$

Ví dụ 3. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2} \end{cases}.$$

Ta viết hệ dưới dạng đối xứng sau :

$$\frac{dy}{\dfrac{z}{(z-y)^2}} = \frac{dz}{\dfrac{y}{(z-y)^2}} = \frac{dx}{1},$$

hay

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z-y)^2}.$$

Từ hệ thức

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y},$$

ta tìm được

$$y^2 - z^2 = C_1.$$

Ngoài ra, áp dụng tính chất của tỉ lệ thức ta có

$$\frac{d(y-z)}{z-y} = \frac{dx}{(z-y)^2}.$$

Từ hệ cuối cùng này ta tìm được tích phân thứ hai

$$2x + (y-z)^2 = C_2.$$

Như vậy, hệ phương trình đang xét có tích phân tổng quát là

$$y^2 - z^2 = C_1,$$

$$2x + (y-z)^2 = C_2.$$

Tích phân các hệ phương trình sau đây :

1109. $\begin{cases} y_1' = 4y_1, \\ y_2' = 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 4y_3, \\ y_4' = y_3 + 3y_4, \\ y_5' = y_4 + 3y_5. \end{cases}$

1110. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2z}{2x - z^2}. \end{cases}$

1111. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{1+x^2}y, \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{x}z + y + x. \end{cases}$

1112. $\begin{cases} xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \\ z' = \dfrac{y+z}{z^2 - x} \end{cases}$

1113. $\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{z^2}{y}. \end{cases}$

1114. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = \left(-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x} - 1\right)y + \left(\dfrac{2}{x} - 1\right)z. \end{cases}$

1115. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

1116. $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \dfrac{dz}{1}.$

1117. $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{z}.$

1118. $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - lz} = \dfrac{dz}{ly - mx}.$

1119. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z + e^y}{z + e^x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}. \end{cases}$

1120. $\begin{cases} y'' = y' + z, \\ z' = \left(\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} - 1\right)y' - \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)z - \dfrac{2}{x^3}y. \end{cases}$

Hãy tìm các tích phân độc lập của những hệ phương trình sau :

1121. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$.

1122. $\dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dy}{\cos x} = \dfrac{dz}{\cos x \cos y}$.

1123. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{x + y}$.

1124. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{0}$.

1125. $\dfrac{dx}{z(x + z)} = \dfrac{dy}{-y(y + z)} = \dfrac{dz}{0}$.

1126. $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{y + z} = \dfrac{dz}{-26y - z}$.

Tìm nghiệm các bài toán sau đây :

1127. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - y^2$, $\dfrac{dy}{dt} = 2xy$; $x = -1$, $y = 0$ khi $t = 1$.

1128. $\dfrac{dx}{dt} = -x^2 + y^2$, $\dfrac{dy}{dt} = -2xy$; $x = 0$, $y = 1$ khi $t = 0$.

1129. $\dfrac{dx}{dt} = e^{-x}\cos y$, $\dfrac{dy}{dt} = -e^{-x}\sin y$; $x = 1$, $y = 0$ khi $t = 0$.

Ta nói rằng các hàm khả vi liên tục $u(x, y)$, $v(x, y)$ thoả mãn điều kiện Côsi – Riman nếu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Nếu u(x, y) và v(x, y) thoả mãn điều kiện Côsi – Riman, thì hàm

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

sẽ là hàm chính quy của biến phức $z = x + iy$.

Giả sử ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Ở đây u, v thoả mãn điều kiện Côsi – Riman. Nhân phương trình thứ hai của hệ với i và cộng từng vế vào phương trình đầu ta được

$$\frac{dz}{dt} = f(z). \tag{2}$$

Phương trình cuối được gọi là phương trình vi phân phức ứng với hệ (1).

Tích phân phương trình (2) và tách phần thực, phần ảo trong nghiệm tổng quát của nó ta tìm được nghiệm tổng quát của hệ (1).

Tích phân các hệ phương trình vi phân sau :

1130. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \alpha x^2 + 2\beta xy - \alpha y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - \beta x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2, \end{cases}$$

trong đó α, β là những hằng số. Xác định dạng của vị trí cân bằng $x = 0$, $y = 0$.

1131. Tìm nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2}(x^3 - 3xy^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}(3x^2y - y^2) \end{cases}$$

thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y(1) = 0, x(1) = 1.$$

§3. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

1. Hệ thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{1}$$

Ta sẽ giả thiết các hàm số $p_{ij}(x)$, $f_i(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) liên tục trên khoảng $(a ; b)$. Với giả thiết trên, đối với bất kì $x_o \in (a ; b)$ và các giá trị tuỳ ý $y_1^o, y_2^o, \dots, y_n^o$ hệ (1) có nghiệm duy nhất $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y_1(x_o) = y_1^o,\ y_2(x_o) = y_2^o, \dots, y_n(x_o) = y_n^o.$$

Nếu trong hệ (1) các hàm $f_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) nghĩa là nó có dạng

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(x)y_j,\ k = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

thì (2) được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Để xây dựng nghiệm tổng quát của hệ (2) ta phải tìm n nghiệm độc lập tuyến tính của nó :

$$(y_{11}(x), y_{12}(x), \dots, y_{1n}(x)),$$
$$(y_{21}(x), y_{22}(x), \dots, y_{2n}(x)),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(y_{n1}(x), y_{n2}(x), \dots, y_{nn}(x)).$$

Hệ nghiệm có tính chất như vậy được gọi là hệ nghiệm cơ bản. Khi đó nghiệm tổng quát có dạng

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j y_{j1}(x), y_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j y_{j2}(x), \dots, y_n = \sum_{j=1}^{n} c_j y_{jn}(x).$$

Để một hệ nghiệm là hệ nghiệm cơ bản thì cần và đủ là định thức Wrônxki

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

khác không ít nhất tại một điểm của khoảng (a ; b).

2. Hệ không thuần nhất

Nếu biết nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất và một nghiệm riêng nào đó của hệ không thuần nhất, thì tổng của chúng sẽ cho ta nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất. Để tìm nghiệm riêng của hệ không thuần nhất khi biết n nghiệm độc lập tuyến tính

$$(z_{11}(x), z_{12}(x), \dots, z_{1n}(x)),$$

$$(z_{21}(x), z_{22}(x), \dots, z_{2n}(x)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(z_{n1}(x), z_{n2}(x), \dots, z_{nn}(x))$$

của hệ thuần nhất tương ứng, ta áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrăng như sau :

Đặt

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) z_{jk}(x) \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

trong đó $C_j(x)$ được xác định từ hệ phương trình đại số

$$\sum_{j=1}^{n} C'_j(x) z_{jk}(x) = f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Giải hệ này ta tìm được $C'_j(x)$ và do đó $C_j(x)$. Thay $C_j(x)$ vào biểu thức của y_k (j, k = 1, ..., n) ta được nghiệm riêng của hệ không thuần nhất.

3. Hệ phương trình tuyến tính với hệ số hằng số

Hệ loại này có dạng

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j + f_k(x), \ (k = 1, 2, \dots, n),$$

trong đó a_{kj} là các hằng số thực. Để tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình trên ta chỉ cần tìm nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng (xem mục 2). Cách tìm nghiệm của hệ thuần nhất

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j, \ (k = 1, 2, ..., n), \tag{3}$$

như sau : Đặt

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, ..., y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \tag{4}$$

trong đó $\lambda, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ là những số mà ta cần chọn sao cho hệ hàm trên cho ta nghiệm không tầm thường (nghiệm không đồng nhất bằng 0) của hệ (3).

Thay hệ hàm (4) vào (3) ta suy ra phương trình để xác định λ như sau :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

(5) được gọi là phương trình đặc trưng của hệ (3). Nghiệm của (5) là nghiệm đặc trưng của hệ (3). Có thể xảy ra các khả năng sau đây :

1) Mọi nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ của phương trình đặc trưng là thực và khác nhau. Khi đó thay lần lượt $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ vào hệ

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0, \end{cases} \tag{6}$$

ta sẽ lần lượt xác định được $\gamma_1 = \gamma_{i1}, \gamma_2 = \gamma_{i2}, ..., \gamma_n = \gamma_{in}$ tương ứng $(i = 1, 2, ..., n)$. Thay lần lượt chúng vào (4) ta được hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (3).

2) Mọi nghiệm của phương trình đặc trưng (5) khác nhau nhưng trong đó có nghiệm phức.

Nếu $a + ib$ là một nghiệm phức của phương trình (5) thì $a - ib$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

Xây dựng nghiệm dạng (4) ứng với a + ib rồi tách phần thực và phần ảo của nghiệm nhận được ta sẽ có hai nghiệm độc lập tuyến tính ứng với cặp nghiệm phức liên hợp trên. Làm như vậy với mọi cặp nghiệm phức liên hợp và kết hợp với những nghiệm thực còn lại (nếu có) ta sẽ xây dựng được hệ nghiệm cơ bản của (3).

3) Phương trình đặc trưng có nghiệm bội. Nếu λ_1 là nghiệm bội k và thực thì nó ứng với nghiệm dạng

$$y_1 = p_1(x)e^{\lambda_1 x},\ y_2 = p_2(x)e^{\lambda_1 x},\ ...,\ y_n = p_n(x)e^{\lambda_1 x},$$

trong đó $p_1, p_2, ..., p_n$ là các đa thức của x bậc không vượt quá k – 1. Trong các hệ số của mọi đa thức trên, k hệ số sẽ là bất kì, các hệ số còn lại biểu diễn qua chúng.

Đặt lần lượt một trong k hệ số bất kì này bằng 1, các hệ số còn lại bằng 0, ta sẽ xây dựng được k nghiệm riêng độc lập ứng với λ_1.

Nếu $\lambda_1 = a + ib$ là nghiệm phức bội k thì a – ib cũng là nghiệm phức bội k. Tiến hành quá trình trên đối với nghiệm phức a + ib rồi tách phần thực, phần ảo các nghiệm nhận được ta sẽ tìm được 2k nghiệm riêng độc lập tuyến tính ứng với cặp nghiệm phức liên hợp bội k ở trên. Tiến hành như vậy đối với mọi nghiệm bội và kết hợp với các nghiệm ứng với nghiệm đặc trưng đơn, ta sẽ xây dựng được hệ nghiệm cơ bản của (3).

Đối với hệ phương trình tuyến tính với hệ số biến thiên, nói chung không có phương pháp tổng quát để tích phân nó. Tuy vậy, nếu các hệ số của hệ (2) có dạng

$$p_{kj}(x) = a_{kj}\varphi(x) \quad (k, j = 1, 2, ..., n)$$

thì bằng phép thế

$$t = \int \varphi(x)dx,$$

ta đưa được hệ (2) về hệ phương trình với hệ số hằng số và do đó có thể tìm được nghiệm tổng quát của hệ ban đầu (2).

Xét hệ cấp 2 tuyến tính

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p(t)x - q(t)y \equiv u(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = q(t)x + p(t)y \equiv v(t, x, y). \end{cases} \tag{7}$$

Dễ thấy rằng, ở đây các hàm u(t, x, y), v(t, x, y) thoả mãn điều kiện Côsi – Riman

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ (7) có thể tìm bằng phương pháp đã trình bày ở §2. Khi đó hệ (7) đưa được về hệ

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t)z, \qquad \lambda(t) = p(t) + iq(t).$$

Tích phân phương trình cuối này và tách phần thực, phần ảo của nghiệm nhận được ta sẽ tìm được nghiệm tổng quát của hệ (7).

Ví dụ 1. Tích phân hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases} \tag{8}$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \ z = \gamma_2 e^{\lambda x}.$$

Phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

có nghiệm $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Ứng với $\lambda_1 = 1$, hệ (6) có dạng

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Chọn $\gamma_1 = 1$ ta được $\gamma_2 = -1$. Bởi vậy nghiệm ứng với $\lambda_1 = 1$ là

$$y_1 = e^x, \ y_2 = -e^x.$$

Hoàn toàn tương tự ta tìm được nghiệm ứng với $\lambda_2 = 2$ là

$$y_2 = 2e^{2x}, \ z_2 = -3e^{2x}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ (8) sẽ là

$$y = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x},$$
$$z = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}.$$

Ví dụ 2. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases} \tag{9}$$

Dễ kiểm tra rằng phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.

Tiến hành như ở ví dụ 1 đối với nghiệm $\lambda_1 = 2 + i$ ta tìm được nghiệm phức

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x),$$
$$z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x).$$

Tách phần thực và phần ảo của nó ta được hai nghiệm riêng thực độc lập tuyến tính của hệ :

$$y_1 = e^{2x}\cos x,\ z_1 = e^{2x}\sin x,$$
$$y_2 = e^{2x}\sin x,\ z_2 = -e^{2x}\cos x.$$

Do đó nghiệm tổng quát của hệ (9) có dạng

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x),$$
$$z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x).$$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + 2y + 5z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - y - 6z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -8x + 3y + 9z. \end{cases} \tag{10}$$

Dễ thấy rằng phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Đối với nghiệm đặc trưng đơn $\lambda_1 = 2$ ta dễ dàng tìm được nghiệm riêng

$$x_1 = e^{2t},\ y_1 = -2e^{2t},\ z_1 = 2e^{2t}.$$

Bây giờ ta xây dựng hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính ứng với nghiệm bội $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Đặt

$$x = (A_1t + A_2)e^t,\ y = (B_1t + B_2)e^t,\ z = (C_1t + C_2)e^t.$$

Thay các giá trị này của x, y, z vào hệ (10), sau khi đơn giản cho e^t ta được

$$A_1t + A_1 + A_2 = (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1)t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2,$$

$$B_1t + B_1 + B_2 = (6A_1 - B_1 - 6C_1)t + 6A_2 - B_2 - 6C_2,$$

$$C_1t + C_1 + C_2 = (-8A_1 + 3B_1 + 9C_1)t - 8A_2 + 3B_2 + 9C_2.$$

Đồng nhất các hệ số của t và số hạng tự do ta được $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$, $A_2 = C_1 + C_2$, $B_2 = 3C_1$, trong đó C_1, C_2 có thể nhận giá trị bất kì. Như vậy

$$x = (C_1t + C_1 + C_2)e^t,\ y = 3C_1e^t,\ z = (C_1t + C_2)e^t.$$

Bởi vậy hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính, ứng với nghiệm bội $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ có dạng

$$x_2 = (t + 1)e^t,\ y_2 = 3e^t,\ z_2 = te^t\ ;$$

$$x_3 = e^t,\ y_3 = 0,\ z_3 = e^t$$

(xem phần lí thuyết ở trên).

Do đó nghiệm tổng quát của hệ (10) là

$$x = C_1e^{2t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t,$$

$$y = -2C_1e^{2t} + 3C_2e^t,$$

$$z = 2C_1e^{2t} + (C_2t + C_3)e^t.$$

Tích phân các hệ phương trình sau đây :

1132. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + 4z. \end{cases}$

1133. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = -6y - 3z. \end{cases}$

1134. $\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = -3y + 2z. \end{cases}$

1135. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 6y - 5z. \end{cases}$

1136. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$

1137. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -10y - z. \end{cases}$

1138. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

1139. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 8y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$

1140. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

1141. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

1142. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

1143. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + 5y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0. \end{cases}$

1144. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

1145. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - x. \end{cases}$

1146. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$

1147. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 3x + y = 0. \end{cases}$

1148. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$

1149. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

1150. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 21x - 8y - 19z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 18x - 7y - 15z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$

1151. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 3y - 9z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -18x + 7y + 18z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 18x - 6y - 17z. \end{cases}$

1152. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

1153. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

1154. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

1155. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$

1156. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y - 4z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -12x + 5y + 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$

1157. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - 3z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z. \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 2y - 6z. \end{cases}$

1158. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

1159. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + z. \end{cases}$

1160. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2z - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2x - z. \end{cases}$

1161. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z - x + y. \end{cases}$

1162. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$

1163. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 2x - 2z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$

1164. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y - 4z. \end{cases}$

1165. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - 4y. \end{cases}$

1166. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z - y. \end{cases}$

1167. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z - x + y. \end{cases}$

1168. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z. \end{cases}$

Giải các hệ phương trình sau đây (là các hệ chưa được đưa về dạng chuẩn tắc):

1169. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2x - 3y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x - 2y. \end{cases}$

1170. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2x. \end{cases}$

1171. $\begin{cases} \dfrac{2dx}{dt} - 5\dfrac{dy}{dt} = 4y - x, \\ \dfrac{3dx}{dt} - 4\dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

1172. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + x = 0. \end{cases}$

1173. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3x - y - z, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -x + 3y - z, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -x - y + 3z. \end{cases}$

1174. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x - 3y = 0, \\ \dfrac{4d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$

Tích phân các hệ phương trình sau bằng cách đưa chúng về hệ tuyến tính với hệ số hằng số :

1175. $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = -y + z, \\ x\dfrac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$

1176. $\begin{cases} x^2\dfrac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ x^2\dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$

1177. $\begin{cases} 2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \\ 2\sqrt{x}\dfrac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$

1178. $\begin{cases} x\dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ x\dfrac{dy_2}{dx} = y_2, \\ x\dfrac{dy_3}{dx} = -y_3. \end{cases}$

Bằng phương pháp biến thiên hằng số, hãy tìm nghiệm tổng quát của các hệ không thuần nhất sau đây :

1179. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

1180. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

1181. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$

1182. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

1183. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

1184. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16 + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$

1185. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

1186. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^{t}\sin t. \end{cases}$

1187. $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$

1188. $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^{x}, \\ z' = 3y - 2z + 4e^{x}. \end{cases}$

1189. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t. \end{cases}$

1190. $\begin{cases} y' = 2y + 4z + \cos x, \\ z' = -y - 2z + \sin x. \end{cases}$

1191. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + tg^2t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + tgt. \end{cases}$

1192. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

1193. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

1194. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

1195. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

1196. $\begin{cases} y' = -5y + 2z + 40e^x, \\ z' = y - 6z + 9e^{-x}. \end{cases}$

Tìm nghiệm của các bài toán Cô-si sau :

1197. $y' = y + z,\ z' = -2y + 4z$; $y = 0,\ z = -1$ khi $x = 0$.

1198. $y' = 3y - z,\ z' = 10 - 4z$; $y = 1,\ z = 5$ khi $x = 0$.

1199. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + z; \end{cases}$

$x = 1,\ y = \dfrac{1}{2},\ z = \dfrac{1}{2}$ khi $t = 0$.

1200. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 - x^2 + x - 2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2 + 2x^2 - 4x - 7; \end{cases}$

$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 2$.

1201. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t; \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = -2.$

1202. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - y = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - x = 0; \end{cases}$

$x(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

1203. $\begin{cases} y'' + 2z' - y + 2z = 1, \\ z'' + 2y' + 2y - z = x; \end{cases}$

$y(0) = -\dfrac{7}{9},\ y'(0) = \dfrac{2}{3},\ z(0) = -\dfrac{2}{9},\ z'(0) = \dfrac{1}{3}.$

Hãy xây dựng các hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ nghiệm cơ bản sau :

1204. $\begin{cases} y_{11} = e^{3t}, y_{12} = 0, \\ y_{21} = 0, y_{22} = e^{2x}. \end{cases}$

1207. $\begin{cases} y_{11} = \cos 2x, y_{12} = -\sin 2x \\ y_{21} = \sin 2x, y_{22} = \cos 2x. \end{cases}$

1205. $\begin{cases} y_{11} = e^{3x}, y_{12} = 0, \\ y_{21} = xe^{3x}, y_{22} = e^{3x}. \end{cases}$

1208. $\begin{cases} y_{11} = 1, y_{12} = -x, \\ y_{21} = x, y_{22} = 1. \end{cases}$

1206. $\begin{cases} y_{11} = e^{3x}, y_{12} = 0, \\ y_{21} = 0, y_{22} = e^{3x}. \end{cases}$

1209. $\begin{cases} y_{11} = 1, y_{12} = x, \\ y_{21} = x, y_{22} = 1. \end{cases}$

1210. Tìm hệ nghiệm cơ bản và định thức Vrônxki của hệ phương trình sau :

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)y_j, \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

trong đó tất cả các $a_j(x)$ là những hàm liên tục trên khoảng (a ; b).

1211. Cho hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \ (i = 1, 2, ..., n),$$

trong đó $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ liên tục trên (a ; b), (i, j = 1, 2, ..., n).

Giả sử $y_i^{(k)}(x, \xi)$ (i, k = 1, 2, ..., n) là các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng, thoả mãn điều kiện

$$y_i^{(k)}(\xi, \xi) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = k, \\ 0 \text{ nếu } i \neq k. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$y_i(x) = \int_{x_o}^{x} \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi) y_i^{(k)}(x, \xi) d\xi$$

là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất trên, thoả mãn điều kiện $y_i(x_o) = 0$ ($x_o \in$ (a ; b)).

1212*. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

trong đó $a_{ij}(t)$ (i, j = 1, 2, ..., n) liên tục trên (a ; ∞) và thoả mãn điều kiện

$$\int_a^{\infty} |a_{ij}(t)| \ dt < \infty \ (i, j = 1, 2, ..., n).$$

Chứng minh rằng :

1. Nghiệm của hệ giới nội trên (a ; ∞) ;

2. Tồn tại giới hạn hữu hạn của mọi nghiệm khi $t \to \infty$; các nghiệm khác nhau dần tới những giới hạn khác nhau và với mọi $\vec{C} \in R^n$ cho trước, có duy nhất một nghiệm x(t) của hệ sao cho $\lim_{t\to\infty} x(t) = \vec{C}$.

§4. Điểm kì dị

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

hoặc phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{2}$$

trong đó P(x, y), Q(x, y) khả vi liên tục.

Ta gọi điểm kì dị của hệ (1) hoặc của phương trình (2) là điểm mà tại đó P(x, y) = 0, Q(x, y) = 0.

Để nghiên cứu điểm kì dị của hệ tuyến tính

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \tag{3}$$

hay của phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \tag{4}$$

ta cần tìm nghiệm của phương trình đặc trưng

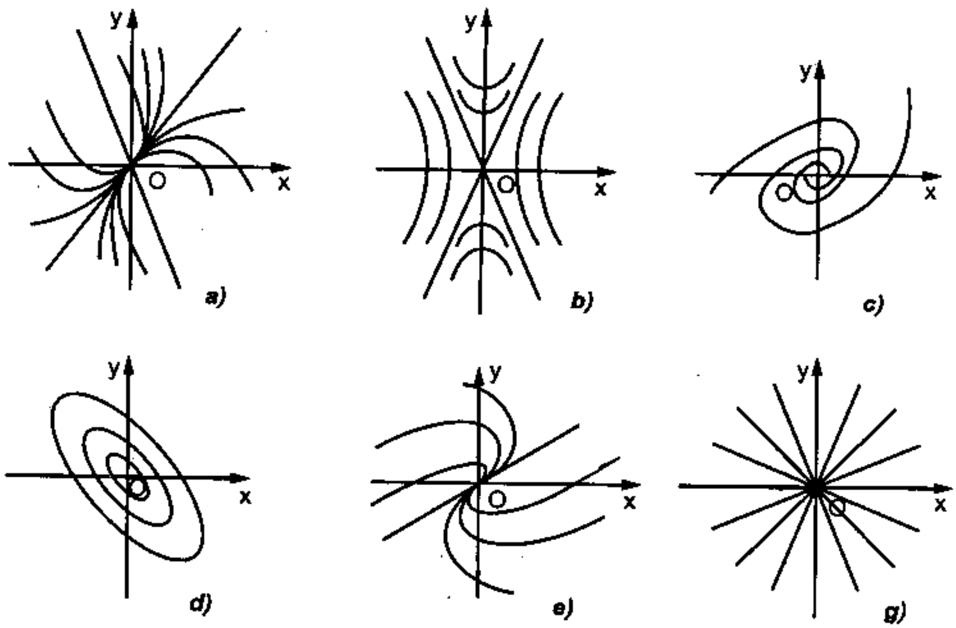
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Nếu các nghiệm của phương trình đặc trưng thực, khác nhau và cùng dấu thì điểm kì dị là *điểm nút* (xem hình 24a) ; Nếu các nghiệm λ_1, λ_2 của phương trình (5) là thực và khác dấu thì điểm kì dị của (3) là *điểm yên ngựa (yên điểm)* (h.24b) ; Nếu λ_1, λ_2 là phức với phần thực khác 0 thì điểm kì dị là *tiêu điểm* (h.24c) ; Nếu λ_1, λ_2 thuần tuý ảo thì điểm kì dị là *tâm điểm* (h.24d) ; Nếu λ_1, λ_2 bằng nhau nhưng khác 0 thì điểm kì dị có thể là *điểm nút suy biến* (h.24e) hoặc là *điểm nút tới hạn* (h.24g).

Nếu một hoặc cả hai nghiệm của phương trình đặc trưng bằng 0, thì phương trình (4) bây giờ sẽ có dạng

$$\frac{dy}{dx} = k,$$

do đó nghiệm là những đường thẳng song song.



Hình 24

Để vẽ các đường cong tích phân trên mặt phẳng (x, y) trong các trường hợp điểm nút, yên điểm hoặc điểm nút suy biến, trước hết nên tìm những nghiệm mà đường cong biểu diễn chúng là những đường thẳng đi qua điểm kì dị. Những đường thẳng này luôn luôn hướng dọc theo các vectơ riêng của ma trận $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Trong trường hợp điểm nút, các đường cong tích phân sẽ tiếp xúc với đường thẳng hướng theo vectơ riêng ứng với giá trị riêng có trị số tuyệt đối bé nhất.

Nếu điểm kì dị là tiêu điểm thì cần xác định hướng xoắn của các đường cong tích phân.

Để nghiên cứu điểm kì dị của hệ (1) hoặc của phương trình (2), ta nên chuyển gốc toạ độ đến điểm cần xét và phân tích P, Q thành chuỗi

Taylo tại lân cận điểm này, chú ý rằng, chỉ cần xét đến các số hạng bậc nhất. Khi đó hệ (1) có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 + by_1 + \varphi(x_1, y_1), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_1 + dy_1 + \psi(x_1, y_1), \end{cases} \tag{6}$$

trong đó x_1, y_1 là toạ độ mới, a, b, c, d là những hằng số.

Giả sử với $\varepsilon > 0$ nào đó

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0, \frac{\psi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0 \text{ khi } x_1 \to 0, y_1 \to 0,$$

trong đó $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Điều này sẽ thoả mãn, chẳng hạn P, Q khả vi liên tục hai lần tại lân cận điểm cần nghiên cứu. Giả sử mọi nghiệm λ_1, λ_2 của phương trình đặc trưng (5) có phần thực khác 0. khi đó điểm kì dị $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ của hệ (6) sẽ có dạng trùng với dạng của điểm kì dị hệ nhận được từ (6) sau khi bỏ φ và ψ. Nếu mọi nghiệm của phương trình đặc trưng thuần tuý ảo, tức là điểm kì dị của hệ tuyến tính thuần nhất ứng với (6) là tâm điểm, thì điểm kì dị của (6) có thể là tâm điểm hoặc tiêu điểm. Tâm điểm sẽ xuất hiện, chẳng hạn nếu mọi đường cong tích phân của hệ (6) có trục đối xứng đi qua điểm đang xét. Để tồn tại tiêu điểm thì cần và đủ là nghiệm tầm thường của hệ (6) ổn định tiệm cận (xem §6, chương III) khi $t \to +\infty$ hoặc khi $t \to -\infty$. Chi tiết hơn nữa của việc phân loại ở trên, bạn đọc có thể xem [1], trang 78.

Hãy nghiên cứu điểm kì dị của các phương trình hoặc hệ phương trình sau đây :

1213. $y' = \dfrac{x - 4y}{2y - 3x}$.

1214. $y' = \dfrac{y - 2x}{y}$.

1215. $y' = \dfrac{x + 4y}{2x + 3y}$.

1216. $y' = \dfrac{2x + y}{3x + 4y}$.

1217. $y' = \dfrac{2x - y}{x - y}$.

1218. $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - 3x}$.

1219. $y' = \dfrac{x - 2y}{3x - 4y}$.

1220. $y' = \dfrac{4y - 2x}{x + y}$.

1221. $y' = \dfrac{4x - y}{3x - 2y}$.

1222. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

1223. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 5y. \end{cases}$

1224. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

1225. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$

1226. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$

1227. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

1228. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 6x. \end{cases}$

Hãy tìm điểm kì dị của các phương trình hoặc hệ phương trình sau đây và nghiên cứu chúng :

1229. $y' = \dfrac{2x + y}{x - 2y - 5}$.

1230. $y' = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$.

1231. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$.

1232. $y' = \dfrac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$.

1233. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln(1 - x + x^2) - \ln x. \end{cases}$

1234. $y' = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$.

1235. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \operatorname{arctg}(x^2 + xy). \end{cases}$

1236. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$

1237. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln \dfrac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y^2. \end{cases}$

1238. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{(x-y)^2+3} - 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = e^{y^{2-x}}. \end{cases}$ **1239.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(1-y+y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 - \sqrt{x^2+8y}. \end{cases}$

1240. Chứng minh rằng nếu điểm kì dị của phương trình

$$(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$$

là tâm điểm thì phương trình này là phương trình vi phân hoàn chỉnh. Điều ngược lại có đúng không ?

1241*. Chứng minh rằng nếu phương trình bài toán trên không phải là phương trình vi phân hoàn chỉnh, nhưng có thừa số tích phân liên tục tại lân cận gốc toạ độ thì điểm kì dị là điểm yên ngựa (nếu $an \neq bm$).

§5. Các bài tập thuộc loại khác nhau

Tích phân các hệ phương trình sau :

1242. $y' = \dfrac{y^2}{z-x}$, $z' = y + 1$.

1243. $y' = \dfrac{z}{x}$, $z' = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

1244. $2zy' = y^2 - z^2 + 1$, $z' = z + y$.

1245. $y' = y^2 z$, $z' = \dfrac{z}{x} - yz^2$.

1246. $y - xy' = y^2$, $z' = \dfrac{2xz}{x^2 - z^2}$.

1247. $y' = (x-y)\text{tg}x + 1$, $\left(\dfrac{1}{z} - x\right)z' = y + z$.

1248. $y'' - z = 0$, $x^3 z' - 2y = 0$.

1249. $\dfrac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{2}$.

1250. $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$.

1251. $\dfrac{dx}{y-u}=\dfrac{dy}{z-x}=\dfrac{dz}{u-y}=\dfrac{du}{x-z}$.

1252. $\dfrac{dx}{z^2-y^2}=\dfrac{dy}{z}=-\dfrac{dz}{y}$.

1253. $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$.

1254. $\dfrac{dx}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$.

1255. $-\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{xy-2z^2}=\dfrac{dz}{xz}$.

1256. $\dfrac{dx}{x(z-y)}=\dfrac{dy}{y(y-x)}=\dfrac{dz}{y^2-xz}$.

1257. $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)}=-\dfrac{dy}{y(z^2+x^2)}=\dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

1258. $\begin{cases} y'=2y-z, \\ z'=y+2z. \end{cases}$

1259. $\begin{cases} y_1'=3y_1-y_2+y_3, \\ y_2'=-y_1+5y_2-y_3, \\ y_3'=y_1-y_2+3y_3. \end{cases}$

1260. $\begin{cases} y_1'=y_2+y_3, \\ y_2'=y_1+y_2-y_3, \\ y_3'=y_2+y_3. \end{cases}$

1261. $\begin{cases} xy'=5y+4z, \\ xz'=4y+5z. \end{cases}$

1262. $\begin{cases} y'=2y+3z+2x, \\ z'=-y-2z+x^2. \end{cases}$

1263*. Cho hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x, \tag{1}$$

với $t\ge t_o$, $x\in R^n$, $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^n$ là ma trận vuông cấp n liên tục trên $[t_o\,;\infty)$. Giả sử $X(t)$ là ma trận nghiệm cơ bản của hệ phương trình trên. Chứng minh rằng $X^{-1}(t)$ giới nội đều trên $[t_o\,;\infty)$ nếu $X(t)$ giới nội đều trên khoảng đó và

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_o}^{t}\sum_{j=1}^{n}a_{jj}(\tau)d\tau>-\infty. \tag{2}$$

Chứng minh rằng không có nghiệm nào khác không mà lại dần đến không khi $t\to\infty$.

1264*. Cho hệ phương trình

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1, x_2, ..., x_n), \; (i = 1, 2, ..., n).$$

Chứng minh rằng nghiệm của hệ trên chỉ có thể là một trong các dạng sau đây :

a) Nghiệm không tuần hoàn x(t) mà $x(t_1) \neq x(t_2)$ nếu $t_1 \neq t_2$.

b) Nghiệm tuần hoàn x(t) với chu kì T > 0 nào đấy.

c) Điểm dừng : $x(t) \equiv x_o$.

1265. Giả sử $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ là nghiệm nào đấy của hệ phương trình

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \; (i = 1, 2, ..., n),$$

trong đó f_i (i = 1, 2, ..., n) liên tục với mọi $x_i \in (-\infty ; \infty)$.

Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = c_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

thì $f_i(c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ (i = 1, 2, ..., n), tức là $(c_1, c_2, ..., c_n)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

1266*. Cho hệ

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = p(x)y, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} = q(x)z. \end{cases} \qquad (1)$$

Tìm điều kiện mà p(x), q(x) phải thoả mãn để có một nghiệm riêng $y_1(x)$ của phương trình thứ nhất và một nghiệm riêng $z_1(x)$ của phương trình thứ hai sao cho $y_1z_1 = 1$. Có thể có nhiều cặp y_1, z_1 khác nhau thoả mãn hệ thức đó hay không ?

Từ kết quả nhận được hãy suy ra rằng việc giải phương trình

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 2u(2p - u)^2 \qquad (2)$$

có thể quy về việc giải phương trình thứ nhất.

1267*. Cho hệ phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n), f = (f_1, f_2, ..., f_n).$$

Giả sử hệ trên thoả mãn mọi điều kiện của định lí tồn tại và duy nhất nghiệm tại lân cận mỗi điểm (x ; y). Giả sử trong miền $\|y\| > b$ với mọi x ta có

$$y.f(x, y) \le k(x) \|y\|^2,$$

ở đây y.f là tích vô hướng, hàm k(x) liên tục. Chứng minh rằng nghiệm với điều kiện ban đầu $y(x_o) = x$ tồn tại với mọi $x \in [x_o ; +\infty)$.

1268*. Cho hệ phương trình

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

trong đó P, Q xác định và liên tục trong miền G chứa điểm kì dị dạng tiêu điểm hoặc điểm nút của hệ. Chứng minh rằng hệ đó không thể có tích phân đầu dạng $\varphi(x, y) = c$, với hàm $\varphi \not\equiv$ const, liên tục ở trong lân cận khá bé bất kì của điểm kì dị nói trên.

§6. Bài toán ổn định

1. Định nghĩa. Xét hệ phương trình dưới dạng vectơ

$$\dot{x} = f(t, x), t \ge t_o, x \in \mathbf{R}^n : x = (x_1, ..., x_n). \tag{1}$$

Giả thiết f và các đạo hàm riêng của nó theo các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ liên tục.

Định nghĩa. Nghiệm $x = \varphi(t)$ của hệ (1) được gọi là *ổn định* theo Liapunôp nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ nào đó sao cho mọi nghiệm x(t) của hệ (1) với điều kiện ban đầu thoả mãn bất đẳng thức

$$|x(t_o) - \varphi(t_o)| < \delta \tag{2}$$

thì với mọi $t \ge t_o$ ta có

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Nếu có một số $\varepsilon_o > 0$ nào đó mà với nó không tồn tại số δ nào cả thì nghiệm $\varphi(t)$ được gọi là không ổn định.

Nghiệm $\varphi(t)$ được gọi là *ổn định tiệm cận* nếu nó ổn định theo Liapunôp và ngoài ra, tất cả các nghiệm $x(t)$ với điều kiện ban đầu đủ gần $\varphi(t_o)$, khi $t \to +\infty$ sẽ tiến đến gần $\varphi(t)$, tức là từ bất đẳng thức (2) suy ra

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0.$$

Để xét tính ổn định của nghiệm $x = \varphi(t)$ của hệ (1), trong nhiều trường hợp để cho đơn giản, ta có thể xét tính ổn định của nghiệm tầm thường $y(t) \equiv 0$ của một hệ khác nhận được từ hệ (1) nhờ phép thế hàm cần tìm

$$x - \varphi(t) = y.$$

2. Nghiên cứu ổn định theo xấp xỉ thứ nhất

Giả sử $x_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, ..., n$) là một nghiệm của hệ (1). Để xét tính ổn định của nghiệm tầm thường này ta tách phần tuyến tính của các hàm f_i ($f = (f_1, f_2, ..., f_n))^*$ trong lân cận của điểm $x_1 = ... = x_n = 0$, chẳng hạn nhờ công thức Taylo. Có thể xét sự ổn định của hệ mới nhận được dựa theo định lí sau đây.

Định lí Liapunôp. Xét hệ

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + \psi_i(t, x_1, ..., x_n), \qquad (3)$$

$$i = 1, ..., n,$$

trong đó a_{ik} là các hằng số, còn ψ_i là các vô cùng bé cấp cao hơn một, chính xác hơn, với $|x| < \varepsilon_o$

$$|\psi_i| \le \gamma(x).\, |x|,\ i = 1, ..., n\ ;\ \gamma(x) \to 0 \text{ khi } |x| \to 0, \qquad (4)$$

ở đây

$$|x| = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}\,.$$

Khi đó nếu tất cả các nghiệm đặc trưng của ma trận (a_{ik}), $i, k = 1, ..., n$, có phần thực âm thì nghiệm không của hệ (3) ổn định tiệm cận ; Nếu có, dù chỉ một, nghiệm đặc trưng với phần thực dương thì nghiệm không của (3) là không ổn định.

Ví dụ : Xét tính ổn định của nghiệm không của hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1 - 4y), a = \text{const}. \end{cases}$$

Bằng cách tách phần tuyến tính theo công thức Taylo, ta có

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \psi_1(x_1 y), \\ \dot{y} = ax - 4y + \psi_2(x_1 y), \end{cases}$$

ở đây ψ_1 , $\psi_2 = o(x^2 + y^2)$, do đó điều kiện (4) được thoả mãn. Tìm các nghiệm đặc trưng của ma trận các hệ số

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ a & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0, \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - a}\,.$$

Với $a > 1$, các nghiệm phức, $\mathrm{Re}\lambda_{1/2} = -3 < 0$, còn với $-8 < a \leq 1$, các nghiệm thực âm, do đó trong các trường hợp này nghiệm không là ổn định tiệm cận.

Với $a < -8$, một nghiệm dương, do đó nghiệm không là không ổn định.

Với $a = -8$, ta có $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$ và trong trường hợp (tới hạn) này, định lí Liapunôp ở trên không cho một khẳng định nào về sự ổn định.

3. Nghiên cứu ổn định nhờ các hàm Liapunôp

Định nghĩa. Hàm

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n$$

được gọi là đạo hàm của hàm $v(t, x_1, \dots, x_n)$ dựa theo hệ (1), trong đó f_1, ..., f_n là các toạ độ của hàm f ở vế phải của (1).

Định lí Liapunôp. Nếu tồn tại một hàm khả vi $v(x_1, \dots, x_n)$ thoả mãn trong miền $|x| < \varepsilon_o$ các điều kiện

1) $v > 0$ khi $x \neq 0$, $v(0) = 0$,

2) $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{(1)} \leq 0$ khi $|x| < \varepsilon_o$, $t > t_o$

thì nghiệm không của hệ (1) là ổn định theo Liapunôp.

Nếu thay điều kiện 2) bởi điều kiện mạnh hơn

3) $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \le -w(x) < 0$ khi $0 < |x| < \varepsilon_o$, $t > t_o$,

với $w(x)$ là hàm liên tục khi $|x| < \varepsilon_o$ thì nghiệm không của hệ (1) là ổn định tiệm cận.

Định lí Trêtaep. Giả sử hệ (1) có nghiệm không và giả sử trong một miền V nào đấy của không gian $(x_1, ..., x_n)$ tồn tại một hàm khả vi $v(x_1, ..., x_n)$ với các điều kiện sau :

1) Điểm $x = 0$ nằm trên biên của miền V ;

2) $v(x) = 0$ ở trên biên của miền V khi $|x| < \varepsilon_o$;

3) Ở trong miền V khi $t > t_o$ ta có $v > 0$, $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \ge w(x) > 0$, hàm $w(x)$ liên tục.

Khi đó nghiệm không của hệ (1) là không ổn định.

Không có một phương pháp chung để xây dựng các hàm Liapunôp v (khi chưa biết nghiệm của hệ (1)). Ở một số trường hợp có thể lập hàm Liapunôp dưới dạng một dạng toàn phương $v = \sum_{i,j}^{n} b_{ij}x_i x_j$ hoặc dưới dạng tổng của một dạng toàn phương và một tích phân của các hàm phi tuyến nằm trong vế phải của hệ đã cho.

4. Điều kiện để cho tất cả các phần thực của các nghiệm của phương trình

$$a_o\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\ a_o > 0, \tag{5}$$

trong đó các hệ số a_i thực, có giá trị âm.

a) *Điều kiện cần* : Tất cả các $a_i > 0$. Với $n \le 2$ điều kiện đó cũng là đủ.

b) *Điều kiện Raux – Hurvix* (cần và đủ) : Tất cả các định thức con chéo chính của ma trận Hurvix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_o & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_o & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_o & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

đều dương. (Các định thức con chéo chính của ma trận Hurvix là

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 a_o \\ a_3 a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_o & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \qquad (6)$$

c) *Điều kiện Liêna –Sipar* (là cần và đủ) : Tất cả $a_i > 0$ và $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$, ..., với Δ_i ở (6).

Điều kiện c) tương đương với điều kiện b) nhưng tiện dùng hơn vì số định thức con cần phải xét ít hơn.

Ví dụ. Với a và b nào thì các nghiệm của phương trình $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + b = 0$ có các phần thực âm ?

Viết điều kiện c) :

$$a > 0,\ b > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix} = 6a - 4b - 9 > 0,\ \Delta_1 = 2 > 0.$$

Từ đó ta nhận được điều kiện : $b > 0$, $6a > 4b + 9$.

d) *Tiêu chuẩn Mikhailốp* (cần và đủ) : Trên mặt phẳng phức, điểm $f(i\omega)$ ($f(\lambda)$ là vế trái của (5)), khi ω thay đổi từ 0 đến $+\infty$, không đi qua gốc toạ độ và quay quanh gốc toạ độ một góc $\frac{n\pi}{2}$ theo chiều dương.

Cách phát biểu khác (tương đương) của tiêu chuẩn Mikhailốp : Cần và đủ là $a_n a_{n-1} > 0$ và tất cả các nghiệm của hai đa thức

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \dots,$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \dots$$

dương, phân biệt và luân phiên bắt đầu từ ξ_1, tức là

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots$$

(Chú ý rằng đa thức (5) tại $\lambda = i\omega$ bằng $p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$).

Ví dụ. $f(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 10\lambda + 6$.

Ở đây $a_n = 6 > 0$, $a_{n-1} = 10 > 0$, còn các đa thức $p(\xi) = 6 - 8\xi + 2\xi^2$, $q(\eta) = 10 - 7\eta + \eta^2$ có các nghiệm $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 5$. Do đó, $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$.

Theo tiêu chuẩn Mikhailốp, tất cả các nghiệm của đa thức $f(\lambda)$ đều có các phần thực âm.

5. Điều kiện ổn định của nghiệm không của hệ tuyến tính với các hệ số tuần hoàn có thể xem B. P. Đêmiđôvic, "Bài giảng về lí thuyết toán học của ổn định", chương III, §16.

Các bài toán 1269 – 1272 giải bằng cách dùng định nghĩa ổn định.

1269. Nghiệm của các phương trình sau đây với điều kiện ban đầu cho trước có ổn định hay không ?

a) $\dot{x} = 4x - t^2x$, $x(0) = 0$.

b) $2t\dot{x} = x - x^3$, $x(0) = 0$.

1270. Nghiệm không có ổn định hay không nếu biết nghiệm tổng quát của hệ là

a) $x = \dfrac{c_1 - c_2t}{1 + t^2}$, $y = (c_1t^3 + c_2)e^{-t}$.

b) $x = (c_1 - c_2t)e^{-t}$, $y = c_1\sqrt[3]{t}\,(\ln(t^2 + 2))^{-1} + c_2$.

1271. Chứng minh rằng nghiệm không của phương trình $\dot{x} = a(t)x$ (hàm $a(t)$ liên tục) là ổn định theo Liapunôp khi và chỉ khi

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \int_0^t a(s)ds < +\infty.$$

1272. Nghiệm không của hệ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \end{cases}$$

có ổn định hay không, nếu biết rằng

$$\lim_{t\to+\infty} (a_{11}(t) + a_{22}(t)) = b > 0 \ ?$$

Trong các bài toán 1273 – 1275, nhờ định lí Liapunôp về ổn định theo xấp xỉ thứ nhất, xét tính ổn định của nghiệm không :

1273. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$

1275. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y), \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x). \end{cases}$

1274. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y-x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

Trong các bài toán 1276 – 1277, với giá trị nào của các tham số a và b thì nghiệm không là ổn định tiệm cận ?

1276. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$

1277. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$

1278. Xét sự ổn định của nghiệm x = cost, y = 2sint của hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(x + 2\sin^2\dfrac{t}{2}\right) - \dfrac{y}{2}, \\ \dot{y} = (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t. \end{cases}$$

Trong các bài toán 1279 – 1281, hãy tìm tất cả các vị trí cân bằng và nghiên cứu tính chất ổn định của chúng.

1279. $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

1280. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

1281. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y}. \end{cases}$

Trong các bài toán 1282 – 1286, hãy nghiên cứu tính ổn định của nghiệm không bằng cách xây dựng hàm Liapunôp và áp dụng các định lí của Liapunôp hoặc Trêtaép.

1282. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

1284. $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$

1283. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$

1285. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$

1286*. $\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y), \end{cases}$

ở đây $\operatorname{sgn} f_i(z) = \operatorname{sgn} z$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Trong các bài toán 1287 – 1292, hãy nghiên cứu tính ổn định của nghiệm không bằng cách sử dụng các điều kiện đã biết để cho tất cả các phần thực của các nghiệm của đa thức âm, ví dụ điều kiện Raux – Hurvix hoặc tiêu chuẩn Mikhailốp.

1287. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

1288. $y^{(4)} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$

1289. $y^{(4)} + 3{,}1y''' + 5{,}2y'' + 9{,}8y' + 5{,}8y = 0.$

1290. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$

1291. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$

1292. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 14y''' + 3y'' + 23y' + 68y = 0.$

Trong các bài toàn 1293 – 1295, hãy nghiên cứu xem với giá trị nào của các tham số a và b thì nghiệm không là ổn định tiệm cận.

1293. $y''' + 3y'' + ay' + by = 0.$

1294. $y^{(4)} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0.$

1295. $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0.$

1296. Nghiên cứu xem với các giá trị nào của a và b thì nghiệm không của hệ với các hệ số tuần hoàn sau đây là ổn định ?

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ A(t+2) = A(t),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ khi } 0 < t < 1,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ khi } 1 < t < 2.$$

Chỉ dẫn. Tìm ma trận mônôđrômi và tính các nhân tử (xem cuốn sách của B.P. Đêmiđôvic, đã nói đến ở mục 5, phần tóm tắt lí thuyết của §6 chương này, bản tiếng Nga).

1297*. Cho phương trình

$$\ddot{x} + r(t)x = 0,$$

trong đó r(t) không âm, liên tục và tuần hoàn với chu kì 1. Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm ổn định trên $(-\infty ; \infty)$.

1298*. Hãy tìm điều kiện cần và đủ để cho nghiệm không của một hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số là ổn định.

1299*. Chứng minh rằng : Nghiệm không của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất với hệ số liên tục là ổn định khi và chỉ khi mỗi nghiệm của hệ đó đều bị chặn.

1300*. Hãy xây dựng một hệ dạng

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n), \ i = 1, 2, ..., n,$$

sao cho nó chỉ có một nghiệm ổn định, nhưng đối với hệ đó, nghiệm với điều kiện ban đầu cho trước bất kì là tồn tại, duy nhất và bị chặn với mọi x.

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP I

§1. Khái niệm mở đầu

Phương trình đạo hàm riêng cấp 1 có dạng tổng quát

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (1)$$

trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến số độc lập, $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ là hàm phải tìm. Cũng như phương trình vi phân thường, trong phương trình (1) ít nhất một trong các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ bắt buộc phải có mặt.

Hàm $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ có đạo hàm riêng theo các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ gọi là nghiệm của phương trình (1) nếu khi thay nó vào phương trình (1) thì (1) trở thành đồng nhất thức. Thông thường khi tích phân phương trình đạo hàm riêng ta tìm được họ nghiệm phụ thuộc vào những hàm số bất kì. Giả sử trong phương trình (1), u là hàm hai biến (n = 2) : $u = u(x_1, x_2)$. Khi đó nghiệm $u = u(x_1, x_2)$ sẽ tương ứng với một mặt cong trong không gian ba chiều (x_1, x_2, u). Mặt cong này gọi là *mặt cong tích phân*. Chẳng hạn, đối với phương trình

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

hàm $z = x^2 + y^2$ sẽ là nghiệm xác định với mọi x, y. Nghiệm trên được biểu diễn bởi mặt parabôlôit (là mặt cong do parabôn $z = y^2$, trong mặt phẳng (y, z), tạo nên khi quay quanh trục Oz).

Hàm

$$z = F(x^2 + y^2),$$

với F là hàm khả vi liên tục bất kì, cũng là nghiệm của phương trình trên.

§2. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp I

Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 1 có dạng

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... +$$

$$+ X_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, ..., x_n, u), \quad (2)$$

trong đó $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ là hàm phải tìm ; $X_1, X_2, ..., X_n$, R là những hàm cho trước của các biến số tương ứng. Nếu vế phải $R(x_1, x_2, ..., x_n, u)$ đồng nhất bằng 0 và tất cả các hàm $X_1, X_2, ..., X_n$ đều không chứa biến u thì phương trình (2) trong trường hợp này gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

1. Bài toán Cô-si

Tìm nghiệm $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ của phương trình (2), thoả mãn điều kiện

$$u\big|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}),$$

trong đó φ là hàm khả vi liên tục cho trước. Đặc biệt, nếu n = 2, nghĩa là phương trình (2) có dạng

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \quad (3)$$

thì bài toán Cô-si đòi hỏi tìm nghiệm z(x, y) của phương trình (3) sao cho

$$z\big|_{y=y_o} = \varphi(x).$$

Về mặt hình học, điều này có nghĩa là tìm mặt cong tích phân của phương trình (3) đi qua đường cong cho trước $z = \varphi(x)$, $y = y_o$ nằm trong mặt phẳng $y = y_o$.

2. Phương trình tuyến tính thuần nhất

Như ta đã biết, phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thuần nhất cấp 1 có dạng

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... +$$

$$+ X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (4)$$

Phương trình (4) luôn luôn có nghiệm $u = C$, trong đó C là hằng số bất kì. Nghiệm này gọi là nghiệm tầm thường.

Giả sử các hàm $X_1, X_2, ..., X_n$ khả vi liên tục tại lân cận nào đó của điểm $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ và không đồng thời triệt tiêu tại điểm đó, chẳng hạn $X_n(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o) \neq 0$. Khi đó phương trình (4) có họ nghiệm phụ thuộc vào một hàm số bất kì.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (4), ta tìm $n - 1$ tích phân đầu độc lập của hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)}. \quad (5)$$

Giả sử các tích phân đầu ấy là

$$\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Khi đó hàm

$$u = F[\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)],$$

trong đó $F(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})$ là hàm khả vi liên tục bất kì, sẽ là nghiệm tổng quát của phương trình (4).

Để tìm nghiệm của bài toán Cô-si ta tiến hành như sau :

Giả sử $\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \psi_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)$ là $n - 1$ tích phân đầu độc lập của hệ (5). Đặt

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^o) = \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^o) = \overline{\psi}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^o) = \overline{\psi}_{n-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Giải hệ (6) đối với $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$:

$$x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}),$$

$$x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}).$$

Khi đó hàm

$u = \varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}), ..., \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})]$, với $\psi_j = \psi_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$, sẽ cho ta nghiệm của bài toán Cô-si :

$$u\big|_{x_n = x_n^o} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

và nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu

$$u = y + z^2 \text{ khi } x = 1.$$

Trước hết dễ thấy rằng hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{z}{2}}$$

có các tích phân đầu độc lập là

$$\psi_1 = \frac{y}{x}, \ \psi_2 = \frac{z^2}{x}. \qquad (*)$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình trên có dạng

$$u = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right),$$

trong đó $F(\xi_1, \xi_2)$ là hàm khả vi liên tục bất kì.

Đặt ở (*) $x = 1$ ta có :

$$y = \overline{\psi}_1, \ z^2 = \overline{\psi}_2,$$

từ đó

$$y = \overline{\psi}_1, \ z = \pm\sqrt{\overline{\psi}_2}.$$

Cho nên nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu trên là

$$u = \psi_1 + \psi_2$$

hay

$$u = \frac{y + z^2}{x}.$$

3. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Giả sử trong phương trình đạo hàm riêng tuyến tính không thuần nhất

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... +$$

$$+ X_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, ..., x_n, u), \tag{7}$$

các hàm $X_1, X_2, ..., X_n, R$ khả vi liên tục tại lân cận nào đó của điểm $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o, u^o)$ và chẳng hạn $X_n(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o, u^o) \neq 0$.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (7) ta tìm n tích phân đầu độc lập $\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)$, $\psi_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)$, ..., $\psi_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)$ của hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)} = \frac{du}{R(x_1, x_2, ..., x_n, u)}.$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (7) sẽ được xác định từ hệ thức

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) = 0,$$

trong đó Φ là hàm khả vi liên tục bất kì.

Muốn tìm nghiệm bài toán Cô-si, ta kí hiệu

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^o, u) = \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^o, u) = \overline{\psi}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_n(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^o, u) = \overline{\psi}_n. \end{cases} \tag{8}$$

Giải hệ (8) đối với $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, u$ ta có

$$x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n),$$

$$x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n),$$

$$u = \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n).$$

Khi đó nghiệm của bài toán Cô-si

$$u\big|_{x_n = x_n^o} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

được xác định từ hệ thức

$$\omega(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) = \varphi\,[\omega_1(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n),$$
$$\omega_2(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n), ..., \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)].$$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu

$$z = y - 4 \text{ khi } x = 2$$

của phương trình

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\psi_1 = \dfrac{y - x^2}{x}$, $\psi_2 = \dfrac{z}{x}$ là các tích phân đầu độc lập của hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{dz}{z}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình trên được xác định từ hệ thức

$$\Phi\left(\frac{y - x^2}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

hay (giải ra đối với z)

$$z = xf\left(\frac{y - x^2}{x}\right).$$

Để tìm nghiệm bài toán Cô-si trên, ta đặt x = 2 trong các tích phân ψ_1, ψ_2 và được :

$$\frac{y - 4}{2} = \overline{\psi}_1, \ \frac{z}{2} = \overline{\psi}_2.$$

Giải ra đối với y và z ta có

$$y = 2\overline{\psi}_1 + 4, \ z = 2\overline{\psi}_2.$$

Cho nên nghiệm bài toán Cô-si được xác định từ hệ thức

$$2\psi_2 = 2\psi_1 + 4 - 4$$

hay

$$\frac{z}{x} = \frac{y - x^2}{x}.$$

Bởi vậy nghiệm phải tìm là

$$z = y - x^2.$$

Tích phân các phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây :

1301. $(x + 2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1302. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1303. $(x - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1304. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1305. $(mz - ny)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (nx - lz)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (ly - mx)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1306. $(x^3 + 3xy^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2y^2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1307. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1308. $x(y^2 - z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(x^2 + z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Tìm nghiệm của các bài toán Cô-si sau :

1309. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + yz\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = x^y$ khi $z = 1$.

1310. $(z - y)^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial y} + y\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = 2y(y - z)$ khi $x = 0$.

1311. $(1 + x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y^2$ khi $x = 0$.

1312. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = \ln z - \dfrac{1}{y}$ khi $x = 1$.

1313. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y$ khi $x = 0$.

1314. $2\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y^2$ khi $x = 1$.

1315. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = yz$ khi $x = 1$.

1316. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = x^2 + y^2$ khi $z = 0$.

Tích phân các phương trình tuyến tính không thuần nhất sau :

1317. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y$.

1318. $e^x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = ye^x$.

1319. $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\dfrac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0$.

1320. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x$.

1321. $\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$.

1322. $(z - y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - z)\dfrac{\partial z}{\partial y} + x - y = 0$.

1323. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$.

1324. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z$.

1325. $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$.

1326. $x^2z\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2z\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

1327. $(z - y)^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

1328. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} - xz\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^z$.

1329. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz.$

1330. $\sin^2 x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z.$

1331. $(xz + y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x + yz)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2.$

1332. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{y}{x} = 0.$

1333. $(x + z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y.$

1334. $(y + z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (z + x)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x + y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = u.$

1335. $(u - x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - y)\dfrac{\partial u}{\partial y} - z\dfrac{\partial u}{\partial z} = x + y.$

1336. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + (z + u)\dfrac{\partial u}{\partial z} - xy = 0.$

Tìm nghiệm của các bài toán Cô-si sau :

1337. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = x^2$ khi $y = 1$.

1338. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} = z$; $z = y$ khi $x = 1$.

1339. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = u$; $u = \dfrac{1}{2}(y + z)$ khi $x = 2$.

1340. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$; $z = y^2$ khi $x = 0$.

1341. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$; $z = x^2$ khi $y = 1$.

1342. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$; $z = y^2 + 1$ khi $x = 2$.

Tìm các mặt cong tích phân đi qua đường cong cho trước :

1343. $\operatorname{tg}x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$; $y = x$, $z = x^3$.

1344. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = -y$, $x = 1$.

1345. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$; $z = y$, $x = 1$.

1346. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$; $x = 1$, $yz + 1 = 0$.

1347. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$; $y = -2$, $z = x - x^2$.

1348. $z\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$; $x + y = 2$, $yz = 1$.

1349. $(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$; $z = y = -x$.

1350. $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$; $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

1351. $x\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\frac{\partial z}{\partial y} = z$; $x + y = 2z$, $xz = 1$.

1352. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y$; $y = 2z$, $x + 2y = z$.

1353. $(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$; $x - y = 2$, $z + 2x = 1$.

1354. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$; $x - y = 0$, $x - yz = 1$.

1355. $(y + 2z^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$; $x = z$, $y = x^2$.

1356. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x} + x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y} = y^3z$; $x = -z^3$, $y = z^2$.

1357. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$; $y = x$, $z = x^2$.

§3. Phương trình phi tuyến

1. Hệ hai phương trình phi tuyến cấp 1. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z). \end{cases} \tag{1}$$

Giả sử các hàm A, B khả vi liên tục tại một lân cận nào đó của điểm (x_o, y_o, z_o).

Hệ (1) được gọi là *tương thích* nếu tồn tại hàm $z = z(x, y)$ thoả mãn cả hai phương trình của hệ.

Để hệ (1) có họ nghiệm phụ thuộc ít nhất một hằng số bất kì, thì cần và đủ là hệ thức

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \tag{2}$$

thoả mãn với mọi (x, y, z) tại lân cận của điểm (x_o, y_o, z_o).

Nếu điều kiện trên được thoả mãn thì để tích phân hệ (1), ta tiến hành như sau :

Cố định y trong phương trình thứ nhất của hệ và tích phân phương trình nhận được ta có

$$z = \varphi(x, c(y)), \tag{3}$$

ở đây $c(y)$ là hàm khả vi liên tục bất kì. Ta chọn $c(y)$ sao cho hàm z thoả mãn phương trình thứ hai của hệ (1). Do điều kiện (2) được thoả mãn nên hàm $c(y)$ như vậy là có thể chọn được và cuối cùng ta có

$$z = z(x, y, C)$$

với C là hằng số bất kì.

2. Phương trình Pfap. Xét phương trình

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0. \tag{4}$$

Giả sử các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ khả vi liên tục tại lân cận nào đó của điểm (x_o, y_o, z_o) cho trước và không đồng thời triệt tiêu tại điểm đó, chẳng hạn $R(x_o, y_o, z_o) \neq 0$. Khi đó

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy,$$

hay

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy.$$

Do đó

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{P}{R}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{Q}{R}. \end{cases} \tag{5}$$

Áp dụng điều kiện (2) đối với hệ (5), sau một số phép biến đổi ta đi đến hệ thức

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \tag{6}$$

hay

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0.$$

Nếu điều kiện (6) được thoả mãn tại mọi điểm (x, y, z) trong lân cận điểm (x_0, y_0, z_0) thì nó được gọi là *điều kiện khả tích hoàn toàn* của phương trình Pfap (4). Khi đó để giải phương trình Pfap ta chỉ việc giải hệ (5).

3. Phương pháp Lagrăng – Sacpi. Xét phương trình phi tuyến

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{7}$$

trong đó z = z(x, y) là hàm phải tìm, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, F là hàm cho trước.

Một họ nghiệm của (7) được cho dưới dạng

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \text{ hoặc } z = \varphi(x, y, a, b),$$

trong đó a, b là các hằng số bất kì, được gọi là *tích phân đầy đủ* của phương trình (7).

Khử a và b từ hệ

$$\begin{cases} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{\partial V}{\partial z} p = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial z} q = 0, \end{cases}$$

hoặc từ hệ

$$\begin{cases} \varphi(x, y, a, b) = z, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = q, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = p. \end{cases}$$

ta nhận được phương trình tương đương với phương trình (7). Tích phân đầy đủ của phương trình (7) có thể tìm bằng phương pháp Lagrăng – Sacpi như sau :

Lập hệ phương trình vi phân thường dạng đối xứng :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + Zp)} = \frac{dq}{-(Y + Zq)},$$

trong đó $P = F'_p$, $Q = F'_q$, $X = F'_x$, $Y = F'_y$, $Z = F'_z$.

Sau đó tìm tích phân đầu của hệ này, chẳng hạn đó là

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a.$$

Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ \Phi(x, y, z, p, q) = a \end{cases}$$

ta giải ra p, q :

$$\begin{cases} p = A(x, y, z, a), \\ q = B(x, y, z, a). \end{cases}$$

Tích phân hệ cuối cùng này ta được tích phân đầy đủ của phương trình (7).

Ví dụ 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} + y \right) z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} + x \right) z. \end{cases} \tag{8}$$

Dễ kiểm chứng rằng, ở đây điều kiện tương thích (2) được thoả mãn trên toàn mặt phẳng (x, y), trừ gốc toạ độ. Do đó ta có thể tích phân hệ (8). Trước hết ta tích phân phương trình thứ nhất của hệ khi y cố định. Dễ thấy rằng phương trình này có nghiệm

$$z = C(y)e^{yx}.\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{9}$$

Chọn C(y) sao cho biểu thức (9) thoả mãn phương trình thứ hai của hệ (8). Thế (9) vào phương trình thứ hai của (8) ta được

$$C'(y)e^{yx}.\sqrt{x^2 + y^2} + C(y)xe^{yx}.\sqrt{x^2 + y^2} + C(y)e^{yx}.\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x\right)C(y)e^{yx}.\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Từ đây suy ra $C'(y) = 0$ hay $C(y) = C = \text{const}$.

Do đó nghiệm của hệ phương trình trên là

$$z = Ce^{xy}.\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ví dụ 2. Xét phương trình Pfap

$$\frac{2(x + y)}{z}dx + \frac{2(x + y)}{z}dy - \frac{(x + y)^2}{z^2}dz = 0.$$

Ở đây điều kiện khả tích hoàn toàn được thoả mãn, vì

$$\frac{2(x + y)}{z}\left(-\frac{2(x + y)}{z^2} + \frac{2(x + y)}{z^2}\right) + \frac{2(x + y)}{z}\left(-\frac{2(x + y)}{z^2} + \frac{2(x + y)}{z^2}\right) -$$

$$- \left(\frac{x + y}{z}\right)^2\left(\frac{2}{z} - \frac{2}{z}\right) \equiv 0.$$

Do đó phương trình trên hoàn toàn tích phân được.

Tích phân hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2z}{x + y}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2z}{x + y}, \end{cases}$$

ta được

$$z = C(x + y)^2,\ C = \text{const}.$$

Đó là nghiệm phải tìm.

Ví dụ 3. Tìm tích phân đầy đủ của phương trình

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = R^2\ (R = \text{const}) \qquad (10)$$

bằng phương pháp Lagrăng – Sacpi.

Hệ phương trình vi phân thường tương ứng với phương trình trên có dạng

$$\frac{dx}{2z^2p} = \frac{dy}{2z^2q} = \frac{dz}{2z^2(p^2 + q^2)} = \frac{dp}{-[2z(1 + p^2 + q^2)]p} =$$

$$= \frac{dq}{-[2z(1 + p^2 + q^2)]q}.$$

Một trong các tích phân đầu của hệ này là

$$\frac{p}{q} = a.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} z^2(1 + p^2 + q^2) = R^2, \\ \dfrac{p}{q} = a \end{cases}$$

đối với p, q ta được

$$\begin{cases} p = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \dfrac{\sqrt{R^2 - z^2}}{z}, \\ q = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \dfrac{\sqrt{R^2 - z^2}}{z}. \end{cases}$$

Tích phân hệ này ta có

$$\sqrt{R^2 - z^2} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}x + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}y + b = 0.$$

Đó là tích phân đầy đủ của phương trình (10).

Chứng minh rằng các hệ phương trình sau đây khả tích hoàn toàn và hãy tích phân các phương trình đó.

1358 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2z}{y}. \end{cases}$

1359. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

1360. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = yz, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

1361. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = yz\cos(xy), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz\cos(xy). \end{cases}$

1362. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2yz^2. \end{cases}$

1363. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y} + z. \end{cases}$

1364. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2yz - z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

Tích phân các phương trình Pfap sau đây :

1365. $(x - y)dx + zdy - xdz = 0.$

1366. $3yzdx + 2xzdy + xydz = 0.$

1367. $yzdx - xzdy + x^2dz = 0.$

1368. $yzdx + (e^{xy} + xz)dy - dz = 0.$

1369. $(z + xy)dx - (z + y^2)dy + ydz = 0.$

1370. $(2yz + 3x)dx + xzdy + xzdz = 0.$

1371. $(x^2 + 2z - x^3)dx + x^3dy - xdz = 0.$

Tìm tích phân đầy đủ của các phương trình sau đây bằng phương pháp Lagrăng – Sacpi :

1372. $z = px + qy + p^2.$

1373. $z = px + qy + qp.$

1374. $p = 2zq^2.$

§4. Các bài tập thuộc loại khác nhau

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau :

1375. $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + ... + x_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = mu$, $(m \neq 0)$.

1376. $x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + ... + x_n \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$.

1377. $y \dfrac{\partial u}{\partial x} - xz \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

1378. $\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz = 0$.

1379. $z \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Tìm các mặt cong tích phân đi qua các đường cong cho trước của những phương trình sau đây :

1380. $x \dfrac{\partial u}{\partial x} - y \dfrac{\partial u}{\partial y} + z \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = y + z$ khi $x = 1$.

1381. $x \dfrac{\partial u}{\partial x} - y \dfrac{\partial u}{\partial y} + z \dfrac{\partial u}{\partial z} = u$; $x = 1$, $u = y + z$.

1382. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y^2$, $x = 1$.

1383. $x \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$; $z = \sin y$, $x = 1$; $z = x$, $y = 1$.

1384. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$; $z = y + 1$, $x = 0$.

1385. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z$; $z = y$, $x = 1$.

1386. $y \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y$, $x = 0$; $z = y^2$, $x = 0$.

1387. $x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y$; $x = a$, $z = y^2 + a^2$.

1388. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$; $x = a$, $z = 1 + 2y + 3y^2$.

1389. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$; $y = a$, $z = x^2 - a^2$.

1390. Tích phân hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3z}{y}. \end{cases}$$

1391. Chứng minh rằng phương trình Pfap sau đây khả tích hoàn toàn và tích phân nó :

$$zdx + [(x - y^2)^2 - 2yz]dy + (y^2 - x)dz = 0.$$

1392. Tìm tích phân đầy đủ của phương trình

$$z = px + qy - p^2q$$

bằng phương pháp Lagrăng – Sacpi.

1393*. Cho biểu thức

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \tag{1}$$

trong đó P, Q, R là các hàm đã biết của x, y, z.

1. Chứng minh rằng có vô số hàm f(x, y) sao cho nếu thay trong biểu thức (1) z bởi f(x, y) và dz bởi df thì ta được một vi phân toàn phần. Hãy tìm điều kiện mà f(x, y) phải thoả mãn bằng cách dùng công thức Xtôk (Stokes) đối với một đường cong kín nằm trên mặt (S) biểu diễn bởi phương trình $z = f(x, y)$.

2. Nếu $f(x, y) = C$ là nghiệm của bài toán với C là hằng số tuỳ ý thì mọi nghiệm khác đều có được nhờ một phép cầu phương.

3. Khi phương trình (1) là hoàn toàn khả tích thì mọi mặt (S) đều xác định được mà không cần phải tích phân nếu biết được tích phân tổng quát $F(x, y, z) = \text{const}$ của phương trình (1).

4. Xác định các mặt (S) trong trường hợp :

$$P = 2x(y^2 - z^2) - 6xyz,\ Q = 2yz^2 + 3z(y^2 - x^2),\ R = 0$$

và chứng minh rằng các mặt (S) đó có thể được tạo nên bởi các đường cong (G) cắt trực giao với một họ mặt (M) và tìm phương trình của họ mặt (M). (Các trục toạ độ giả sử là vuông góc). Hãy biểu diễn phương trình của các đường cong (G) theo tham số.

Chương V

CÁC BÀI TOÁN BỔ SUNG

Ở chương này, các bài tập không có sự phân biệt với nhau bởi dấu (*) như ở các chương trước nữa.

1394. Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$\ddot{x} + 9x = \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|.$$

Chỉ dẫn : Phân tích vế phải thành chuỗi Fuariê.

1395. Chứng minh định lí Knhezer sau đây : Xét phương trình

$$y'' + q(x)y = 0 \ (x > 0) \qquad (1)$$

trong đó $q(x) > 0$ là một hàm số liên tục và $q(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$. Nếu

$$0 < q(x) \leq \frac{1}{4x^2} \ (x > a_o \geq 0)$$

thì nghiệm của phương trình (1) không thể có vô số không điểm. Nếu

$$q(x) > \frac{1+\alpha}{4x^2} \ (\alpha > 0, x > a_o \geq 0)$$

thì nghiệm của (1) có vố số không điểm.

Chỉ dẫn : So sánh phương trình (1) với phương trình Ơle sau đây

$$y'' + \frac{b^2}{x^2}y = 0 \ (x > 0).$$

1396. (N. V. Ađamôp). Cho phương trình Ricati

$$y' = y^2 + q(x). \qquad (1)$$

Kí hiệu

$$y = u(x) + iv(x)$$

là nghiệm phức của phương trình đó. Hãy viết hệ phương trình vi phân cho các hàm u(x) và v(x).

1397. (N. V. Ađamôp). Chứng minh rằng nghiệm của (1) (bài 1396), xác định bởi điều kiện

$$y(x_o) = m + in \ (n \neq 0),$$

không thể nhận giá trị thực tại một giá trị nào đó của biến độc lập x.

1398. Cho phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

trong đó f(x) liên tục trên [a ; +∞) và tích phân sau đây hội tụ :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Chứng minh rằng đường cong tích phân đi qua điểm $(x_o ; y_o)$ với $x_o \geq a$, y_o là một số bất kì cho trước, có tiệm cận ngang

$$y = y_o + b, \ b = \int_{x_o}^{+\infty} f(x)dx.$$

Áp dụng. Với λ nào thì nghiệm của phương trình sau đây :

$$\frac{dy}{dx} = x^{\lambda}$$

đi qua điểm $(x_o ; y_o)$, $x_o > 0$, có tiệm cận ngang ?

1399. Giải phương trình

$$\varphi'(x) + \varphi'(y) + 2x + 2y = 1.$$

Chỉ dẫn : Đặt y = 1, tích phân phương trình nhận được và xác định φ'(1) bằng cách thế nghiệm vừa tìm được vào phương trình đã cho.

1400. Tích phân phương trình

$$\frac{dy}{dx} = -y + f(\sin x - y),$$

trong đó

$$f(z) = \begin{cases} z, z > 0 \\ 0, z \leq 0. \end{cases}$$

Tìm nghiệm đi qua điểm (0 ; 1).

1401. Đoán một nghiệm riêng của phương trình tuyến tính

$$y' + y\varphi'(x) = \varphi(x).\ \varphi'(x)$$

và viết nghiệm tổng quát.

1402. Tích phân phương trình

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x,$$

bằng cách đoán một nghiệm riêng của nó.

1403. Hãy tìm các nghiệm tuần hoàn của phương trình

$$y' = y\sin x + \sin 2x.$$

1404. (V. R. Pêtukhốp). Hãy tìm nghiệm của phương trình tuyến tính

$$\dot{x} = x \sin \frac{1}{\lambda^2} + \lambda$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$ và xét xem nghiệm đó có giới hạn hay không khi $\lambda \to 0$.

1405. Cũng yêu cầu như bài toán 1404 đối với phương trình

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2} \sin \frac{1}{\lambda} + \lambda$$

(N. N. Pêtrốp).

1406. Đưa phương trình

$$y' + [y^2 - \varphi^2(x)]\, f(x) - \varphi'(x) = 0$$

về phương trình Bécnuly nhờ phép thế hàm cần tìm.

1407. Giải phương trình tích phân

$$y = \lambda \int_{-x}^{x} (\operatorname{cotg} t + \cos t) y(t) dt,\ \lambda = \text{const}.$$

1408. Giải phương trình

$$\int_0^1 \{[y'(xt)]^2 + y^2(xt)\} dt = y^2(x).$$

Chỉ dẫn : Thế $xt = z$.

1409. Tìm y từ phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) + \varphi(y) \int_a^b g(y) dx.$$

Chỉ dẫn : Chú ý rằng tích phân $\int_a^b g(y) dx$ là một đại lượng không đổi dọc theo nghiệm, đặt $\int_a^b g[y(x)] dx = \lambda$.

1410. Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{dy}{dx} = y + \int_0^1 y(x)dx$$

thoả mãn điều kiện $y(0) = 1$.

1411. Giải bất đẳng thức tích phân

$$y(t) \le \lambda \int_0^t \sqrt{y(\tau)}\, d\tau,\ \lambda > 0,\ y(t) \ge 0.$$

1412. Cho phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

trong đó $f(x, y)$ liên tục trên cả mặt phẳng (x, y) và có tính chất

$$f(x, y) > 0 \text{ khi } xy < 0,$$
$$f(x, y) < 0 \text{ khi } xy > 0.$$

Chứng minh rằng nghiệm của phương trình đó thoả mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 0$ là tồn tại và duy nhất. Tìm nghiệm đó.

1413. Cho phương trình

$$\ddot{x} + g(x) = 0$$

với giả thiết $g(-x) = -g(x)$. Chứng minh rằng chu kì dao động của nghiệm xác định bởi điều kiện ban đầu $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ được cho bởi công thức

$$T(a) = 2\sqrt{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{G(a) - G(x)}},\ G(x) = \int_0^x g(x)dx.$$

1414. Chứng minh rằng chu kì dao động của con lắc toán học mà chuyển động được mô tả bởi phương trình vi phân phi tuyến cấp hai

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi,$$

ở đây φ là góc lệch giữa trục của con lắc và vị trí cân bằng thẳng đứng, được cho bởi công thức

$$T = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_1}}\ (\varphi_1 = \varphi(0)),$$

(so sánh với bài toán 840*).

Tám bài toán sau đây là do N. A. Xakharnhikốp thiết lập. Độc giả có thể tham khảo : N. A. Xakharnhikốp "Về các điều kiện tồn tại tâm điểm và tiêu điểm" ; Tạp chí "Toán học ứng dụng và cơ học" của Liên Xô, bộ 5, 1950, tập XIV.

1415. Cho hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = y + X(x, y), \\ \dot{y} = -x - Y(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

trong đó X(x, y) và Y(x, y) là các hàm chỉnh hình đối với x và y không chứa các số hạng tự do và tuyến tính. Chứng minh rằng hệ đó có tích phân chỉnh hình đối với x và y khi và chỉ khi phương trình sau đây có thừa số tích phân chỉnh hình :

$$(x + Y)dx + (y + X)dy = 0.$$

1416. Chứng minh rằng nếu

$$xX - yY \equiv 0$$

thì vị trí cân bằng x = 0, y = 0 của hệ (1) ở bài 1415 là tâm điểm.

1417. Chứng minh rằng nếu X và Y là các đa thức thuần nhất, đồng thời

$$xY + yX \equiv 0 \text{ và } \int_0^{2\pi} \frac{X(\cos\varphi, \sin\varphi)}{\cos\varphi} d\varphi = 0 \tag{2}$$

thì vị trí cân bằng x = 0, y = 0 của hệ (1) ở bài 1415 là tâm điểm. Có hay không các hàm khác thoả mãn điều kiện (2) để cho x = 0, y = 0 là tâm điểm ?

1418. Chứng minh rằng nếu

$$X(y, x) \equiv Y(x, y)$$

thì vị trí cân bằng x = 0, y = 0 của hệ (1) ở bài 1415 là tâm điểm.

1419. Chứng minh rằng nếu X và Y là các đa thức thuần nhất bậc chẵn của x và y và

$$X(y, x) \equiv -Y(x, y)$$

thì vị trí cân bằng x = 0, y = 0 của hệ (1) ở bài 1415 là tâm điểm.

1420. Chứng minh rằng nếu X(x, y) và Y(x, y) là các hàm hoàn chỉnh đối với x và y, mà trong khai triển theo các luỹ thừa nguyên dương của x và y không chứa các số hạng có bậc lẻ và

$$X(y, x) \equiv -Y(x, y)$$

thì vị trí cân bằng x = 0, y = 0 của hệ (1) ở bài 1415 là tâm điểm.

1421. Chứng minh rằng dạng (đặc trưng) của vị trí cân bằng $x = 0$, $y = 0$ của hệ (1) ở bài 1415 của hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = y + mX, \\ \dot{y} = -x - mY \end{cases}$$

không phụ thuộc vào m, trong đó m là hằng số thực.

1422. Cho hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y^2) + yX_2(x, y^2), \\ \dot{y} = Y_1(x, y^2) + yY_2(x, y^2), \end{cases}$$

trong đó X_1, X_2, Y_1 và Y_2 là các hàm chỉnh hình theo x và y^2, bằng không tại $x = y = 0$; $Y_1(x, 0) \not\equiv 0$. Chứng minh rằng hệ đó thừa nhận một tích phân không phụ thuộc vào t và là một hàm chỉnh hình theo x và y^2 (hoặc x và $x^2 + y^2$) khi và chỉ khi điều kiện sau được thoả mãn

$$X_1 Y_1 - y^2 X_2 Y_2 \equiv 0.$$

Giải thích cách sắp xếp của các quỹ đạo pha của hệ trong lân cận vị trí cân bằng $x = y = 0$.

1423. (N. A. Lukasêvich). Chứng minh rằng hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = e^t y + f(t)(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -e^t x + \varphi(t)(x^2 + y^2 - 1), \end{cases}$$

trong đó f(t) và φ(t) liên tục với $|t| < +\infty$, có nghiệm

$$x = x(t) \; ; \; y = y(t)$$

được biểu diễn bởi một đường cong đóng trên mặt phẳng pha (x, y), nhưng nghiệm đó không phải là nghiệm tuần hoàn.

1424. (N. P. Êrugin). Chứng minh rằng hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin t + t(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = \cos t + t(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

có nghiệm tuần hoàn, tuy các vế phải không phải là các hàm tuần hoàn theo t.

1425. (N. P. Êrugin). Chứng minh rằng hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)\sin \lambda t + y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

mà các vế phải là các hàm tuần hoàn theo t với chu kì $\frac{2\pi}{\lambda}$, có nghiệm tuần hoàn với chu kì không thông ước với chu kì của vế phải của hệ khi λ là một số vô tỉ.

1426. (N. P. Êrugin). Chứng minh rằng một hệ tuyến tính gồm hai phương trình với các hệ số liên tục ω – tuần hoàn, không có nghiệm tuần hoàn với chu kì không thông ước với ω.

1427. (Babbedz). Cho phương trình

$$\frac{dy(x)}{dx} = y[\alpha(x)],$$

trong đó $\alpha(x)$ là một hàm khả vi liên tục và $\alpha[\alpha(x)] = x$. Chọn $\alpha(x)$ nào đó sao cho phương trình trên có thể tích phân bằng cầu phương.

1428. (K. G. Valeep). Tích phân phương trình

$$y'(t) = y(it) \; (i = \sqrt{-1}).$$

1429. (N. M. Gerxêvanốp). Tích phân phương trình

$$f'(x) + xf(-x) = p \; (p = \text{const}).$$

1430. (Babbedz). Tích phân phương trình

$$\frac{d}{dt} y\left(\frac{1}{t}\right) = y(t).$$

1431. Chứng minh rằng phương trình

$$y'(x) + p(x)\, y'(x-1) + q(x).y(x) + r(x)\, y(x-1) = 0$$

trong trường hợp

$$r(x) - p(x)\, q(x) - p'(x) = 0$$

được đưa về một phương trình vi phân thường nhờ phép thế

$$y(x) + p(x)\, y(x-1) = z(x).$$

1432. (V. R. Pêtukhốp). Chứng minh rằng với mỗi x_o, $0 < x_o < 1$, phương trình

$$\ddot{x}(t) + x(t - x(t)) = 0$$

có nghiệm tuần hoàn với điều kiện ban đầu

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = x_o.$$

1433. (B. N. Xkatrkốp). Cho hệ

$$\begin{cases} \dot{x} = (2 - x^2 - y^2)x^m - ay^n, \\ \dot{y} = ax^m + (2 - x^2 - y^2)y^n, \end{cases}$$

với m, n là các số nguyên dương lẻ, $0 < a < 1$. Chứng minh rằng hệ trên có nghiệm tuần hoàn.

1434. Tìm điều kiện đủ cho hàm f(x) để cho tất cả các nghiệm của phương trình sau đây còn bị chặn khi $x \to +\infty$:

$$y'' + y = f(x).$$

1435. Giả sử ta đã có các giả thiết của bài toán 1031 và đặt

$b_n = \max\limits_{x_n \le x \le x_{n+1}} |y(x)|$. Chứng minh rằng $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

1436. Giả sử giới hạn c trong bài toán 1032 hữu hạn. Chứng minh rằng $b_n \to B > 0$ khi $n \to \infty$ (dùng kí hiệu của bài toán 1435).

1437. Tìm điều kiện đủ cho các giá trị đặc trưng của ma trận A để cho hệ phương trình (dưới dạng vectơ)

$$\dot{x} = Ax + f(t)$$

có nghiệm tuần hoàn với mọi hàm vectơ f(t) liên tục tuần hoàn chu kì ω.

Chỉ dẫn : Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số dưới dạng vectơ, biểu diễn nghiệm tổng quát qua ma trận cơ bản e^{tA}, hàm f(t) và điều kiện ban đầu. Sử dụng giả thiết tuần hoàn.

1438. Giả sử trong phương trình

$$y' = \frac{ax + by + p(x, y)}{cx + dy + q(x, y)} \qquad (1)$$

các hàm p và q xác định và khả vi liên tục trong một lân cận nào đó của điểm (0 ; 0), còn tại chính điểm (0 ; 0) thì $p = p'_x = p'_y = q = q'_x = q'_y = 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình (1) không thay đổi khi thay y bởi −y và các nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & d \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

là thuần ảo, thì điểm kì dị (0 ; 0) là tâm điểm.

1439. Giả sử $\varphi_1(t, x, y) = C_1$, $\varphi_2(t, x, y) = C_2$ là các tích phân đầu của hệ $\dot{x} = f_1(t, x, y)$, $\dot{y} = f_2(t, x, y)$; các hàm f_1, f_2 và các đạo hàm của chúng theo x và y liên tục.

Giả sử trong không gian (t, x, y) các mặt $\varphi_1(t, x, y) = 1$, $\varphi_2(t, x, y) = 2$ có chung nhau chỉ một đường (tức là chúng giao nhau hoặc tiếp xúc với nhau theo đường này). Chứng minh rằng đường đó là đường cong tích phân của hệ đã cho.

1440. Cho các hàm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ độc lập tuyến tính trong khoảng (a ; b), có đạo hàm liên tục và

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Chứng minh rằng trong khoảng đã cho sẽ tìm được điểm x_o sao cho $y_1(x_o) = y_2(x_o) = y_1'(x_o) = y_2'(x_o) = 0$.

1441. Chứng minh rằng tất cả các không điểm của bất kì nghiệm không đồng nhất bằng không của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

là cô lập nếu p(x), q(x) liên tục trên (a ; b).

1442. Giả sử p(x), q(x) liên tục trên đoạn [a ; b] hữu hạn. Chứng minh rằng nghiệm không đồng nhất bằng không của phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

không thể có vô số không điểm trên [a ; b]. (Xem thêm bài 1483).

1443. Tìm điều kiện cần và đủ để tất cả các nghiệm của phương trình thuần nhất $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ là những đường cong đóng bao quanh gốc toạ độ. (*Hướng dẫn :* Dùng toạ độ cực).

1444. Giả sử A là ma trận hằng số và R(t) là ma trận khả tích :

$$\int_1^{\infty} \| R(t) \| \, dt < \infty.$$

Biết rằng dạng Joocđăng của A là chéo. Chứng minh rằng nếu λ_j là các giá trị riêng của A và p_j là vectơ riêng tương ứng : $Ap_j = \lambda_j p_j$ thì phương trình

$$\dot{x} = Ax + R(t)x$$

có các nghiệm riêng φ_j sao cho

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_j(t)e^{-\lambda_j t} = p_j \ (j = 1, 2, ..., n).$$

Hướng dẫn : Giả sử j cố định, $Re\lambda_j = \sigma$, $e^{At} = Y_1(t) + Y_2(t)$ với $Y_1(t)$ là tổng các số hạng dạng $e^{\lambda_k t}$, $Re\lambda_k < 0$ và $Y_2(t)$ chỉ chứa các số hạng dạng $e^{\lambda_k t}$, $Re\lambda_k \geq 0$. Khi đó có hằng số $\delta > 0$ và K_1, K_2 sao cho .

$$\|Y_1(t)\| \leq K_1 e^{(\sigma-\delta)t} \ (t \geq 0),$$

$$\|Y_2(t)\| \leq K_2 e^{\sigma t} \ (t \leq 0).$$

Giả sử $\psi^{(0)}(t) = e^{\lambda_j t} p_j$ và

$$\psi^{(l+1)}(t) = e^{\lambda_i t} p_j + \int_a^t Y_1(t-s)R(s)\psi^{(l)}(s)ds - \int_t^\infty Y_2(t-s)R(s)\psi^{(l)}(s)ds$$

trong đó a chọn khá lớn sao cho

$$(K_1 + K_2)\int_a^\infty \| R(t) \| dt < \frac{1}{2}.$$

Giả sử $\| \psi_j^{(o)}(t)^n \| \leq K_o e^{\sigma t}$, $t \leq 0$, chứng minh rằng

$$\|\psi^{(l+1)}(t) - \varphi^{(l)}(t)\| \leq \frac{K_o e^{\sigma t}}{2^{l+1}},$$

do đó suy ra có hàm giới hạn φ_j thoả mãn

$$|\varphi_j(t)| \leq 2K_o e^{\sigma t}$$

và

$$\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} p_j + \int_a^t Y_1(t-s)R(s)\varphi_j(s)ds - \int_t^\infty Y_1(t-s)R(s)\varphi_j(s)ds.$$

Do đó

$$e^{-\sigma t}\left|\varphi_j(t) - e^{\lambda_j t} p_j\right| \leq 2K_o K_1 \int_a^t e^{-\delta(t-s)} \|R(s)\| ds +$$

$$+ 2K_o K_1 \int_t^\infty \| R(s) \| ds \leq 2K_o K_1 e^{-\frac{\delta t}{2}} \int_a^{t/2} \| R(s) \| ds +$$

$$+ 2K_o (K_1 + K_2)\int_{1/2}^\infty \| R(s) \| ds.$$

Cho $t \to \infty$ suy ra kết quả.

1445. Xét hệ

$$\dot{x} = [A(t) + R(t)]x$$

với giả thiết A(t) là ma trận liên tục và tuần hoàn chu kì ω và R(t) là ma trận như ở bài toán 1444. Giả sử phương trình

$$\dot{y} = A(t)y$$

có n nghiệm độc lập tuyến tính dạng $\exp(\rho_j t)\, p_j(t)$ với p_j có chu kì ω. Chứng minh rằng trong trường hợp này phương trình đã cho có n nghiệm φ_j nào đó sao cho

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi_j(t)e^{-\rho_j t} - p_j(t)] = 0, \ (j = 1, ..., n).$$

Hướng dẫn : Phương trình $\dot{y} = A(t)y$ có nghiệm cơ bản $P(t)e^{B^t}$, ma trận B có dạng chéo $B = J_o$. Hiển nhiên $P' + PB = AP$. Đặt $x = P(t)z$. Khi đó phương trình đối với z có dạng

$$z' = Bz + P^{-1}RPz.$$

Bây giờ có thể sử dụng bài toán trên vì B là ma trận hằng. Chú ý rằng $\dot{u} = Bu$ có các nghiệm $\exp(\rho_j t)e_j$, trong đó $e_j = (0, ..., 0, 1_j, 0, ..., 0)$.

1446. Xét hệ

$$W^{(n)} + A_1W^{(n-1)} + ... + A_nW = 0,$$

trong đó W là vectơ m chiều và A_i là các ma trận vuông hằng cấp m. Xác định các ma trận cơ bản của hệ đó và tính một trong số các ma trận đó.

1447. Phát biểu và chứng minh các kết quả tương tự bài toán 1445 cho phương trình

$$L_nx = x^{(n)} + [a_1(t) + r_1(t)]x^{(n-1)} + ... + [a_n(t) + r_n(t)]x = 0,$$

trong đó a_j là các hàm tuần hoàn với chu kì ω.

1448. Giả sử các hàm y(x) và z(x) thoả mãn các phương trình

$$y'' + q(x)y = 0,$$
$$z'' + Q(x)z = 0$$

là dương lần lượt trên các khoảng $(x_1 ; x_2)$ và $(x_1 ; x_2^*)$ và triệt tiêu tại các đầu mút ; biết rằng $Q(x) > q(x) > 0$. Chứng minh rằng nếu $z'(x_1) = y'(x_1)$ thì $z(x) < y(x)$ với $x_1 < x \le x_2^*$.

1449. Giả sử $f(t, x, y) \in C^1$ và $\frac{\delta f}{\delta x} \geq 0$. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ với $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$ trên đoạn $0 \leq t \leq T$ có đạo hàm dương theo b (giả sử nghiệm đó tồn tại trên $0 \leq t \leq T$).

1450. Giả sử các hàm $f_i(t, x_1, ..., x_n) \in C^1$ và $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| \leq L(t)$, i, k = 1, ..., n. Chứng minh rằng đạo hàm của nghiệm của hệ

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, ..., x_n),\ i = 1, ..., n,$$

theo điều kiện ban đầu $x_i(t_o) = x_{io}$ thoả mãn các bất đẳng thức

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial x_{ko}}\right| \leq \exp n\int_{t_o}^{t} L(s)ds \ (i, k = 1, ..., n),\ t \geq t_o.$$

1451. Giả sử φ, ψ, χ là các hàm thực liên tục (hoặc liên tục từng khúc), xác định trên khoảng thực I : $a \leq t \leq b$. Giả sử $\chi(t) > 0$ trên I và với $t \in I$ bất đẳng thức sau được thoả mãn

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)ds.$$

Chứng minh rằng trên I

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\psi(s)\exp\left[\int_s^t \chi(u)du\right]ds.$$

Hướng dẫn : Đặt $R(t) = \int_a^t \chi(s)\varphi(s)ds$ và chỉ ra rằng $R' - \chi R \leq \chi\psi$.

1452. Ta nói rằng hàm f, xác định trong miền D của mặt phẳng thực (t, x), là thuộc vào lớp Lip(t) trên D nếu có một hàm khả tích k(t) nào đó sao cho với mọi $(t ; x) \in D$ và $(t; \tilde{x}) \in D$

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq k(t)\ |x - \tilde{x}|.$$

Giả sử $f \in$ Lip (t) trên D. Giả sử φ_1 và φ_2 là hai hàm liên tục trên I : $a \leq t \leq b$ nào đó sao cho $(t ; \varphi_i(t)) \in D$ khi $t \in I$ và các hàm $f(t, \varphi_i(t))$ khả tích trên I với i = 1, 2. Đặt

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(\tau) + \int_\tau^t f(s, \varphi_i(s))ds + E_i(t),$$

$t \in I$ và giả thiết rằng $|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| \le \delta$. Chứng minh rằng với $\tau \le t \le b$:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \le \delta \exp\left[\int_\tau^t k(s)ds\right] + E(t) +$$

$$+ \int_\tau^t E(s)k(s) \exp\left[\int_\tau^t k(u)du\right]ds,$$

trong đó $E(t) = |E_1(t)| + |E_2(t)|$; tương tự đối với $a \le t \le \tau$.

Hướng dẫn : Áp dụng bài toán 1451.

1453. Giả sử các hàm φ_1, φ_2 đã cho trong bài toán 1452 thuộc vào lớp C_ρ^1 trên I (tức là chúng có đạo hàm là các hàm liên tục từng khúc, còn các điểm gián đoạn của đạo hàm thì thuộc loại 1) và ngoài ra giả sử

$$|\varphi_i'(t) - f(t, \varphi_i(t))| \le \varepsilon_i(t), \; \varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t).$$

Chứng minh rằng

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \le \delta \exp\left[\int_\tau^t k(s)ds\right] + \int_\tau^t \varepsilon(s) \exp\left[\int_\tau^t k(u)du\right]ds.$$

Hướng dẫn : $E(t) \le \int_\tau^t \varepsilon(s)\,ds$. Từ đó nếu $K = \int_a^b k(s)ds$ thì

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \le \left(\delta + \int_a^b \varepsilon(s)ds\right)e^K.$$

Dễ thấy rằng các bất đẳng thức đó có thể dùng để chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình

$$x' = f(t, x),$$

nếu $f \in Lip(t)$ trên D.

1454. Giả sử $L_n x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x$, trong đó a_j là các hàm tuần hoàn chu kì ω trên $(-\infty ; +\infty)$. Hãy tìm dạng của nghiệm trên $(-\infty ; +\infty)$.

1455. Trong phương trình $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$ thực hiện phép thế biến $s = F(t)$, với $F'(t) = \exp\left[-\int_0^t a_1(s)ds\right]$ và đặt $t = G(s)$. Chứng minh rằng ta sẽ nhận được phương trình

$$\frac{d^2x}{ds^2} + g(s)x = 0,$$

trong đó

$$g(s) = \frac{a_2(t)}{[F'(t)]^2} \text{ khi } t = G(s).$$

1456. Giả sử tất cả các nghiệm của hệ tuyến tính với hệ số không đổi $y' = Ay$ đều bị chặn khi $t \geq 0$, tức là giả sử $\|e^{tA}\| \leq M < \infty$, $t \geq 0$, với M là một hằng số nào đó.

Giả sử f là một vectơ hàm liên tục và giả sử có một hằng số a và hàm g(t) nào đó sao cho $\|f(t, x)\| \leq g(t)\|x\|$ khi $\|x\| \leq a$ và $t \geq 0$. Biết rằng $\int_0^{\infty} g(t)dt < \infty$. Chứng minh rằng có một hằng số M_1 nào đó sao cho một nghiệm bất kì φ của hệ $x' = Ax + f(t, x)$ đều thoả mãn bất đẳng thức $\|\varphi(t)\| < M_1\|\varphi(0)\|$, nếu $\|\varphi(0)\| \leq \dfrac{a}{M_1}$.

Chỉ dẫn : Chứng tỏ rằng

$$\|\varphi(t)\| \leq M\|\varphi(0)\| \exp \left[M \int_0^t g(s)ds\right].$$

1457. Rõ ràng rằng trong bài toán 1456

$$e^{tA} = U_1(t) + U_2(t),$$

ở đây $U_1(t)$ gồm các phần tử là tổng của các số hạng dạng $\exp(i\lambda_j t)$, λ_j là số thực, $\|U_1(t)\| \leq K_1$, $-\infty < t < +\infty$, còn $\|U_2(t)\| \leq K_2e^{-\sigma t}$, $0 \leq t < \infty$, $\sigma > 0$ là một số nào đó ; K_1, K_2 là các hằng số. Chứng minh rằng có một vectơ không đổi p nào đó tương ứng với nghiệm φ sao cho $\varphi(t) - U_1(t)p \to 0$ khi $t \to \infty$.

Chỉ dẫn : Chứng minh rằng có một vectơ p nào đó sao cho

$$\varphi(t) = e^{tA}p + \int_0^t U_1(t-s)f(s, \varphi(s))ds - \int_t^{\infty} U_2(t-s)f(s, \varphi(s))ds.$$

1458. Giả sử

$$x_j' = P_j(x_1, x_2) + f_j(x_1, x_2) \ (j = 1, 2) \tag{1}$$

trong đó P_j là các đa thức thuần nhất cấp $m > 1$ và $f_j = o(r^m)$ khi $r \to 0$, ở đây r và θ là các toạ độ cực. Giả thiết rằng tất cả các nghiệm của hệ (1) xuất phát từ một điểm nào đó trong lân cận của gốc toạ độ thì sẽ tiến đến gốc toạ độ khi $t \to \infty$. Đặt $Q_{(\theta)} = \dfrac{x_1P_2 - x_2P_1}{r^{m+1}}$ và cho rằng hàm Q không đồng nhất bằng không. Chứng minh rằng nếu $\theta = \omega(t)$ là một nghiệm thì hoặc là ω(t) tiến đến giới hạn hữu hạn, hoặc là $\omega(t) \to \pm\infty$ khi $t \to \infty$.

Chỉ dẫn :

$$\frac{d\theta}{dt} = r^{m-1}Q(\theta) + o(r^{m-1}).$$

1459. Hãy tìm ví dụ để sao cho cả hai phương trình $y' = f_1(y) \geq 0$ và $y' = f_2(y) \geq 0$, với vế phải liên tục, đều có tính duy nhất nghiệm, nhưng đối với phương trình $y' = \max\{f_1(y), f_2(y)\}$ thì tính duy nhất nghiệm lại không được bảo đảm. Hãy nghiên cứu kĩ thêm bài toán này, chẳng hạn với điều kiện nào thì phương trình thứ ba cũng có tính duy nhất nghiệm ?

1460. (O. A. Ôlêinhik). Giả sử trên đoạn $a \leq x \leq b$ cho các hàm liên tục $p(x)$, $q(x)$ và $r(x)$ sao cho $p(a) = p(b) = 0$, $p(x) > 0$ $(a < x < b)$, $q(x) > 0$ $(a \leq x \leq b)$,

$$\int_a^{a+\varepsilon} \frac{dx}{p(x)} = \int_{b-\varepsilon}^{b} \frac{dx}{p(x)} = +\infty \ (0 < \varepsilon < b - a).$$

Chứng minh rằng khi đó tất cả các nghiệm của phương trình

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x),$$

tồn tại trên khoảng $a < x < b$ và tiến đến $\dfrac{r(b)}{q(b)}$ khi $x \to b$.

Trong số các nghiệm ấy có một nghiệm tiến đến $\dfrac{r(a)}{q(a)}$ khi $x \to a$, còn các nghiệm khác thì tiến đến $+\infty$ hoặc $-\infty$ khi $x \to a$.

1461. Giả sử trong một miền G nào đấy các hàm $z_1(x, y)$ và $z_2(x, y)$ khả vi liên tục và

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| > 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x} & \dfrac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Chứng minh rằng khi đó trong một lân cận nào đấy của một điểm bất kì của G (nhưng không nhất thiết trong toàn bộ miền G !) z_2 là một hàm của z_1.

1462. Hãy tìm thừa số tích phân đối với phương trình tuyến tính được viết dưới dạng

$$dy - [a(x)y + b(x)]dx = 0.$$

1463. Giả sử M(x, y) và N(x, y) là các hàm khả vi liên tục hai lần trong hình chữ nhật Q, $N \neq 0$ (Q : $a < x < b$, $c < y < d$). Chứng minh rằng khi đó phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

có thừa số tích phân liên tục $\mu \neq 0$ ở trong Q mà chỉ phụ thuộc vào $x(\mu = \mu(x))$ khi và chỉ khi trong Q ta có

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \equiv \frac{\partial N}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

1464. Hãy chứng minh định lí về sự tồn tại nghiệm của phương trình

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

với điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ (định lí Pêanô) bằng cách sau đây (phương pháp Pêrrôn). Một hàm khả vi liên tục bất kì $y = \varphi(x)$ sẽ được gọi là hàm trên trong khoảng $(x_o ; b)$ nếu đồ thị của nó nằm hoàn toàn trong G (miền xác định của phương trình (1)) và

$$\varphi(x_o) = y_o, \varphi'(x) > f(x, \varphi(x)), x_o \leq x \leq b.$$

Khi đó :

a) Các hàm trên là tồn tại ;

b) Cận dưới của tất cả các hàm trên là đường cong tích phân của phương trình (1) đi qua điểm $(x_o ; y_o)$ (đó chính là nghiệm lớn nhất, xem bài toán 738*).

Tương tự có thể định nghĩa các hàm dưới và lấy cận trên của chúng. Khi $x < x_o$ ta cũng tiến hành bằng cách ấy.

1465. Giả sử trên một khoảng $[x_o ; b)$ nào đó cho các hàm khả vi liên tục y(x), z(x), u(x) với

$$y(x_o) = z(x_o) = u(x_o) = y_o,$$

trong đó $(x_o ; y_o)$ là điểm nằm trong miền xác định G của hàm liên tục f(x, y). Giả sử với mọi $x \in [x_o ; b)$ ta có

$$y'(x) = f(x, y) ; z'(x) > f(x, z) ; u'(x) \geq f(x, u).$$

Chứng minh rằng khi đó $z(x) > y(x)$ với mọi $x > x_o$. Nếu giả thiết thêm rằng tại mỗi điểm của đường cong tích phân $y = y(x)$ của phương trình

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$y = y(x)$ là nghiệm duy nhất của (1), thì với $x > x_o$ ta có

$$u(x) \geq y(x). \qquad (2)$$

Nếu không bổ sung thêm giả thiết vừa nói thì bất đẳng thức (2) còn đúng nữa không ?

Hãy mở rộng kết quả trên cho trường hợp khi $z(x)$ và $u(x)$ là các hàm liên tục và có đạo hàm bên phải (hoặc trái).

1466. Giả sử $y = Y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ là nghiệm lớn nhất (xem bài toán 738*) của phương trình

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

với vế phải liên tục và với điều kiện ban đầu $x = x_o$, $Y(x_o) = y_o$ đồng thời đường cong $y = Y(x)$ nằm hoàn toàn trong miền G (miền xác định của phương trình đã cho). Gọi $Y_n(x)$ là nghiệm lớn nhất của (1) với điều kiện ban đầu $x = x_n$, $Y_n(x_n) = y_n$ và giả thiết rằng $y_n \geq Y(x_n)$, $x_n \to x_o$, $y_n \to y_o$ $(n \to \infty)$. Chứng minh rằng khi đó $Y_n(x)$ sẽ tồn tại trên toàn đoạn $[a ; b]$ với n đủ lớn và khi $n \to \infty$, $Y_n(x)$ sẽ hội tụ đều đến $Y(x)$ trên đoạn đó. So sánh với bài toán 738*.

1467. Giả sử $y_n(x)$ là nghiệm của phương trình sau đây với điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) + \varphi_n(x, y),$$

trong đó $\varphi_o(x, y) > 0$ và cận trên các giá trị của $\varphi_n(x, y)$ trong miền G (miền xác định của phương trình) dẫn đến không khi $n \to \infty$. Giả sử rằng $f(x, y)$, $\varphi_n(x, y)$ liên tục, điểm $(x_o ; y_o)$ thuộc G và $y = Y(x)$ là hàm đã nói đến trong bài toán 1467. Với các giả thiết như vậy, hãy chứng minh rằng $y_n(x)$ sẽ hội tụ đều đến $Y(x)$ trên đoạn $[x_o ; b]$ khi $n \to \infty$.

1468. Xét phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

trong một miền G nào đó. Nếu hàm $f(x, y)$, với mọi cặp điểm $(x ; y_1)$ và $(x ; y_2)$ của miền G, thoả mãn điều kiện

$$|f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)| \leq \varphi(|y_2 - y_1|), \qquad (2)$$

trong đó $\varphi(u) > 0$ là một hàm liên tục nào đó trên $(0 ; a]$ sao cho

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{du}{\varphi(u)} = \infty,$$

thì qua mỗi điểm $(x_o ; y_o)$ của miền G có không quá một đường cong tích phân của phương trình (1) đi qua. (Bài toán này chính là nội dung của định lí Ôxgút về tính duy nhất nghiệm).

Hãy cho ví dụ một số dạng của hàm φ thoả mãn các điều kiện nói trên và so sánh điều kiện (2) với điều kiện Lipsit trong định lí tồn tại duy nhất nghiệm.

1469. Chứng minh rằng nếu $\varphi(0) = 0$ và $\varphi'(0) = 0$ (φ ở bài toán 1468) thì hàm f(x, y) thoả mãn điều kiện (2), nhất thiết là không đổi đối với y nếu miền G lồi theo y. Trong trường hợp riêng có thể lấy $\varphi(u) = u^p$, $p > 1$.

1470. Chứng minh rằng nếu $\varphi(0) = 0$ và $\varphi'(0)$ tồn tại thì $\int_0^{\varepsilon} \frac{du}{\varphi(u)} = \infty$, tức là hàm φ(u) thoả mãn điều kiện của định lí Oxgút.

1471. Chứng minh định lí về tính duy nhất nghiệm với giả thiết tổng quát hơn sau đây : Điều kiện (2) được thay bởi bất đẳng thức

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le \psi(x)\, \varphi(|y_2 - y_1|),$$

mà ta giả thiết rằng bất đẳng thức này được thoả mãn khắp nơi, có thể trừ ra tại một số hữu hạn các giá trị của x. Hàm φ là hàm đã nói đến trong định lí Ôxgút, còn hàm ψ(x) giả thiết là liên tục khắp nơi, có thể trừ ra tại một số hữu hạn các giá trị của x đã nói ở trên, sao cho $\int_a^b \psi(x)dx < \infty$ trên mọi khoảng hữu hạn (a ; b).

1472. Giả sử φ(x) là một hàm liên tục cho trên đoạn [a ; b] và $a \le \varphi(x) \le b$. Chứng minh rằng khi đó có thể tìm được một giá trị x_o $(a \le x_o \le b)$ sao cho $\varphi(x_o) = x_o$. (Một ánh xạ liên tục biến một đoạn thẳng vào chính nó có ít nhất một điểm bất động). Chú ý rằng ta có kết quả tương tự cho một hình cầu n chiều.

1473. (O. A. Ôlêinhik). Giả sử hàm f(x, y) $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ liên tục, thoả mãn điều kiện Lipsit theo y, đồng thời $f(x + T, y) \equiv f(x, y)$ với một số $T > 0$ nào đấy và có hai điểm y_1, y_2 nào đó sao cho $f(x, y_1) . f(x, y_2) < 0$ $(-\infty < x < \infty)$. Sử dụng bài toán 1472 để chứng minh rằng khi đó phương trình

$$y' = f(x, y)$$

có ít nhất một nghiệm tuần hoàn với chu kì T. Áp dụng định lí này cho phương trình $y' = a(x)y + b(x)$, nếu a(x) và b(x) là các hàm liên tục tuần hoàn với chu kì T, $a(x) \ne 0$.

1474. Xét phương trình

$$y'(x) = y(x - h),$$

trong đó h là hằng số. Phương trình này với $h \geq 0$ được gọi là phương trình vi phân với đối số trễ (hay đối số chậm). Ta sẽ xét các nghiệm của phương trình này khi chúng xác định với mọi giá trị x thực. Dễ thấy rằng nếu biết một nghiệm nào đó trên một khoảng nào đấy có độ dài h thì sẽ xác định được nó khắp nơi.

Chứng minh rằng nếu $h > 0$ thì với bất kì $A > 0$ và $\varepsilon > 0$ có thể tìm được $\delta > 0$ nào đó sao cho nếu $|y(x)| < \delta$ khi $-h < x < 0$ thì $|y(x)| < \varepsilon$ khi $0 \leq x \leq A$.

Nếu $h < 0$ thì với bất kì $A > 0$ sẽ tồn tại một dãy các nghiệm $y_n(x)$ hội tụ đều đến không trên khoảng $-\infty < x < 0$, nhưng trên khoảng $0 < x < A$ thì

$$\sup_x |y_n(x)| \to \infty \ (n \to \infty).$$

(Để chứng minh khẳng định cuối cùng, có thể lấy hàm dạng $y = \exp(\alpha x).\sin\beta x$ làm nghiệm với α và β là các hằng số thích hợp nào đó).

1475. Cho phương trình $y' = \sin(xy)$ và điều kiện ban đầu $x_o = 0$, $y_o = 0$. Hãy tìm (với x bất kì) $\dfrac{\partial y}{\partial x_o}$ và $\dfrac{\partial y}{\partial y_o}$.

Chỉ dẫn : Dùng hệ thức sau đây :

$$\frac{d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}.\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{\partial f}{\partial\mu},$$

trong đó $\varphi(x, \mu)$ là nghiệm của phương trình có vế phải phụ thuộc tham số

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu).$$

1476. Chứng minh rằng nếu hàm f trong phương trình

$$y' = f(x, y)$$

là khả vi liên tục thì

$$\frac{\partial y(x, x_o, y_o)}{\partial x_o} = -f(x_o, y_o) \exp \int_{x_o}^{x} f'_y(t, y(t))dt,$$

$$\frac{\partial y(x, x_o, y_o)}{\partial y_o} = \exp \int_{y_o}^{x} f'_y(t, y(t))dt.$$

1477. Giả sử M và N trong phương trình

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

là các hàm khả vi liên tục và $M^2(x_o, y_o) + N^2(x_o, y_o) \neq 0$, $(x_o ; y_o)$ là một điểm của miền G (miền xác định của phương trình). Chứng minh rằng khi đó trong một lân cận nào đó của điểm này, phương trình (1) có một thừa số tích phân liên tục.

1478. Giả sử hàm f(x, y) liên tục và thoả mãn điều kiện Lipsit theo y khi $a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty$, đồng thời $f(x, y) > 0$ khi $y > F(x)$ và $f(x, y) < 0$ khi $y > F(x)$ (F(x) là một hàm liên tục nào đó trên [a ; b]). Khi đó với $\mu > 0$ nghiệm $y(x, \mu)$ của phương trình

$$\mu \frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (1)$$

với điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ (ở đây $a < x_o < b$, $y_o > F(x_o)$), phụ thuộc liên tục vào (x, μ) và xác định với $a \leq x \leq b$. Chứng minh rằng

$\lim\limits_{\mu\to+o} y(x, \mu) = +\infty$ $(a \leq x < x_o)$, $\lim\limits_{\mu\to+o} y(x, \mu) = F(x)$ $(x_o < x \leq b)$, đồng thời các hệ thức cuối được thoả mãn đều theo x trên mỗi đoạn [c ; b] $(x_o < c < b)$.

Như vậy, ta thấy rằng dáng điệu nghiệm của phương trình (1), khi hệ số (bé) μ của đạo hàm thay đổi, khác căn bản so với dáng điệu nghiệm của phương trình có chứa tham số bé ở vế phải sau đây :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu).$$

Kết quả trên đây chỉ là một trường hợp riêng của một định lí tổng quát hơn rất nhiều của A. N. Chikhônốp ("Tuyển tập toán học", 22 (1948) và 27 (1950)).

1479. Hãy cho các điều kiện đủ bảo đảm sự tồn tại và duy nhất nghiệm của một hệ gồm vô hạn phương trình với vô hạn hàm cần tìm

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ...), \ i = 1, 2, ...$$

1480. Hãy tìm tất cả các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} xy_1' = 2y_1 - y_2, \\ xy_2' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng nếu các điều kiện ban đầu được cho tại $x_o \neq 0$, thì nghiệm là tồn tại và duy nhất trên toàn trục số ; nếu $x_o = 0$ thì nghiệm tồn tại chỉ khi $2y_1^o - y_2^o = 0$, đồng thời trong trường hợp này không duy nhất. Chứng minh định thức Vrônxki lập nên từ hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kì bằng Cx, $C \neq 0$. Như vậy, ở đây định thức Vrônxki bằng không chỉ tại một điểm và khác không tại các điểm khác. Phải chăng có mâu thuẫn ? Hãy giải thích.

1481. Hãy tìm nghiệm của hệ

$$\begin{cases} xy_1' = y_1 - 2y_2, \\ xy_2' = y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng nghiệm xác định bởi điều kiện ban đầu (x_o, y_1^o, y_2^o) tồn tại trên toàn trục số khi và chỉ khi $y_1^o = 2y_2^o$. Đồng thời nghiệm này là duy nhất.

1482. Giả sử cho một hệ các hàm khả vi liên tục gồm m hàm (nói cho đúng đó là các vectơ hàm) :

$$y^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} y_1^{(i)}(x) \\ y_2^{(i)}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^{(i)}(x) \end{bmatrix} ; i = 1, ..., m, m < n \qquad (1)$$

Chứng minh rằng có thể mở rộng hệ hàm đó (bằng cách bổ sung thêm các hàm mới) để nó trở thành một hệ nghiệm cơ bản của một hệ phương trình nào đó dạng

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \qquad (2)$$

với A(x) là $n \times n$ − ma trận liên tục, khi và chỉ khi tại mỗi một điểm của (a ; b), hạng của ma trận lập nên bởi m vectơ hàm (1) bằng m.

Chỉ dẫn : Hệ cần tìm (2) được xây dựng đầu tiên trong một lân cận của một điểm bất kì của khoảng (a ; b).

1483. Giả sử $a < a_1 < b_1 < b$ và nghiệm $y(x)$ của phương trình

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

(với $a_i(x) \in C(a, b)$, $i = 0, 1, ..., n-1$) có trên $[a_1 ; b_1]$ một tập hợp vô hạn các không điểm. Chứng minh rằng khi đó $y(x) \equiv 0$ trên $(a ; b)$.

1484. Xét phương trình

$$y'' + B(x, \lambda)y = 0$$

$$(a \leq x \leq b, \wedge^* < \lambda < \wedge^{**})$$

với hệ số phụ thuộc vào tham số λ. Giả sử hàm $B(x, \lambda)$ liên tục theo tập hợp các biến x, λ, không giảm theo λ và với mọi $N > 0$ tồn tại một giá trị λ sao cho $B(x, \lambda) < \frac{1}{N} (a \leq x \leq b)$ và tồn tại một giá trị nữa của λ sao cho $B(x, \lambda) > N(a_1 \leq x \leq b_1 ; a \leq a_1 < b_1 \leq b ; a_1$ và b_1 cố định). Chứng minh rằng khi đó có thể tìm được một dãy nào đấy $\wedge^* < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$, tiến tới $\wedge^{**}$, sao cho tại các giá trị $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, ...$ và chỉ tại đó phương trình đang xét có nghiệm không tầm thường triệt tiêu tại $x = a$ và $x = b$; đồng thời khi $\lambda = \lambda_n$ nghiệm đó có đúng $n - 1$ không điểm nằm giữa a và b.

1485. Hãy tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$y'(x) = ay(x) + by(c - x),$$

mà nó tồn tại với $-\infty < x < \infty$ (a, b, c là các hằng số).

1486. (Benđicxơn). Giả sử các vế phải của hệ

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

là khả vi liên tục. Khi đó phía trong mỗi xích, hiệu $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ có cả dấu dương lẫn dấu âm. (Định nghĩa "Xích" bạn đọc có thể xem : I. G. Pêtrốpxki – Bài giảng lí thuyết phương trình vi phân thường).

1487. Xét phương trình Ricati

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + 2by + u^2, \qquad (E)$$

trong đó y là hàm chưa biết của biến x và a, b, u là ba hàm đơn trị của x đã cho.

Các hàm a, b, u phải thoả mãn điều kiện (C) nào để phương trình (E) có hai nghiệm y_1 và y_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức $y_2 = s^2 y_1$, s là một hằng số. Khi điều kiện (C) được thoả mãn hãy chứng minh rằng việc lấy tích phân phương trình (E) dẫn tới một phép cầu phương.

1488. Hãy tìm tất cả các hàm P(x, y) và Q(x, y) sao cho phương trình

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

có đồng thời các thừa số tích phân $\lambda(x + y)$ và $\mu(x - y)$ cho trước. Tích phân tổng quát của phương trình (1) lúc đó sẽ như thế nào ?

1489. Biết rằng phương trình

$$dy + f(x, y)dx = 0$$

có một thừa số tích phân dạng $X(x)y + X_1(x)$ $(X \neq 0)$. Chứng minh rằng hàm f có dạng

$$f = \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}$$

với A, B, C, D, E là các hàm của x.

Ngược lại cho phương trình dạng

$$dy + \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E}dx = 0,$$

tìm điều kiện mà các hàm A, B, C, D, E của x phải thoả mãn để phương trình này có một thừa số tích phân dạng $X(x)y + X_1(x)$, trong đó X và X_1 là các hàm xác định nào đó của x.

Hãy suy ra tích phân tổng quát.

1490. Cho một phương trình vi phân cấp hai dạng

$$y'' + a(x, y)y' + b(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Hãy nêu điều kiện để phương trình này có một tích phân trung gian dạng

$$f(x, y)y' + \varphi(x, y) = C, \qquad (2)$$

C là một hằng số tuỳ ý, và xác định các hàm f và φ. Xét trường hợp riêng b = 0 và chứng minh rằng lúc này phương trình giải được bằng cầu phương.

1491. Tìm hai hàm P(t) và Q(t) để cho hàm y xác định bởi công thức

$$y = (x - a)\int_b^x f(t)P(t)dt + (x - b)\int_a^x f(t)Q(t)dt \qquad (1)$$

là nghiệm của phương trình vi phân y" = f(x) đối với tất cả các dạng có thể có của hàm f(x).

1492. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình tuyến tính $y'' + py' + qy = 0$ có hai nghiệm khác nhau y_1 và y_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức $y_1y_2 = 1$. Với $p = -\frac{1}{x}$ hãy tìm hệ số q và nghiệm tổng quát.

1493. Cho phương trình $y''+ py'+ qy = 0$, trong đó p và q là các hàm của biến x. Hãy lập phương trình vi phân để cho hàm $z = \frac{y}{Y}$ nghiệm đúng, với y và Y là hai nghiệm bất kì nào đó của phương trình đã cho. Phương trình của z có tính chất gì ?

1494. Giả sử y_1, y_2 là hai nghiệm riêng của phương trình tuyến tính

$$y'' = f(x)y.$$

Chứng minh rằng tích của chúng $z = y_1y_2$ thoả mãn một hệ thức dạng

$$2zz'' = (z')^2 + 4z^2f(x) + \text{const}.$$

1495. Cho y là một nghiệm bất kì của phương trình vi phân

$$y'' = yf(x), \qquad \text{(E)}$$

f(x) là hàm đã cho. Chứng minh rằng hàm $z = y^3$ thoả mãn một phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất bậc 4, mà các hệ số chỉ phụ thuộc vào f(x) và các đạo hàm của nó. Hãy chỉ rõ các hệ số này.

Nếu biết hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính y_1, y_2 của (E) hãy suy ra nghiệm tổng quát của phương trình của z.

Hàm f(x) phải thoả mãn điều kiện nào để phương trình của z có nghiệm riêng $z = 1$?

1496. Xét định hàm X(x) để cho phương trình

$$y'' + 2y' + X(x)y = 0$$

có hai nghiệm y_1 và $y_2 = e^x y_1^2$. Tìm nghiệm tổng quát trong trường hợp này.

1497. Xác định các hàm p(x), q(x) để cho phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

có hai nghiệm y_1 và $y_2 = y_1'$.

1498. Hãy tìm điều kiện mà các hàm a(x), b(x) và c(x) ($a \neq 0$) phải thoả mãn để cho phương trình

$$y'y'' = ay^2 + 2byy' + cy'^2 \qquad (1)$$

thừa nhận một tích phân đầu dạng

$$Ay^2 + 2Byy' + Cy'^2 = \text{const}, \tag{2}$$

trong đó A, B và C là các hàm của x.

1499. Tìm tất cả các phương trình Ricati dạng

$$y' + ay^2 + by + c = 0,$$

với a, b, c là các hàm của x, sao cho nó có hai nghiệm y_1, y_2 thoả mãn hệ thức :

$$y_1y_2 = y_1 + y_2.$$

1500. Xét hệ vi phân :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \frac{dz}{dx} = g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right). \tag{1}$$

1) Chứng minh rằng hệ (1) có một tích phân đầu dạng

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = C$$

và nếu biết được tích phân đầu đó thì hệ (1) có thể tích phân được nhờ một phép cầu phương.

2) Tìm điều kiện cho các hàm f và g để cho các đường cong tích phân (G) của hệ (1) nằm trên những mặt cầu có tâm tại gốc toạ độ (các trục toạ độ giả sử là vuông góc).

Nếu điều kiện đó được thoả mãn thì chứng minh rằng các đường cong (G) là các quỹ đạo trực giao của một họ mặt (S) phụ thuộc một tham số.

3) Xác định các đường cong (G) và các mặt (S) với giả thiết

$$f = \frac{x(mz - y)}{y^2 + z^2}, \; g = -\frac{x(my + z)}{y^2 + z^2},$$

m = const.

Phụ lục

PHÉP TÍNH TOÁN TỬ VÀ ỨNG DỤNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Vào giữa thế kỉ 19 xuất hiện "Phép tính toán tử" (hay phép tính kí hiệu) và nó đã được ứng dụng vào việc giải các phương trình vi phân. Cuối thế kỉ 19, Hevixaiđ, một kĩ sư người Anh đã áp dụng phép tính toán tử để giải một số bài toán về kĩ thuật điện tử.

Ngày nay phép tính toán tử đã có nhiều ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực kĩ thuật điện tử, kĩ thuật vô tuyến điện, cơ học, tự động học, v.v...

Sau đây sẽ trình bày cách ứng dụng phép tính toán tử để giải các phương trình và hệ phương trình vi phân có hệ số hằng số.

§1. Gốc và ảnh

Để tìm các nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất có hệ số hằng số :

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),\ a_i = \text{const}\ (i = 0, \dots, n)$$

trong kĩ thuật và cơ học thường dùng một phương pháp gọi là "phép tính toán tử" để giải.

Ta bắt đầu bằng cách trình bày các khái niệm của phép tính đó.

Một hàm f(x) của biến thực x được gọi là *gốc* nếu nó thoả mãn các điều kiện :

a) f(x) liên tục đối với mọi x trừ ra một số hữu hạn các điểm trên mỗi khoảng hữu hạn tại đó f(x) là gián đoạn loại một.

b) $f(x) = 0$ với $x < 0$.

c) Tồn tại hai số $A > 0$ và $\alpha \geq 0$ sao cho đối với x bất kì

$$|f(x)| < Ae^{\alpha x} \tag{1}$$

tức môđun của f(x) tăng không nhanh quá một hàm mũ.

Chú ý rằng điều kiện b) trong thực tiễn không phải là một hạn chế thực sự vì trong các bài toán thực tế ta luôn luôn có thể lấy điểm không là điểm x mà bắt đầu từ đó ta khảo sát hàm f(x).

Sau đây nếu không nói gì khác, ta luôn luôn quy ước f(x) là gốc.

Định lí : Nếu f(x) là gốc thì tích phân Laplax

$$\int_0^{\infty} e^{-px} f(x)dx, \tag{2}$$

với $\mathrm{Re}(p) > \alpha$, có giá trị hữu hạn (α được xác định ở (1)).

Chứng minh. Giả thử $p = a + ib$ trong đó $\mathrm{Re}(p) = a > \alpha$. Dùng (1) ta có

$$\left|\int_0^{\infty} e^{-px} f(x)dx\right| \le \int_0^{\infty} | e^{-(a+ib)x} ||f(x)|dx < \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{\alpha x} A dx =$$

$$= A\int_0^{\infty} e^{-(a-\alpha)x}dx = -\frac{A}{a-\alpha}\left[e^{-(a-\alpha)x}\right]_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{A}{a-\alpha}[\lim_{x\to\infty} e^{-(a-\alpha)x} - 1] = \frac{A}{a-\alpha}$$

vì $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-(a-\alpha)x} = 0$ với $a - \alpha > 0$. Định lí đã được chứng minh.

Định nghĩa. Ta gọi là *ảnh* của gốc f(x), hàm F(p) xác định bởi tích phân Laplax, tức là

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x)dx \tag{3}$$

Phép toán chuyển từ gốc f(x) sang ảnh F(p) được gọi là *phép biến đổi Laplax* và ta dùng kí hiệu :

$$f(x) \leftarrow\!\!\!\!\div F(p),\ F(p) \div\!\!\!\!\rightarrow f(x)$$

(đọc là F(p) là ảnh của f(x)).

Ngành toán học nghiên cứu đến các vấn đề liên quan đến phép biến đổi Laplax được gọi là *Phép tính toán tử*.

Chú ý : Trong một số sách, đặc biệt trong kĩ thuật điện tử, dùng làm ảnh F(p) nghiệm ta lấy hàm

$$F(p) = p\int_0^{\infty} e^{-px} f(x)dx .$$

Nhưng vì mục đích của ta là áp dụng phép tính toán tử vào việc giải các phương trình vi phân và trong trường hợp này việc thêm thừa số p trong biểu thức của F(p) không có lợi thêm gì, vì vậy ta sẽ dùng biểu thức (3) là định nghĩa của ảnh F(p) như phần lớn các sách hiện nay về phép tính toán tử vẫn dùng.

§2. Các tính chất cơ bản của ảnh

1. Ảnh của đạo hàm và tích phân. Ta hãy tìm liên hệ giữa ảnh F(p) của gốc f(x) và ảnh của f'(x) và của $\int_0^x f(x)dx$.

Ta có

$$f'(x) \leftarrow\!\!\div \int_0^\infty e^{-px} f'(x)dx = \left[e^{-px} f(x)\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx.$$

Giả thử f(0) = 0, do (1) và Re(p) > α ta có

$$\lim_{x\to\infty} |e^{-px} f(x)| = \lim_{x\to\infty} (|e^{-(a+ib)x}\ \ f(x)|) < \lim_{x\to\infty} (e^{-ax} Ae^{\alpha x}) =$$

$$= A \lim_{x\to\infty} e^{-(a-\alpha)x} = 0.$$

Do đó theo (3) : $\quad f'(x) \leftarrow\!\!\div pF(p),$ (4)

tức là ảnh của đạo hàm của gốc f(x) với f(0) = 0 bằng ảnh của gốc nhân với p.

Để tìm ảnh của tích phân ta có

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x e^{-px}\left[\int_0^x f(x)dx\right]dx = -\frac{1}{p}\int_0^x\left[\int_0^x f(x)dx\right]de^{-px} =$$

$$= \frac{1}{p}\left[e^{-px}\int_0^\infty f(x)dx\right]_\infty^0 + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-px} f(x)dx.$$

Do đó

$$\int_0^x f(x)dx \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p}F(p), \tag{5}$$

tức là ảnh của tích phân $\int_0^\infty f(x)dx$ của gốc f(x) bằng ảnh của gốc đó chia cho p.

Như vậy, qua phép tính toán tử, các phép đạo hàm và lấy tích phân của một hàm tương ứng với các phép tính đơn giản hơn : Phép nhân và chia ảnh của hàm đó với số p. Đó là tính ưu việt của phép tính toán tử.

2. Nếu f(x) = x từ (3) bằng cách tích phân từng phần ta có

$$x \leftarrow\!\!\div \int_0^\infty e^{-px} x dx = -\frac{1}{p}\int_0^\infty x de^{-px} = -\frac{1}{p}\Big[xe^{-px}\Big]_0^\infty +$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-px}dx = -\frac{1}{p^2}\Big[e^{-px}\Big]_0^\infty = \frac{1}{p^2},$$

(với giả thiết Re (p) > 0), tức là

$$x \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p^2}.$$

Áp dụng vào hệ thức đó liên tiếp n – 1 lần công thức (5) ta có

$$x^n \leftarrow\!\!\div \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

3. Giả thử $f(x) = e^{ax}$ trong đó a là số phức tuỳ ý thoả mãn điều kiện Re(a) < Re(p). Khi đó từ (3) :

$$e^{ax} \leftarrow\!\!\div \int_0^\infty e^{-px}e^{ax}dx = \frac{1}{p-a}\int_0^\infty e^{-[p-a]x}d(p-a)x =$$

$$= -\frac{1}{p-a}\Big[e^{-[p-a]x}\Big]_0^\infty = \frac{1}{p-a},$$

tức là

$$e^{ax} \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p-a}.$$

Do đó ta suy ra rằng

$$e^{i(\omega x+\varphi)} = e^{i\varphi} \quad e^{i\omega x} \leftarrow\!\!\div \frac{e^{i\varphi}}{p-i\omega},$$

$$1 - e^{-ax} \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p(p+a)}.$$

Bằng cách tương tự ta có thể tìm ảnh của tất cả các gốc trong bảng kê ở trang cuối phần này.

Chú ý. Công thức (3) cho phép tính ảnh F(p) theo gốc f(x). Xuất phát từ đẳng thức (3) ta cũng có thể tìm ra công thức ngược lại cho phép tính gốc f(x) theo ảnh F(p) của nó. Ta đưa ra đây công thức đó mà không chứng minh.

Nếu hàm f(x) là gốc, thoả mãn thêm một số điều kiện nữa ngoài bất đẳng thức (1) (xem chẳng hạn Xmianốp V. I. Giáo trình toán học cao cấp, tập IV (tiếng Nga)) thì ta sẽ có hệ thức

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}F(p)dx, \tag{11}$$

trong đó $c > \alpha > 0$ và tích phân hiểu theo nghĩa giá trị chính.

Ví dụ. Dùng công thức (7) hãy chứng minh rằng ảnh của đạo hàm của $f(x) \doteq e^x$ trùng với ảnh của hàm.

Giải. Ta có

$$f(x) = e^x \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p-1} = F(p).$$

Vì $f(0) = 1 \neq 0$ nên ảnh của đạo hàm tính được theo công thức (7) :

$$f'(x) \leftarrow\!\!\div pF(p) - f(0) = \frac{p}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}F(p).$$

§3. Ảnh của gốc tuần hoàn

Ta hãy tìm ảnh F(p) của gốc f(x) là hàm tuần hoàn với chu kì ω :

$$f(x+\omega) = f(x).$$

Ta có

$$f(x) \leftarrow\!\!\div \int_0^\infty e^{-px}f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\omega}^{(k+1)\omega} e^{-px}f(x)dx =$$

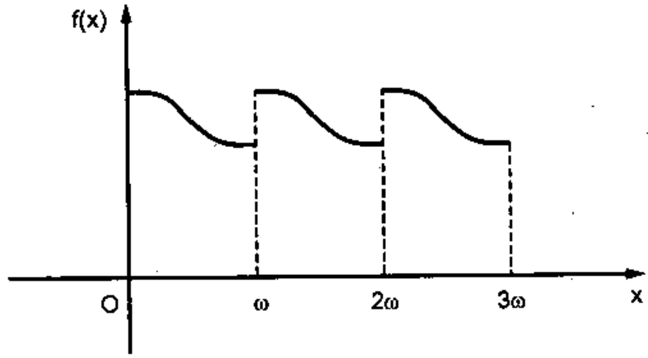
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\omega} e^{-p(t+k\omega)}f(t+k\omega)dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\omega p}\int_0^{\omega} e^{-pt}f(t)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\omega p}}\int_0^{\omega} e^{-pt}f(t)dt \text{ nếu } 1 > |e^{-\omega p}| = e^{-\omega\alpha}$$

vì khi đó chuỗi số $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\omega p}$ hội tụ, nhưng bất đẳng thức trên được thoả mãn với điều kiện $Re(p) = a > 0$.

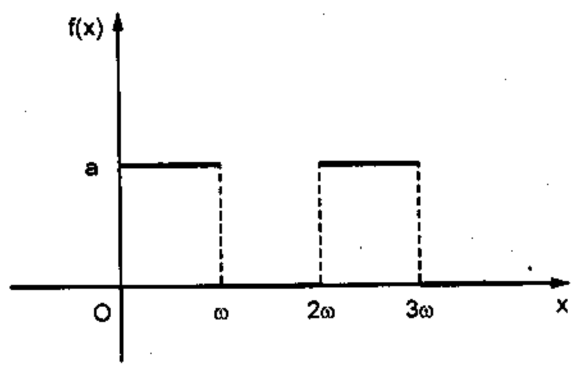
Vậy nếu gốc f(x) có chu kì ω thì

$$f(x) \leftarrow\!\!\div \frac{1}{1-e^{-\omega p}}\int_0^{\omega} e^{-px}f(x)dx \tag{12}$$



Hình 26

Ví dụ 1. Tìm ảnh của "mạch xung chữ nhật" tuần hoàn, tức là hàm f(x) có chu kì 2ω và đồ thị của nó được vẽ ở hình 27.



Hình 27

Giải. Theo giả thiết

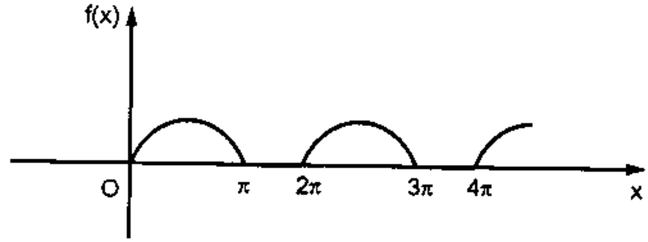
$$f(x) = \begin{cases} a \text{ với } 0 \le x \le \omega \\ 0 \text{ với } \omega < x < 2\omega \end{cases}$$

nên theo (12) ta có

$$f(x) \leftarrow\!\!\!\!\div F(p) = \frac{1}{1-e^{-2\omega p}} \int_0^{\omega} e^{-px} a dx = \frac{a}{1-e^{-2\omega p}} \left[\frac{e^{-px}}{p} \right]_0^{\omega} =$$

$$= \frac{a}{p} \cdot \frac{1-e^{-\omega p}}{4-e^{-2\omega p}} = \frac{a}{p(4+e^{-\omega p})}.$$

Ví dụ 2. Tìm ảnh của "dòng xoay chiều được nắn thẳng", tức là hàm f(x) có chu kì 2π và có đồ thị vẽ ở hình 28.



Hình 28

Giải. Nhờ hàm đơn vị

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ với } x < 0 \\ 1 \text{ với } x \geq 0 \end{cases}$$

hàm f(x) đã cho có thể viết thành biểu thức giải tích như sau :

$$f(x) = \sin x.\, u(\sin x).$$

Vì vậy do (12) ta có

$$f(x) \leftarrow\!\!\div \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-px} \sin x.u(\sin x)dx =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-px} \sin x dx = -\frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left[\frac{e^{-px}(p \sin x + \cos x)}{p^2 + 1} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-\pi p}}{1 - e^{-2\pi p}} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi p}}.$$

§4. Ứng dụng phép tính toán tử để giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số

Xét phương trình

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \tag{13}$$

Bằng cách chuyển y, các đạo hàm của y và f(x) sang ảnh của chúng, ta được

$$a_o[p^n Y(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)] +$$
$$+ a_1[p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y(0) - p^{n-3}y'(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)] +$$
$$+ \ldots + a_n Y(p) = E(p).$$

Đó là một phương trình đại số bậc nhất đối với ảnh Y(p) của hàm phải tìm y(x) và có thể viết dưới dạng

$$M(p).\ Y(p) = N(p),$$

trong đó

$$M(p) = a_o p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n,$$

$$N(p) = F(p) + a_o[p^{n-1}y(0) + p^{n-2}y'(0) + ... + y^{(n-1)}(0)] +$$
$$+ a_1[p^{n-2}y(0) + p^{n-3}y'(0) + ... + y^{(n-2)}(0)] + ... + a_{n-1}y(0).$$

Từ phương trình trên ta có

$$Y(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \tag{14}$$

và thành thử việc tìm nghiệm y(x) được quy về việc xác định y(x) theo ảnh Y(p) của nó (bằng cách tra bảng kê gốc và ảnh của một số hàm thường gặp).

Vì nghiệm tìm được sẽ thoả mãn điều kiện ban đầu y(0), y'(0), ..., $y^{(n-1)}(0)$ nên nó là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân (13).

Như vậy tính ưu việt của việc ứng dụng phép tính toán tử để giải phương trình vi phận tuyến tính không thuần nhất có hệ số hằng số là ở chỗ hàm phải tìm y(x) với điều kiện ban đầu đã cho y(0), y'(0), ..., $y^{(n-1)}(0)$ xác định được chỉ bằng các phép tính đại số đơn giản mà không cần phải tích phân và không cần tìm các hằng số tích phân tương ứng với điều kiện ban đầu (khi x = 0).

§5. Định lí khai triển

Để dễ xác định hàm theo ảnh (14) của nó thì ta nên đưa ảnh đó về dạng đơn giản nhất.

Giả thử biểu thức (14) là một phân thức hữu tỉ (trường hợp này thường gặp trong kĩ thuật điện tử) tức có dạng

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \frac{1}{H(p)} = \frac{b_o p^l + b_1 p^{l-1} + ... + b_{l-1}p + b_l}{c_o p^m + c_1 p^{m-1} + ... + c_{m-1}p + c_m}.$$

Nếu phân thức đó không là thực sự (tức $l \geq m$) thì bằng cách tách phần nguyên ra ta sẽ có một phân thức thực sự và khi đó, như ta đã biết, có thể phân tích thành tổng các phân thức tối giản.

Giả thử rằng phân thức đang xét là thực sự ($l < m$) và đa thức ở mẫu số có các nghiệm $p_1, p_2, ..., p_m$ mà không có nghiệm nào là bội hay trùng với nghiệm của đa thức ở tử số (vì trong trường hợp trái lại ta có thể rút gọn thừa số chung của các đa thức ở tử và mẫu số). Khi đó ta có

$$\frac{1}{H(p)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{p - p_k},$$

trong đó các A_k là hằng số không chứa p. Để xác định hệ số A_k ta nhân hai vế của đẳng thức trên với $p - p_k$ và được

$$\frac{p - p_k}{H(p)} = A_k + (p - p_k)\left[\frac{A_1}{p - p_1} + ... + \frac{A_{k-1}}{p - p_{k-1}} + \frac{A_{k+1}}{p - p_{k+1}} + ... + \frac{A_m}{p - p_m}\right].$$

với $p = p_k$ vế trái có dạng bất định $\frac{0}{0}$ còn vế phải bằng A_k vì vậy bằng cách áp dụng qui tắc Lôpitan ta được

$$A_k = \left.\frac{\frac{d}{dp}(p - p_k)}{\frac{d}{dp}H(p)}\right|_{p=p_k} = \frac{1}{H'(p_k)}$$

tức là

$$A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \tag{15}$$

Như vậy trong trường hợp đang xét, thay cho công thức (14), ảnh của hàm phải tìm biểu diễn được dưới dạng

$$Y(p) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)(p - p_k)}. \tag{16}$$

Dùng công thức

$$\frac{1}{p - a} \rightarrow e^{ax}$$

với $a = p_k$ ta được gốc của ảnh $Y(p)$:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k x}. \tag{17}$$

Đặc biệt, giả thử ảnh của hàm biểu diễn được thành phân thức thực sự dạng $\frac{N(p)}{pM(p)}$, trong đó $pM(p)$ không có nghiệm bội. Trong trường hợp đó một trong các nghiệm của mẫu số bằng không. Ta kí hiệu nghiệm đó là p_o và giả thiết như trước rằng M(p) có m nghiệm. Khi đó công thức (17) có dạng

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{N(p_k)}{\frac{d}{dp}[pM_p]_{p=p_k}} e^{p_k x}. \tag{18}$$

Nhưng

$$\frac{d}{dp}[pM(p)]_{p=p_k} = M(p_k) + p_k M'(p_k)$$

trong đó, với k = 0 số hạng thứ hai bằng không và với $k \neq 0$, $M(p_k) = 0$.

Vì vậy nếu trong đẳng thức (18) ta tách ra số hạng ứng với nghiệm $p_o = 0$ thì trong trường hợp đặc biệt đang xét, gốc được xác định bởi công thức :

$$y(x) = \frac{N(o)}{M(o)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{N(p_k)}{p_k M'(p_k)} e^{p_k x}. \tag{19}$$

Công thức đó là nội dung của định lí khai triển :

Định lí khai triển. Nếu ảnh của hàm là phân thức thực sự $\frac{N(p)}{pM(p)}$, trong đó mẫu số pM(p) không có nghiệm bội, thì gốc được xác định bởi công thức (19).

Chú ý. Công thức (17) và (18) nghiệm đúng với giả thiết đa thức M(p) không có nghiệm bội. Nếu đa thức M(p) có nghiệm bội thì một trong các cách giải là hãy khai triển phân thức thành tổng các phân thức sơ cấp theo quy tắc đã biết trong trường hợp mẫu số có nghiệm bội, rồi sau đó dùng những định lí sẽ trình bày ở §9.

§6. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - y' - 6y = 2e^{4x},$$

với điều kiện ban đầu y(0) = 0, y'(0) = 0.

Giải. $y(x) \leftarrow\!\div Y(p)$

$$2e^{4x} \leftarrow\!\div \frac{2}{p-4} \text{ (xem bảng).}$$

Áp dụng công thức (8) đối với ảnh của đạo hàm ta có

$$p^2Y(p) - pY(p) - 6Y(p) = \frac{2}{p-4}.$$

Do đó

$$Y(p) = \frac{2}{(p-4)(p^2-p-6)} = \frac{2}{(p+2)(p-3)(p-4)}.$$

Dùng công thức (18) và đặt trong đó

$$N(p) = 2,\ M(p) = (p+2)(p-3)(p-4)$$

ta được

$$y(x) = \frac{1}{15}e^{-2x} - \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{4x}.$$

Chú ý. Nếu không dùng công thức (17) thì có thể biểu diễn Y(p) thành tổng các phân thức sơ cấp

$$Y(p) = \frac{2}{(p+2)(p-3)(p-4)} = \frac{\frac{1}{15}}{p+2} + \frac{-\frac{2}{5}}{p-3} + \frac{\frac{1}{3}}{p-4}$$

và theo bảng, do hệ thức

$$\frac{1}{p-a} \rightarrow e^{ax} \text{ ta có}$$

$$y(x) = \frac{1}{15}e^{-2x} - \frac{2}{5}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{4x}.$$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + 4y = \cos 3x,$$

với điều kiện ban đầu y(0), y'(0) = 0.

Giải. Bằng cách chuyển qua ảnh ta có

$$p^2Y(p) + 4Y(p) = \frac{p}{p^2+9}.$$

Do đó

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{p}{p^2+9}.$$

Theo bảng, từ hệ thức $\frac{p}{p^2 + \omega} \rightarrow \cos\omega x$

ta tìm được

$$y(x) = \frac{1}{5}(\cos 2x - \cos 3x).$$

Ví dụ 3. Tích phân phương trình

$$y'' + 3y' + 2y = 0,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Giải. Bằng cách chuyển qua ảnh ta được

$$p^2Y(p) - 1 + 3pY(p) + 2Y(p) = 0$$

hay $\quad Y(p)(p^2 + 3p + 2) = 1.$

Do đó

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}.$$

Dùng công thức (17) và đặt trong đó

$$N(p) = 1,\ M(p) = (p+1)(p+2)$$

ta được

$$y(x) = e^{-x} - e^{-2x}.$$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' + y' = e^{ix},$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Giải. Chuyển qua ảnh ta được

$$p^2Y(p) + pY(p) = \frac{1}{p - i}.$$

Do đó

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)(p-i)}.$$

Áp dụng định lí khai triển (19) và đặt trong đó

$$N(p) = 1,\ M(p) = (p+1)(p-i)$$

Ta được $\quad y(x) = -\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i}e^{-x} + \frac{1}{i(1+i)}e^{ix}$

hay

$$y(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + \sin x - \cos x) - \frac{i}{2}(e^{-x} + \sin x + \cos x - 2).$$

Chú ý. Nếu vế phải của phương trình vi phân tuyến tính với hệ số thực là hàm phức của biến thực, tức phương trình có dạng

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = \varphi(x) + i\psi(x).$$

thì phần thực u(x) của nghiệm y = u(x) + iv(x) của phương trình đó sẽ thoả mãn phương trình

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = \varphi(x)$$

và v(x) sẽ thoả mãn phương trình

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = \psi(x).$$

Áp dụng. Dùng công thức Ơle, phương trình đang xét viết được dưới dạng

$$y'' + y' = \cos x + i\sin x.$$

Vì vậy phần thực của nghiệm tìm được

$$\frac{1}{2}(e^{-x} + \sin x - \cos x)$$

là nghiệm của phương trình $y'' + y' = \cos x$

và phần ảo của nghiệm tìm được

$$-\frac{1}{2}(e^{-x} + \sin x + \cos x - 2)$$

là nghiệm của phương trình $y'' + y' = \sin x$.

Ngược lại, nếu hàm ở vế phải của phương trình có dạng $A\cos(\omega x + \varphi)$ hay $A\sin(\omega x + \varphi)$ trong đó A = const thì theo điều nói trên, thay cho việc giải phương trình đang xét ta có thể giải phương trình mà vế phải có dạng $Ae^{i(\omega x+\varphi)}$, rồi tiếp đó tách phần thực và phần ảo của nghiệm tìm được.

Chẳng hạn như ở ví dụ 2, thay cho việc giải phương trình

$$y'' + 4y = \cos 3x,$$

ta có thể giải phương trình

$$y'' + 4y = \cos 3x + i\sin 3x = e^{i3x}.$$

Chuyển qua ảnh ta có

$$p^2Y(p) + 4Y(p) = \frac{1}{p - 3i}.$$

Do đó

$$Y(p) = \frac{1}{(p - 3i)(p^2 + 4)} = \frac{-\frac{1}{5}}{p - 3i} + \frac{\frac{1}{5}p + \frac{3}{5}i}{p^2 + 4}.$$

Dùng bảng ta tìm được

$$y(x) = -\frac{1}{5}e^{i3x} + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{3}{10}i\sin 2x$$

hay

$$y(x) = \frac{1}{5}(\cos2x - \cos3x) + \frac{i}{10}(3\sin2x - 2\sin3x).$$

Phần thực

$$\frac{1}{5}(\cos2x - \cos3x)$$

của biểu thức đó là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 5. Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x},$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Giải. Chuyển qua ảnh ta được

$$p^2Y(p) - 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Do đó

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 - 3p + 2)(p-2)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)^2}.$$

Vì mẫu số của biểu thức đó có nghiệm bội $p = 2$ nên không thể áp dụng trực tiếp công thức (17) hay định lí khai triển (19) để tìm gốc được.

Muốn tìm gốc ta phải khai triển $Y(p)$ thành tổng các phân thức sơ cấp

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)^2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2}.$$

Khi đó theo bảng ta được hàm phải tìm

$$y(x) = e^x - e^{2x} + xe^{2x}.$$

Ví dụ 6. Tích phân phương trình

$$y''' + y = \frac{1}{2}x^2e^x,$$

với điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Giải. Chuyển qua ảnh ta được

$$p^3Y(p) + Y(p) = \frac{1}{(p-1)^3}.$$

Do đó

$$Y(p) = \frac{1}{(p^3+1)(p-1)^3} = \frac{1}{(p-1)^3(p+1)(p^2-p+1)}.$$

Mẫu số của biểu thức này có nghiệm bội p = 1 nên không thể áp dụng trực tiếp công thức (17) hay định lí khai triển (19) được. Ta hãy khai triển Y(p) thành tổng các phân thức đơn giản :

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p+1)(p^2-p+1)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{8}}{p-1} + \frac{-\frac{3}{4}}{(p-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^3} + \frac{-\frac{1}{24}}{p+1} - \frac{1}{3}.\frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

và theo bảng ta tìm được

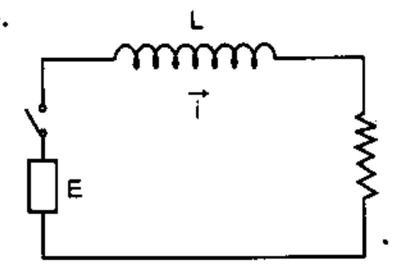
$$y(x) = \frac{3}{8}e^x - \frac{3}{4}xe^x + \frac{1}{4}x^2e^x - \frac{1}{24}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Ví dụ 7. (Mắc một suất điện động không đổi vào trong một mạch gồm có một cuộn cảm ứng và một điện trở).

Cuộn cảm ứng với hệ số tự cảm L và điện trở r được nối liên tiếp như ở hình 29.

Tại thời điểm t = 0 trong mạch có mắc một suất điện không đổi E và giả thử tại thời điểm ban đầu trong mạch không có có dòng điện, tức i(0) = 0.



Hình 29

Hãy xác định dòng i(t) của chế độ vận hành.

Giải. Khi dòng điện i(t) phát sinh trong mạch có cuộn tự cảm L và điện trở r, điện áp toàn bộ như đã biết gồm điện áp bù cho suất điện động tự cảm $L\frac{di}{dt}$ và điện áp ri gây nên bởi điện trở của mạch. Do đó

$$L\frac{di}{dt} + ri = E.$$

Gọi ảnh của i(t) là I(p) ta có

$$LpI(p) + rI(p) = \frac{E}{p}.$$

Do đó

$$I(p) = \frac{E}{p(Lp + r)} = \frac{E}{r}.\frac{\frac{r}{L}}{p\left(p + \frac{r}{L}\right)}.$$

Theo bảng ta tìm được

$$i(t) = \frac{E}{r}\left[1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right].$$

BÀI TẬP

Tìm các nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau đây với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Phương trình vi phân	**Nghiệm**
$y'' - 3y' + 2y = 5$	$y = \frac{5}{2}(1 - 2e^{x} + e^{2x})$
$y'' + 3y' + 2y = 1$	$y = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-x} + e^{-2x})$
$y'' - 4y' + 3y = 6x - 5$	$y = 1 + 2x - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{3x})$
$y'' + 3y' + 2y = x^2$	$y = \frac{1}{4}(7 - 6x + 2x^2 - 8e^{-x} + e^{-2x})$
$y'' + 5y' + 4y = e^{2x}$	$y = \frac{1}{18}(e^{2x} - 2e^{-x} + e^{-4x})$
$y'' - 3y' + 2y = e^{-2x}$	$y = -\frac{1}{3}e^{x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{12}e^{-2x}$
$y'' + y' - 2y = e^{3x}$	$y = -\frac{1}{6}e^{x} + \frac{1}{15}e^{-2x} + \frac{1}{10}e^{3x}$
$y'' + 2y' + y = 6e^{-5x}$	$y = \frac{3}{8}(4x - 1)e^{-x} + \frac{3}{8}e^{-5x}$
$y' + 2y = \sin 3x$	$y = \frac{1}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x + 3e^{-2x})$
$L\frac{di}{dt} + Ri = a\cos\omega t$	$i = -\frac{a}{\omega^2L^2 + R^2}(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t - Re^{-\frac{R}{L}t})$

$y'' - y = 2\cos x$	$y = 2 - \cos x - \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$
$y'' - 4y' + 3y = \sin 2x$	$y = -\frac{1}{5}e^{x} + \frac{1}{13}e^{3x} + \frac{1}{65}(8\cos 2x - \sin 2x)$
$y'' - y = \sin x + \cos 2x$	$y = \frac{1}{20}(7e^{x} - 3e^{-x} - 10\sin x - 4\cos 2x)$
$y'' + y = e^{x}$	$y = \frac{1}{2}(e^{x} - \cos x - \sin x)$
$y'' - 3y' + 2y = e^{2ix}$	$y = \frac{1}{20}(-4e^{x} + 5e^{2x} - 3\sin 2x - \cos 2x) +$
	$+ \frac{1}{20}(-8e^{x} + 5e^{2x} - \sin 2x + 3\cos 2x)$

§7. Phương pháp toán tử để giải hệ phương trình vi phân tuyến tính có hệ số hằng số

Để giải hệ phương trình vi phân tuyến tính có hệ số hằng số bằng phương pháp toán tử ta cần phải chuyển từ hàm qua ảnh của nó như đã làm ở trên. Khi đó ta sẽ được một hệ phương trình đại số bậc nhất đối với ảnh của hàm phải tìm. Sau khi giải hệ phương trình đại số đó ta cần phải tìm hàm theo ảnh của nó bằng cách dùng định lí khai triển tương tự như trên.

Ta minh hoạ điều đã nói bằng các ví dụ sau đây.

Ví dụ 1. Tìm nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + 2y = 3, \\ 3\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 4x + 2y = 0, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Giải. Bằng cách chuyển từ các hàm phải tìm $x(t)$ và $y(t)$ sang ảnh $X(p)$ và $Y(p)$ của chúng và áp dụng hệ thức (4) đối với ảnh của đạo hàm các hàm đó ta được

$$\begin{cases} (p-1)X(p) + 2Y(p) = \dfrac{3}{p}, \\ (3p-4)X(p) + (p+2)Y(p) = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình đại số đó đối với X(p) và Y(p) ta được

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{3}{p} & 2 \\ 0 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 \\ 3p-4 & p+2 \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{3(p+2)}{p}}{p^2-5p+6} = \frac{3(p+2)}{p(p-2)(p-3)},$$

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{3}{p} \\ 3p-4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 \\ 3p-4 & p+2 \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{3(3p-4)}{p}}{p^2-5p+6} = \frac{-3(3p-4)}{p(p-2)(p-3)}.$$

Dùng định lí khai triển (19) ta xác định được các hàm phải tìm

$$x(t) = 1 - 6e^{2t} + 5e^{3t},\ y(t) = 2 + 3e^{2t} - 5e^{3t}.$$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{2} + y = 0, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} - x + 2\dfrac{dy}{dt} - 2y = 2, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ và $y(0) = 0$.

Giải. Bằng cách chuyển qua ảnh ta được

$$\begin{cases} \left(p - \dfrac{1}{2}\right)X(p) + Y(p) = 0, \\ (p^2-1)X(p) + 2(p-1)Y(p) = \dfrac{2}{p}. \end{cases}$$

Do đó

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{p} & 2(p-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p - \dfrac{1}{2} & 1 \\ p^2-1 & 2(p-1) \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{2}{p}}{p^2-3p+2} = \frac{-2}{p(p-1)(p-2)},$$

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p - \frac{1}{2} & 0 \\ p^2 - 1 & \frac{2}{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p - \frac{1}{2} & 1 \\ p^2 - 1 & 2(p-1) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{2p-1}{p}}{p^2 - 3p + 2} = \frac{2p-1}{p(p-1)(p-2)}.$$

Dùng định lí khai triển (19) ta được

$$x(t) = 2e^t - e^{2t} - 1,\ y(t) = -e^t + \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x' = x - 2y - 2z, \\ y' = 2x + 7y + 5z, \\ z' = -2x - 4y - 2z, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$, $y(0) = 3$, $z(0) = -2$.

Giải. Bằng cách chuyển qua ảnh ta được

$$\begin{cases} (p-1)X(p) + 2Y(p) + 2Z(p) = 0, \\ -2X(p) + (p-7)Y(p) - 5Z(p) = 3, \\ 2X(p) + 4Y(p) + (p+2)Z(p) = -2. \end{cases}$$

Do đó

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & p-7 & -5 \\ -2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 2 & 2 \\ -2 & p-7 & -5 \\ 2 & 4 & p+2 \end{vmatrix}} = \frac{-2(p-2)}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

$$= -\frac{2}{(p-1)(p-3)}.$$

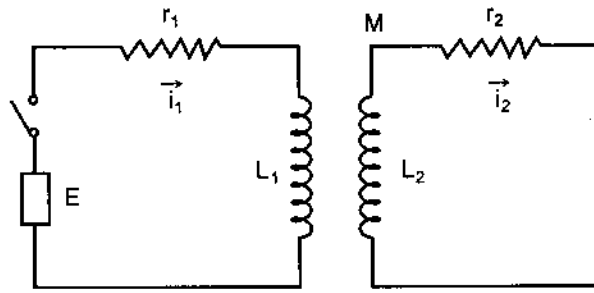
Dùng công thức (17) ta có

$$x(t) = e^t - e^{3t}.$$

Tương tự ta có

$$y(t) = -2e^{t} + 2e^{2t} + 3e^{3t},\ z(t) = 2e^{t} - 2e^{2t} - 2e^{3t}.$$

Ví dụ 4. (Mắc một suất điện động không đổi vào một mạch gồm hai mạch kín hỗ cảm và không chứa tụ điện).



Hình 30

Mạch gồm hai mạch kín vẽ ở hình 30. Mạch kín thứ nhất gồm một cuộn cảm ứng L_1 và một điện trở r_1 nối liên tiếp.

Mạch kín thứ hai cũng gồm một cuộn cảm ứng L_2 và điện trở r_2 nối liên tiếp. Các mạch tương tác điện tử lẫn nhau : mỗi mạch cảm ứng một suất điện động trong mạch kia, hệ số hỗ cảm bằng M. Tại thời điểm $t = 0$ trong mạch thứ nhất có mắc một suất điện động không đổi E với điều kiện ban đầu bằng không. Hãy xác định cường độ dòng điện $i_1(t)$ trong mạch thứ nhất và cường độ dòng điện $i_2(t)$ trong mạch thứ hai.

Giải. Điện áp toàn bộ của mạch kín thứ nhất gồm điện áp $L_1\dfrac{di_1}{dt}$ bù cho suất điện động tự cảm, điện áp r_1i_1 gây nên bởi điện trở của mạch và điện áp cảm ứng $M\dfrac{di_2}{dt}$, tức là

$$L_1\frac{di_1}{dt} + r_1i_1 + M\frac{di_2}{dt} = E.$$

Tương tự với mạch kín thứ hai ta có

$$L_2\frac{di_2}{dt} + r_2i_2 + M\frac{di_1}{dt} = 0.$$

Như vậy, các hàm phải tìm $i_1(t)$ và $i_2(t)$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân đó.

Đặt $I_1(p) \dashrightarrow i_1(t)$, $I_2(p) \dashrightarrow i_2(t)$ ta có

$$\begin{cases} (L_1p + r_1)I_1(p) + MpI_2(p) = \dfrac{E}{p}, \\ MpI_1(p) + (L_2p + r_2)I_2(p) = 0. \end{cases}$$

Do đó

$$I_1(p) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{E}{p} & Mp \\ 0 & L_2p + r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1p + r_1 & Mp \\ Mp & L_2p + r_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{E}{p}(L_2p + r_2)}{(L_1p + r_1)(L_2p + r_2) - M^2p^2} =$$

$$= \frac{E(L_2p + r_2)}{p[(L_1L_2 - M^2)p^2 + (L_1r_2 + L_2r_1)p + r_1r_2]},$$

$$I_2(p) = \frac{\begin{vmatrix} L_1p + r_1 & \dfrac{E}{p} \\ Mp & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1p + r_1 & Mp \\ Mp & L_2p + r_2 \end{vmatrix}} = -\frac{ME}{(L_1L_2 - M^2)p^2 + (L_1r_2 + L_2r_1)p + r_1r_2}.$$

Ta đưa ra kí hiệu

$$\frac{M^2}{L_1L_2} = k^2,\ \frac{r_1}{2L_1} = \sigma_1,\ \frac{r_2}{2L_2} = \sigma_2.$$

Khi đó

$$L_1(p) = \frac{E}{L_1}.\frac{p + 2\sigma_2}{p[(1 - k^2)p^2 + 2(\sigma_1 + \sigma_2)p + 4\sigma_1\sigma_2]},$$

$$I_2(p) = -\frac{ME}{L_1L_2}.\frac{1}{(1 - k^2)p^2 + 2(\sigma_1 + \sigma_2)p + 4\sigma_1\sigma_2}.$$

Giải phương trình bậc hai

$$(1 - k^2)p^2 + 2(\sigma_1 + \sigma_2)p + 4\sigma_1\sigma_2 = 0$$

ta được

$$p_{1,2} = \alpha \pm \beta,$$

trong đó

$$\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{1 - k^2},$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{4\sigma_1\sigma_2}{1 - k^2}} = \frac{1}{1 - k^2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4k^2\sigma_1\sigma_2}.$$

Thành thử

$$I_1(p) = \frac{E}{L_1(1-k^2)} \cdot \frac{p + 2\sigma_2}{p(p-1)(p-p_2)}$$

và

$$I_2(p) = \frac{ME}{L_1L_2(k^2-1)} \cdot \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)}.$$

Tiếp đó dùng công thức (17) và định lí khai triển (19) ta tìm được

$$i_1(t) = \frac{E}{2L_1\sigma_1} + \frac{E}{L_1(1-k^2)}\left[\frac{p_1 + 2\sigma_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{e^{p_1t}}{p_1} + \frac{p_2 + 2\sigma_2}{p_2 - p_1} \cdot \frac{e^{p_2t}}{p_2}\right]$$

$$= \frac{E}{2L_1\sigma_1} + \frac{Ee^{-\alpha t}}{2L_1(1-k^2)\beta}\left[e^{\beta t}\left(1 + \frac{2\sigma_2}{p_1}\right) - e^{-\beta t}\left(1 + \frac{2\sigma_2}{p_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{E}{r_1} + \frac{Ee^{-\alpha t}}{2L_1(1-k^2)\beta}\left[2\mathrm{sh}\beta t - \frac{1-k^2}{\sigma_1}(\alpha\mathrm{sh}\beta t + \beta\mathrm{ch}\beta t)\right] =$$

$$= \frac{E}{r_1} + \frac{Ee^{-\alpha t}}{r_1}\left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\beta(1-k)}\mathrm{sh}\beta t - \mathrm{ch}\beta t\right].$$

$$i_2(t) = \frac{ME}{L_1L_2(k^2-1)}\left[\frac{1}{p_1 - p_2}e^{p_1t} + \frac{1}{p_2 - p_1}e^{p_2t}\right] =$$

$$= \frac{MEe^{-\alpha t}}{2L_1L_2(k^2-1)\beta}[e^{\beta t} - e^{-\beta t}] = \frac{ME}{L_1L_2(k^2-1)\beta}.e^{-\alpha t}\mathrm{sh}\beta t.$$

BÀI TẬP

1. Tìm nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Trả lời :

$$x = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - 1,\ y = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - 2.$$

2. Tìm nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 3x - y = e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} - 2x = 0, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Trả lời :

$$x = \frac{1}{36}(1 - 6t)e^{-t} + \frac{2}{9}e^{2t} - \frac{1}{4}e^t,$$

$$y = \frac{1}{18}(5 + 6t)e^{-t} + \frac{2}{9}e^{2t} - \frac{1}{2}e^t.$$

3. Tìm nghiệm riêng của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z, \end{cases}$$

với điều kiện ban đầu

$$x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0.$$

Trả lời :

$$x = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{2t},$$

$$y = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{2t},$$

$$z = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

§8. Một số định lí của phép tính toán tử

Trong các mục ở trên ta đã xét các bài toán mà có thể giải bằng cách áp dụng trực tiếp công thức (17) hay định lí khai triển. Tuy nhiên ta cũng thường gặp các bài toán mà phải dùng các cách khác để tìm gốc theo ảnh của nó. Các cách đó dựa vào các định lí của phép tính toán tử mà sau đây ta sẽ trình bày một số.

Định lí đồng dạng. Nếu biến số của gốc được nhân với một số thì ảnh của gốc và biến số p của ảnh đồng thời bị chia cho số đó, tức là

$$\boxed{f(ax) \leftarrow\!\!\div \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)} \qquad (20)$$

Định lí đồng dạng rõ ràng có thể viết dưới dạng tương đương sau đây :

$$F(ap) \div\!\!\rightarrow \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (21)$$

Chú ý. Định lí đồng dạng, và thêm một số điều kiện đặt cho gốc f(x), còn đúng cả đối với giá trị phức a.

Ví dụ. Biết rằng

$$\sin x \leftarrow\!\!\div \frac{1}{p^2+1}$$

hãy tìm ảnh của hàm $\sin\omega x$.

Giải. Dùng định lí đồng dạng (20) ta có

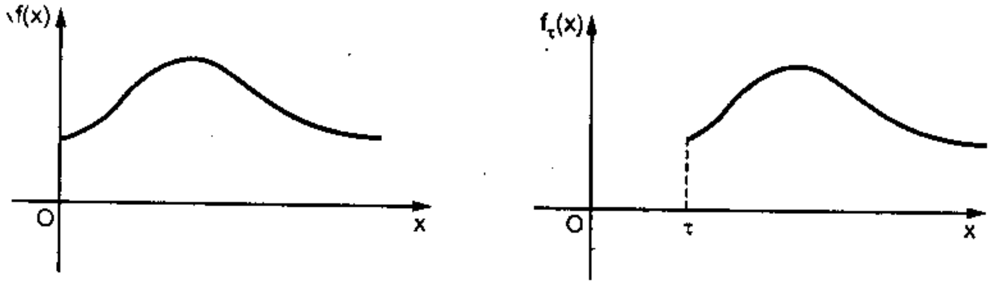
$$\sin\omega x \leftarrow\!\!\div \frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Định lí về sự trễ (*hay sự dịch chuyển*). Nếu biến số độc lập của gốc bị trễ đi một đại lượng $\tau > 0$ thì ảnh của nó được nhân lên $e^{-p\tau}$, tức là

$$f(x-\tau) \leftarrow\!\!\div e^{-p\tau}F(p). \qquad (22)$$

Chứng minh. Ta hãy xét gốc $f_\tau(x)$:

$$f_\tau(x) = \begin{cases} 0 \text{ với } x < \tau \\ f(x-\tau) \text{ với } x \geq \tau \text{ (xem hình 31).} \end{cases}$$



Hình 31

Ta tìm ảnh của $f_\tau(x)$. Theo (3) ta có

$$f_\tau(x) \leftarrow\!\!\!\div \int_0^\infty e^{-px} f_\tau(x)dx = \int_0^\tau e^{-px} f_\tau(x)dx + \int_\tau^\infty e^{-px} f_\tau(x)dx =$$

$$= \int_\tau^\infty e^{-px} f(x-\tau)dx, \text{ vì } f_\tau(x) = 0 \text{ với } x < \tau.$$

Dùng phép thế $x - \tau = t$ ta có

$$f_\tau(x) \leftarrow\!\!\!\div \int_0^\infty e^{-p(t+\tau)} f(t)dt = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt,$$

tức là nếu $f(x) \leftarrow\!\!\!\div F(p)$ thì với $\tau > 0$ ta có công thức (22).

Hệ quả. Áp dụng đồng thời định lí đồng dạng và định lí về sự trễ ta có :

Nếu $f(x) \leftarrow\!\!\!\div F(p)$ còn a, $\tau > 0$ thì

$$f(ax - \tau) \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{a} e^{-\frac{\tau}{a}p} F\left(\frac{p}{a}\right), \tag{23}$$

trong đó, như theo định nghĩa của gốc,

$$f(ax - \tau) = 0 \text{ với } x < \frac{\tau}{a}.$$

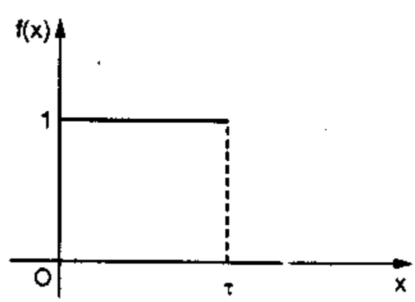
Ví dụ. Tìm ảnh của gốc $f(x) = u(x) - u(x - \tau)$, trong đó $\tau > 0$ và $u(x)$ là hàm đơn vị :

$$u(x) = \begin{cases} 0 \text{ với } x < 0 \\ 1 \text{ với } x \geq 0. \end{cases}$$

Giải. Ta tìm ảnh của f(x).

Do $u(x) \leftarrow\!\!\!\div \dfrac{1}{p}$ nên theo định lí đồng dạng

$$u(x - \tau) \leftarrow\!\!\!\div e^{-\tau p} \frac{1}{p}.$$



Hình 32

Do đó

$$f(x) \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{p} - e^{-\tau p}\frac{1}{p} = \frac{1-e^{-\tau p}}{p}.$$

Định lí về sự tắt dần. Nếu nhân gốc với $e^{-\lambda x}$ thì trong ảnh của gốc, p được thay bằng $p + \lambda$ tức

$$e^{-\lambda x}f(x) \leftarrow\!\!\!\div F(p+\lambda). \tag{24}$$

Chứng minh. Theo (3) ta có

$$e^{-\lambda x}f(x) \leftarrow\!\!\!\div \int_0^{\infty} e^{-px}e^{-\lambda x}f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)x}f(x)dx,$$

do đó suy ra (24).

Phép nhân xếp.

Trước hết ta đưa ra khái niệm nhân xếp.

Nhân xếp của hai hàm $f_1(x)$ và $f_2(x)$ theo định nghĩa là hàm

$$f(x) = \int_0^x f_1(t)f_2(x-t)dt \tag{25}$$

và kí hiệu

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x).$$

Ví dụ 1.

$$e^x * x = \int_0^x e^t(x-t)dt = e^t(x-t)\Big|_0^x + \int_0^x e^t dt = e^x - x - 1.$$

Ví dụ 2.

$$\cos x * \cos x = \int_0^x \cos t.\cos(x-t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x [\cos x + \cos(2t-x)]dt =$$

$$= \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{4}\sin(2t-x)\Big|_0^x = \frac{1}{2}(x\cos x + \sin x).$$

Chú ý. Từ công thức (25) ta cũng có

$$f_1(x) * f_2(x) = -\int_x^0 f_1(x-t_1)f_2(t_1)dt_1 = \int_0^x f_1(x-t_1)f_2(t_1)dt_1 \tag{26}$$

Định lí về sự nhân xếp. Ảnh của nhân xếp của hai gốc bằng tích của các ảnh của các gốc đó, tức là

nếu $\quad f_1(x) \leftarrow\!\!\!\div F_1(p),\ f_2(x) \leftarrow\!\!\!\div F_2(p)$

thì $\quad f_1(x) * f_2(x) \leftarrow\!\!\!\div F_1(p).\,F_2(p) \qquad (27)$

Chứng minh. Theo (3) :

$$f_1(x) * f_2(x) \leftarrow\!\!\!\!\div \int_0^{\infty} e^{-px}[f_1(x) * f_2(x)]dx = \int_0^{\infty} e^{-px}dx \int_0^x f_1(t)f_2(x-t)dt =$$

$$= \int_0^{\infty} dt \int_t^{\infty} e^{-px} f_1(t) f_2(x-t)dx = \int_0^{\infty} f_1(t)dt \int_t^{\infty} e^{-px} f_2(x-t)dx .$$

Nhưng

$$\int_t^{\infty} e^{-px} f_2(x-t)dx = \int_0^{\infty} e^{-p(z+t)} f_2(z)dz = e^{-pt} \int_0^{\infty} e^{-pz} f_2(z)dz =$$

$$= e^{-pt}. F_2(p).$$

Vậy

$$f_1(x) * f_2(x) \leftarrow\!\!\!\!\div \int_0^{\infty} e^{-pt} f_1(t)dt.F_2(p) = F_1(p). F_2(p).$$

Ví dụ 3. Tìm gốc f(x) theo ảnh $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$ của nó.

Giải.

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1}$$

Theo bảng $\dfrac{1}{p^2} \div\!\!\!\!\rightarrow x$, $\dfrac{1}{p-1} \div\!\!\!\!\rightarrow e^x$.

Áp dụng định lí nhân xếp và theo ví dụ 1 ta có

$$f(x) = x * e^x = e^x - x - 1.$$

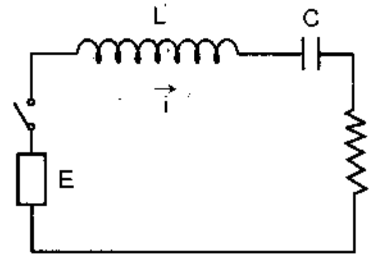
Ví dụ 4. Tìm gốc f(x) theo ảnh $\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$ của nó.

Giải. Theo bảng $\dfrac{p}{p^2+1} \div\!\!\!\!\rightarrow \cos x$ nên áp dụng định lí nhân xếp và theo ví dụ 2 ta có

$$f(x) = \cos x * \cos x = \frac{1}{2}(x\cos x + \sin x).$$

Ví dụ 5. Mắc một suất điện động vào trong mạch gồm một cuộn cảm ứng, một tụ điện và một điện trở.

Cuộn cảm ứng với hệ số tự cảm L, tụ điện với điện dung C và điện trở $r = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ nối liên tiếp như ở hình 33. Tại thời điểm t = 0 trong mạch có mắc một suất điện động không đổi E và lúc ban đầu thì không có dòng điện trong mạch và tụ điện chưa nạp điện. Hãy xác định cường độ i(t) của dòng điện trong chế độ vận hành.



Hình 33

Giải. Như đã biết trong kĩ thuật điện tử, cường độ i(t) phải tìm là nghiệm của phương trình vi tích phân sau đây :

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int_0^t i dt = E,$$

trong đó, theo giả thiết $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Gọi I(p) là ảnh của i(t) ta có

$$LpI(p) + rI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = \frac{E}{p}.$$

Do đó

$$I(p) = \frac{E}{p\left(Lp + r + \frac{1}{Cp}\right)} = \frac{E}{L\left(p^2 + \frac{2}{\sqrt{LC}}p + \frac{1}{LC}\right)}$$

tức

$$I(p) = \frac{E}{L\left(p + \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}.$$

Vì mẫu số của biểu thức đó có nghiệm bội

$$p = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

nên không thể áp dụng định lí khai triển để tìm gốc được. Ở đây phải dùng định lí về sự tắt dần. Thật vậy theo bảng ảnh

$$F(p) = \frac{1}{p^2}$$

tương ứng với gốc f(t) = t.

Khi đó

$$\frac{1}{\left(p+\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}=F\left(p+\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$$

và I(p) có thể biểu diễn dưới dạng

$$I(p)=\frac{E}{L}.F\left(p+\frac{1}{\sqrt{LC}}\right).$$

Áp dụng định lí về sự tắt dần với $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ta tìm được gốc

$$i(t)=\frac{E}{L}e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.t.$$

Chú ý. Trong ví dụ này có thể tìm gốc nhờ định lí nhân xếp. Muốn vậy, ta hãy xem I(p) như là tích của các ảnh $F_1(p)$ và $F_2(p)$ và $\dfrac{E}{L}$, tức là

$$I(p)=\frac{E}{L}.\,F_1(p).\,F_2(p),$$

trong đó

$$F_1(p)=F_2(p)=\frac{1}{p+\frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

Theo bảng ta tìm được các gốc f_1 (t) và $f_2(t)$ ứng với các ảnh $F_1(p)$ và $F_2(p)$:

$$f_1(t)=f_2(t)=e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

Bằng cách dùng định lí nhân xếp ta tìm được

$$i(t)=\frac{E}{L}\int_0^t e^{-\frac{x}{\sqrt{LC}}}e^{-\frac{t-x}{\sqrt{LC}}}dx=\frac{E}{L}e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\int_0^t dx$$

$$=\frac{E}{t}te^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}=Ee^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}.$$

§9. Tích phân Fuariê (Fourier) và áp dụng để biến đổi hàm

Nếu hàm f(x) thoả mãn các điều kiện Điriclê trong khoảng hữu hạn bất kì (tức là trong khoảng đó hàm liên tục hoặc có một số điểm gián đoạn loại một và ngoài ra có chỉ một số hữu hạn cực trị) và khả tích tuyệt đối trong khoảng $(-\infty ; +\infty)$, tức tồn tại tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

thì như đã biết ta có công thức Fuariê

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt, \tag{28}$$

trong đó khi x là điểm gián đoạn loại một của hàm f(x) thì tích phân hai lớp (28) bằng

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

(xem, chẳng hạn, Giáo trình giải tích của Phichtengôn, tập 2). Tích phân hai lớp (28) thường được gọi là *tích phân Fuariê* của hàm f(x).

Ta hãy biến đổi tích phân Fuariê về dạng phức. Trong tích phân (28) biến số ω đứng dưới dấu côsin và vì vậy hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn của ω ; bằng cách thay ω bằng –ω ta được

$$\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt = -\int_0^{-\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt.$$

Nếu cộng vế đầu và vế cuối của các đẳng thức trên ta được hai lần tích phân (28) tức

$$\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt. \tag{29}$$

Mặt khác

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega(x-t)dt = 0$$

vì hàm dưới dấu tích phân là lẻ đối với ω.

Nhân tích phân cuối này với $\frac{i}{2}$ và cộng với vế phải của (29) và dùng công thức Ơle

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

ta được

$$\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt +$$

$$+ \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega(x-t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt.$$

Như vậy công thức (28) có thể được viết dưới dạng phức

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt. \qquad (30)$$

Có thể viết công thức (30) dưới dạng sau :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \qquad (31)$$

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \qquad (32)$$

Ta hãy xét trường hợp đặc biệt của các công thức Fuariê (31), (32) mà có nhiều ứng dụng để nghiên cứu hiện tượng không dừng trong các mạch điện.

Giả sử hàm f(x) bằng không với x < 0. Khi đó các công thức (31), (32) có dạng

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \qquad (33)$$

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\omega t}dt. \qquad (34)$$

Định nghĩa. Hàm $\Phi(\omega)$ xác định bởi đẳng thức (34) được gọi là hàm biến đổi Fuariê của f(x).

Các công thức (33) và (34) cần phải hiểu như sau : nếu hàm f(x) thoả mãn các điều kiện Điriclê trong mỗi khoảng hữu hạn nằm trong khoảng (0 ; ∞) và tuyệt đối khả tích trong khoảng (0 ; ∞) thì tích phân ở vế phải của đẳng thức (34) bằng f(x) với x > 0 và bằng không với x < 0 ; với x = 0 tích phân đó có giá trị

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} f(x).$$

Cần chú ý rằng điều ngược lại nói chung không đúng, tức nếu chọn tuỳ ý hàm $\Phi(\omega)$ rồi sau đó tìm f(x) từ công thức (33) thì nói chung không thể dùng công thức (34) để tìm lại $\Phi(\omega)$ vì hàm f(x) nói chung không thoả mãn các điều kiện Điriclê hay tích phân (33) có thể không bằng không với $x < 0$. Như vậy, hàm $\Phi(\omega)$ không thể chọn tuỳ ý.

Dễ tìm được mối liên hệ giữa phép biến đổi Laplax (3) :

$$F(\alpha + i\omega) = \int_0^\infty e^{-(\alpha+i\omega)x} f(x)dx \qquad (\alpha > 0)$$

và phép biến đổi Fuariê (32) :

$$\Phi(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega x} f(x)dx\,, \tag{35}$$

trong đó f(x) thoả mãn các điều kiện Điriclê trên mỗi khoảng hữu hạn và khả tích trên khoảng $(0\,;\,\infty)$. Từ các hệ thức trên ta có

$$\Phi(\omega) = \lim_{\alpha\to 0} F(\alpha + i\omega) = F(i\omega) \tag{36}$$

tức hàm biến đổi Fuariê $\Phi(\omega)$ của một hàm đã cho bằng ảnh F(p) của hàm đó nếu đặt trong đó $p = i\omega$.

Chẳng hạn nếu $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0)$ thì theo bảng

$$F(p) = \frac{1}{p + a}$$

và tiếp đó theo (36)

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{i\omega + a}. \tag{37}$$

Tuy nhiên, nếu $f(x) = C$ (hằng số) thì $F(p) = \dfrac{C}{p}$ còn $\Phi(\omega)$ không tồn tại vì $f(x) = C$ không tuyệt đối khả tích trên khoảng $(0\,;\,\infty)$.

Mối liên hệ giữa biến đổi Fuariê và ảnh Laplax của hàm bởi công thức (36) chứng tỏ rằng khi giải phương trình vi phân và phương trình vi tích phân cũng có thể dùng biến đổi Fuariê.

Tuy nhiên, cần chú ý rằng việc áp dụng biến đổi Fuariê gặp nhiều hạn chế hơn việc dùng ảnh Laplax của hàm vì nó đòi hỏi hàm phải khả tích tuyệt đối.

Cách áp dụng biến đổi Fuariê của hàm để giải phương trình vi phân và vi tích phân cũng làm giống như đã làm đối với việc áp dụng ảnh Laplax của hàm.

Thật vậy, nếu $\Phi(\omega)$ là hàm biến đổi Fuariê của f(x) thì nếu giả thử f(0) = 0 và dùng (4) và (36) ta thấy rằng biến đổi Fuariê của đạo hàm f'(x) bằng

$$i\omega F(i\omega) = i\omega\,\Phi(\omega)$$

và áp dụng (5) ta thấy rằng biến đổi Fuariê của $\int_0^x f(x)dx$ bằng

$$\frac{F(i\omega)}{i\omega} = \frac{\Phi(\omega)}{i\omega}.$$

Các biểu thức trên đây chứng tỏ rằng khi giải các phương trình vi phân và vi tích phân có thể dùng các công thức ở §2 bằng cách thay trong đó F(p) bởi $\Phi(\omega)$ và đặt $p = i\omega$.

Nếu $\Phi(\omega)$ là biến đổi Fuariê của hàm f(x) thì f(x) có thể tìm được theo công thức (33) :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

Đặc biệt, nếu biến đổi Fuariê $\Phi(\omega)$ là một phân thức thực sự, tức là

$$\Phi(\omega) = \frac{N(\omega)}{M(\omega)},$$

trong đó $N(\omega)$ và $M(\omega)$ là các đa thức của ω, với bậc của đa thức $N(\omega)$ thấp hơn bậc của $M(\omega)$ và ngoài ra phương trình

$$M(\omega) = 0 \tag{38}$$

chỉ có các nghiệm đơn thì dựa vào (16) và (37) hàm f(x) có thể xác định theo công thức

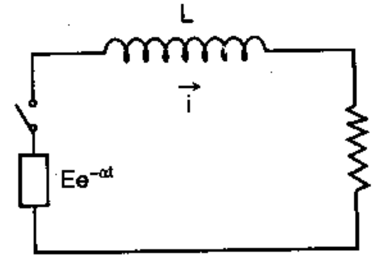
$$f(x) = \sum_{k=1}^{m}\frac{iN(\omega_k)}{M'(\omega_k)}\cdot e^{i\omega_k x}, \tag{39}$$

trong đó tổng lấy theo mọi nghiệm của phương trình (38).

Sau đây ta đưa ra một số ví dụ để minh hoạ cách áp dụng biến đổi Fuariê để giải các phương trình vi phân và vi tích phân.

Trước hết, vì trong kĩ thuật điện tử và kĩ thuật vô tuyến cường độ dòng điện thường được kí hiệu bằng chữ i nên để tránh nhầm lẫn với $\sqrt{-1}$, sau đây ta sẽ kí hiệu bằng chữ j.

Ví dụ 1. Mắc điện áp $Ee^{-\alpha t}$ vào mạch nối liên tiếp cuộn tự cảm và điện trở (xem hình 34).



Hình 34

Tại thời điểm t = 0 trong mạch có mắc một suất điện động

$$Ee^{-\alpha t} \text{ trong đó } \alpha > 0.$$

Hãy xác định cường độ i(t) của chế độ vận hành biết rằng i(0) = 0.

Giải. Ta đã biết cường độ i(t) phải tìm là nghiệm của phương trình sau đây (xem §7, ví dụ 7) :

$$L\frac{di}{dt} + ri = Ee^{-\alpha t}.$$

Gọi I(jω) là biến đổi Fuariê của i(t) và áp dụng biến đổi Fuariê đối với từng số hạng của phương trình ta được

$$j\omega LI(j\omega) + rI(j\omega) = \frac{E}{j\omega + \alpha}.$$

Do đó

$$I(j\omega) = \frac{E}{(j\omega + \alpha)(j\omega L + r)}.$$

Áp dụng công thức (39) và đặt trong đó

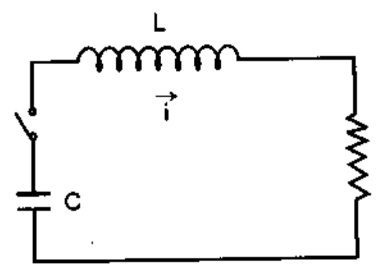
$$N(\omega) = E,\ M(\omega) = (j\omega + \alpha)(j\omega L + r)$$

ta tìm được

$$i(t) = \left(\frac{E}{r - \alpha L}e^{-\alpha t} - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Ví dụ 2. (Phóng điện từ một tụ điện vào một mạch gồm một cuộn tự cảm và một điện trở).

Một tụ điện với điện dung C đã tích điện đến điện áp E, phóng điện vào một mạch gồm cuộn tự cảm L và điện trở r nối liên tiếp như ở hình 35. Hãy tìm cường độ i(t) với điều kiện i(0) = 0.



Hình 35

Giải. Ta đã biết trong trường hợp này cường độ i(t) là nghiệm của phương trình vi tích phân

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = E.$$

Ta không thể áp dụng biến đổi Fuariê vào từng số hạng của phương trình được vì hằng số E không khả tích tuyệt đối trên khoảng $(0\ ;\ \infty)$. Vì vậy ta cần phải lấy đạo hàm phương trình trên :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0.$$

Bây giờ có thể áp dụng biến đổi Fuariê. Gọi $I(j\omega)$ là biến đổi Fuariê của i(t) ta được :

$$L[(j\omega)^2 I(j\omega) - i'(0)] + j\omega r\, I(j\omega) + \frac{1}{C}I(j\omega) = 0.$$

Do đó vì $i'(0) = \dfrac{E}{L}$, ta có

$$I(j\omega) = \frac{E}{-\omega^2 L + j\omega r + \dfrac{1}{C}}.$$

Áp dụng công thức (39) và đặt trong đó

$$N(\omega) = E,\ M(\omega) = -\omega^2 L + j\omega r + \frac{1}{C}$$

ta có (xem §8, ví dụ 4)

$$i(t) = \frac{E}{2\beta L}e^{-\alpha t}(e^{\beta t} - \alpha^{-\beta t}) = \frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\mathrm{sh}\beta t,$$

trong đó

$$\alpha = \frac{r}{2L}\ \beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{LC}}.$$

BẢNG KÊ MỘT SỐ GỐC VÀ ẢNH

$a \leftarrow\!\div \dfrac{a}{p}$	$x \leftarrow\!\div \dfrac{1}{p^2}$
$x^n \leftarrow\!\div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ (n – nguyên)	$e^{ax} \leftarrow\!\div \dfrac{1}{p-a}$
$x^n e^{-ax} \leftarrow\!\div \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$1 - e^{-ax} \leftarrow\!\div \dfrac{a}{p(p+a)}$

$$e^{-bx} - e^{-ax} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{a - b}{(p + a)(p + b)}$$

$$ae^{-ax} - be^{-bx} \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{(a - b)p}{(p + a)(p + b)}$$

$$\sin\omega x \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos\omega x \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\mathrm{sh}\omega x \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\mathrm{ch}\omega x \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{p}{p^2 - \omega^2}$$

$$e^{-ax}\sin\omega x \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-ax}\cos\omega x \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$\sin(\omega x \pm \varphi) \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{\omega\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega x \pm \varphi) \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{\omega\cos\varphi \mp (p + a)\sin\varphi}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-ax}\sin(\omega x \pm \varphi) \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{\omega\cos\varphi \pm (p + a)\sin\varphi}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$e^{-ax}\cos(\omega x \pm \varphi) \leftarrow\!\!\!\!\div \frac{(p + a)\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{(p + a)^2 + \omega^2}.$$

Phần thứ hai

ĐÁP SỐ, HƯỚNG DẪN VÀ LỜI GIẢI

8. $xy' = 3y$.

9. $y^2 + y'^2 = 1$.

10. $x^2y' - xy = yy'$.

11. $y = e^{xy'/y}$

12. $y' = \cos\dfrac{x\sqrt{1-y'^2}}{y}$.

13. $(yy'' + y'^2)^2 = -y^3y''$.

14. $x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0$.

15. $y''^3 = 4y(xy' - 2y)$.

16. $y' = 3y^{2/3}$.

17. $3x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.

18. $y''y^2(\ln y - 1) = y'^2(xy' - y)$.

19. $y'''y' = 3y''^2$.

20. $(y-2x)^2(y'^2+1) = (2y'^2+1)^2$.

21. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$.

22. $(xy' - y)^2 = 2xy(y'^2 + 1)$.

23. $xy'^2 = y(2y' - 1)$.

24. $(y''y + y'^2 + 1)^2 = (y'^2 + 1)^3$.

25. $f(x, y) = 0$; $f_x' < 0$ (max), $f_x' > 0$ (min).

26. $y = -\cos x + \dfrac{1}{3}\cos^3 y + C$.

27. $y = 2[\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + 1)] + C$.

28. $y = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x + C$.

29. $y - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

30. $y = \ln(\sqrt{1+x^2} + 1) + C$.

31. $y = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

32. $y = x\sin x + \cos x + C$.

33. $y = e^x(\cos x + \sin x) + C$.

34. $y = \text{ch}x + C$.

35. $y = -\dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$.

36. $y = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$.

37. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$.

38. $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$.

39. $y = \displaystyle\int\frac{x}{\ln x}dx + C$.

40. $y = \displaystyle\int\frac{e^x}{x}dx + C$.

41. $y = x\ln x + C$, $x = 0$.

42. $y = \ln\dfrac{x^2+1}{|x+1|} + C.$

43. $y = \text{arctg}\sqrt{x^4-1} + C.\ x = \pm 1.$

44. $y = \dfrac{1}{3}\ln|x-1| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

45. $y = \displaystyle\int\frac{xdx}{a^2-x^2} + C.$

46. $y = \text{sgn}x.\dfrac{x^2}{2} + C.$

47. $y = \displaystyle\int\frac{\cos x}{x}dx + C.$

48. $y = -e^{-x^2} + C\ ;\ y = -e^{-x^2} + 2.$

49. $y = \dfrac{1}{x} + C\ ;\ y = \dfrac{1}{x}\ (0 < x < +\infty)\ ;\ y = \dfrac{1}{x}\ (-\infty < x < 0)\ ;\ x = 0.$

50. $y = \sqrt{x-1} + C,\ x = 1\ ;\ y = \sqrt{x-1} + 1,\ x = 1.$

51. $y = \displaystyle\int_0^x e^{-x^2}dx + C\ ;\ y = \int_0^x e^{-x^2}dx.$

52. $y = -\sqrt{1-x^2} + C\ ;\ x = \pm 1\ ;\ y = -\sqrt{1-x^2},$

$y = -\sqrt{1-x^2} + 2\ ;\ y = -\sqrt{1-x^2},\ x = 1.$

53. $y = 0.$

54. $x = \pm 1,\ y = \dfrac{1}{x^2-1}\ (|x| < 1).$

55. $y = \pm\dfrac{\pi}{2}.$

56. $y = x.$

57. $y = \pm\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$

58. $x = \pm\dfrac{\pi}{2}.$

65. Miền xác định, tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si là cả mặt phẳng (x, y) ; x = a là các đường đẳng phục ; Tất cả các nghiệm đều tăng ; x = 0 là đường gồm các điểm uốn.

70. $y' = x^2.$

71. $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$

72. $y' = \dfrac{1}{x}.$

74. $e^{-y} = -x + C.$

75. $-\dfrac{2+3y^2}{2y(1+y^2)} - \dfrac{3}{2}\text{arctg}\,y = x + C.$

76. $2^y = x\ln 2 + C.$

77. $= Ce^x - 1.$

78. $\text{tg}y = x + C.$

79. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = Ce^x$.

80. $y^{-n+1} = k(-n+1)x + C$ khi $n \neq 1$,

$y = 0$ là nghiệm kì dị khi $0 < n < 1$; $y = Ce^{kx}$ khi $n = 1$.

81. $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) = Ce^x$.

82. $\frac{1}{6}\ln\frac{(y+1)^2}{y^2 - y + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}} = x + C$.

83. $\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{a}} = x + C$ khi $a > 0$, $\frac{y - \sqrt{-a}}{y + \sqrt{-a}} = Ce^{2\sqrt{-a}x}$

khi $a < 0$, $y = -\frac{1}{y + C}$ khi $a = 0$.

84. $y - \operatorname{arctg}y = x + C$.

85. $y - \ln|y + 1| = x + C$.

86. $\cos y = Ce^{-x}$.

87. $y = -x + \frac{Ce^{-2x} + 1}{1 - Ce^{-2x}}$; $x \neq \frac{\ln C}{2}$

khi $C > 0$; $y = -x + 1$, $y = -x - 1$.

88. $\ln y = Ce^x$.

89. $y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x + C$.

90. $y = (x + C)^2$, $x \geq C$ khi $y \geq 0$; $y = -(x + C)^2$, $x \leq -C$ khi $y \leq 0$; $y = 0$.

91. $\int\frac{dy}{\ln y} = x + C$.

92. $\operatorname{arctg}(x + y) = x + C$.

93. $\ln|x + y + 2| = x + C$.

94. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4x + y - 1}{2} = x + C$.

95. $e^{-(x+y)} = -x + C$.

96. $\ln|x + y| - y = C$.

97. $\sqrt{y - x} + \ln|\sqrt{y - x} - 1| = \frac{1}{2}x + C$.

98. $y = x + \frac{(x + C)^2}{4}$, $x \geq -C$; $y = x$.

99. $y = x^2 - \frac{(x - C)^2}{4}$, $x \leq C$; $y = x^2$.

100. $\operatorname{arctg}y + C = \frac{\sqrt{1 + x^2}.\sqrt{1 + y^2} + y - x}{1 + xy}$.

101. $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{p}{q} r$, $r = Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}$, $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\text{arctg}\frac{y}{x}}$.

102. $y = Ce^{-x}$; $y = e^{-x}$.

103. $y = \frac{1}{x + C}$; $y = 0$, $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

104. $y = Ce^x$; $y = e^x$.

105. $y = 1 + Ce^x$; $y = 1$.

106. $y^2 = 2x + C$; $y^2 = 2x$.

107. $y = (x + C)^2 (x \geq -C)$, $y = 0$; $y = (x + 2)^2$ $(x \geq -2)$;
$y = x^2 (x \geq 0)$, $y = 0$.

108. $2y + \sqrt{4y^2 - 1} = Ce^{2x}$; $y = \frac{1}{2}\text{ch}2x$.

109. $y = (x + C)^3$, $y = 0$; $y = (x + 1)^3$;
$y = x^3$, $y = 0$.

110. $y = \pm 1$.

111. $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, ...)$.

112. $y = 2$, $y = 3$.

113. Không.

114. $y = 0$.

115. $y = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$
$(k = 0, \pm 1, ...)$.

116. $y = 0$, $y = 1$.

117. Không

118. $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

119. $y = 0$.

120. $x = -1$, $y = 0$.

122. Miền xác định, tồn tại và duy nhất của bài toán Cô-si là cả mặt phẳng (x, y) ; $y = b$ là các đường đẳng phục ; Tất cả các nghiệm, trừ $y = 0$, đều tăng (trên cả khoảng xác định của nghiệm) ; Các đường cong tích phân nằm ở nửa mặt phẳng trên (dưới) đều quay chiều lõm lên phía trên (dưới).

130. $y = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} - x$; $y = -x \pm 1$ là các nghiệm riêng (tiệm cận).

131. $y = \ln x$.

132. $y = x^2$, $x \geq 0$; $y = 0$.

133. $y = e^x$.

134. $y = 0$.

135. $x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = C^2$.

136. $\arcsin x + \arcsin y = C$.

137. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C$.

138. $y = C(x + 1)e^{-x}$; $x = -1$.

139. $\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$.

140. $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$.

141. $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2$; $y = 0$.

142. $y = e^x(\ln|x| + C)$; $x = 0$.

143. $xy = C - \ln|x|$.

144. $y = x(C + \sin x)$.

145. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$.

146. $y = C\ln^2 x - \ln x$.

147. $\operatorname{cotg}\dfrac{y - x}{2} = x + C$; $y - x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

148. $x^2 + t^2 - 2t = C$.

149. $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C$.

150. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = C$.

151. $2e^y - e^{2x} + 2\operatorname{arctg} y + \ln(1 + y^2) = C$.

152. $y = \dfrac{C}{x - 1}$; $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

153. $y = \arcsin x + C$, $x = \pm 1$; $y = \arcsin x$, $x = 1$.

154. $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$, $y = 0$; $y[\ln(1 - x^2) + 1] = 1$.

155. $y = 2 + C\cos x$; $y = 2 - 3\cos x$.

156. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = C$, $y = \pm 1$ ($|x| < 1$), $x = \pm 1$ ($|y| < 1$) ;
$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 1$, $x = 1$ ($|y| < 1$) ; không có nghiệm.

157. $y = e^{\sin x}$.

158. $y(1 - Cx) = 1$; $y = 0$; $y(1 + x) = 1$.

159. $x + 2y + 2 = Ce^y$; $x + 2y + 2 = 0$.

160. $x = Cy^3 + y^2$; $y = 0$.

161. $y = \operatorname{arctg}\left(1 - \dfrac{2}{x}\right) + 2\pi$.

162. $y = 2$.

169. $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ là các điểm kì dị ; $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$, $0 < C < 1$, $|x| < 1$, $|y| < 1$; $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$, $C < 0$, $|x| > 1$, $|y| < 1$ và $|x| < 1$, $|y| > 1$; $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$, $C > 0$, $|x| > 1$, $|y| > 1$; $x = \pm 1$ ($y = \pm 1$), $y = \pm 1$ ($x = \pm 1$) là các nghiệm riêng ; $x = \pm 1$ ($|y| > 1$), $y = \pm 1$ ($|x| > 1$) là các tiệm cận của các đường cong tích phân ; $x = 0$, $y = 0$ là tâm, $|x| < 1$, $|y| < 1$ là miền của tâm.

171. Nghiệm $y = y(x)$ của phương trình đã cho thoả mãn điều kiện ban đầu $y(x_o) = y_o$ được xác định từ hệ thức

$$\int_{y_o}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt[3]{s^2+1}} = \int_{x_o}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}}.$$

Chú ý rằng tích phân

$$\int_{x_o}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}}$$

là hội tụ với mọi x_o, nhưng tích phân

$$\int_{y_o}^{\pm\infty} \frac{ds}{\sqrt[3]{s^2+1}}$$

phân kì với mọi y_o. Vì thế, chẳng hạn nếu $x \to +\infty$ thì $y(x)$ vẫn giới nội, nhưng chú ý, $y' \geq 0$ nên $y(x)$ tăng, do đó giá trị sau đây tồn tại hữu hạn :

$$\lim_{x \to +\infty} y(x).$$

Vậy khi $x \to +\infty$, nghiệm bất kì $y(x ; x_o ; y_o)$ có tiệm cận ngang

$$y = y_1 = \lim_{x \to +\infty} y(x).$$

Lí luận tương tự khi $x \to -\infty$ sẽ có thêm một tiệm cận ngang thứ hai.

172. Bằng cách nghiên cứu sự hội tụ của các tích phân tương tự như đã làm ở bài 171.

173. $(C \pm x)y = 2a^2$.

174. $b\ln y - y = \pm x + C$, $0 < y < b$.

175. $a\ln(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}) \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C$.

176. $y = Cx^2$.

177. $y = Ce^{kx}$.

178. $y' = \dfrac{k}{x}$; $y = k\ln|x| + C$.

179. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$; $xy = C$; $xy = 6$.

180. $y = Cx^2$, $y^2 = Cx$.

181. $r(1 \pm \cos\varphi) = C$.

182. $\dfrac{ds}{dt} = v_o$; $s = v_o(t - t_o) + s_o$.

183. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 20)$, T là nhiệt độ của vật thể tại thời điểm t ;

$$T = 20 + 80.2^{-\frac{t}{20}} \text{ ; 60 phút.}$$

184. Lượng nitơ (tính bằng lít) là $x(t) = 20 - 4e^{-t/200}$; $x(t) = 19{,}8$ khi $t = 200 \ln 20 \approx 600$ (giây) = 10 (phút).

185. Lượng muối $x(t) = 10e^{-t/20}$; $x(60) = 10.e^{-3} \approx 0{,}5$ (kg).

186. Nhiệt độ của vật thể $x(t) = 20 + 80 \times 2^{-t/10}$; $x(t) = 25$ khi $t = 40$ phút.

187. Hiệu số của nhiệt độ giữa nước và vật là $x(t) = 55.\left(\dfrac{3}{5}\right)^t$; $x(t) = 1$ khi $t = \ln\dfrac{55}{\ln 5 - \ln 3} \approx 8$ (phút).

188. $y = y_o + 100t - 490{,}5t^2$; 0,1 giây.

189. $S(t) = \dfrac{kt^3}{3} + S_o$.

190. Vận tốc (theo m/giây) $v(t) = (2/3)^{\frac{t}{4}-1}$; $v(t) = 0{,}01$ khi $t = 4\left(\dfrac{2}{\lg 1{,}5} + 1\right) \approx 50$ (giây) ; quãng đường $s = \dfrac{6}{\ln 1{,}5} \approx 15$ (m).

191. Khối lượng chất phóng xạ còn lại $x(t) = x(0).2^{-t/30}$; $x(t) = 0{,}01x(0)$ khi $t = 60/\lg 2 \approx 200$ (ngày).

192. Khối lượng radium còn lại $x(t) = x(0).(1 - 0{,}00044)^t$; $x(t) = \dfrac{1}{2}x(0)$ khi $t = \ln 0{,}5/\ln(1 - 0{,}00044) \approx 1600$ (năm).

193. Vận tốc $v(t) = 50\text{th}\dfrac{t}{5}$, quãng đường (tính theo mét) $S(t) = 250 \ln\text{ch}\dfrac{t}{5}$; $S(t) = 1000$ khi $\text{ch}\dfrac{t}{5} = e^4$, $t \approx 5(4 + \ln 2) \approx 23$ (giây).

194. Vận tốc $v(t) = \sqrt{\dfrac{g}{k}}.\text{tg}\sqrt{kg}\,(C - t)$, $g = 10$, $k = 0{,}012$,

$$C = \frac{1}{\sqrt{kg}} \text{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\; v(0) \approx 1{,}75 \text{ ; } v(t) = 0 \text{ khi } t = C \approx 1{,}75 \text{ (giây) ;}$$

độ cao cực đại $h = \dfrac{1}{2k}\ln\left(\dfrac{k}{g}v^2(0) + 1\right) \approx 16{,}3$ (m) (nếu không kể sức cản của không khí thì $t = 2$(giây), $h = 20$m).

195. Vận tốc $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\text{th}\sqrt{kg}\,t$, quãng đường $S(t) = \frac{1}{k}\ln\text{ch}\sqrt{kg}\,t$;

$S(t) = 16{,}3\text{m}$ khi $t = \frac{1}{\sqrt{kg}}\ln(e^{kh} + \sqrt{e^{2kh} - 1}) \approx 1{,}87$ (giây),

$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}(1 - e^{-2kh})} \approx 16{,}4$ m/s.

196. $x + y = Cx^2$; $x = 0$.

197. $x(y - x) = Cy$; $y = 0$.

198. $\ln(x^2 + y^2) = C - 2\text{arctg}(y/x)$.

199. $x = \sqrt{\ln Cx}$; $y = 0$.

200. $y = Ce^{y/x}$.

201. $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$.

203. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\text{arctg}\frac{y}{x}}$ hoặc $r = Ce^{-\frac{p}{q}\theta}$.

204. $y = C|x|^b + \frac{a}{1 - b}x$ $(x \neq 0)$ khi $b \neq 1$,

$y = Cx + ax\ln|x|$ $(x \neq 0)$ khi $b = 1$.

205. $y = C|x|^{\frac{3}{2}} - x$ $(x \neq 0)$.

206. $y^2 - x^2 = Cy$, $y = 0$.

207. $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

208. $y = -x\ln\ln Cx$.

209. $\ln\frac{x + y}{x} = Cx$.

210. $y = Cx + 2x\ln|x|$ $(x \neq 0)$.

211. $x = y(C + \ln|y|)$ $(y \neq 0)$.

212. $x = y(C - \ln|y|)$ $(y \neq 0)$.

213. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\text{arctg}\frac{y}{x}}$.

214. $2y^3 - 3xy^2 + 6x^2y = C$.

215. $\ln Cx = \text{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; $y = xe^{2k\pi}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

216. $x\ln Cx = 2\sqrt{xy}$; $y = 0$.

217. $\arcsin\frac{y}{x}\ln Cx\,\text{sgn}x$; $y = \pm x$.

218. $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2$; $y = x + 1$.

219. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$.

220. $(y - x + 2)^2 + 2x = C$.

221. $(y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = C.$

222. $(y + 2)^2 = C(x + y - 1)$; $y = 1 - x.$

223. $y + 2 = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y+2}{y-3}}.$

224. $\ln\dfrac{y + x}{x + 3} = 1 + \dfrac{C}{x + y}.$

225. $y = \dfrac{C}{2}x^2 - \dfrac{1}{2C}\ (C > 0)$; $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}.$

226. $y = xe^{1+Cx}$, $y = 0\ (x \neq 0)$; $y = e^x\ (x \neq 0)$, $x = 0\ (y \neq 0)$;
$y = xe^{1-x}$; $y = 0\ (0 < x < +\infty).$

227. $y = x\ln(C + \ln|x|)\ (|x| > e^{-C})$; $y = x\ln(1 + \ln x)\left(x > \dfrac{1}{e}\right).$

228. $y = C\sqrt{2x} + 2x\ (x > 0)$ $y = -C\sqrt{-x} + 2x\ (x < 0)$, $x = 0\ (y \neq 0)$; tất cả các đường cong tích phân.

229. $y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{2}x$, $x = 0\ (y \neq 0)$; $y = \dfrac{1}{2}x\ (x \neq 0)$, $x = 0\ (y \neq 0).$

230. $y = Cx + x\ln|x|\ (x \neq 0)$, $x = 0\ (y \neq 0)$; tất cả các đường cong tích phân.

231. $y = -x\ (x \neq 0).$

232. $y = \pm 2x\ (x \neq 0).$

233. Không có.

234. Không có

235. $y = 0\ (x \neq 0).$

236. $y = 0\ (x \neq 0).$

237. $y = 0\ (x \neq 0)$, $y = 2x\ (x \neq 0).$

238. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x}.$

239. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}.$

240. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}.$

241. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$

242. $xdx + (y - \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0.$

243. $y' = \dfrac{x + y}{x}.$

244. $y = C(x^2 + y^2).$

245. $x^2 + y^2 = Cx.$

246. $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, $x^2 + y^2 - Cx = 0$; $y' = -\dfrac{y}{x}$, $y = \dfrac{C}{x}\ (C \neq 0)$;

$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \dfrac{C}{2}x^2 - \dfrac{1}{2C}\ (C > 0)$;

$xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = -\dfrac{1}{2C}x^2 + \dfrac{C}{2}\ (C > 0).$

247. $\dfrac{y - xy'}{yy' + x} = k$; $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\frac{1}{k}\text{arctg}\frac{y}{x}}$ hay $r = Ce^{-\frac{\theta}{k}}$.

248. $\dfrac{yy' + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k$; $\sqrt{x^2 + y^2} = kx + C$.

249. $y = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$, $(x - C)^2 + y^2 = C^2$.

250. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 - Cy = 0$.

252. Giả sử $k_o > 0$ và $f'(k_o) < 1$.

Khi đó

$$\frac{f(k) - f(k_o)}{k - k_o} < 1 \text{ nếu } |k - k_o| < \delta \ (\delta \text{ đủ nhỏ} > 0).$$

Vậy

$$f(k) < k \ \forall k \in (k_o, k_o + \delta),$$
$$f(k) > k \ \forall k \in (k_o, -\delta, k_o).$$

Dễ thấy phương trình trên có nghiệm riêng $y^*(x) = k_ox$. Chú ý rằng phương trình đã cho có tính duy nhất nghiệm tại mọi điểm trừ gốc toạ độ. Vì thế nếu $y = y(x)$ là một nghiệm bất kì khác $y^*(x)$, thì $\forall x \in (0 ; \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ đủ nhỏ) ta có hoặc $y(x) > k_ox$ hoặc $y(x) < k_ox$. Giả sử có một nghiệm $y = y(x)$ ($\not\equiv y^*(x)$) mà tiếp xúc với đường thẳng $y^*(x) = k_ox$ tại gốc toạ độ. Khi đó

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x} = k_o \qquad (*)$$

Ta xét trường hợp $y(x) > k_ox'$ $\forall x \in (0 ; \varepsilon)$, hay $\dfrac{y(x)}{x} > k_o$.

Nhưng do (*) ta có thể xem khi $x \in (0 ; \varepsilon)$ thì

$$\frac{y(x)}{x} < k_o + \delta.$$

Vậy với $x \in (0 ; \varepsilon)$ ta có

$$k_o < \frac{y(x)}{x} < k_o + \delta,$$

do đó

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y(x)}{x}\right) < \frac{y(x)}{x}, \ \forall x \in (0 ; \varepsilon).$$

Lấy tích phân hai vế trên $[\varepsilon_1 ; x]$ ($\varepsilon_1 > 0$ đủ nhỏ : $0 < \varepsilon_1 < x < \varepsilon$) suy ra

$$\frac{y(x)}{y(\varepsilon_1)} < \frac{x}{\varepsilon_1},$$

hay

$$y(x) < \frac{y(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}.x.$$

Cho $\varepsilon_1 \to +0$ ta được

$$y(x) \le k_o x.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $y(x) > k_o x$.

Tất cả các trường hợp còn lại đều có thể suy luận bằng phương pháp tương tự.

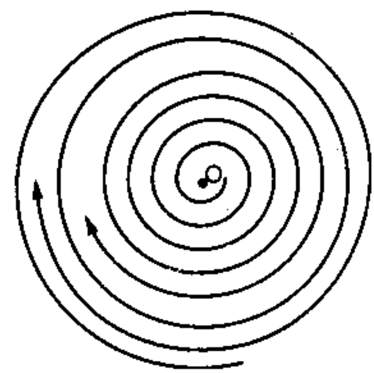
253. Chuyển sang toạ độ cực ta nhận được phương trình

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - 1.$$

Tích phân tổng quát của phương trình có dạng.

$$\rho = 1 + Ce^{\varphi},$$

trong đó C là hằng số tuỳ ý ; để cho $\rho > 0$ thì $\varphi < -\ln|C|$ khi $C < 0$. Tập hợp các đường cong tích phân chia làm ba loại (xem hình 36) :



Hình 36

1) Vòng tròn $\rho = 1$ ($C = 0$) ;

2) Đường xoắn ốc, xuất phát từ điểm trong của vòng tròn $\rho = 1$, nằm hoàn toàn trong vòng tròn đó và khi $\varphi \to -\infty$ thì tiệm cận đến vòng tròn $\varphi = 1$ ($C < 0$) ; khi $\varphi \to -\ln|C|$ thì dần tới gốc toạ độ ;

3) Đường xoắn ốc, xuất phát từ phía ngoài của vòng tròn $\rho = 1$, nằm hoàn toàn bên ngoài vòng tròn đó và khi $\varphi \to -\infty$ thì tiệm cận đến vòng tròn $\rho = 1$ ($C > 0$) ; khi $\varphi \to \infty$ thì dần tới ∞.

Theo định nghĩa, một đường cong tích phân kín L được gọi là *vòng giới hạn* của một phương trình vi phân nếu tất cả các điểm của nó đều là điểm thường và mọi đường cong tích phân khác của phương trình đã cho đều dần tiệm cận đến L.

Như vậy, ta đã thấy, phương trình vi phân đã cho chỉ có một đường cong tích phân kín duy nhất (cũng chính là vòng giới hạn) $\rho = 1$, hay chuyển sang toạ độ vuông góc $x^2 + y^2 = 1$. Đó là vòng tròn đơn vị.

254. $y^2 = C\exp\dfrac{y^2}{x}$.

255. $x^2y^2 + 1 = Cy$.

256. $y^4 - x^2 = Cy^6$.

257. $\sqrt{y^2 - x} - \sqrt{x} = C, x = y^2$.

258. $y^2e^{-1/xy} = C$; $y = 0$; $x = 0$.

259. $(2\sqrt{y} - x)\ln[C(2\sqrt{y} - x)] = x$; $2\sqrt{y} - x$.

260. $2\sqrt{(1/xy^2) - 1} = -\ln Cx$; $xy^2 = 1$.

261. $1 - xy = Cx^3(2 + xy)$; $xy = -2$.

262. $\arcsin\dfrac{y^2}{|x^3|} = \ln Cx^3$; $|x^3| = y^2$.

263. $x^2y\ln Cy = 1$; $y = 0$.

264. $x^2y^4\ln Cx^2 = 1$.; $y = 0$.

265. $x = -y^2\ln Cx$; $y = 0$.

266. $x^2 = (x^2 - y)\ln Cx$; $y = x^2$.

267. $y = Cx^2 + x^4$.

268. $y = \sin x + C\cos x$.

269. $y = (2x + 1)(C + \ln|2x + 1|) + 1$.

270. $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$.

271. $y = Ce^{-ax} + \dfrac{1}{m + a}e^{mx}$ khi $m \neq -a$, $y = e^{-ax}(C + x)$ khi $m = -a$.

272. $y = (1 + x^2)(C + x)$.

273. $x = e^y + Ce^{-y}$.

274. Xem trả lời của bài 204.

275. $x = \dfrac{C}{y^2} - \dfrac{2}{3}y$.

276. $xy = C - \ln|x|$.

277. $y = e^x(\ln|x| + C)$; $x = 0$.

278. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$.

279. $y = x(C + \sin x)$.

280. $xy = (x^3 + C)e^{-x}$.

281. $y = C\ln^2x - \ln x$.

282. $x = y^2(Ce^{\frac{1}{y}} + 1)$.

283. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$.

284. $x = y^2 + Cy$; $y = 0$.

285. $x = (C - \cos y)\sin y$.

286. $y_1 = -1$; $y = -1 + C(x + x^2)$.

287. $y_1 = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x} + Ce^{-x}$.

286. $y_1 = -1$; $y = -1 + C(x + x^2)$.

287. $y_1 = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{x} + Ce^{-x}$.

288. $y_1 = x$; $y = x + Ce^{-x^2/2}$.

289. Dùng phương pháp hệ số bất định.

290. Thay $y_1 = b$ vào phương trình ta có $q = pb$, vậy phương trình đã cho là phương trình với biến số phân li.

291. $y = e^{x^2}.\int_0^x e^{-x^2}dx$.

292. $y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}$.

293. $y = Cx^2 - x$ $(x \neq 0)$; $x = 0$ $(y \neq 0)$.

294. $y = \frac{1}{2}x$ $(x \neq 0)$; $x = 0$ $(y \neq 0)$.

295. $y = C\sqrt{|x|} + 2x$ $(x \neq 0)$; $x = 0$ $(y \neq 0)$.

296. $y = Cx + x\ln|x|$ $(x \neq 0)$; $x = 0$ $(y \neq 0)$.

298. $xy = -1$ là đường chứa các điểm cực trị (với $x > 0$ là đường chứa các cực đại, với $x < 0$ là đường chứa các cực tiểu) ; $y + x(xy + 1) = 0$ là đường chứa các điểm uốn (bên trái các điểm uốn các đường cong tích phân quay chiều lõm xuống phía dưới, bên phải thì ngược lại).

Nghiệm dưới dạng Cô-si là $y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(y_o + \int_0^x e^{-x^2/2}dx\right)$, $y_o = y(0)$; vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \int_0^x e^{-x^2/2}dx = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, nên dáng điệu của nghiệm khi $x \to \pm\infty$ phụ thuộc vào vị trí của giá trị ban đầu y_o so với $\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Nếu $y_o < -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ thì $y \to -\infty$ khi $x \to +\infty$; nếu $y_o = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ thì $y \to -\infty$ khi $x \to -\infty$, $y \to 0$ khi $x \to +\infty$; nếu $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < y_o\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ thì $y \to -\infty$ khi $x \to -\infty$, $y \to +\infty$ khi

$x \to +\infty$; nếu $y_o = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ thì $y \to 0$ khi $x \to -\infty$, $y \to +\infty$ khi $x \to +\infty$;

nếu $y_o > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ thì $y \to +\infty$ khi $x \to \pm\infty$.

300. $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{2a^2}{y^2}$; $x = Cy + \frac{a^2}{y}$.

301. $xy = Cx^3 + 2a^2$.

302. $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$.

303. $x^2 = Ce^{2y} + 2y$.

304. $e^{-y} = Cx^2 + x$.

305. $\cos y = (x^2 - 1)\ln C(x^2 - 1)$.

306. $y = 2e^x - 1$.

307. $y = -2e^x$.

308. $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{A}{L}\sin\omega t$;

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L}} + \frac{A(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{AL\omega}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

309. $y - xy' = \frac{x+y}{n}$; $y = Cx^{\frac{n-1}{n}} - x$.

310. $\int_0^x ydx = kxy$; $y = Cx^m$, $m = \frac{1-k}{k}$.

311. $\int_0^x xydx = \frac{3}{4}x\int_0^x ydx$; $y = Cx^2$.

313. $x^2y' + (3x-1)y = 0$; $y = \frac{Ce^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$.

314. $y = \frac{e^{kx}}{e^{-k\omega} - 1}\int_x^{x+\omega} f(t)e^{-kt}dt$.

Hướng dẫn :

Nghiệm với điều kiện ban đầu y(0) có dạng

$$y(x) = y(0)\,e^{kx} + e^{kx}\int_0^x e^{-kt}f(t)dt.$$

Từ điều kiện $y(x+\omega) \equiv y(x)$ suy ra

$$y(0) = \frac{1}{1 - e^{k\omega}}\int_{-\omega}^0 e^{-kt}f(t)dt.$$

Như vậy, y(0) được xác định duy nhất và do tính duy nhất nghiệm (chú ý rằng bao giờ ta cũng có giả thiết để cho phương trình tuyến tính là duy nhất nghiệm, ở đây chẳng hạn f(x) liên tục), ta chỉ có một nghiệm riêng tuần hoàn chu kì ω bằng cách thay giá trị của điều kiện ban đầu vừa tìm được y(0) vào biểu thức của nghiệm. Bằng phép biến đổi tích phân và chú ý đến tính tuần hoàn của hàm f, ta có biểu thức của nghiệm cần tìm.

315. $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

316. $y = \operatorname{tg}x - \sec x$.

317. $y = Cy_1$.

318. $y' - \dfrac{y_1'}{y_1}y = 0$.

319. Có thể thử lại trực tiếp bằng cách thay vào phương trình đã cho hoặc biến đổi tích phân trong dạng tổng quát của nghiệm.

320. $\alpha(x) = e^{-\int p(x)dx}$, $z' = 0$, $z = C$; $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

321. $t = \int p(x)dx$, $\dfrac{dy}{dt} + y = 0$; $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

322. $\dfrac{dy}{dy_o} = 1$, $\dfrac{dy}{dx_o} = y_o p(x_o)$.

327. Nghiệm của phương trình đã cho viết dưới dạng Cô-si là

$$y(x) = e^{-kx}\left[y(0) + \int_0^x q(t)e^{kt}dt\right] = \frac{y(0) + \int_0^x q(t)e^{kt}dt}{e^{kx}} \qquad (*)$$

Nếu $k > 0$ và $b \neq 0$ thì áp dụng quy tắc tìm giới hạn Lôpitan cho biểu thức (*), ta thấy, với bất kì y(0) (tức là với mọi nghiệm), rằng

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \frac{b}{k}.$$

Điều đó cũng đúng ngay cả khi $b = 0$ do nhận xét sau : Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = b = 0$, nên $\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \geq \Delta$ thì $|q(x)| < \varepsilon$. Dựa vào đó để đánh giá trực tiếp biểu thức (*) và do tính nhỏ tuỳ ý của $\varepsilon > 0$ ta suy ra

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 = \frac{0}{k} = \frac{b}{k}.$$

Nếu $k < 0$ thì mẫu số của tỉ lệ thức (*) dần đến không khi $x \to +\infty$. Vậy một nghiệm bất kì y(x) của phương trình muốn thoả mãn điều kiện

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{b}{k} \text{ (hữu hạn)}$$

thì cần thiết là

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y(0) + \int_0^x q(t)e^{kt}dt\right] = 0,$$

hay

$$y(0) = \int_{+\infty}^0 q(t)e^{kt}dt \qquad (**)$$

Từ giả thiết và $k < 0$ ta dễ thấy tích phân này hội tụ. Thay điều kiện ban đầu (**) vào (*) ta sẽ có nghiệm duy nhất có giới hạn bằng $\frac{b}{k}$ tại vô cực (cũng kiểm chứng nhờ quy tắc Lôpitan) là :

$$y(x) = \int_{+\infty}^x q(t)e^{k(t-x)}dt\,.$$

328. Áp dụng bài 327.

331. Có thể thay vào phương trình để thử lại trực tiếp hoặc biến đổi tích phân và chọn điều kiện đầu thích hợp từ biểu thức Cô-si của nghiệm.

332 và **333.** Giới hạn đều bằng $\frac{b}{a}$. Cách làm giống như ở bài 327 : Trước hết, viết biểu thức Cô-si cho nghiệm với điều kiện ban đầu chẳng hạn tại $x_o = 1$ (dưới dạng một tỉ lệ thức), sau đó tìm điều kiện cần thiết cho điều kiện ban đầu và chứng minh đó cũng là điều kiện đủ nhờ áp dụng quy tắc Lôpitan.

334. Về nguyên tắc giống như cách giải bài 327. Nghiệm cho dưới dạng Cô-si là :

$$x(t) = e^{-t}\left[x(0) + \int_0^t f(s)e^s ds\right] = \frac{x(0) + \int_0^t f(s)e^s ds}{e^t}.$$

Khi $t \to -\infty$, mẫu số có giới hạn là không, vậy để cho nghiệm $x(t)$ giới nội trên toàn trục số thì trước hết cần thiết phải có

$$x(0) = \int_{-\infty}^0 f(s)e^s ds\,.$$

Thay giá trị này của $x(0)$ vào biểu thức của nghiệm ta được

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{s-t}f(s)ds = \int_{-\infty}^0 e^z f(z+t)dz\,.$$

Từ biểu thức cuối của nghiệm x(t) tìm được ta thấy ngay tính giới nội và tuần hoàn (cùng chu kì với f) của nó do giả thiết. Tính duy nhất của nghiệm này là do tính duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si.

335. $y(x) = x\int_{+\infty}^{x} e^{x^2-t^2}dt \to -\frac{1}{2}$ khi $x \to +\infty$.

336. $x(t) = e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}\left[x(0) + \int_0^t f(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds\right] = \dfrac{x(0) + \int_0^t f(s)e^{\int_0^s a(\tau)d\tau}ds}{e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}}$.

Vì $f(t) \to 0$ khi $t \to +\infty$, nên $\forall \varepsilon > 0\ \exists\Delta(\varepsilon) > 0\ \forall t \geq \Delta |f(t)| < \varepsilon$.

Nhờ đó, bằng cách đánh giá trực tiếp tỉ lệ thức trên với chú ý mẫu số dần tới vô hạn khi $t \to +\infty$, ta rút ra điều cần phải chứng minh.

337. Nghiệm dưới dạng Cô-si

$$y(x) = \exp\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right).\left[y(0) - \int_0^x \sin t \exp\left(-t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)dt\right].$$

Ta tìm điều kiện ban đầu y(0) sao cho nghiệm y = y(x) là tuần hoàn. Giả sử y(x) tuần hoàn, kết hợp với tính khả vi của nó, suy ra y(x) phải bị chặn trên cả trục số. Nhìn vào biểu thức của nghiệm ta thấy thừa số thứ nhất có giới hạn vô hạn khi $x \to +\infty$, vậy để cho y(x) bị chặn thì cần thiết phải có

$$y(0) = \int_0^{+\infty} \sin t.\exp\left(-t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)dt.$$

Chú ý rằng tích phân với cận vô hạn này hội tụ. Ta chứng minh rằng nghiệm với điều kiện ban đầu này quả thật tuần hoàn trên cả trục số. Thay giá trị ban đầu vào biểu thức của nghiệm ta được

$$y(x) = -\int_{+\infty}^{x} \sin t.\exp[x - t + \cos(x + t)\sin(x - t)dt.$$

Dùng phép thế biến s = t − x, ta có biểu thức cho nghiệm tuần hoàn duy nhất của phương trình là

$$y(x) = \int_0^{+\infty} \exp[-s - \sin s.\cos(s + 2x)].\ \sin(x + s)ds,$$

(tính tuần hoàn của y(x) được thấy một cách hiển hiên).

338. $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$. **339.** $y^3 = Ce^{-x} - x + 1$.

340. $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$; $y = 0$.

341. $y(x + 1)(\ln|x + 1| + C) = 1$; $y = 0$.

342. $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x \cos^2 x$; $y = 0$.

343. $y^3 = Cx^3 - 3x^2$.

344. $y = x^4 \ln^2 Cx$; $y = 0$.

345. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$.

346. $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$; $y = 0$.

347. $xy(C - \ln^2 y) = 1$.

348. $x^2(C - \cos y) = y$; $y = 0$.

349. $x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$.

350. $\frac{1}{y} = Cx + \ln x + 1$; $\frac{1}{y} = \ln x + 1$.

351. $y = \left(Ce^{x^3} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9}\right)^3$, $y = 0$; $y = \left(\frac{2}{9}e^{x^3} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{9}\right)^3$, $y = 0$.

352. $\frac{1}{y} = Ce^{-x} - x + 1$; $y = 0$.

353. $\frac{1}{y} = x(C - \ln|x|)$, $x = 0$; $y = 0$ $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$.

354. $y = \dfrac{x}{-x + C}$; $y = 0$ $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$.

355. $(x^2 - y)^2 = C(x^2 + y^2)$.

356. $C(y - x)^2 + x^2 - 1 = 0$.

357. $x^3 + xy^2 + 2y = C$.

358. $\int \frac{dz}{\varphi(z)} = -\frac{1}{x} + C$, $z = \frac{y}{x}$.

359. $yy' + x = \dfrac{y^2}{x}$; $y^2 = 2x^2(C - \ln|x|)$ hoặc $x^2 e^{\frac{y^2}{x^2}} = C$.

360. $y + \dfrac{x}{y'} = \dfrac{x^2}{y}$; $y^2 e^{\frac{x^2}{y^2}} = C$.

361. $y - xy' = y^2$; $y = \dfrac{x}{x + C}$.

363. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{Cx^{2/3} + x}$; $y = \dfrac{1}{x}$.

364. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{Cx^5 - x}$: $y = \dfrac{2}{x}$.

365. $y = x + \dfrac{x}{x + C}$; $y = x$.

366. $y = x + 2 + \dfrac{4}{Ce^{4x} - 1}$; $y = x + 2$.

367. $y = e^x - \dfrac{1}{x + C}$; $y = e^x$.

368. $y_1 = x + 1$; $y = x + 1 + e^{\frac{x^2}{2}+2x}\left(C - \int e^{\frac{x^2}{2}+2x}dx\right)^{-1}$.

369. $y_1 = x$; $y = x + \dfrac{1}{1 + Cx}$.

372. $y = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x(C + \ln|x|)}$.

370. $3x = C\sqrt{|y|} - y^2$; $y = 0$.

373. $y = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x(C - \ln x)}$.

371. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2xy + 1}{\sqrt{3}} = \ln|x| + C$.

374. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3x^2}{x^3 + C}$.

375. $y = \dfrac{u}{x}$, $x^{\frac{2}{3}} = t$, $u = \dfrac{t}{-\dfrac{1}{3} + v}$, $v = w\sqrt{t}$, $w = \operatorname{tg}(C - 3\sqrt{t})$.

377. $y = \dfrac{u}{x}$, $x^{-2/3} = t$, $u = 1 + \dfrac{t}{v}$, $v = \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{w}$, $w = z\sqrt{t}$,

$z = (1 + Ce^{6\sqrt{t}}) : (1 - Ce^{6\sqrt{t}})$.

379. $xy = \operatorname{tg}(x + C)$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} - C < x < \dfrac{\pi}{2} - C\right)$.

380. $y = \dfrac{x + C - 1}{x(x + C)}$.

381. $y = \operatorname{tg}(4x + C) + \dfrac{x^2}{2}$, $\left(-\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{C}{4} < x < \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{C}{4}\right)$.

382. $y = 2\operatorname{tg}(2x + C) + x^2$, $\left(-\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{C}{2} < x < \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{C}{2}\right)$.

383. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\operatorname{tg}(\sqrt{2x} + C) - \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} - \dfrac{C}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} - \dfrac{C}{\sqrt{2}}\right)$.

384. $y = 2x\operatorname{tg}(2x + C) + 2$, $\left(-\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{C}{2} < x < \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{C}{2}\right)$.

385. $\dfrac{y - y_2}{y - y_1} : \dfrac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$.

386. Áp dụng bài 385.

387. Áp dụng bài 385.

390. Xét trên miền $x > 1$ bất đẳng thức vi phân

$$y' > 1 + y^2,$$

và so sánh với phương trình vi phân

$$\varphi' = 1 + \varphi^2(x).$$

Chú ý rằng $\varphi(x) = \text{tg}x$ bằng vô hạn tại $x = \frac{\pi}{2}$, mà $y(x) \geq \varphi(x)$ (nếu chúng thoả mãn chung một điều kiện ban đầu).

391. Giả sử $(0 ; T)$ là khoảng lớn nhất mà nghiệm $y(x)$ xác định. Vi phân hai vế phương trình lần lượt đến đạo hàm cấp 3 ta có

$$y'''(x) = 2 - 4xy(x) - 2x^2y'(x) + 6y^2(x)y'(x).$$

Bởi vậy $y'''(0) = 2 > 0$. Suy ra $y''(x)$ tăng tại lân cận bên phải của 0 : $y''(x) > y''(0) = 0\ \forall x \in (0 ; \delta)$ $(0 < \delta \leq T)$. Do đó $y'(x)$ đơn điệu tăng trên $(0 ; \delta)$. Ta lại suy ra $y(x) > y'(0) = 0$. Do đó $y(x)$ tăng trên $(0 ; \delta)$; Từ đây suy ra $y(x) > y(0) = 0$. Mặt khác, do $y'(x) > 0$, $\forall x \in (0 ; \delta)$ nên trên khoảng đó

$$0 < y(x) < x.$$

Giả sử tồn tại $x_1 \in (0 ; T)$ sao cho

$$0 < y(x) < x\ \forall x \in (0 ; x_1),\ y(x_1) = x_1.$$

Khi đó $y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) = 2x_1 > 0$. Điều này chứng tỏ $y(x)$ đạt cực đại tại x_1 : vô lí. Tóm lại trên khoảng $(0 ; T)$ ta luôn có

$$0 < y(x) < x.$$

Giả sử $T < +\infty$. Vì $y(x)$ liên tục và đơn điệu tăng trên $(0 ; T)$ nên tồn tại $\lim\limits_{x \to T-0} y(x) = y(T)$. Áp dụng định lí tồn tại và duy nhất nghiệm tại lân cận điểm $(T ; y(T))$ ta suy ra rằng nghiệm $y(x)$ ở trên có thể thác triển lên khoảng $[0 ; T + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Điều này vô lí. Bây giờ ta đặt $v(x) = x - y(x)$. Khi đó $\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2(x) = 1 - (x + y(x))(x - y) = 1 - p(x)v(x)$. Như vậy $v(x)$ là nghiệm của phương trình $\frac{dv}{dx} + p(x)v = 1$, trong đó $p(x) = x + y(x)$. Giải phương trình này và chú ý rằng $v(0) = 0$, đồng thời dựa vào tính chất của hàm $p(x)$ ta có thể chứng minh được rằng $\lim\limits_{x \to \infty} (x - y(x)) = 0$.

392. Theo giả thiết, các hệ số của phương trình Ricati phải thoả mãn hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x), \\ y_2' = P(x)y_2^2 + Q(x)y_2 + R(x), \\ y_3' = P(x)y_3^2 + Q(x)y_3 + R(x). \end{cases}$$

Định thức của nó

$$\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

là định thức Vanđecmông, sẽ khác không nếu thoả mãn điều kiện $y_1 < y_2 < y_3$. Tính liên tục của các hệ số P, Q, R hiển nhiên sẽ thấy được từ đó.

393. Từ giả thiết, tương tự bài toán trước, lập được một hệ gồm hai phương trình với các ẩn là p và q. Từ hệ

$$\begin{cases} y' - y^2 = p(x)y + q(x), \\ y_1' - y_1^2 = p(x)y_1 + q(x), \\ y_2' - y_2^2 = p(x)y_2 + q(x). \end{cases}$$

ta nhận được phương trình Ricati dưới dạng định thức

$$\begin{vmatrix} y' - y^2 & y & 1 \\ y_1' - y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2' - y_2^2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

394. Chú ý $y' = x^2 + y^2 \geq 1 + y^2$ với mọi $x \geq 1$ và xét một phương trình mới $\varphi' = \varphi^2(x) + 1$ với $x \geq 1$ rồi áp dụng định lí bất đẳng thức vi phân.

Để chứng minh nghiệm $y = y(x)$ của phương trình đã cho với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$ là một hàm lẻ, tức là

$$y(-x) = -y(x),$$

ta dùng định lí tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si đối với phương trình đã cho với điều kiện ban đầu $y(0) = 0$ cho hai nghiệm

$$y = y(x),$$
$$\tilde{y} = -y(-x)$$

của nó.

395. Trong lân cận của một điểm bất kì của mặt phẳng (x, y), vế phải của phương trình Ricati đã cho là liên tục và có đạo hàm riêng liên tục theo y. Do đó, trong lân cận của một điểm bất kì của mặt phẳng (x, y), điều kiện của định lí Pica về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cô-si đối với phương trình đã cho được thoả mãn. Vì thế nếu có một điểm x_o mà tại đó $y_1(x_o) = y_2(x_o)$, thì nghiệm y(x) của phương trình xác định bởi điều kiện $y(x_o) = y_1(x_o)$ sẽ không duy nhất.

396. Thế y_1 và y_2 vào phương trình đã cho

$$\begin{cases} y_2' = y_2^2 + p(x)y_2 + q(x), \\ y_1' = y_1^2 + p(x)y_1 + q(x). \end{cases}$$

Lấy đẳng thức đầu trừ đi đẳng thức thứ hai ta có

$$y_2' - y_1' = y_2^2 - y_1^2 + p(x)(y_2 - y_1) = (y_2 - y_1)(y_1 + y_2 + p(x)).$$

Với chú ý rằng $y_1(x) \neq y_2(x)\ \forall x$, ta suy ra đẳng thức cần phải chứng minh, mà vế trái chính là đạo hàm của hàm $\ln|y_2 - y_1|$.

397. Nếu phương trình đã cho có tới ba nghiệm tuần hoàn $y_1 < y_2 < y_3$ thì ta có các đẳng thức :

$$\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1} = y_1 + y_2 + p(x),$$

$$\frac{y_3' - y_1'}{y_3 - y_1} = y_1 + y_3 + p(x).$$

Làm phép trừ các vế tương ứng của hai đẳng thức ta có

$$\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1} - \frac{y_3' - y_1'}{y_3 - y_1} = y_2 - y_3\ ;$$

Nhưng điều này không thể xảy ra, vì vế trái là đạo hàm của hàm tuần hoàn khả vi $\ln\dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$, còn vế phải là một hàm luôn luôn âm.

398. $U \equiv \frac{x}{y} = C.$

399. $U \equiv \frac{y}{x} = C.$

400. $U \equiv \text{arctg}\,\frac{y}{x} = C.$

401. $U \equiv x^2 + y^2 - xy + x - y = C.$

402. $3x^2y - y^3 = C.$

403. $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C.$

404. $xe^{-y} - y^2 = C.$

405. $4y\ln x + y^4 = C.$

406. $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C.$

407. $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C.$

408. $x - y^2\cos^2 x = C.$

409. $U \equiv x^2 + y^2 + 2\text{arctg}\frac{x}{y} = C.$

410. $\sqrt{1 + x^2 + y^2} + \text{arctg}\frac{y}{x} = C.$

411. $\sqrt{x^2 - y^2} - x = C.$

412. $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C.$

413. $x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y.$

414. $\frac{e^y - 1}{1 + x^2} = C.$

415. $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$

416. $x + ye^{\frac{x}{y}} = C.$

417. $x^2 - y^2 + 2xy = 0\ (x^2 + y^2 \neq 0).$

418. Không có nghiệm.

419. $\ln|x + y| - \frac{y}{x + y} = 0.$

420. $x - \frac{y}{x} = C.$

421. $x^2 + y - \frac{x}{y} + \ln|y| = C.$

422. $x^2 - y^2 + 2xy = C.$

423. $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C.$

424. $e^x(x\sin y - \sin y + y\cos y) = C.$

425. $x + \text{arctg}\frac{x}{y} = C.$

426. $2x + \ln(x^2 + y^2) = C.$

427. $\sqrt{1 + y^2} = xy + C.$

428. $2x^3y^3 - 3x^2 = C.$

429. $y^2 = x^2(C - 2y)$; $x = 0.$

430. $(x^2 - C)y = 2x.$

431. $y\sin xy = C.$

432. $\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| = C$; $y = 0.$

433. $x^2 + \ln y = Cx^3$; $x = 0.$

434. $-x + 1 = xy(\text{arctg}y + C)$; $x = 0$; $y = 0$.

435. $x + 2\ln|x| + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{x} = C$; $x = 0$.

436. $\sin\frac{y}{x} = Ce^{-x^2}$.

437. $\ln\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = 2y + C$; $y = 0$.

438. $\ln|y| - ye^{-x} = C$; $y = 0$.

439. $x^2y\ln Cxy = -1$; $x = 0$; $y = 0$.

440. $x^2 + y^2 = y + Cx$; $x = 0$.

441. $x^2y + \ln|x/y| = C$; $x = 0$; $y = 0$.

442. $2xy^2 + (1/xy) = C$; $x = 0$, $y = 0$.

443. $x^2y^2 + 2\ln\frac{x}{y} = C$.

444. $2(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = C$.

445. $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2$.

446. $y^3 + x^2y + 2xy^2 + \ln|x + y| = C$.

447. $\ln\frac{x + y}{y} + \frac{y(1 + x)}{x + y} = C$; $y = 0$.

448. $\sin^2 y = Cx - x^2$; $x = 0$.

449. $y = C\ln x^2 y$.

450. $\sin y = -(x^2 + 1)\ln C(x^2 + 1)$.

451. $xy(C - x^2 - y^2) = 1$; $x = 0$, $y = 0$.

452. $x\sqrt{1 + (y^2 / x^2)} + \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + (y^2 / x^2)}\right) = C$; $x = 0$.

453. $x^3 - 4y^2 = Cy\sqrt[3]{xy}$; $x = 0$; $y = 0$.

454. $\mu = \frac{1}{x^2}, \frac{y}{x} - \ln x = C$.

455. $\mu = (x^2 + y^2)^{-1}, \sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\text{arctg}\frac{y}{x}}, r = Ce^{-\frac{p}{q}\theta}$.

456. $\mu = \frac{1}{\sqrt{xy}}, \sqrt{\frac{y}{x}} - \ln|x| = C$; $y = 0 (x \neq 0)$.

457. $\frac{2}{y}dx + \frac{1}{xy}dy = 0$, $\mu_1 = xy$, $U_1 = x^2 + y$; $\frac{y}{x^3}dx - \frac{2}{x^2}dy = 0$,

$\mu_2 = \frac{x^2}{y}$, $U_2 = \frac{x}{y^2}$; $\mu = xy$, $x^2 + y - \frac{y^2}{x} = C$.

458. Nếu $a\beta - b\alpha \neq 0$ thì $\frac{(x^b y^a)^k}{k} + \frac{(x^\beta y^\alpha)^l}{l} = C$, trong đó k và l được xác định từ hệ $ak - \alpha l = -n$, $bk - \beta l = -m$; nếu $a\beta - b\alpha = 0$ thì $x^b y^a = C$.

Chỉ dẫn : Nếu $a\beta - b\alpha \neq 0$ thì $axdy + bydx = 0$, $\mu_1 = \frac{1}{xy}$, $U_1 = x^b y^a$; $x^m y^n(\alpha xdy + \beta ydx) = 0$, $\mu_2 = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}$, $U_2 = x^\beta . y^\alpha$; $\mu = \frac{1}{xy}\varphi(x^b y^n) = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}} = \psi(x^\beta y^\alpha)$. Ta chọn $\varphi(U_1) = U_1^k$, $\psi(U_2) = U_2^l$; $\mu = \frac{1}{xy}(x^b y^a)^k = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}(x^\beta y^\alpha)^l$.

So sánh các số mũ của luỹ thừa ta có hệ thức để xác định k và l. Nếu $a\beta - b\alpha = 0$ thì phương trình đã cho đưa được về phương trình $axdy + bydx = 0$.

465. Cả mặt phẳng.

466. $y \neq 2x$.

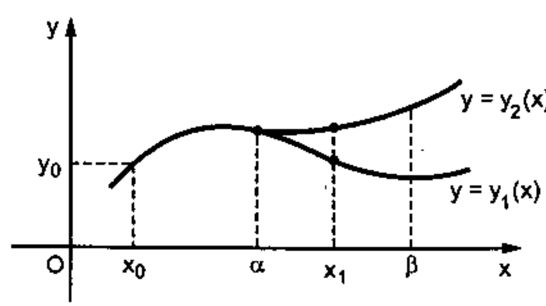
467. $x \neq 2$, $y > 0$.

468. $x > 0$, $y \neq x$.

469. $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

470. $x \neq 0$, $|y| > |x|$.

471. Với $0 < a < 1$ và tại các điểm của trục Ox.



Hình 37

472. Xét hai nghiệm $y_1(x)$ và $y_2(x)$ mà $y_1(x_o) = y_2(x_o)$. Giả sử có $x_1 > x_o$ mà $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$, chẳng hạn $y_2(x_1) > y_1(x_1)$. Do tính liên tục nên sẽ có $(\alpha ; \beta)$ nào đó sao cho $y_2(x) > y_1(x)$ $\forall x \in (\alpha ; \beta)$ và $y_2(\alpha) = y_1(\alpha)$ $(\alpha \geq x_o)$.

Xét hàm số $y = y_2(x) - y_1(x)$ ta thấy : $y'(x) = y_2'(x) - y_1'(x) = f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x)) \leq 0$ khi $x \in [\alpha ; \beta]$. Vậy $y(x)$ giảm trên $[\alpha ; \beta)$, nên $y_2(x) - y_1(x) \leq y_2(\alpha) - y_1(\alpha) = 0$ khi $x \in (\alpha ; \beta)$, hay $y_2(x) \leq y_1(x)$ khi $x \in (\alpha ; \beta)$. Ta gặp phải mâu thuẫn, điều đó chứng tỏ $y_2(x) = y_1(x)$ $\forall x \geq x_o$. Bài tập này cho ta một điều kiện đủ để bảo đảm tính duy nhất của nghiệm, nhưng chỉ về phía bên phải, theo điều kiện ban đầu.

473. a) $0 \leq a \leq 1$; b) $a \leq \frac{1}{2}$; c) $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$. Giải chẳng hạn : a) Để vế phải liên tục thì điều kiện trước hết là $a \geq 0$. Nghiệm của phương trình là

$$|y(x)| = [y(x_o)|^{1-a} + (1-a)(x - x_o)]^{\frac{1}{1-a}}.$$

Với $0 \leq a < 1$ thì $y(x) \to \infty$ khi và chỉ khi $x \to \infty$. Khi $a = 1$ thì giải trực tiếp từ phương trình đã cho ta có $|y(x)| = |y(x_o)|\, e^{x-x_o}$.

Như vậy $y(x) \to \infty$ khi và chỉ khi $x \to \infty$. Tóm lại nếu $0 \leq a \leq 1$ thì mọi nghiệm của phương trình đã cho có thể thác triển được lên toàn trục số. Còn khi $a > 1$ thì $y(x)$ sẽ lớn vô hạn khi $x \to x_o - \frac{1}{1-a}|y(x_o)|^{1-a}$ là một giá trị hữu hạn (có thể chọn $y(x_o) \neq 0$). Trong trường hợp này không phải mọi nghiệm đều có thể thác triển được lên cả trục số.

475. Ta có các đánh giá sau đây

$$f(x, y) - f(x, 0) = f'(x, \theta y)y \leq |k(x)||y|.$$

trong đó $0 < \theta < 1$, hay

$$|f(x, y)| \leq |k(x)||y| + |f(x, 0)|.$$

Nếu đặt $a(x) = |k(x)|$, $b(x) = |f(x, 0)|$ thì có thể áp dụng điều kiện đủ cho sự thác triển nghiệm đã nói ở trên cho trường hợp này để suy ra kết luận.

476. $\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right)\left(\frac{y^2}{2} - x - C\right) = 0$; $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{y^2}{2} = x - \frac{1}{2}$.

477. $(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0$, $y = 0$; $y = x^2$ $(x \geq 0)$,

$y = (x-2)^2$ $(x \leq 2)$; $y = (x-1)^2$, $y = 0$.

478. $(\sqrt{|y|} - x - C)(\sqrt{|y|} + x - C) = 0$, $y = 0$.

479. $(y - \sqrt{|x|} - C)(y + \sqrt{|x|} - C) = 0$ khi $x \neq 0$; $x = 0$.

480. $(y - C)(y - \sqrt{x} - C)(y + \sqrt{x} - C) = 0$, $x = 0$.

481. $(x + C)^2 + y^2 = a^2$, $y = \pm a$.

482. $\left(y - \dfrac{x^2}{2} - C\right)(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0$, $y = 0$; $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$,

$y = (x + 1)^2 (x \geq -1)$, $y = (x - 1)^2 (x \leq 1)$; $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}$, $y = (x - 1)^2 (x \geq 1)$,

$y = (x - 1)^2\ (x \leq 1)$, $y = 0$; $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = x^2\ (x \geq 0)$, $y = x^2\ (x \leq 0)$, $y = 0$.

483. $\left(y - \dfrac{x^2}{2} - C\right)(y - Ce^{-x} + x - 1) = 0$.

484. $\left(y - \dfrac{C}{x}\right)\left(y - \dfrac{C}{x^2}\right) = 0$.

485. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$ khi $x > 1$, $y = -\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$ khi $x < -1$; $x = \pm 1$.

486. $y = -x + C$.

487. $\left(\dfrac{y - C}{x}\right)^3 - 3\dfrac{y - C}{x} + 1 = 0$.

490. $x = at + bt^2$, $y = \dfrac{a}{2}t^2 + \dfrac{2b}{3}t^3 + C$.

491. $x = \pm\, a\cos^3 t$, $y = \mp\, a\sin^3 t + C$; $x = 0$.

492. $x = \dfrac{1 + t}{t^3}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t} + C$; $x = 0$.

493. $x = t^3 + 1$, $y = \dfrac{3}{4}t^4 + C$.

494. $x = t\ln t$, $y = \dfrac{t^2}{2}\ln t + \dfrac{t^2}{4} + C$.

496. $x = \dfrac{t}{1 - t^3}$, $y = \dfrac{1}{6}.\dfrac{-1 + 4t^3}{(1 - t^3)^2} + C$.

497. $-\dfrac{y}{y'} + x = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y^2 = 2C\left(x + \dfrac{C}{2}\right)$.

498. $|y|\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, $y^2 - x^2 = C$, $x^2 + y^2 = C^2$.

499. $(y' - 2x)^2 = y - x^2$.

500. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

501. $y = xy' + \dfrac{2ay'}{y'-1}$; $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

502. $y = xy' + 2a\sqrt{-y'}$; $xy = a^2$.

503. Nếu $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ là các điểm cho trước, còn b^2 là tích các khoảng cách F_1N_1 và F_2N_2 từ các điểm đó đến tiếp tuyến với đường cong tại điểm $M(x ; y)$ (các điểm F_1 và F_2 nằm về cùng một phía của tiếp tuyến), thì $y = xy' + \sqrt{b^2(1+y'^2) + c^2y'^2}$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a^2 = b^2 + c^2)$. Nếu F_1 và F_2 nằm ở hai phía khác nhau của tiếp tuyến thì cần phải thay b^2 bởi $-b^2$; thay cho elíp ta nhận được hypebôn $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a^2 = c^2 - b^2)$.

504. $x = p(p^2+2)/(\sqrt{p^2+1})^3$, $y = p^2/(\sqrt{p^2+1})^3$ và $x = p/(\sqrt{p^2+1})^3$, $y = (2p^2+1)/(\sqrt{p^2+1})^3$.

505. $x^2 + y^2 = 1$.

506. $x = t - \dfrac{1}{t} + C$, $y = \dfrac{t^2}{2} + \ln t$.

507. $x = 3(\text{cotg}\, t + t) + C$, $y = a\cos^3 t$.

508. $x = 2t + 3t^2 + C$, $y = t^2 + 2t^3$; $y = 0$.

509. $x = C - t + \ln\dfrac{1+t}{\sqrt{t^2 - t + 1}} + \sqrt{3}\,\text{arctg}\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

510. $x = \mp a \ln\left|\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{t}{2}\right)\right| + C$, $y = \pm\dfrac{a}{\cos t}$.

511. $4e^{-\frac{y}{3}} = (x+2)^{\frac{4}{3}} + C$.

512. $y = Cx^{-3} \pm 2\sqrt{\dfrac{x}{7}}$.

513. $\ln Cy = x \pm \sin x$; $y = 0$.

514. $x^2 + (Cy+1)^2 = 1$; $y = 0$.

515. $2(x - C)^2 + 2y^2 = C^2$; $y = \pm x$.

516. $y = Ce^{\pm x} - x^2$.

517. $\ln Cy = x \pm 2e^{\frac{x}{2}}$; $y = 0$.

518. $y^2 = C^2x - C$; $4xy^2 = 1$.

519. $x^2y = C$; $y = Cx$.

520. $(Cx + 1)^2 = 1 - y^2$; $y = \pm 1$.

521. $(x + C)^2 = 4Cy$; $y = 0$; $y = x$.

522. $x = 3p^2 + 2p + C$, $y = 2p^3 + p^2$; $y = 0$.

523. $x = \ln|p| \pm \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{p+1} - 1}{\sqrt{p+1} + 1}\right| \pm 3\sqrt{p+1} + C$, $y = p \pm (p+1)^{3/2}$;

$y = \pm 1$.

524. $x = \pm\left(2\sqrt{p^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{|p|}\right) + C$; $y = \pm p\sqrt{p^2 - 1}$; $y = 0$.

525. $x = \ln p + \frac{1}{p}$, $y = p - \ln p + C$.

526. $x = 2\operatorname{arctg} p + C$, $y = \ln(1 + p^2)$; $y = 0$.

527. $4y = C^2 - 2(x - C)^2$; $2y = x^2$.

528. $\pm xp\sqrt{2\ln Cp} = 1$, $y = \mp\left(\sqrt{2\ln Cp} - \frac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right)$.

529. $x = \pm 2\sqrt{1 + p^2}\ln(\sqrt{p^2 + 1} \pm 1) + C$, $y = -p \pm p\sqrt{p^2 + 1}$; $y = 0$.

530. $x = -\frac{p}{2} + C$, $5y = C^2 - \frac{5p^2}{4}$; $x^2 = 4y$.

531. $pxy = x^2 + p^3$, $y^2(2p + C) = p^4$; $y = 0$.

532. $y^2 = 2Cx - C\ln C$; $2x = 1 + 2\ln|y|$.

533. $Cx = \ln Cy$; $y = ex$.

534. $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1$, $y = xp - x^2p^3$; $y = 0$.

535. $y^2 = 2C^3x + C^2$; $27x^2y^2 = 1$.

536. $2p^2x = C - C^2p^2$, $py = C$; $32x^3 = -27y^4$.

537. $y = Cx - C^2$; $4y = x^2$.

538. $x = 3p^2 + Cp^{-2}$; $y = 2p^3 + 2Cp^{-1}$; $y = 0$.

539. $x\sqrt{p} = \ln p + C$, $y = \sqrt{p}\,(4 - \ln p - C)$; $y = 0$.

540. $y = Cx - C - 2$.

541. $C^3 = 3(Cx - y)$; $9y^2 = 4x^3$.

542. $x = C(p-1)^{-2} + 2p + 1$, $y = Cp^2(p-1)^{-2} + p^2$; $y = 0$; $y = x - 2$.

543. $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$, $y = \pm 2x$.

544. $x = Ce^{-p} - 2p + 2$, $y = x(1+p) + p^2$.

545. $x = \frac{C}{\sqrt{p}} + \frac{2}{3}p$, $y = -xp + p^2$.

546. $y = \frac{1}{C}(x - C)^2$ $(C \neq 0)$; $y = 0$, $y = -4x$.

547. $y = Cx - C^2$; $y = \frac{x^2}{4}$.

548. $y = Cx - a\sqrt{1 + C^2}$, $x^2 + y^2 = a^2$ $(ay < 0)$.

549. $y = Cx - \ln C$; $y = \ln x + 1$.

550. $y = \pm 2\sqrt{Cx} + C$; $y = -x$.

551. $2C^2(y - Cx) = 1$; $8y^3 = 27x^2$.

552. $xp^2 = p + C$, $y = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p$.

553. $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$; $y^2 - x^2 = 1$ $(y > 0)$.

554. $x = 2p + \ln|p - 1| + C$, $y = p^2 + p + \ln|p - 1| + C$.

555. $x = Cy + C^2$; $x = -\frac{y^2}{4}$.

556. $y = \frac{C}{2}x^2 + C^2$; $y = -\frac{x^4}{16}$.

557. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{Cx^2}{2} + C^2$; $y = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{3}$.

558. $x = -\frac{1}{2}p^2 + Cp$, $y = -\frac{p^3}{3} + \frac{Cp^2}{2} + C^2$.

$x = \frac{p^3}{4} - \frac{p^2}{2}$, $y = \frac{3}{16}p^4 - \frac{p^3}{3}$.

559. $x = \frac{1}{C}\ln y - C^2$; $x = -3\left(\frac{\ln y}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

560. $y = -\frac{x^5}{4}$ là nghiệm kì dị.

561. Không có nghiệm kì dị.

562. $y = 0$ là nghiệm kì dị.

563. Không có nghiệm kì dị.

564. $y = 0$ là nghiệm kì dị.

585. $y = \pm a$ là các nghiệm kì dị.

586. $y = 0$ là nghiệm kì dị.

596. $y - b = C(x - a)\ (x \neq a)$.

597. $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$.

598. $r = C$.

599. $r = Ce^{\theta}$.

600. $(x^2 + y^2)^2 = C(x^2 - y^2)$.

601. $b^2 . \ln y = a^2 \ln y = a^2 \ln(Cx)$.

602. $x + C = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$; $y = a\sin t$.

603. $(x^2 + y^2)^3 = Cy(y^2 + 3x^2)$.

604. $r = C\sqrt{1 + \cos^2\theta}$.

605. $2y^2 - 1 = C(2x^2 + 1)$.

606. $r^{-n} = a^{-n}\cos n\varphi + b^{-n}\sin n\varphi$.

607. $y(x^2 - C) = x$; $y = 0$.

608. $x(C - y) = C^2$; $x = 4y$.

609. $x = Cy + y^3$; $y = 0$.

610. $y\ln Cx = -x$; $y = 0$.

611. $(Cx + 1)y = Cx - 1$; $y = 1$.

612. $y(x + C) = x + 1$; $y = 0$.

613. $y = C$; $y = C \pm e^x$.

614. $y^2 = C(x^2 - 1)$; $x = \pm 1$.

615. $x = Cy + \ln^2 y$.

616. $(x - C)^2 + y^2 = C$; $4(y^2 - x) = 1$.

617. $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2$.

618. $y^2 = C(xy - 1)$; $xy = 1$.

619. $2y = 2C(x - 1) + C^2$; $2y = -(x - 1)^2$.

620. $y = Cx^2e^{-3/x}$.

621. $4x^2y = (x + 2C)^2$; $y = 0$.

622. $3y = 3C(x - 2) + C^3$; $9y^2 = 4(2 - x)^3$.

623. $4(x - C)^3 = 27(y - C)^2$; $y = x - 1$.

624. $x^3y^2 + 7x = C$.

625. $x + y = \operatorname{tg}(y - C)$.

626. $y(xy - 1) = Cx$.

627. $x = y^2(C - 2\ln|y|)$; $y = 0$.

628. $-e^{-y} = \ln C(x - 2)$.

629. $3xy = C \pm 4x^{3/2}$.

630. $y^2 = 2x\ln Cy$; $y = 0$.

631. $y^2(Ce^{x^2} + 1) = 1$; $y = 0$.

632. $\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$.

633. $C^2x^2 + 2y^2 = 2C$; $2x^2y^2 = 1$.

634. $y^2(Ce^{2x} + x + 0{,}5) = 1$; $y = 0$.

635. $(x - 1)^2y = x - \ln|x| + C$.

636. $y(C\sqrt{|x^2-1|}-2)=1$; $y=0$.

637. $y^2-1=C(x+1)^4e^{-4x}(y^2+1)$; $x=-1$.

638. $y\sin x-\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=C$.　　　**639.** $3y^2=2\sin x+C\sin^{-2}x$.

640. $x(p-1)^2=\ln Cp-p$, $y=xp^2+p$; $y=0$; $y=x+1$.

641. $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C$.

642. $x=3p^2+p^{-1}$, $y=2p^3-\ln|p|+C$.

643. $x(e^y+xy)=C$.

644. $(x+1)y=x^2+x\ln Cx$.

645. $px=C\sqrt{p}-1$, $y=\ln p-C\sqrt{p}+1$.

646. $y=x\,\mathrm{tg}\ln Cx$; $x=0$.

647. $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$.

648. $y^2=(x^2+C)e^{2x}$.

649. $x(y^2-1)^2=y^3-3y+C$; $y=\pm1$.

650. $Cy=C^2e^x+1$; $y=\pm 2e^{x/2}$.

651. $y^{2/3}=Ce^{2x}+\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$; $y=0$.

652. $y=Cx-(C^3-1)^{1/3}$; $y^{3/2}=x^{3/2}-1$.

653. $\sqrt{y-x}-\sqrt{x}=C$; $y=x$.

654. $x=4p^3-\ln Cp$, $y=3p^4-p$; $y=0$.

655. $x\sqrt{y}=\sin x+C$; $y=0$.

656. $y^2+2x^2\ln Cy=0$; $y=0$.

657. $xy\cos x-y^2=C$.

658. $xy(\ln^2x+C)=1$.

659. $4x+y-3=2\,\mathrm{tg}(2x+C)$.

660. $4Cxy=C^2x^4-1$.

661. $2\sqrt{y-x^2}=x\ln Cx$; $y=x^2$.

662. $x=Cy^2-y^2(y+1)e^{-y}$; $y=0$.

663. $(y^2/2)-(1/x)-xy=C$; $x=0$.

664. $y(\ln y-\ln x-1)=C$.

665. $2x^3 - x^2y^2 + y^3 + x = C.$

666. $y^3 = (C - x^3)\sin^3 x.$

667. $x = 2p - \ln p,\ y = p^2 - p + C.$

668. $(y - 4x + 2)^4(2y + 2x - 1) = C.$

669. $p^2x = p\sin p + \cos p + C,\ py = p\sin p + 2\cos p + 2C\ ;\ y = 0.$

670. $(y - x)^2 = 2C(x + y) - C^2,\ y^{2/3} - y^{2/3} = C\ ;\ y = 0.$

671. $x^2y^2 - 1 = xy\ln Cy^2\ ;\ y = 0.$

672. $|x| = \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) + C\ ;\ x = 0.$

673. $27(y - 2x)^2 = (C - 2x)^3\ ;\ y = 2x.$

674. $x^2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2}) = C.$

675. $\sin(y/x) = -\ln Cx.$

676. $3\sqrt{y} = x^2 - 1 + C\sqrt[4]{|x^2 - 1|}\ ;\ y = 0.$

677. $(2x + 3y - 7)^3 = Ce^{x+2y}.$

678. $x = 2\sqrt{p^2 + 1} - \ln(1 + \sqrt{p^2 + 1}) + \ln Cp,\ y = p\sqrt{p^2 + 1}\ ;\ y = 0.$

679. $x = \frac{C}{p^2} - p - \frac{3}{2},\ y = C\left(\frac{2}{p} - 1\right) - \frac{p^2}{2}\ ;\ y = x + 2\ ;\ y = 0.$

680. $(x^2 + y + \ln Cy)y = x\ ;\ y = 0.$

681. $y^2 = C\ln^2 x + 2\ln x.$

682. $x = Cue^u,\ 4y = C^2e^{2u}(2u^2 + 2u + 1)\ ;\ x^2 = 2y.$

683. $xy^2\ln Cxy = 1\ ;\ x = 0\ ;\ y = 0.$

684. $x^2\sin^2 y = 2\sin^3 y + C.$

685. $1 - xy = (Cx - 1)^2\ ;\ xy = 1.$

686. $xe^y = e^x + C.$

687. $\sin(y - 2x) - 2\cos(y - 2x) = Ce^{x+2y}.$

688. $y = (2x + C)\sqrt{x^2 + 1} - x^2 - Cx - 2.$

689. $(y + x^2)^2(2y - x^2) = C.$

690. $(x - 1)^2 = (2x - 2\ln Cx)y^2\ ;\ y = 0.$

691. $x = p[\ln(1 + \sqrt{p^2 + 1}) - \ln Cp],\ 2y = xp - \sqrt{p^2 + 1}\ ;\ 2y = -1.$

692. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1.$

693. $y^2 = x - (x + 1)\ln C(x + 1).$

694. $(y - 2x\sqrt{y - x^2})(2\sqrt{y - x^2} + x) = C.$

695. $(y + 3x + 7)(y - x - 1)^3 = C$. 697. $e^y = x^2\ln Cx$.

696. $y = C^2(x - C)^2$; $16y = x^4$. 698. $xy^2 = \ln x^2 - \ln Cy$; $x = 0, y = 0$.

699. $x(y^2 + x^2)^3 = \frac{2}{5}y^5 + \frac{4}{3}x^2y^3 + 2x^4y + Cx^5$; $x = 0$.

700. $(u - 1)\ln Cx^6(u - 1)^5(u + 2)^4 = 3$, trong đó $u^3 = (y^2/x^2) - 2$; $y^2 = 3x^2$.

701. $\sqrt{y} = (x^2 - 1)(2\ln|x^2 - 1| + C)$; $y = 0$.

702. $x^2 - (x - 1)\ln(y + 1) - y = C$.

703. $\mathrm{tg}y = x^2 + Cx$; $y = \frac{(2k + 1)\pi}{1}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

704. $y^2 = Cx^2 + C^2$. 706. $y^2 = 2C^2(x - C)$; $8x^3 = 27y^2$

705. $x^3 = Ce^y - y - 2$. 707. $x^6 = y^3(C - y\ln y + y)$; $y = 0$.

708. $\ln C(u - v)^3\left(u^2 + uv + \frac{v^2}{3}\right)^2 = 2\mathrm{arctg}\frac{2u + v}{v}$,

trong đó $u^3 = y$, $v^2 = x$; $y^2 = x^3$.

709. $(y - 1)^2 = x^2 + Cx$. 711. $(x^2 + y^2)(Cx + 1) = x$.

710. $3x + y^3 - 1 = \mathrm{tg}(3x + C)$. 712. $(C - x^2)\sqrt{y^2 + 1} = 2x$.

713. $(x^2 + y^2 + 1)^2 = 4x^2 + C$.

714. $xy - x = y(y - x)\ln|Cy/(y - x)|$; $x = 0$; $y = 0$; $y = x$.

715. $y \pm x\,\mathrm{ch}(x + C)$; $y = \pm x$. 717. $(y - x)\ln C\frac{x - 1}{x + 1} = 2$; $y = x$.

716. $\sqrt{y^2 + 1} = x(Ce^x - 1)$. 718. $(Ce^{x^2} + 2x^2 + 2)\cos y = 1$.

719. $(y^2 - Cx^2 + 1)^2 = 4(1 - C)y^2$; $y = \pm x$.

720. $y^2 + xy - 1 = C\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$. 721. $6x^3y^4 + 2x^3y^3 + 3x^2y^4 = C$.

722. $x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2 = Ce^{-y}$; $x = 0$.

723. $e^y(C^2x^2 + 1) = 2C$; $x^2 = e^{-2y}$.

724. Tìm f(0), sau đó giả thiết rằng f(x) khả vi trong lân cận điểm $x = 0$, rồi vi phân cả hai vế của phương trình đã cho theo y và đặt $y = 0$. Kết quả là ta nhận được một phương trình vi phân cho f(x). Có cách khác để nhận được phương trình vi phân ấy là tính f'(x) theo định nghĩa và sử dụng phương trình hàm đã cho. Vì $f'(x) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}$. Kết quả :

$f(0) = 0$, $f'(x) = C[1 + f^2(x)]$, $C \equiv f'(0)$; $f(x) = \mathrm{tg}Cx$.

725. Chú ý $y = 0$ là một nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện $y(0) = 0$ và áp dụng định lí tồn tại duy nhất nghiệm.

726. Nếu phương trình

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

có thừa số tích phân $\mu = \mu(x, y)$ thì

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Với $\mu = X(x)\,Y(y)$ ta nhận được một phương trình để xác định f(x, y) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{Y'(y)}{Y(y)}f(x,y) = -\frac{X'(x)}{X(x)}.$$

Từ đó

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x) + \psi(x)\chi(y)}{\chi(y)},$$

trong đó φ, ψ, χ là những hàm bất kì.

727. Nghiệm của phương trình với điều kiện ban đầu $x(t = 0) = x(0)$ và hàm vế phải là $\tilde{f}(t)$ có dạng

$$x(t) = \exp\left(-\int_0^t a(\tau)d\tau\right).\left[x(0) + \int_0^t \tilde{f}(\tau)\exp\left(\int_0^t a(u)du\right)d\tau\right].$$

Từ đánh giá

$$|x(t) - x_o(t)| \le \exp\left(-\int_0^t a(\tau)d\tau\right).\Big[|x(0) - x_o(0) +$$

$$+ \int_0^t |f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|\exp\left(\int_0^t a(u)du\right)d\tau\Big]$$

và chú ý giả thiết $a(t) \ge c > 0$, suy ra $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ sao cho với mọi $\tilde{f}(t)$ và $\forall x(0)$ mà $|x(0) - x_o(0)| = |x(0) - b| < \delta$, $\sup\limits_t|\tilde{f}(t) - f(t)| < \delta$ ta có

$$\sup_t |x(t) - x_o(t)| < \varepsilon.$$

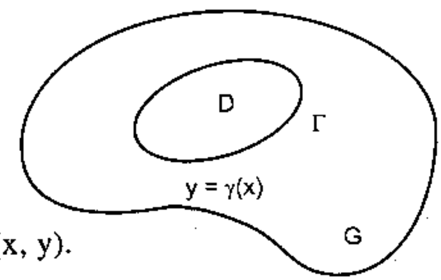
728. Xem "Bài giảng về lí thuyết phương trình vi phân thường", 1970 của I. G. Pêtrốpxki, trang 20.

729. Phải chứng minh f(c) = 0. Lưu ý rằng

$$f(c) = \lim_{x\to\infty} \varphi'(x),$$

nên nếu $f(c) \neq 0$ (chẳng hạn $f(c) > 0$) thì sẽ mâu thuẫn với giả thiết

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = c.$$



Hình 38

730. Từ giả thiết suy ra biểu thức

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

là một vi phân hoàn chỉnh, tức là

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv dU(x, y).$$

Chú ý rằng :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M,\ \frac{\partial U}{\partial y} = N.$$

Giả sử trong miền đơn liên G có một đường cong tích phân kín Γ với phương trình y = γ(x). Như vậy

$$dU(x, y)|_\Gamma \equiv dU(x, \gamma(x)) \equiv 0 \Rightarrow U|_\Gamma = \text{const} = C.$$

Có hai trường hợp : Nếu U(x, y) đạt cực trị trên miền đóng D giới hạn bởi Γ tại hai điểm nào đó của Γ là P_1 và P_2, thì

$$U(P_1) = \max_{P\in D} U(P) = U(P_2) = \min_{P\in D} U(P) = C$$

và như thế

$$U(P) = C \qquad \forall P \in D.$$

Khi đó ta có $M(x_o, y_o) = N(x_o, y_o) = 0$ với bất kì $(x_o ; y_o) \in D$.

Nếu có ít nhất một điểm cực trị không nằm trên Γ, chẳng hạn là $P_1(x_1 ; y_1)$ thì ta cũng có do tính chất của cực trị

$$M(x_1, y_1) = \frac{\partial U(x_1, y_1)}{\partial x} = N(x_1, y_1) = \frac{\partial U(x_1, y_1)}{\partial y} = 0.$$

731. Khi chứng minh tính duy nhất nghiệm cần chú ý : Nếu f(t) là một hàm liên tục và dương (hoặc âm) trên [a ; b] và $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ là hai hàm với $x \in [\alpha ; \beta]$ sao cho $a \le \varphi_1(x), \varphi_2(x) \le b$ với mọi $x \in [\alpha ; \beta]$ thì

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt \equiv 0 \ (x \in [\alpha ; \beta])$$

khi và chỉ khi

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \qquad (x \in [\alpha ; \beta]).$$

732. Chứng minh bằng phản chứng. Nếu ngược lại ta sẽ có một điểm $x = x_1 > x_o$ sao cho $y(x_1) = z(x_1)$ và $y(x) > z(x)$ với mọi $x \in [x_o ; x_1]$, $x_1 < b$. Một mặt, theo giả thiết ta thấy

$$y'(x_1) = f_1(x_1, y(x_1)) > f_2(x_1, z(x_1)) = z'(x_1),$$

tức là

$$y'(x_1) - z'(x_1) > 0. \tag{1}$$

Mặt khác do

$$y(x_1) - z(x_1) = 0,\ y(x) - z(x) > 0,\ \forall x \in [x_o ; x_1]$$

suy ra

$$y'(x_1) - z'(x_1) \le 0. \tag{2}$$

Các bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn nhau.

733. Từ giả thiết ta có (với $A > 0$) :

$$\frac{y(x)}{A + \int_{x_o}^{x} B(s)y(s)ds} \le 1, \qquad \frac{B(x)y(x)}{A + \int_{x_o}^{x} B(s)y(s)ds} \le B(x).$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức cuối này từ x_o đến x và chú ý rằng

$$\frac{d}{dx}\left[A + \int_{x_o}^{x} B(s)y(s)ds\right] = B(x)y(x)$$

ta nhận được bất đẳng thức cần thiết.

Trường hợp $A = 0$ cũng chứng minh được nếu cho $A \to +0$.

734. Trước hết cần phải nói thêm rằng : Ở đây ta quan niệm một nghiệm bất kì $y = y(x)$ của phương trình (1) là một hàm số nhận giá trị thực của biến thực $x(-\infty < x < +\infty)$. Mặt khác theo giả thiết, tại mỗi một điểm x cố định, phương trình đại số bậc hai

$$y^2 + p(x)y + q(x) = 0 \tag{2}$$

có hai nghiệm phức, nói chung phụ thuộc vào x là $\overline{y}_1(x)$ và $\overline{y}_2(x)$.

a) Nếu phương trình vi phân (1) có một nghiệm tuần hoàn $y = y(x)$ thì $y \not\equiv \text{const}$ (thực), vì nếu ngược lại thì (2) có nghiệm thực. Như vậy y(x) là một hàm tuần hoàn không tầm thường (khác hằng số) và do đó y'(x) không giữ nguyên một dấu.

b) Nếu (2) có hai nghiệm đều phức là $\overline{y}_1(x)$ và $\overline{y}_2(x)$ thì trước hết p(x) và q(x) thực (từ định lí Vi-ét), sau nữa biệt thức của tam thức bậc hai ở vế phải của (1) luôn âm. Do đó tam thức bậc hai ở vế phải của (1) luôn dương với mọi y, dĩ nhiên kể cả khi lấy y = y(x) là nghiệm tuần hoàn của (1) đã nói ở phần a). Như vậy thì với nghiệm tuần hoàn y = y(x) ta lại có

$$y'(x) > 0 \ (-\infty < x < +\infty).$$

Hai phần a) và b) mâu thuẫn nhau, bài toán được giải xong.

735. Đây là bài toán thuần tuý giải tích, tuy nhiên nếu áp dụng phương trình vi phân thì lời giải khá đơn giản.

Có thể xem a = 0, vì nếu ngược lại thì đặt F = f + a. Bằng cách đặt

$$f'(x) + f(x) = g(x)$$

ta thấy f(x) là nghiệm của phương trình vi phân

$$y' + y = g(x).$$

Do vậy

$$f(x) = e^{-x}f(0) + e^{-x}\int_0^x e^s g(s)ds.$$

Số hạng thứ nhất ở vế phải dần đến không khi $x \to +\infty$. Số hạng thứ hai cũng vậy, vì

$$e^{-x}\int_0^x e^s g(s)ds = e^{-x}\int_0^N e^s g(s)ds + e^{-x}\int_N^x e^s g(s)ds, \qquad (1)$$

trong đó N là một số khá lớn nào đó sao cho

$$|g(s)| \le \varepsilon \ \forall s \ge N \ (\varepsilon > 0 \text{ đủ nhỏ cho trước}).$$

Nhưng số hạng thứ nhất ở vế phải của (1) dần đến không khi $x \to \infty$, còn số hạng thứ hai thoả mãn đánh giá sau đây khi $x \ge N$:

$$\left|e^{-x}\int_N^x e^s g(s)ds\right| \le e^{-x}\int_N^x e^s |g(s)|\,ds \le \varepsilon(1 - e^{N-x}) < \varepsilon.$$

Như vậy, ta đã chứng minh được

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Nếu

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - f'(x)] = a$$

thì nhận xét trên không còn đúng nữa, ví dụ lấy $f(x) = e^x$.

Suy rộng bài toán : Trước hết, có thể chứng minh rằng kết luận sau đây đúng :

Cho hàm số f(x) liên tục cùng với các đạo hàm f'(x), f"(x) trên $[0 ; \infty)$. Biết rằng

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) + f'(x) + f''(x)] = a \text{ (a hữu hạn).}$$

Khi đó

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Chứng minh. Cũng có thể xem a = 0. Đặt

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = g(x)$$

thì y = f(x) là nghiệm của phương trình vi phân cấp hai sau đây :

$$y'' + y' + y = g(x).$$

Đây là một phương trình vi phân cấp hai tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng số, nên tìm nghiệm bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrănggiơ. Kết quả ta được

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$

$$+ e^{-\frac{x}{2}}\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x.\int_0^x e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.g(t)dt + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.\int_0^x e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.g(t)dt\right],$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số nào đó (nói chung phụ thuộc vào f(0) và f'(0)). Từ đó dễ thấy rằng

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

nếu để ý : $e^{-x/2} \to 0$, $g(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$ và $|\cos u| \le 1$, $|\sin u| \le 1$ (các đánh giá tương tự như trước),

Có thể xét tiếp tục vấn đề tổng quát sau đây :

Cho hàm số $f \in C^n [0 ; \infty)$. Phải chăng ta có :

Nếu

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + f'(x) + ... + f^{(n)}(x)] = a$$

(a là hằng số hữu hạn) thì

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a,$$

với mọi n = 1, 2, 3, ... ?

Với $n = 1$ và 2 ta đã có câu trả lời là khẳng định ở trên.

Với $n \geq 3$ mệnh đề trên nói chung không đúng nữa. Bạn đọc hãy tự kiểm chứng điều đó.

Bạn đọc lưu ý rằng : Nếu mọi nghiệm của đa thức $a_o + a_1 z + \ldots + a_n z_n$ ($n \geq 1$, a_i thực, $a_o > 0$, $a_n \neq 0$) đều có phần thực âm thì $a_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Với $n = 1, 2$ thì điều ngược lại đúng, nhưng với $n \geq 3$ thì sai.

736. Giả sử phương trình vi phân có dạng : $y' = f(x, y)$. (1)

Theo giả thiết, nếu (C) là đường cong tích phân của (1), tức là các điểm dọc theo (C) có dạng $(x ; y(x))$, thì đường cong (C_k) nhận được từ (C) bởi phép biến đổi đồng dạng tâm tại gốc toạ độ và tỉ số k, cũng là một đường cong tích phân của (1). Nhưng các điểm dọc theo (C_k) có dạng $(kx ; ky(x))$. Vì thế

$$ky' = f(kx, ky) = kf(x, y),$$

tức là $f(x, y)$ là hàm thuần nhất, hay (1) là phương trình thuần nhất.

737. Từ giả thiết ta có

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{\partial(\mu f)}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial(\mu f)}{\partial x},$$

hay

$$\begin{aligned} &\mu f'_y + \mu'_x + f\mu'_y = 0, \\ &\mu f'_x + f\mu'_x - \mu'_y = 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Lấy đạo hàm hai vế của cả hai phương trình theo x và y ta được

$$\begin{aligned} &\mu f''_{xy} + \mu'_x f'_y + \mu'_y f'_x + \mu''_{xx} + f\mu''_{xy} = 0, \\ &\mu f''_{yy} + 2\mu'_y f'_y + \mu''_{xy} + f\mu''_{yy} = 0, \\ &\mu f''_{xx} + 2\mu'_x f_x + f\mu''_{xx} - \mu''_{xy} = 0, \\ &\mu f''_{xy} + \mu'_x f'_y + \mu'_y f'_x + f\mu''_{xy} - \mu''_{yy} = 0. \end{aligned} \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta có một hệ phương trình đại số tuyến tính gồm 6 phương trình và 6 ẩn số là μ, $\mu'_x, \mu'_y, \mu''_{xx}, \mu''_{xy}, \mu''_{yy}$. Để cho hệ tổ hợp có một nghiệm không tầm thường thì điều kiện là định thức của nó bằng không :

$$\begin{vmatrix} f'_y & 1 & f & 0 & 0 & 0 \\ f'_x & f & -1 & 0 & 0 & 0 \\ f''_{xy} & f'_y & f'_x & 1 & f & 0 \\ f''_{xx} & 2f'_x & 0 & f & -1 & 0 \\ f''_{xy} & f'_y & f'_x & 0 & f & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Khai triển ta nhận được điều kiện cho hàm f(x, y) là

$$(1 + f^2)(f''_{xx} + f''_{yy}) = 2f(f'^2_x + f'^2_y).$$

738. Có mấy bước chứng minh sau đây.

a) Xây dựng φ_1, φ_2. Xét tập hợp các phương trình

$$y'_n = f_n(x, y_n),$$

$$y_n(x_o) = y_o\ ;\ n = 1, 2, \dots\ ;\ x \in (a\ ;\ a')\ ;$$

trong đó $f_n(x, y_n) = f(x, y_n) + \dfrac{1}{n}$. Xét dãy nghiệm $\{y_n(x)\}$ (tồn tại do định lí Pêanô). Nó có tính liên tục đồng bậc do giả thiết giới nội của f và dùng công thức số gia hữu hạn Lagrănggiơ. Cũng dễ thấy họ hàm đó bị chặn đều trên mọi đoạn hữu hạn (chứa x_o) nằm trong (a ; a'). Áp dụng bổ đề Acxela sẽ có một dãy con $\{y_{n_k}(x)\} \subset \{y_n(x)\}$ hội tụ đều, chẳng hạn

$$y_{n_k}(x) \rightrightarrows \varphi_2(x).$$

Kiểm chứng lại rằng $\varphi_2(x)$ là nghiệm của phương trình đã cho thoả mãn điều kiện ban đầu $\varphi_2(x_o) = y_o$ (bằng cách qua giới hạn) và nó chính là nghiệm lớn nhất, tức là nếu $y = y(x)$, $y(x_o) = y_o$, là một nghiệm bất kì thì $y(x) \le \varphi_2(x)\ \forall x$ (chẳng hạn bằng phản chứng).

Để có φ_1, ta lập các phương trình

$$y'_n = f(x, y_n) - \frac{1}{n}$$

$$y_n(x_o) = y_o,\ n = 1, 2, \dots$$

b) Gọi miền con của G nằm giữa hai đường cong $y = \varphi_1(x)$ và $y = \varphi_2(x)$ là G_1. Để chứng minh tính bị lấp đầy của G_1, ta lấy một điểm bất kì $(x ; y) \in G_1$ rồi áp dụng, kể từ đầu mút x, định lí Pêanô liên tiếp trên $[x_o ; x]$ (hoặc $[x ; x_o]$) và chú ý tính chất cực trị của $\varphi_i(x)$ ta sẽ có một đường cong tích phân qua hai điểm $(x_o; y_o)$ và $(x ; y)$. Nếu có một đường cong tích phân đi ra ngoài G_1 thì sẽ mâu thuẫn với tính cực trị của $\varphi_i(x)$.

739. $x = \sin t - 2t,\ y = \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + (C_1 - 2 - t^2)\sin t +$
$$+\left(-2C_1 + \frac{1}{2}\right)t + \frac{2}{3}t^3 + C_2.$$

740. $y = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin t}{t}(x - t)^2 dt + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

741. $x = e^{-t} + t,\ y = \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} - 1 + C_1\right)e^{-t} + \frac{t^3}{6} + C_1t + C_2.$

742. $x = \sin t,\ y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + C_1\sin t + C_2$ khi $\cos t > 0$; $x = -\sin t,$

$y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t - C_1\sin t + C_2$ khi $\cos t < 0$.

743. $y = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$

744. $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$.

745. $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$; $y = \pm x + C$.

746. $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2.$

747. $y = C_1\mathrm{tg}(C_1x + C_2)$; $\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 3C_1x + C_2$; $y(C - x) = 1$, $y = C$.

748. $C_1y = \pm\sin(C_1x + C_2)$; $C_1y = \pm\mathrm{sh}(C_1x + C_2)$; $y = C + x$.

749. $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2.$

750. $y = C_3 - (x + C_1)\ln C_2(x + C_1)$; $y = C_1x + C_2$.

751. $2y = C_1\cos 2x + (1 + 2C_1)x^2 + C^2x + C_3.$

752. $y = -C_1x + (C_1^2 + 1)\ln|C_1 + x| + C_2.$

753. $y = \frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2$, $y = \frac{ex^2}{2} + C$.

754. $y = C_1x^2 + C_2$. **756.** $y = -\sqrt{1-x^2} + 2$.

755. $y = \pm a.\arcsin(C_1e^{x/a}) + C_2$.

757. $y = C_1[1 \pm \mathrm{ch}(x + C_2)]$; $y = Ce^{\pm x}$.

758. $y = C_1\frac{x^3}{3} - C_1^2x + C_2$; $y = \frac{x^3}{12} + C$.

759. $x = C_1p + 3p^2$, $y = \frac{12}{5}p^5 + \frac{5}{4}C_1p_4 + C_1^2\frac{p^3}{6} + C_2$; $y = C$.

760. $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$. **761.** $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2x + C_3$.

762. $e^y\sin^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2$; $e^y\mathrm{sh}(C_1x + C_2) = 2C_1^2$; $e^y(x + C)^2 = 2$.

763. $3C_1y = (x - C_1)^3 + C_2$; $y = C$; $y = C - 2x^2$.

764. $y = C_1\frac{x^3}{6} - C_1^3\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$; $y = \pm\frac{8}{315}x^3\sqrt{3x} + C_1x + C_2$.

765. $\ln|y^2 + C_1 \pm \sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 1}| = 2x + C_2$; $y = \pm1$.

766. $x = C_1e^p - 2p - 2$, $y = C_1(p-1)e^p - p^2 + C_2$.

767. $y = C_1(x\sqrt{x^2-1} - \ln|x + \sqrt{x^2-1}) + x^2 + C_2$;

$y = C_1(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + x^2 + C_2$.

768. $y\ln|y| + x + C_1y + C_2 = 0$, $y = C$.

769. $(\pm4\sqrt{y} + C_1)^{3/2} - 3C_1(\pm4\sqrt{y} + C_1)^{1/2} = \pm12x + C_2$.

770. $2C_1y = (\pm C_1x + C_2)^2 + 1$. **771.** $(C_1y - 1)^{3/2} = \pm\frac{3C_1}{2}x + C_2$.

772. $x = 3C_1p^2 + \ln C_2p$, $y = 2C_1p^3 + p$; $y = C$.

773. $12(C_1y - x) = C_1^2(x + C_2)^3 + C_3$.

774. $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1)\mathrm{arctg}C_1x - C_1x + C_2$; $2y = k\pi x^2 + C$, $k = 0, \pm1, \pm2...$

775. $C_1^2y + 1 = \pm\mathrm{ch}(C_1x + C_2)$; $C_1^2y - 1 = \sin(C_1x + C_2)$; $2y = (x + C)^2$; $y = 0$.

776. $x = u - \ln|1 + u| + C_2$, với $u = \pm\sqrt{1 + 4C_1y}$; $y = C$; $y = Ce^{-x}$.

777. $y = C_2 - \ln\left|\cos\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)\right|$.

778. $y = \frac{x^2}{2}\int_1^x \frac{e^t}{t}dt - \frac{x+1}{2}e^x + C_1x^2\ln|x| + C_2x^2 + C_3x + C_4$.

779. $y = C_2e^{C_1x^2}$.

780. $y = C_2(x + \sqrt{x^2 + 1})C_1$.

781. $\ln C_2y = 4x^{5/2} + C_1x$; $y = 0$.

782. $y^2 = C_1x^3 + C_2$.

783. $y = C_2xe^{-C_1/x}$.

784. $y = C_2|x|^{C_1 - \frac{1}{2}\ln|x|}$

785. $\ln|y| = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b} + \frac{C_1}{b^2}\ln|C_1 + b\sqrt{a^2 - x^2}| + C_2$.

786. $y = C_2\exp\left(\frac{x}{2C_1} + \frac{C_1}{2x}\right)$.

787. $y = C_2\left|\frac{x}{x + C_1}\right|^{1/C_1}$: $y = C$; $y = Ce^{-1/x}$.

788. $|y|^{C_1^2+1} = C_2\left(x - \frac{1}{C_1}\right)|x + C_1|^{C_1^2}$; $y = C$.

789. $y = C_2x(\ln C_1x)^2$; $y = Cx$.

790. $4C_1y^2 = 4x + x(C_1\ln C_2x)^2$.

791. $\ln|y| = \ln|x^2 - 2x + C_1| + \int\frac{2dx}{(x-1)^2 + C_1 - 1} + C_2$; $y = C$.

792. $y = -x\ln(C_2\ln C_1x)$; $y = Cx$.

793. $\frac{y}{x} = C_2 - 3\ln\left|\frac{1}{x} - C_1\right|$; $y = Cx$.

794. $x^2y = C_1\text{tg}(C_1\ln C_2x)$, $C_2(x^2y + C_1)|x|^{2C_1} = x^2y - C_1$; $x^2y\ln Cx = -1$.

795. $4(C_1y - 1) = C_1^2\ln^2C_2x$.

796. $C_1y = x^{3/2}(C_2x^{C_1} + 2)$; $y = Cx^{3/2}$; $y = -2x^{3/2}\ln Cx$.

797. $2C_2x^2y = (C_2x - C_1)^2 - 1$; $xy = \pm1$.

798. $2C_1C_2\,y = C_2^2|x|^{2+C_1} + |x|^{2-C_1}$.

799. $y = C_2 x\, e^{-C_1/x}$.

800. $\ln|y| = C_1\left[x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})\right] + C_2$.

801. $y\ln y + \ln x + C_1 y + C_2 = 0$. **802.** $y = x\arcsin(C_2x) + C_1x$.

803. $y = x^2\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x + C_1\ln x + C_2\right)$.

804. $y = \sqrt{C_1}\,\mathrm{tg}(\sqrt{C_1}x + C_2)\left(-\frac{\pi}{2} < \sqrt{C_1}x + C_2 < \frac{\pi}{2}\right)$.

805. $\int e^{-y^2/2}dy = C_1x + C_2$. **806.** $\int \frac{dy}{\ln(C_1y)} = x + C_2$.

807. $\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln|y + \sqrt{y^2 + C_2}| = x + C_3$ hoặc $y = Ae^{Cx} + Be^{-Cx}$.

808. $C_2y^2 - C_1 = C_2^2(x + C_3)^2$; $y = C$.

809. $C_1y = \ln|C_1 + C_2| + C_3$; $y = C_1x + C_2$.

810. $C_1y - 1 = C_2e^{C_1x}$; $y = C - x$; $y = 0$.

811. $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2} + C_3x + C_4$; $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$.

812. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$. **813.** $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2$.

814. $y = x(C_2 + x + C_1\ln|x|)$. **815.** $y = e^{-\sin x}(C_2 + C_1\int e^{\sin x}dx)$.

816. $y^2 = x^2 + C_1x + C_2$. **817.** $y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C_2\right) - 1$.

818. $y = C_1\mathrm{tg}(C_1\ln C_2x)$; $C_2(y + C_1)|x|^{2C_1} = y - C_1$; $y\ln Cx = -1$.

819. $y = 4C_1\mathrm{tg}(C_1x^2 + C_2)$; $2\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = C_1x^2 + C_2$; $y(C - x^2) = 4$; $y = C$.

820. $y = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 1$. **821.** $y = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^t}{t}(x - t)^2dt$.

822. $y = -\sqrt{1-x^2} + 2$.

823. $y = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{x}{2}+1\right)^3 - 1\right] (x \geq -2)$,

$y = -\frac{2}{3}\left[\left(-\frac{x}{2}+1\right)^3 - 1\right] (x \leq 2)$; $y = \frac{x^3}{12}$ $(x \geq 0)$, $y = \frac{x^3}{12}$ $(x \leq 0)$, $y = 0$.

824. $y = x^2 - x$, $y = -x^2 - x$; $y = 0$, $y = \frac{x^3}{3}$.

825. $(3 - x)y^5 = 8(x + 2)$.

826. $y(x + 2) = -x - 6$.

827. $(1 - \ln x)^2 y = x^2$.

828. $y = 3\mathrm{th}^2 \frac{x\sqrt{3}}{2} - 2$.

829. $\ln\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 2x + 2$.

830. $y = 3\ln\frac{3}{|x|}$ $(x < 0)$.

831. $y = 1 + \mathrm{tg}^2 x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

832. $y = y_0'' \int_0^x e^{-t^2}(x - t)dt + y_0'x + y_0$.

833. $y = -x + 1$.

834. $y = 1 - e^x$, $y = -1 + e^{-x}$.

835. $1 + y'^2 = kyy''$; $y = \pm\frac{1}{C_1}\mathrm{ch}(C_1x + C_2)$ khi $k = 1$.

Chỉ dẫn : Tích phân phương trình $y'^2 + 1 = C_1^2 y^2$ bằng cách đặt $y = \frac{1}{C_1}$ cht ; $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$ khi $k = -1$; $2C_1y = (\pm C_1x + C_2)^2 + 1$ khi $k = 2$; $x = C_1(\theta - \sin\theta) + C_2$, $y = C_1(1 - \cos\theta)$ khi $k = -2$.

Chỉ dẫn : Tích phân phương trình $y(1 + y'^2) = C_1$ bằng cách đặt $y' = \mathrm{cotg}t$.

836. $y'' = \frac{1}{ky^3}$; $kC_1y^2 = C_1^2(x + C_2)^2 + k$.

837. $y = C_2 - k\ln\cos\left(\frac{x}{k} + C_1\right)$.

838. $\frac{y' - x^2}{y^2} = C_1$; $y = \frac{x^3}{3}$.

839. $y' = \frac{y^2}{2} + C_1x + C_2$; $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$.

840. Viết $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}\dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$ ta có $\dot{\varphi}\dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\sin\varphi$ hay $\dfrac{\dot{\varphi}^2}{2} = \cos\varphi + C$.

Để xác định C ta lấy $\varphi(0) = \varphi_o$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, trong đó φ_o là một giá trị nào đó xác định sau. Từ đó

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_o}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = 2dt.$$

Bằng phép đặt

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\sin\alpha,\ k = \sin\frac{\varphi_o}{2},$$

ta có phương trình

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} = dt.$$

Từ đó

$$\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}} = t.$$

Để tránh tích phân eliptic ở vế trái ta lấy $k = 1$, tức là $\varphi_o = \pi$. Tích phân phương trình ứng với $k = 1$, và trở lại biến cũ ta nhận được

$$\ln tg\left(\frac{\varphi_o(t)}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = t.$$

Quả nhiên khi $t \to +\infty$ thì $\varphi_o(t) \to \pi$. Như vậy nghiệm riêng $\varphi = \varphi_o(t)$ thoả mãn điều kiện ban đầu

$$\varphi_o(0) = \varphi_o = \pi,\ \dot{\varphi}_o(0) = 0$$

sẽ thoả mãn

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_o(t) = \pi.$$

841. $y = C_1 + C_2e^{2x}$.

842. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x/2}$.

843. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

844. $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

845. $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

846. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

847. $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos x\sqrt{3} + C_3\sin x\sqrt{3})$.

848. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$.

849. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

850. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

851. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x}$.

852. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$.

853. $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + C_4e^{-2x}$.

854. $y = C_1e^{-2x} + e^{x}(C_2\cos\sqrt{3}\,x + C_3\sin\sqrt{3}\,x)$.

855. $y = C_1e^{2x} + C_2\cos 3x + C_3\sin 3x$.

856. $y = C_1e^{x} + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

857. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.

858. $y = e^{x\sqrt{3}}(C_1\cos x + C_2\sin x) + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x +$
$+ e^{-x\sqrt{3}}(C_5\cos x + C_6\sin x)$.

859. $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$.

860. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.

861. $y = e^{x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-x}(C_3\cos x + C_4\sin x)$.

862. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x)$.

863. $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

864. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x$.

865. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos x\sqrt{3} + C_4\sin x\sqrt{3}$.

866. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x$.

867. $y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x) +$
$+ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x)$.

868. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$
$+ e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

869. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{x}{2} + C_4\sin\frac{x}{2}\right) +$

$+ e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(C_5\cos\frac{x}{2} + C_o\sin\frac{x}{2}\right).$

870. $y = C_1e^{3x} + e^{2x}(C_2 + C_3x).$

871. $y = e^x(C_1 + C_2x) + e^{-x}(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x).$

872. $y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3\cos x + C_4\sin x.$

873. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x.$

874. $y = \exp\left(-\frac{x}{2}\right).\left[(C_1 + C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

875. $y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x.$

876. $y = -x^2 + x - 3 + C_1e^x + C_2e^{-x}.$

877. $y = x^3 + x + C_1 + C_2e^{4x}.$

878. $y = 3x + C_1 + C_2e^{-x}.$

879. $y = \frac{1}{2} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$

880. $y = 2x^2e^x + e^x(C_1 + C_2x).$

881. $y = 2xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}.$

882. $y = e^x - 1 + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$

883. $y = \frac{1}{3}xe^{3x} + 3x^2 + 2x + C_1 + C_2e^{3x}.$

884. $y = 3xe^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + C_1e^x + C_2e^{2x}.$

885. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + (1/5)e^{4x}.$

886. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$

887. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x - 2)e^x.$

888. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x.$

889. $y = C_1e^x + C_2e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)e^{2x}.$

890. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^x - \frac{x}{5}e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x}.$

891. $y = \frac{1}{2}x^3e^{-2x} + e^{-2x}(C_1 + C_2x + C_3x^2).$

892. $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$

893. $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1e^x + C_2 + C_3x.$

894. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0{,}1x - 0{,}12)\cos x - (0{,}3x + 0{,}34)\sin x.$

895. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 0{,}1\sin x + 0{,}3\cos x.$

896. $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 0{,}25e^{2x} + 0{,}1\cos 2x + 0{,}05\sin 2x.$

897. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x\right).$

898. $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{4}\right)\cos x + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\sin x.$

899. $y = C_1 + C_2e^{5x} - 0{,}2x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}048x + 0{,}02(\cos 5x - \sin 5x).$

900. $y = -\sin x + 2\cos x + C_1e^x + C_2e^{-x}.$

901. $y = \frac{1}{2}(e^x + x\sin x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$

902. $y = -2\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x.$

903. $y = 3\sin 2x - 2\cos 2x + e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

904. $y = \frac{1}{2}x\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x + C_1\cos x + C_2\sin x.$

905. $y = e^x(x\cos x + \sin x) + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$

906. $y = x^2e^x\cos x + e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$

907. $y = x^2\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x.$

908. $y = \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{1}{5}x\cos 2x + \frac{2}{5}x\sin 2x + C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x.$

909. $y = x\cos x + 2xe^{-x} - 1 + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$

910. $y = -\frac{x^2}{8}\cos x + (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x.$

911. $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos 2x + C_1e^x + C_2e^{-x}.$

912. $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$

913. $y = -\frac{1}{30}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 2x + C_1\cos x + C_2\sin x.$

914. $y = \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-x}}{x}dx - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{x}dx + C_1e^x + C_2e^{-x}.$

915. $y = \frac{1}{x} + e^x(C_1 + C_2x).$

916. $y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2).$

917. $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x.$

918. $y = e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + C_1 + C_2x\right).$

919. $y = \frac{1}{4}\cos 2x\ \ln|\cos 2x| + \frac{x}{2}\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$

920. $y = \frac{e^x}{x} + C_1 + C_2e^x.$

921. $y = \cos x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C_1\cos x + C_2\sin x.$

922. $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$

923. $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x.$

924. $y = \frac{1}{\cos x} + \cos x\ln|\cos x| + \sin x\,(-\mathrm{tg}x + x) + C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x.$

925. $y = -4\sqrt{x} + C_1e^x + C_2e^{-x}.$

926. $y = \sqrt{\sin 2x} + C_1\cos x + C_2\sin x.$

927. $y = (7 - 3x)e^{x-2}.$

928. $y = 2 + e^{-x}.$

929. $y = 2\mathrm{ch}x.$

930. $y = 0.$

931. $y = \sin x.$

932. $y = C\sin x.$

933. $y = e^x.$

934. $y = 0.$

935. $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x.$

936. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e^{-1}.$

937. $y = e^{-x}(x - \sin x).$

938. $y = (x - 1)(e^{2x} - e^{-x}).$

939. $y = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$. **940.** $y = \frac{3}{2}x^2e^{-2x}$.

941. $y = x - x\sin x - 2\cos x$.

942. Có thể thử lại trực tiếp bằng cách thay vào phương trình hoặc dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrăngiơ và biến đổi để đưa về biểu thức cần thiết.

943. $0 < h < 1$.

944. $q < 0$.

945. $p > 0, q > 0$.

946. $p \geq 0, q > 0$.

947. $b > 0, a \leq -2\sqrt{b}$.

948. $a^2 < 4b$.

949. $a > 2, b > a - 1$.

950. $a = 2\sqrt{b}$.

951. $p = 0, q > 0$.

952. $\omega \neq \pm k$.

953. $y_o(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s)ds = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 z} - e^{\lambda_2 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(t-z)dz$;

$y_o(t) \leq \frac{m}{b}$.

Hướng dẫn : Bằng phương pháp biến thiên hằng số ta có biểu thức cho nghiệm tổng quát :

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \int_{t_o}^{t} \frac{e^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s)ds - \int_{t_o}^{t} \frac{e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s)ds \quad (*).$$

Chú ý rằng từ giả thiết, các tích phân sau hội tụ :

$$\int_{t_o}^{-\infty} e^{-\lambda_i s} f(s)ds, \; (i = 1, 2)$$

và

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\lambda_i t} = +\infty, \; (i = 1, 2).$$

Vì thế để cho $y(t)$ bị chặn khi $t \to -\infty$, chẳng hạn ta có thể chọn C_1 và C_2 như sau :

$$C_1 = -\int_{t_o}^{-\infty} \frac{e^{-\lambda_1 s}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s)ds,$$

$$C_2 = -\int_{t_o}^{-\infty} \frac{e^{-\lambda_2 s}}{\lambda_2 - \lambda_1} f(s)ds,$$

tức là chọn để sao cho các hệ số của $e^{\lambda_i t}$ triệt tiêu khi $t \to -\infty$. Thay các giá trị đó của C_i vào biểu thức của nghiệm tổng quát ta được nghiệm riêng duy nhất

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{\lambda_1(t-s)} - e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(s)ds = \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 z} - e^{\lambda_2 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(t-z)dz. \qquad (**)$$

Dễ thấy nghiệm vừa tìm được $y = y_0(t)$ là giới nội trên toàn trục số

$$|y_0(t)| \le \frac{m}{b},\ \forall t \in (-\infty ; +\infty),$$

vì

$$\frac{m}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_0^{\infty} (e^{\lambda_1 z} - e^{\lambda_2 z})dz = \frac{m}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{m}{b}$$

theo định lí Viét. Mặt khác :

a) Nghiệm tổng quát của phương trình từ biểu thức (*) là

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \int_0^{t-t_0} \frac{e^{\lambda_1 z} - e^{\lambda_2 z}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(t-z)dz.$$

Chú ý rằng $\lambda_i < 0$ và $|f(t)| \le m$ sẽ thấy ngay rằng với mọi C_1, C_2, nghiệm $y(t)$ dần đến nghiệm $y_0(t)$ ở (**) khi $t \to +\infty$.

b) Tính tuần hoàn của $y_0(t)$ dễ thấy ở (**) nếu f tuần hoàn.

954. $I = \frac{V}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]$. **955.** $I = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.

956. $I = \frac{q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$.

957. $I = A\sin(\omega t - \varphi)$,

$$A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}.$$

958. Có thể chuyển sang viết dưới dạng hệ

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{f}(t),$$

trong đó A = const là $n \times n$ ma trận, $\vec{y}, \vec{f}$ là các vectơ n chiều. Sau đó dùng công thức của nghiệm dạng

$$\vec{y}(t) = X(t)\vec{y}(0) + \int_0^t X(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

trong đó X(t) là ma trận nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất tương ứng. Trong trường hợp này $X(t) = e^{At}$, $\vec{y}(0) = \vec{0}$ và chú ý giả thiết λ là số lớn nhất trong các phần thực của các nghiệm đặc trưng trong khi đánh giá.

959. $y = C_1x^3 + C_2x^{-1}$. **960.** $C_1\sqrt{|x|} + \dfrac{C_2}{\sqrt{|x|}}$.

961. $y = x^2(C_1 + C_2\ln|x|)$.

962. $y = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|)$.

963. $y = \sqrt{|x|}\left[C_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right]$.

964. $y = x(C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)$. **965.** $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x^3$.

966. $y = C_1 + x(C_2 + C_3\ln|x|)$.

967. $y = \dfrac{1}{x^2}\left[C_1\cos(3\ln|x|) + C_2\sin(3\ln|x|)\right]$.

968. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. **969.** $y = C_1(x + 1) + C_2(x + 1)^2$.

970. $y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3$.

971. $y = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x| + 3)$.

972. $y = (2x + 1)\ln|2x + 1| + C_1(2x + 1) + C_2(2x + 1)^2$.

973. $y = x\ln^3x + x(C_1 + C_2\ln x)$.

974. $y = C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|) + 2x$.

975. $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0{,}1 \cos\ln x - 0{,}3 \sin\ln x$.

976. $y = -\ln x\cos\ln x + C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$.

977. $y = (x - 2)^2C_1 + C_2\ln|x - 2| + x - 1{,}5$.

978. $y = C_1\left(x + \dfrac{3}{2}\right) + C_2\left|x + \dfrac{3}{2}\right|^{3/2} + C_3\left|x + \dfrac{3}{2}\right|^{1/2}$.

979. $y'' + \dfrac{1}{(ax + b)^2}y = 0$.

980. Bằng phép thế biến độc lập $t = \varphi(x)$ ta có phương trình mới theo biến t.:

$$y''_{tt} + \frac{\varphi''_{xx} + p(x)\varphi'_x}{\varphi'^2_x} y'_t + \frac{q(x)}{\varphi'^2_x} y = 0.$$

Để cho các hệ số là các hằng số thì ta phải có hai số α và β nào đó sao cho

$$\varphi''_{xx} + p\varphi'_x = \alpha\varphi'^2_x,$$
$$q = \beta\varphi'^2_x.$$

Từ đẳng thức sau tìm được φ'_x và bằng cách đạo hàm cũng đẳng thức này (với giả thiết q(x) có đạo hàm) theo x tìm được φ''_{xx}. Thay vào đẳng thức đầu sẽ nhận được điều kiện cần tìm

$$p(x) = a[q(x)]^{\frac{1}{2}} \frac{q'(x)}{2q(x)}, \; a = \text{const nào đó.}$$

Phương trình Ơle

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

thoả mãn điều kiện trên với a = 2.

Chú ý rằng khi cho $p \equiv 0$ thì từ bài toán 980 suy ra bài toán 979. Thực vậy, hàm q(x) thoả mãn hệ thức

$$a\sqrt{q} = \frac{q'}{2q}$$

chính là

$$q(x) = \frac{1}{(kx + l)^2}$$

với k, *l* là các hằng số tuỳ ý.

981. $y = C_1 e^{2\sqrt{|x|}} + C_2 e^{-2\sqrt{|x|}}$.

982. $y = C_1 \cos 2\sqrt{|x|} + C_2 \sin 2\sqrt{|x|}$.

983. $y = C_1 \cos \text{arctg} x + C_2 \sin \text{arctg} x$. **984.** $y = C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x$.

985. $y = C_1 \cos(m \ln|\cos x|) + C_2 \sin(m \ln|\cos x|)$.

986. $y = -\frac{2}{a^2} + C_1 \frac{e^{ax}}{x} + C_2 \frac{e^{-ax}}{x}$.

987. $y = \frac{1}{2} e^x + C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 \frac{e^{-x}}{x}$.

988. $y = x\left(C_1 \cos\frac{k}{x} + C_2 \sin\frac{k}{x}\right)$.

989. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right]$.

990. $y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1|x|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + C_2|x|^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$.

993. a) Không ; b) Không.

994. Có.

995. Có.

996. Có,

997. Có.

998. Không.

999. Không.

1000. Có.

1001. Không.

1002. $x^2y'' + xy' - y = 0$.

1003. $x^2y'' - xy' + y = 0$.

1004. $x^2y'' - xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

1005. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.

1006. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$.

1007. Độc lập tuyến tính.

1008. Độc lập tuyến tính. Phương trình không thoả mãn các điều kiện của định lí.

1009. Vì $W(x_o) = \begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) \\ y_1'(x_o) & y_2'(x_o) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x_o) & y_2(x_o) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

1010. Có thể nếu $n \geq 2$; b) Có thể nếu $n \geq 3$.

1011. $n \geq 2$.

1012. $y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)$.

1013. $xy = C_1e^{-x} + C_2e^x$.

1014. $y = C_1\text{tg}x + C_2(1 + x\text{tg}x)$.

1015. $y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x + 1}$.

1016. $y = C_1\sin x + C_2\left(2 - \sin x.\ln\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$.

1017. $y = C_1 + (C_2x)e^{-x^2}$.

1018. $y = C_1x + C_2e^x + C_3e^{-x}$.

1019. $y = C_1x + C_2x^{-1} + C_3(x\ln|x| + 1)$.

1020. $y = \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2}{x-1} + x$. **1021.** $y = C_1(x^2 + 1) + C_2x^{-1} + 2x$.

1022. $\int p(x)dx \to +\infty$ khi $x \to +\infty$. Dùng công thức Ôxtrôgratxki – Liuvin.

1023. Chứng minh bằng phản chứng. Chú ý : Từ $y(x_o) > 0$ (x_o là điểm đạt cực đại), $y'(x_o) = 0$, và

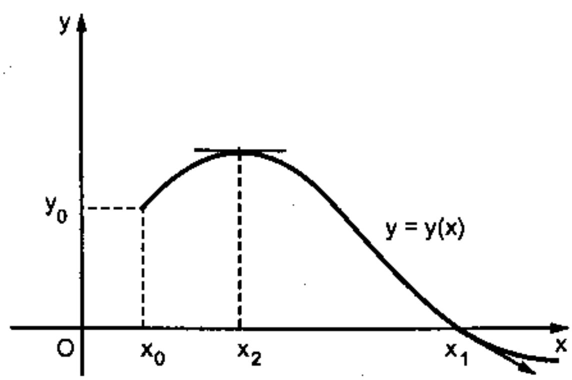
$$y''(x_o) = -q(x_o)\,y(x_o) > 0,$$

ta đi đến mâu thuẫn.

1024. Giả thiết phản chứng sẽ thấy Vrônxki bằng không ít nhất tại một điểm : mâu thuẫn !

1025. Nếu ngược lại sẽ có một điểm x_1 sao cho $y(x_1) = 0$, $y(x) > 0$ khi $x_o \le x < x_1$.

Dĩ nhiên $y'(x_1) \le 0$. Nếu $y'(x_1) = 0$ thì do tính duy nhất nghiệm $y(x) \equiv 0$, mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $y'(x_1) < 0$ thì tồn tại điểm x_2 thuộc $(x_o ; x_1)$ sao cho $y'(x_2) = 0$, $y'(x) > 0$ với mọi $x \in [x_o ; x_2]$. Chú ý rằng trên $[x_o ; x_2]$ ta có



Hình 39

$$y''(x) = -q(x)y(x) \ge 0$$

tức là $y'(x)$ tăng trên đó. Vì thế

$$y'(x) \ge y'(x_o) > 0, \forall x \in [x_o ; x_2].$$

Nhưng tại $x = x_2$

$$0 = y'(x_2) \ge y'(x_o) > 0$$

mâu thuẫn.

1026. Dễ thấy nếu $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình thoả mãn điều kiện ban đầu $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ thì $y = y(-x)$ cũng là một nghiệm của phương trình với cùng điều kiện ban đầu ấy (bằng cách thử trực tiếp). Do tính duy nhất nghiệm

$$y(x) \equiv y(-x)$$

tức $y = y(x)$ là một hàm chẵn khắp nơi.

Vậy để kết thúc, còn phải chứng minh

$$y(x) > 0, \forall x \geq 0.$$

Nếu ngược lại sẽ có một giá trị $x = x_o$ sao cho $y(x_o) = 0$, $y(x) > 0$, $\forall x \in [0 ; x_o)$. Từ đó

$$y''(x) = x^2 y(x) \geq 0, \forall x \in [0 ; x_o].$$

Suy ra

$$y'(x) \geq y'(0) = 0$$

tức là $y = y(x)$ là một hàm tăng trên $[0 ; x_o)$. Do tính liên tục

$$y(x_o) \geq y(0) = 1,$$

mâu thuẫn với $y(x_o) = 0$

Dĩ nhiên thay cho hệ số x^2 ta có thể lấy một hàm chẵn tuỳ ý $\varphi(x)$ với $\varphi(x) > 0$ khi $x > 0$.

1027. $\pi/\sqrt{m}$; $[(b - a)\sqrt{m} / \sqrt{\pi}]$ không điểm hoặc cộng thêm 1 (dấu móc vuông kí hiệu phần nguyên).

1028. $0,33 < d < 0,5$. **1029.** $0,49 < d < 1$. **1030.** $0,15 < d < 1,2$.

1031. Trước hết dễ thấy rằng tập hợp các không điểm là vô hạn và có điểm tụ vô hạn, bằng cách so sánh (chẳng hạn) với phương trình

$$z'' + mz = 0,$$

trong đó $m = \frac{1}{2}q(x_1) > 0$, chú ý $q(x) \geq q(x_1)$, $\forall x \geq x_1$. Mặt khác với phương trình

$$z'' + q(x)z = 0$$

mà $q(x)$ dương và liên tục trên $[a ; b]$, thì khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp d của một nghiệm bất kì của nó đều thoả mãn đánh giá :

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < d < \frac{\pi}{\sqrt{m}},$$

trong đó

$$m = \min_{x\in[a;b]} q(x), M = \max_{x\in[a;b]} q(x).$$

Điều đó dễ thấy do định lí so sánh hoặc có thể xem "Phương trình vi phân" tập I của Hoàng Hữu Đường, Võ Đức Tôn, Nguyễn Thế Hoàn, trang 180.

Bây giờ xét trên $[x_n ; x_{n+1}]$:

$$q(x_{n+1}) \geq q(x) \geq q(x_n),$$

do đó

$$\frac{\pi}{\sqrt{q(x_n)}} < d_n = x_{n+1} - x_n > \frac{\pi}{\sqrt{q(x_{n+1})}},\ n = 1, 2...$$

Nghĩa là

$$x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1},\ n = 1, 2,...$$

1032. Áp dụng nguyên lí kẹp cho

$$\frac{\pi}{\sqrt{q(x_n)}} > x_{n+1} - x_n > \frac{\pi}{\sqrt{q(x_{n+1})}}.$$

1033. Chỉ cần xét với $x \in [\pi^2 ; 25]$. Như vậy

$$\pi^2 \le q(x) = x \le 25.$$

Do đó khoảng cách giữa các không điểm liên tiếp của một nghiệm bất kì trên $[\pi^2 ; 25]$ thoả mãn đánh giá

$$1 > d > \frac{\pi}{5}.$$

Chú ý $[\pi^2 ; 25] \supset [10 ; 25]$, nhưng đoạn thẳng sau cùng có độ dài là 15, như vậy trên $[\pi^2 ; 25]$ và dĩ nhiên trên cả $[-25 ; 25]$ có ít nhất là 15 không điểm. Bạn đọc có thể tiếp tục cho một đánh giá sát hơn nữa với chú ý rằng trên $(-25 ; 0)$ nghiệm không dao động vì $x < 0$, sau đó xét thêm trên $[0 ; \pi^2]$.

1034. Hãy chứng tỏ đạo hàm của tỉ số âm : Nhân phương trình đầu với z, phương trình sau với y và trừ các vế tương ứng ta có

$$y''z - z''y = (Q - q)yz > 0 \text{ khi } x \in (x_o ; x_1).$$

Nhưng

$$(y'z - yz')' = y''z - z''y,$$

Từ đó suy ra tử số của phân thức

$$\left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y - zy'}{y^2}$$

là một hàm giảm thực sự. Xét tại $x = x_o$, theo điều kiện ban đầu

$$z'(x_o)y(x_o) - z(x_o)y'(x_o) = 0.$$

Như vậy

$(z'y - zy') < 0$, $\forall x \in (x_o ; x_1)$ suy ra $\left(\frac{z}{y}\right)' < 0$, tức là tỉ số $\frac{z(x)}{y(x)}$ đơn điệu giảm thực sự trên khoảng đó.

1035. Phần đầu dùng tính chất duy nhất nghiệm với điều kiện ban đầu

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y'_o$$

và chú ý rằng $y = y_2(x + m\omega)$ cũng là một nghiệm thoả mãn điều kiện ban đầu vừa nói (thử lại trực tiếp vào phương trình và lưu ý rằng $p(x)$ là hàm tuần hoàn, có chu kì ω).

Phần thứ hai. Giả sử $y_1(x)$ là một nghiệm sao cho $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$. Đặt $y'_1(x_1) = y_o$. Chọn $x_3 = x_1 + m_1\omega$, m_1 là số nguyên sao cho $x_3 > x_2$. Nghiệm $y_3(x)$, xác định bởi điều kiện $y_3(x_3) = 0$, $y'_3(x_3) = y'_o$, sẽ có một không điểm thứ hai là $x_4 = x_2 + m_1\omega > x_3$, vì $y_3(x + m_1\omega) = y_1(x)$ (theo phần đầu). Sau đó ta lập nghiệm $y_4(x)$ bằng không tại $x = x_5 = x_1 + m_2\omega > x_4$. Nó có không điểm $x_6 = x_2 + m_2\omega > x_5$ và vân vân. Theo định lí Stuôcm, nghiệm $y_1(x)$ và tất cả các nghiệm khác sẽ có không điểm trên các đoạn $[x_3 ; x_4]$, $[x_5 ; x_6]$,...

1036. $y = \sin x$.

1037. $y = C\sin x$.

1038. $y = \cos x + x$.

1039. $y = \operatorname{ch} x$.

1040. $y = x + e^{-x} - e^{-1}$.

1041. $y = e^x - 2$.

1042. Không có nghiệm.

1043. $y = 2x - \pi + \pi\cos x + C\sin x$, C là hằng số tuỳ ý.

1044. $y = -2e^{-x}$.

1045. $y = e^{-x} - 1$.

1046. $y = 2x^3$.

1047. $y = 3x^2$.

1048. $y = -x^{-3}$.

1049. $a = (2n-1)^2\pi^2$, $n = 1, 2, 3,...$

1050. $G = \sin s\cos x\ (0 \le x \le s)$, $G = \cos s\,\sin x\ (s \le x \le \pi)$.

1051. $G = -\,e^{-s}\operatorname{ch} x\ (0 \le x \le s)$, $G = -\,e^{-x}\operatorname{ch} s(s \le x \le 2)$.

1052. $G = \dfrac{1}{2}\sin|x - s|$.

1053. $G = \dfrac{1}{x} - 1\ (1 \le x \le s)$, $G = \dfrac{1}{s} - 1\ (s \le x \le 3)$.

1054. $G = \dfrac{s^2 - 4}{2s^2}\ (1 \le x \le s)$, $G = \dfrac{x^2 - 4}{2s^2}\ (s \le x \le 2)$.

1055. $G = \dfrac{1 - x^3}{3s^3x}\ (1 \le x \le s)$, $G = \dfrac{1 - s^3}{3s^3x}\ (s \le x \le 2)$.

1056. $G = -x$ $(0 \le x \le s)$, $G = -s$ $(s \le x < +\infty)$.

1057. $G = -\ln x$ $(1 \le x \le s)$, $G = -\ln s$ $(s \le x < +\infty)$.

1058. $G = x(s^3 - 1)/3s^2$ $(0 \le x \le s)$, $G = s(x^3 - 1)/3x^2$ $(s \le x \le 1)$.

1059. $G = -\left(\frac{1}{2}\right)e^{-|x-s|}$.

1060. $G = -\dfrac{x^2}{3s^3}$ $(0 \le x \le s)$, $G = -\dfrac{1}{3x}$ $(s \le x \le +\infty)$.

1061. $a \ne k^2\pi^2$, $k = 1, 2, 3,\ldots$

1062. $\lambda_k = -k^2\pi^2/l^2$, $y_k = \sin(k\pi x/l)$, $k = 1, 2, 3,$

1063. $\lambda_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, $y_k = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$, $k = 1, 2, 3,\ldots$

1064. $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 - \frac{1}{4}$, $y_k = \sqrt{x}\sin\frac{k\pi \ln x}{\ln a}$, $k = 1, 2, 3,\ldots$

1096. Nếu có hai nghiệm khác nhau $y_1(x)$ và $y_2(x)$ thì $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ là một nghiệm không tầm thường của phương trình cấp hai đã cho. Nghiệm $z(x)$ dao động vì

$$z(x_1) = y_2(x_1) - y_1(x_1) = 0,$$

$$z(x_2) = y_2(x_2) - y_1(x_2) = 0.$$

Nhưng theo một định lí quen biết thì điều đó là không thể xảy ra, do $q(x) \le 0$.

Giả sử $b = 0$. Gọi $y = y(x)$ là nghiệm duy nhất của bài toán biên đã cho. Như vậy $y(x_2) = 0$. Dễ thấy $y(x) \ne 0$ với mọi $x \in [x_1 ; x_2]$ vì nếu ngược lại thì $y(x)$ dao động, trái với giả thiết $q(x) \le 0$. Có hai khả năng, hoặc là

$$y(x) > 0, \forall x \in [x_1 ; x_2),$$

hoặc là

$$y(x) < 0, \forall x \in [x_1 ; x_2).$$

Xét trường hợp đầu ta thấy từ

$$y''(x) = -q(x)y(x)$$

suy ra

$$y''(x) \ge 0, \forall x \in [x_1 ; x_2).$$

Như vậy $y'(x)$ không giảm trên $[x_1 ; x_2)$, nên $y'(x) \le y'(x_2)$, $\forall x \in [x_1 ; x_2)$. Nhưng $y'(x_2) \le 0$, vì $y(x) > 0$, $\forall x \in [x_1 ; x_2)$ và $y(x_2) = 0$. Do đó

$$y'(x) \le 0,\ \forall x \in [x_1 ; x_2],$$

tức là $y(x)$ đơn điệu giảm trên $[x_1 ; x_2]$.

Trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

1097. Chú ý rằng hiệu hai nghiệm của phương trình đó là một nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng.

1098. Bằng phép thế hàm phải tìm

$$y = \alpha(x)z = \frac{z}{\sqrt{x}}$$

ta nhận được phương trình tối giản

$$z'' + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)z = 0. \qquad (1)$$

Xét trường hợp $n \neq \pm\frac{1}{2}$. Chú ý rằng

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) = 1.$$

Do đó với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, có một x_o nào đó sao cho với mọi $x > x_o$ thì

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2} < 1 + \varepsilon.$$

Vì thế trong miền $x > x_o$, khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của mọi nghiệm của phương trình (1) thoả mãn đánh giá

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} > d > \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Cho $\varepsilon \to +0$ ta nhận được điều phải chứng minh.

Khi $n = \pm\frac{1}{2}$, $d = \pi$. Thay trực tiếp giá trị đó của n vào (1), giải ra và trở lại hàm cũ y ta có hai nghiệm độc lập tuyến tính (các hàm Betxen) là

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Khoảng cách giữa hai không điểm liên tiếp của chúng dĩ nhiên bằng π.

Riêng trường hợp $|n| > \frac{1}{2}$ có thể áp dụng các bài 1031 và 1032.

1099. *Chỉ dẫn :* Sử dụng phép xấp xỉ liên tiếp để giải các phương trình tích phân sau :

$$\varphi(t) = 1 + \int_a^\infty (t - s)f(s)\varphi(s)ds,$$

$$\psi(t) = t + \int_a^t sf(s)\psi(s)ds + t\int_t^\infty f(s)\psi(s)ds,$$

trong đó a được chọn sao cho

$$\int_a^\infty t\,|\,f(t)\,|\,dt < \frac{1}{2}.$$

1100. Để chứng minh có thể dùng đến kết quả sau (xem "Bài giảng về lí thuyết toán học của sự ổn định" của B. P. Đêmiđôvich, Matscơva 1967, trang 159).

Định luật Lêvinxơn. Giả sử mọi nghiệm của hệ

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

(trong đó A là $n \times n$ – ma trận hằng số) bị chặn trên $[0 ; +\infty)$. Khi đó hệ

$$\dot{y} = [A + B(t)]y, \tag{2}$$

trong đó B(t) liên tục trên $[0 ; +\infty)$ và

$$\int_0^{+\infty} \| B(t) \| \, dt < +\infty,$$

là tương đương tiệm cận với hệ (1), tức là có một phép tương ứng một – một giữa các nghiệm x(t) của (1) và y(t) của (2) sao cho

$$\lim_{t\to\infty} [x(t) - y(t)] = 0.$$

Áp dụng. Chuyển phương trình cấp 2 đã cho về một hệ cấp 2 ta có

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = [A + B(t)]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -r(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dễ kiểm lại rằng ở đây ta có đủ điều kiện để áp dụng định lí Lêvinxơn. Hệ dừng có hai vectơ nghiệm độc lập tuyến tính là

$$\begin{pmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -ie^{-it} \end{pmatrix}.$$

Hai vectơ nghiệm tương ứng theo định lí Lêvinxơn của hệ (3) là

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \dot{\varphi}_1\end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix}\varphi_2\\ \dot{\varphi}_2\end{pmatrix}$$

có các toạ độ đầu φ_1 và φ_2 thoả mãn các điều kiện bài toán.

1101. Giả sử hàm f đạt được cực đại của nó tại t = c. Từ giả thiết ta có c ∈ (a ; b). Theo định lí số gia hữu hạn Lagrăngiơ ta có

$$\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{f(c)}\left[\frac{f(c)-f(a)}{c-a}-\frac{f(b)-f(c)}{b-c}\right]=$$

$$=\frac{f'(\tau_1)-f'(\tau_2)}{f(c)}\le\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{|f''(t)|}{f(c)}dt,$$

với τ_1, τ_2 nào đó : $\tau_1 \in (a ; c)$, $\tau_2 \in (c ; b)$. Để kết thúc chỉ cần lưu ý rằng

$$\frac{4}{b-a}\le\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c},$$

và

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{|f''(t)|}{f(c)}dt<\int_{a}^{b}\frac{|f''(t)|}{f(t)}dt.$$

1102. Nếu $y = y_1(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

thì bằng phép thế $y = y_1z$ ta có

$$y_1z''+(2y_1'+py_1)z'=0. \tag{2}$$

Như vậy hệ (1) có hai nghiệm riêng y_1 và y_2 thoả mãn hệ thức $y_2 = xy_1$ khi và chỉ khi hệ (2) có nghiệm riêng z = x. Thay z = x vào (2) sẽ được

$$y_1=\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right).$$

Thay y_1 vào (1) ta có điều kiện cần tìm

$$q(x)=\frac{1}{4}p^2(x)+\frac{1}{2}p'(x). \tag{3}$$

Nếu điều kiện (3) được thoả mãn thì nhờ phép thế $y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right).z$ ta có phương trình mới

$$z'' = 0,$$

vì $I(x) \equiv 0$ do (3). Do đó biểu thức của nghiệm tổng quát của (1) là

$$y(x) = [C_1 + C_2x]\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right), \tag{4}$$

tức là (1) có thể tích phân được bằng cầu phương.

Lấy $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ ta nhận được nghiệm y_1, lấy $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ ta nhận được nghiệm y_2 và $y_2 = xy_1$.

Thay $p = \frac{1}{x} - 2$ vào (3) ta được

$$q = -\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} + 1,$$

và vào (4) ta được nghiệm tổng quát

$$y(x) = C_1\frac{e^x}{\sqrt{|x|}} + C_2\sqrt{|x|}\,e^x.$$

Với phương trình không thuần nhất, áp dụng phương pháp biến thiên hằng số ta có

$$y(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|x|}}(x+2) + \left[\frac{K_1}{\sqrt{|x|}} + K_2\sqrt{|x|}\right]e^x,$$

trong đó K_i là hằng số tuỳ ý và $\varepsilon = \operatorname{sgn}x$.

Tổng quát. Có thể đặt vấn đề rộng hơn như sau : Tìm điều kiện để hệ (1) có hai nghiệm riêng y_1, y_2 thoả mãn hệ thức $y_2 = \varphi(x)y_1$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm đủ trơn (chẳng hạn đến cấp 3) cho trước. Chứng minh rằng, nếu điều kiện đó được thoả mãn thì hệ (1) có thể tích phân được nhờ một lần cầu phương.

Bằng phương pháp như đã làm, tuy có phức tạp hơn, ta nhận được điều kiện

$$q(x) = \frac{1}{4}p^2(x) + \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}f^2(x) + \frac{1}{2}f(x), \tag{3'}$$

trong đó

$$f(x) = [\ln\varphi'(x)]'.$$

Biểu thức cho nghiệm tổng quát là

$$y(x) = [C_1 + C_2\varphi(x)]\,\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right)}{\sqrt{\varphi'(x)}} \qquad (4')$$

Dĩ nhiên nếu $\varphi(x) = x$ thì $\varphi'(x) = 1$ và (3'), (4') sẽ quy về (3), (4) tương ứng.

1103. Đạo hàm theo x cả hai vế của hệ thức

$$H(x)y'' + K(x)y = C$$

và đem đồng nhất các hệ số tương ứng của phương trình cấp 3 vừa nhận được với phương trình cấp 3 đã cho, sau đó tìm được mối liên hệ chỉ giữa p, q và r như sau :

$$q' + pq = r \text{ nếu } H \not\equiv 0,$$

$$q = p' + \frac{p^3}{3},\ r = \frac{1}{3}(p'' + pp') + q\frac{p^3}{27} \text{ nếu } H = 0.$$

1104. Thế $z = x^2y'' - 2xy' + 2y$ và chú ý rằng $y''' = \dfrac{z'}{x^2}$ sẽ được một phương trình tuyến tính cấp 1 theo z.

1105. Ta phải chứng minh rằng nếu $y = y(x)$ là một nghiệm bất kì của phương trình cấp 2

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = C \qquad (2)$$

thì nó cũng là một nghiệm của phương trình cấp 3

$$y''' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (1)$$

Đạo hàm hai vế của (2) theo x và lưu ý quy tắc đạo hàm một định thức hàm ta có

$$\begin{vmatrix} y & y' & y''' \\ y_1 & y_1' & y_1''' \\ y_2 & y_2' & y_2''' \end{vmatrix} = 0.$$

Nhân cột đầu với q(x), cột thứ hai với p(x) rồi cộng hai cột mới vào cột thứ ba với chú ý rằng y_1, y_2 là hai nghiệm của (1) ta được

$$\begin{vmatrix} y & y' & y''' + p(x)y' + q(x)y \\ y_1 & y_1' & 0 \\ y_2 & y_2' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Từ đó

$$(y_1y_2' - y_1'y_2)(y''' + py' + qy) = 0, \tag{3}$$

nhưng do giả thiết y_1, y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính nên thừa số thứ nhất của (3) khác không tại một điểm, vì nếu ngược lại ta dễ dàng suy ra mâu thuẫn.

Vì vậy nghiệm $y = y(x)$ của (2) thoả mãn (1) :

$$y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(thừa số thứ hai của (3) phải bằng không).

Xét phương trình thuần nhất ứng với (2), tức là phương trình nhận được từ (2) khi cho $C = 0$:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Nếu y_1 và y_2 là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (1) thì chúng cũng là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính (hệ cơ bản) của hệ tuyến tính thuần nhất (4). Bằng phương pháp biến thiên hằng số ta tìm được một nghiệm riêng của (2) là

$$y_3(x) = C\left[y_2\int\frac{y_1dx}{W^2[y_1, y_2]} - y_1\int\frac{y_2dx}{W^2[y_1, y_2]}\right],$$

trong đó C là hằng số đã cho ở (2). Như vậy

$$W[y_3, y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_3 & y_3' & y_3'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = C. \tag{5}$$

Nhưng theo trên y_3 là nghiệm của (1). Do đó ta có ba nghiệm riêng của phương trình cấp 3 (1) là y_1, y_2, y_3 và nếu lấy $C \neq 0$ (chẳng hạn để cho gọn lấy $C = 1$) thì chúng là độc lập tuyến tính do (5).

Tóm lại : Giả sử cho trước phương trình cấp 3 (1). Ta tìm cách xác định hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó là y_1 và y_2. Sau đó ta lập phương trình (2) với $C \neq 0$ (chẳng hạn $C = 1$) và lưu ý y_1, y_2 là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (4). Dùng phương pháp biến thiên hằng số để tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (2) là

$$y_3 = y_2 \int \frac{y_1 dx}{W^2[y_1, y_2]} - y_1 \int \frac{y_2 dx}{W^2[y_1, y_2]}.$$

Lưu ý rằng y_3 cũng là một nghiệm riêng của (1) và y_1, y_2, y_3 độc lập tuyến tính ta có biểu thức cho nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

trong đó C_i là các hằng số tuỳ ý.

Ứng dụng. Giả sử (2) có hai nghiệm riêng y_1, y_2 thoả mãn hệ thức

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = 1. \tag{6}$$

Đạo hàm hai lần đồng nhất thức (6) theo x ta suy ra

$$y_1 y_2''' - y_2 y_1''' = y_1'' y_2' - y_1' y_2''. \tag{7}$$

Vì y_1, y_2 là các nghiệm của (2) nên chúng cũng là các nghiệm của (1), tức là

$$y_1''' + p y_1' + q y_1 = 0, \tag{8}$$

$$y_2''' + p y_2' + q y_2 = 0. \tag{9}$$

Nhân hai vế của (8) với y_2, của (9) với y_1 và trừ vế với vế ta có

$$y_2 y_1''' - y_1 y_2''' = p(y_1 y_2' - y_2 y_1') = p \tag{10}$$

Nhân hai vế của (8) với y_2', của (9) với y_1' và trừ vế với vế ta có

$$y_2' y_1''' - y_1' y_2''' = -q(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -q. \tag{11}$$

Từ (7) ta thấy

$$(y_1 y_2''' - y_2 y_1''')' = (y_1'' y_2' - y_1' y_2'')' =$$
$$= y_2' y_1''' - y_1' y_2'''.$$

Kết hợp với (10) và (11) ta có

$$q = p'. \tag{12}$$

Hệ thức (12) chính là điều kiện cần tìm, vì ngược lại nếu xuất phát từ (12) có thể chứng minh được hệ (2) có hai nghiệm riêng y_1, y_2 thoả mãn (6), với lưu ý rằng trong trường hợp này (1) có dạng

$$y''' + \frac{d}{dx} py = 0,$$

hay

$$y'' + py = \text{const}.$$

1106. Bằng cách đưa vào không gian tuyến tính C[a, b] tích vô hướng

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

ta sẽ đưa bài toán đã cho về bài toán quen thuộc tổng quát hơn đối với định thức Gram trong đại số tuyến tính như sau :

Hệ n vectơ $x_1, x_2, ..., x_n$ của không gian vectơ thực K (trong đó có xác định một tích vô hướng) là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi định thức Gram của chúng đồng nhất bằng không :

$$G(x_1, ..., x_n) = \det [(x_i, x_j)]_{i,\ j = 1, ..., n} = 0.$$

Chứng minh đơn giản của nó bạn đọc có thể xem trong các sách đại số tuyến tính.

1107. a) Giả sử có các $x_j \in (a ; b)$ sao cho

$$\det [y_i(x_j)] \neq 0, \tag{1}$$

và ngược lại có các $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ với $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| > 0$ sao cho với mọi $x \in (a ; b)$

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0. \tag{2}$$

Thay $x = x_j$ vào (2) ta được hệ phương trình đại số

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_1) + \alpha_2 y_2(x_1) + ... + \alpha_n y_n(x_1) = 0 \\ \alpha_1 y_1(x_2) + \alpha_2 y_2(x_2) + ... + \alpha_n y_n(x_2) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1(x_n) + \alpha_2 y_2(x_n) + ... + \alpha_n y_n(x_n) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Hệ (3) có nghiệm khác không $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ nên định thức của nó phải bằng không. Điều đó mâu thuẫn với (1).

b) Giả sử $y_1(x), ..., y_n(x)$ độc lập tuyến tính trên (a ; b). Khi đó có ít nhất một điểm $x_1 \in (a ; b)$ sao cho $y_1(x_1) \neq 0$. Xét định thức hàm cấp hai

$$D_2(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_1) & y_1(x) \\ y_2(x_1) & y_2(x) \end{vmatrix}, x \in (a ; b).$$

Nhất định sẽ có một điểm $x_2 \in (a ; b)$, $x_2 \neq x_1$, sao cho $D_2(x_2) \neq 0$.

Vì nếu ngược lại $D_2(x) \equiv 0$ trên (a ; b), tức là

$$y_1(x_1)y_2(x) - y_2(x_1)y_1(x) \equiv 0.$$

Vì $y_1(x_1) \neq 0$ nên điều đó mâu thuẫn với tính độc lập của y_1, y_2.

Bây giờ giả sử với n – 1 ta đã có các điểm $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in (a ; b)$ sao cho

$$D_{n-1}(x_{n-1}) \neq 0,$$

với

$$D_{n-1}(x_{n-1}) = \begin{vmatrix} y_1(x_1) & y_1(x_2) & \dots & y_1(x_{n-1}) \\ y_2(x_1) & y_2(x_2) & \dots & y_2(x_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-1}(x_1) & y_{n-1}(x_2) & \dots & y_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix}$$

Ta chứng minh rằng điều đó cũng đúng với n, tức là sẽ có các điểm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a ; b)$ sao cho

$$D_n(x_n) = \begin{vmatrix} y_1(x_1) & y_1(x_2) & \dots & y_1(x_{n-1}) & y_1(x_n) \\ y_2(x_1) & y_2(x_2) & \dots & y_2(x_{n-1}) & y_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-1}(x_1) & y_{n-1}(x_2) & \dots & y_{n-1}(x_{n-1}) & y_{n-1}(x_n) \\ y_n(x_1) & y_n(x_2) & \dots & y_n(x_{n-1}) & y_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Thậy vậy, nếu ngược lại thì với mọi $x \in (a ; b)$ ta có

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_1) & y_1(x_2) & \dots & y_1(x_{n-1}) & y_1(x) \\ y_2(x_1) & y_2(x_2) & \dots & y_2(x_{n-1}) & y_2(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-1}(x_1) & y_{n-1}(x_2) & \dots & y_{n-1}(x_{n-1}) & y_{n-1}(x) \\ y_n(x_1) & y_n(x_2) & \dots & y_n(x_{n-1}) & y_n(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Khai triển định thức theo cột cuối, suy ra

$$D_{n-1}(x_{n-1})y_n(x) + A_{n-1}y_{n-1}(x) + ... + A_1y_1(x) = 0,$$

trong đó $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ là các hằng số nào đó, $D_{n-1}(x_{n-1}) = \text{const} \neq 0$. Điều đó mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của $y_1, ..., y_n$.

1108. Có hai trường hợp.

a) Nếu $yy'' - y'^2 \neq 0$ (hai hàng đầu của định thức độc lập tuyến tính) thì có các hàm A(x) và B(x) sao cho $y'' + Ay' + By = 0$, $y''' + Ay'' + By' = 0$, $y^{(4)} + Ay''' + By'' = 0$. Bằng cách đạo hàm hai hệ thức đầu một lần nữa theo x và so sánh ta có $A'y' + B'y = 0$, $A'y'' + B'y' = 0$. Từ đó $A' = B' = 0$, tức là A(x), B(x) là các hằng số : $A(x) = h$, $B(x) = k$. Như vậy mỗi nghiệm của phương trình đã cho sẽ thoả mãn một phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai với hệ số hằng số dạng $y'' + hy' + ky = 0$, trong đó các hằng số h và k vừa tìm được ở trên. Nhưng phương trình cấp hai này có thể tìm nghiệm dễ dàng nhờ quy tắc.

b) Nếu $yy'' - y'^2 = 0$ thì $y' = C_1y$ và $y = C_2e^{C_1x}$, trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kì.

Chú ý : Trong phần a) để ý chúng ta thấy với mỗi một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình đã cho sẽ có một phương trình cấp hai dạng

$$y'' + hy' + ky = 0, \qquad (1)$$

mà y(x) phải thoả mãn, nhưng nói chung các hằng số h và k lại phụ thuộc vào chính y(x). Tức là không phải tất cả các nghiệm của phương trình đã cho đều thoả mãn chung một phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số nào đó, mà mỗi một nghiệm sẽ có một phương trình dạng (1) riêng tương ứng với nó. Điều đó cũng dễ hiểu vì phương trình đã cho có cấp 4 nên nghiệm tổng quát của nó phụ thuộc bốn hằng số tuỳ ý, trong khi đó phương trình (1) có cấp 2 nên nghiệm tổng quát của nó chỉ phụ thuộc hai hằng số tuỳ ý.

1110. $e^y - e^x = C_1$, $x = z\left(C_2 - \frac{1}{2}z\right)$.

1111. $y = C_1(1 + x^2)$, $z = \frac{C_2}{x} + \frac{C_1}{2}x + \frac{C_1}{4}x^3 + \frac{x^2}{3}$.

1112. $y = C_1x^2 + \frac{1}{4C_1}$, $\frac{z^3}{3} - xz - \frac{C_1}{3}x^3 - \frac{1}{4C_1}x = C_2$; $y = x$,

$$\frac{z^3}{3} - xz - \frac{x^2}{2} = C \; ; \; y = -x, \; \frac{z^3}{3} - xz + \frac{x^2}{2} = C.$$

1113. $y = C_2 e^{C_1 x}$, $z = C_1 C_2 e^{C_1 x}$.

1114. $y = C_1 x + C_2 x^2$; $z = C_1(1 - x) + C_2(2x - x^2)$.

1115. $\frac{y}{x} = C_1, \frac{z}{x} = C_2$. **1116.** $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1$, $z - \sqrt{x} = C_2$.

1117. $y = C_1$, $ze^{-\frac{x}{y}} = C_2$.

1118. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$, $lx + my + nz = C_2$.

1119. $ze^{-x} + y = C_1$, $ze^{-y} + x = C_2$.

1120. $y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{C_3}{x}$, $z = -C_1 + 2C_2(1 - x) + C_3\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)$.

1121. $\psi_1 = xy$, $\psi_2 = \frac{z}{x}$. **1122.** $\psi_1 = \sin x - \sin y$, $\psi_2 = \sin x - z$.

1123. $\psi_1 = \frac{y}{x}$, $\psi_2 = z - x - y$. **1124.** $\psi_1 = \frac{y}{x}$, $\psi_2 = z$.

1125. $\psi_1 = z$, $\psi_2 = \frac{(x + z)y}{y + z}$.

1126. $\psi_1 = (5\cos 5x - \sin 5x)y - z\sin 5x$,

$\psi_2 = (5\sin 5x + \cos 5x)y + z\cos 5x$.

1127. $x = -\frac{1}{t}$, $y = 0$. **1128.** $x = \frac{t}{1 + t^2}$, $y = \frac{1}{1 + t^2}$.

1129. $x = \ln(t + e)$, $y = 0$.

1130. $$x = \frac{C_2 \cos t - C_1 \sin t - \beta(C_1^2 + C_2^2)}{(\cos t - \alpha C_1 - \beta C_2)^2 + (\sin t - \alpha C_2 + \beta C_1)^2},$$

$$y = \frac{-C_2 \sin t - C_1 \cos t + \alpha(C_1^2 + C_2^2)}{(\cos t - \alpha C_1 - \beta C_2)^2 + (\sin t - \alpha C_2 + \beta C_1)^2};$$

Vị trí cân bằng $x = 0$, $y = 0$ là tâm. *Chỉ dẫn* : Các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ ở vế phải thoả mãn điều kiện Cô-si – Riman. Áp dụng phương pháp vừa nêu.

1131. $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = 0$. *Chỉ dẫn :* Điều kiện Cô-si – Riman được thoả mãn.

1132. $y = C_1 + C_2e^{5x}$, $z = C_1 - 4C_2e^{5x}$.

1133. $y = C_1 + C_2e^{-3x}$, $z = -2C_1 - 3C_2e^{-x}$.

1134. $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$, $z = e^{2x}(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x)$.

1135. $y = 2e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x)$,

$z = e^{-2x}[(3C_1 - \sqrt{3}C_2)\cos\sqrt{3}x + (\sqrt{3}C_1 + 3C_2)\sin\sqrt{3}x]$.

1136. $x = 5C_1\cos 2t + 5C_2\sin 2t$,

$y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + 4C_2)\sin 2t$.

1137. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$, $z = (-C_1 + 3C_2)\cos 3x - (3C_1 + C_2)\sin 3x$.

1138. $x = C_1e^{t} + C_2e^{5t}$, $y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t}$.

1139. $x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$, $y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$.

1140. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$.

1141. $x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$, $y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t]$.

1142. $x = e^{t}(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)$, $y = e^{t}(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t)$.

1143. $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t$, $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$.

1144. $x = (C_1 + C_2t)e^{t}$, $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^{t}$.

1145. $x = (C_1 + C_2t)e^{3t}$, $y = (C_1 + C_2 + C_2t)e^{3t}$.

1146. $x = (C_1 + 2C_2t)e^{-t}$, $y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)e^{-t}$.

1147. $x = (C_1 + 3C_2t)e^{2t}$, $y = (C_2 - C_1 - 3C_2t)e^{2t}$.

1148. $x = -2C_1e^{t} - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}$, $y = C_1e^{t} + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$,

$z = 2C_1e^{t} + C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}$.

1149. $x = 2C_1 + C_2e^{t} + C_3e^{2t}$, $y = 3C_1 - 2C_3e^{2t}$, $z = C_1 + C_2e^{t} + 2C_3e^{2t}$.

1150. $x = C_1e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (-11C_2 + 7C_3)\sin t$,

$y = -2C_1e^{-t} + (15C_2 + 9C_3)\cos t + (-9C_2 + 15C_3)\sin t$,

$z = 2C_1e^{-t} + (-2C_2 + 8C_3)\cos t + (8C_2 - 2C_3)\sin t$.

1151. $x = C_1e^{-2t} + C_2e^{t}$, $y = -2C_1e^{-2t} + 3C_2e^{t} - 3C_3e^{t}$, $z = 2C_1e^{-2t} + C_3e^{t}$.

1152. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$,
$z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$.

1153. $x = C_1 + 3C_2e^{2t}$, $y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}$.

1154. $x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$.

1155. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$, $y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$,
$z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$.

1156. $x = C_1e^{-t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t$, $y = -2C_1e^{-t} + 3C_2e^t$,
$z = 2C_1e^{-t} + (C_2t + C_3)e^t$.

1157. $x = C_1 + C_3e^{-t}$, $y = 3C_1 - 3C_2 - 2C_3e^{-t}$, $z = C_2 + 2C_3e^{-t}$.

1158. $x = C_1e^t + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$, $z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}$.

1159. $x = e^t(2C_2\sin 2t + 2C_3\cos 2t)$, $y = e^t(C_1 - C_2\cos 2t + C_3\sin 2t)$,
$z = e^t(-C_1 - 3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t)$.

1160. $x = C_2\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$, $y = 2C_1e^t + C_2\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$,
$z = C_1e^t + C_3\cos t - (C_2 + C_3)\sin t$.

1161. $x = C_1 + C_2e^t$, $y = 3C_1 + C_3e^t$, $z = -C_1 + (C_2 - C_3)e^t$.

1162. $x = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$, $z = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}$.

1163. $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$, $y = -C_1e^{3t} + (C_2 + 2C_3)e^{-t}$, $z = -3C_1e^{3t} + C_3e^{-t}$.

1164. $x = C_1 + C_2(t + 1) + C_3e^{-t}$, $y = 3C_2 - 2C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2t + 2C_3e^{-t}$

1165. $x = C_1e^{2t} + C_3e^{-5t}$, $y = C_2e^{2t} + 3C_3e^{-5t}$, $z = (C_1 - 2C_2)e^{2t} + 2C_3e^{-5t}$.

1166. $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$, $y = (C_1 - 2C_2 + C_2t)e^t$,
$z = (C_1 - C_2 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$.

1167. $x = (C_1 + C_3t)e^t$, $y = (C_2 + 2C_3t)e^t$, $z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3t)e^t$.

1168. $x = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{2t}$, $y = [2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3t^2]e^{2t}$,
$z = [C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3t^2]e^{2t}$.

1169. $x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$,
$y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$.

1170. $x = e^t(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-t}(C_3\cos t + C_4\sin t),$

$y = e^t(C_1\sin t - C_2\cos t) + e^{-t}(C_4\cos t - C_3\sin t).$

1171. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$.

1172. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + 2C_3e^{-2t}$, $y = 2C_1e^t + C_3e^{-2t}$.

1173. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + C_5e^{-2t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_4e^{2t} + C_6e^{-2t}$,

$z = C_1e^t + C_2e^{-t} - (C_3 + C_4)e^{2t} - (C_5 + C_6)e^{-2t}$.

1174. $x = 3Ce^{-t}$, $y = Ce^{-t}$.

1175. $y = \dfrac{1}{x^2}[C_1 + C_2(\ln x + 1)]$, $z = -\dfrac{1}{x^2}(C_1 + C_2\ln x)$.

1176. $y = C_1e^{-\frac{1}{x}} + 2C_2e^{-\frac{2}{x}}$, $z = -\left(C_1e^{-\frac{1}{x}} + 3C_2e^{-\frac{2}{x}}\right)$.

1177. $y = e^{2\sqrt{x}}(C_1\cos\sqrt{x} + C_2\sin\sqrt{x})$,

$z = e^{2\sqrt{x}}(C_1\sin\sqrt{x} - C_2\cos\sqrt{x})$.

1178. $y_1 = x(C_1 + 2\ln x)$, $y_2 = C_2x$, $y_3 = \dfrac{C_3}{x}$.

1179. $x = C_1e^t + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t}$, $y = -C_1e^t + C_2e^{4t} + e^{5t}$.

1180. $x = C_1(\cos 2t - \sin 2t) + C_2(\cos 2t + \sin 2t)$,

$y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + e^{-2}$.

1181. $x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + (t + 1)e^{2t}$, $y = -2C_1e^{2t} - C_2e^{3t} - 2te^{2t}$.

1182. $x = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$.

1183. $x = C_1e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2$, $y = -C_1e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2$.

1184. $x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t + 13)e^t$, $y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t + 6)e^t$.

1185. $x = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t$, $y = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t$.

1186. $x = C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$, $y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$.

1187. $y = 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$, $z = 9e^{2x} + 3C_1e^x + C_2e^{-x}$.

1188. $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$, $z = (x + 1)e^x + C_1e^x + 3C_2e^{-x}$.

1189. $x = 2\cos 2t + 3\sin 2t + 2e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$,

$y = 7\sin 2t + e^{-\frac{t}{2}}\left[(3C_1 - \sqrt{3}C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + (\sqrt{3}C_1 + 3C_2)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$.

1190. $x = -t\cos t + C_1\cos t + C_2\sin t$,

$y = t(\cos t + \sin t) - (C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t$;

$x = (-t + 1)\cos t - \sin t$,

$y = (t - 2)\cos t + t\sin t$.

1191. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}\,t$, $y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2$.

1192. $x = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t} + 1) + 2e^{2t}\mathrm{arctg}\,e^t$.

$y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t} + 1) + 3e^{2t}\,\mathrm{arctg}\,e^t$.

1193. $x = C_1 + 2C_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln|e^t - 1|$,

$y = -2C_1 - 3C_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln|e^t - 1|$.

1194. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|$,

$y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2\cos t\ln|\cos t| + 2t\sin t$.

1195. $x = (C_1 + 2C_2t - 8t^{5/2})e^t$, $y = (C_1 + 2C_2t - C_2 - 8t^{5/2} + 10t^{3/2})e^t$.

1196. $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-7x} + 7e^x + e^{-x}$, $z = \frac{C_1}{2}e^{-4x} - C_2e^{-7x} + e^x + 2e^{-x}$.

1197. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $z = C_1e^{2x} + 2C_2e^{3x}$;

$y = e^{2x} - e^{3x}$, $z = e^{2x} - 2e^{3x}$.

1198. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, $z = 2C_1e^x + 5C_2e^{-2x}$; $y = e^{-2x}$, $z = 5e^{-2x}$.

1199. $x = (C_2 + C_3)\cos t + (-C_2 + C_3)\sin t$, $y = C_1e^t + C_2\cos t + C_3\sin t$,

$z = C_1e^t - C_2\sin t + C_3\cos t$; $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$,

$z = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$.

1200. $y_1 = x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $y_2 = x + 2 + C_1e^{2x} + 2C_2e^{3x}$; $y_1 = x^2$,

$y_2 = x + 2$.

1201. $x = -t\cos t + C_1\cos t + C_2\sin t,$

$y = t(\cos t + \sin t) - (C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t\ ;$

$x = (-t + 1)\cos t - \sin t,\ y = (t - 2)\cos t + t\sin t.$

1202. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t,$

$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t\ ;$

$x = \frac{3}{4}(e^t + e^{-t}) - \frac{1}{2}\cos t = \frac{3}{2}\operatorname{ch}t - \frac{1}{2}\cos t,$

$y = \frac{3}{4}(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2}\cos t = \frac{3}{2}\operatorname{ch}t + \frac{1}{2}\cos t.$

1203. $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{9},\ z = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}.$

1204. $y_1' = 3y_1,\ y_2' = 2y_2.$ 1206. $y_1' = 3y_1,\ y_2' = 3y_2.$

1205. $y_1' = 3y_1 + y_2,\ y_2' = 3y_2.$ 1207. $y_1' = 2y_2,\ y_2' = -2y_1.$

1208. $y_1' = \frac{x}{1+x^2}y_1 + \frac{1}{1+x^2}y_2,\ y_2' = -\frac{1}{1+x^2}y_1 + \frac{x}{1+x^2}y_2.$

1209. $y_1' = \frac{x}{x^2-1}y_1 - \frac{1}{x^2-1}y_2,\ y_2' = -\frac{1}{x^2-1}y_1 + \frac{x}{x^2-1}y_2.$

1210. Chú ý rằng $y_i' = y_1'$, $i = 1, 2, ..., n$,hay $y_i = y_1 + C_i$, trong đó C_i là các hằng số tuỳ ý ($i > 1$) và $C_1 = 0$. Sau đó thay y_i vào và chỉ cần xét phương trình thứ nhất.

1211. Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrăngiơ.

1212. Để cho gọn ta viết hệ dưới dạng vectơ

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

với $x \in R^n$, $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$, $t \in (a\ ;+\infty)$.

Kí hiệu $\|\ ...\|$ dùng để chỉ chuẩn của một vectơ hay của một ma trận, chẳng hạn có thể định nghĩa chuẩn của một ma trận $B = [b_{ij}]$ như sau :

$$\|B\| = \max_{i,j}|b_{ij}|.$$

1. Chuyển hệ (1) sang dạng tích phân

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} A(s)x(s)ds,\ x(t_o) = x_o,\ t \ge t_o > a.$$

Từ đó

$$\|x(t)\| \le \|x_o\| + \int_{t_o}^{t} \| A(s) \| \| x(s) \| ds.$$

Áp dụng bổ đề Grônuôn – Benman (xem bài 733) ta có

$$\|x(t)\| \le \|x_o\| \exp \int_{t_o}^{t} \| A(s) \| ds. \tag{2}$$

Chú ý đến giả thiết sẽ thấy ngay tính giới nội của nghiệm từ bất đẳng thức (2).

2. Trong phương trình tích phân

$$x(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} A(s)x(s)ds, \tag{3}$$

tích phân

$$\int_{t_o}^{\infty} A(s)x(s)ds$$

hội tụ, vì nó hội tụ tuyệt đối do giả thiết và do tính giới nội của nghiệm x(t) đã được chứng minh ở phần 1) :

$$\int_{t_o}^{\infty} \| A(s)x(s) \| ds \le \int_{t_o}^{\infty} \| A(s) \| \| x(s) \| ds \le K(x_o) \int_{t_o}^{\infty} \| A(s) \| ds < +\infty,$$

trong đó $K(x_o)$ là một hằng số hữu hạn phụ thuộc giá trị ban đầu x_o, chẳng hạn $K(x_o) = \|x_o\| \exp \int_{t_o}^{\infty} \| A(s) \| ds$ (xem (2)). Vì thế do (3) x(t) có giới hạn hữu hạn khi $t \to +\infty$.

Bây giờ giả sử có hai nghiệm khác nhau $x_1(t)$ và $x_2(t)$ cùng có một giới hạn khi $t \to +\infty$. Ta viết

$$x_1(t) = X(t)\,x_o^1,$$
$$x_2(t) = X(t)\,x_o^2,$$

trong đó $x_i(t_o) = x_o^i$, X(t) là ma trận nghiệm cơ bản, $X(t_o) = E$. Dĩ nhiên $x_o^1 \ne x_o^2$ do định lí tồn tại duy nhất nghiệm. Như vậy

$$\lim_{t\to+\infty} [x_1(t) - x_2(t)] = \lim_{t\to+\infty} X(t)\,[x_o^1 - x_o^2] = 0.$$

Nhớ rằng theo trên sẽ tồn tại hữu hạn

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = H,$$

trong đó H là một ma trận vuông cấp n nào đó. Từ hệ thức

$$H(x_o^1 - x_o^2) = 0,$$

mà $x_o^1 \neq x_o^2$, suy ra H là ma trận suy biến, tức là det H = 0. Nhưng điều đó không thể xảy ra nếu ta để ý đến giả thiết và chuyển qua giới hạn khi $t \to +\infty$ ở công thức Ôxtrôgratxki – Liuvin

$$\det X(t) = \exp \int_{t_o}^{t} SpA(s)ds.$$

Để kết thúc ta còn phải chứng minh rằng với mọi vectơ $\vec{C} \in R^n$ đều có một nghiệm $x_o(t)$ của hệ (1) sao cho

$$\lim_{t \to +\infty} x_o(t) = \vec{C}.$$

Tính duy nhất của nghiệm này ở phần trên đã khẳng định. Nghiệm

$$x_o(t) = X(t)\vec{d}$$

sẽ có giới hạn ở vô cực chính là vectơ $\vec{C}$, nếu ta lấy vectơ $\vec{d}$ như sau :

$$\vec{d} = H^{-1}\vec{C},$$

chú ý rằng ma trận H không suy biến. Tóm lại

$$x_o(t) = X(t)\, H^{-1}\vec{C}.$$

Chú ý : Họ tất cả các nghiệm của hệ (1) với giả thiết của bài toán, nói chung không bị chặn đều mà chỉ bị chặn. Điều đó cũng dễ thấy nếu để ý đến (2) : Vế phải có sự tham gia của điều kiện ban đầu. Vả lại chỉ có như vậy thì với mọi $\vec{C} \in R^n$ (chẳng hạn khi $\|\vec{C}\|$ khá lớn) mới có ít nhất một nghiệm $x_o(t)$ của hệ (1) sao cho

$$\lim_{t \to +\infty} x_o(t) = \vec{C}.$$

Bài toán này cho thấy rằng hệ

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

$$A(t) \in C_{(a,\infty)},\ \int_a^{\infty} \| A(t) \|\, dt < +\infty$$

và hệ

$$\dot{y} = 0$$

là tương đương tiệm cận. Kết quả này chỉ là một trường hợp riêng của định lí Lêvinxơn (xem lời giải của bài tập 1100 đã nói tới).

1213. Điểm nút.
1214. Tiêu điểm.
1215. Điểm nút.
1216. Yên điểm.
1217. Tâm điểm.
1218. Điểm nút suy biến.
1219. Yên điểm.
1220. Điểm nút.
1221. Tiêu điểm.
1222. Điểm nút.
1223. Tiêu điểm.
1224. Điểm nút suy biến.
1225. Tâm điểm.
1226. Điểm nút suy biến.
1227. Yên điểm.
1228. Các điểm kì dị lấp đầy một đường thẳng.

1229. (1 ; –2) – tiêu điểm.

1230. (1 ; 0) – điểm nút kì dị ; (–1 ; 0) – yên điểm.

1231. (1 ; 1) – tiểu điểm ; (–1 ; –1) – yên điểm.

1232. (0 ; –1) – điểm nút suy biến ; (2 ; – 3) – yên điểm.

1233. (2 ; 4) – điểm nút ; (–1 ; 1) – yên điểm).

1234. (1 ; 2) – điểm nút ; (–2 ; –1) – tiêu điểm.

1235. (1 ; –1) – tiêu điểm ; (0 ; –2) – yên điểm ; (–2 ; 2) – điểm nút.

1236. (–2 ; 4) – điểm nút ; (1 ; 1) – tiêu điểm ;
(2 ; 4) và (–1 ; 1) – yên điểm.

1237. (–2 ; 2) điểm nút suy biến ; (1 ; –1) – tiêu điểm ;
(–1 ; –1) – yên điểm.

1238. (0 ; 1) và (0 ; –1) – yên điểm ; (–1 ; 0) – tiêu điểm ;
(3 ; 2) – điểm nút.

1239. (3 ; 0) – tiêu điểm ; (1 ; 1) – điểm nút ;
(–1 ; 1) và (–3 ; 0) – yên điểm.

1240. Điều ngược lại không đúng. Ví dụ ydx + xdy = 0.

1242. $y = C_2 e^{C_1 x}$, $z = x + \dfrac{C_2}{C_1} e^{C_1 x}$; $y = 0$, $z = x + C$.

1243. $y = \dfrac{x + C_1}{x + C_2}$, $z = \dfrac{(C_2 - C_1)x}{(x + C_2)^2}$.

1244. $y = -\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{C_1}{2}(x + C_2) - \dfrac{C_1}{4}(x + C_2)^2$, $z = \dfrac{C_1}{4}(x + C_2)^2 + \dfrac{1}{C_1}$.

1245. $y = C_2 e^{C_1 x^2}$, $z = \dfrac{2C_1}{C_2} x e^{-C_1 x^2}$; $y = 0$, $z = Cx$.

1250. $x + z = C_1$, $(x + y + z)(y - 3x - z) = C_2$.

1251. $x + z = C_1$, $y + u = C_2$, $(x - z)^2 + (y - u)^2 = C_3$.

1252. $y^2 + z^2 = C_1$, $x - yz = C_2$.

1253. $x = C_1 y$, $xy - 2\sqrt{z^2 + 1} = C_2$.

1254. $y = C_1 z$, $x - y^2 - z^2 = C_2 z$.

1255. $xz = C_1$, $xy + z^2 = C_2$.

1256. $x + z - y = C_1$, $\ln|x| + \dfrac{z}{y} = C_2$.

1257. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$, $yz = C_2 x$.

1263. Chú ý rằng

$$X^{-1}(t) = \left[\frac{X_{ij}(t)}{\det X(t)}\right],$$

trong đó $X_{ij}(t)$ là phần phụ đại số của phần tử $x_{ji}(t)$ của ma trận nghiệm cơ bản $X(t)$. Từ đó

$$\|X^{-1}(t)\| = \frac{1}{|\det X(t)|} \| [X_{ij}(t)] \|.$$

Thừa số thứ hai ở vế phải bị chặn đều vì $X(t)$ bị chặn đều. Thừa số thứ nhất cũng bị chặn đều vì nếu dùng công thức Ôxtrôgratxki – Liuvin, điều kiện (2) và tính chất của giới hạn dưới ta có

$$|\det X(t)| \geq t > 0,\ \forall t \geq t_o.$$

Vậy $X^{-1}(t)$ bị chặn đều khi $t \in (t_o\,;\,\infty)$:

$$\|X^{-1}(t)\| \leq M < \infty.$$

Một nghiệm bất kì của hệ (1) đều có dạng

$$x(t) = X(t)x(t_o),$$

hay

$$x(t_o) = X^{-1}(t)\,x(t).$$

Từ đó

$$\|x(t_o)\| \leq \|X^{-1}(t)\|\,\|x(t)\| \leq M\,\|x(t)\|.$$

Như vậy nếu

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

thì $x(t_o) = 0$, tức là $x(t)$ là nghiệm tầm thường theo tính duy nhất nghiệm.

1264. Nếu không xảy ra trường hợp a) thì có hai giá trị t_1, t_2 chẳng hạn $t_1 < t_2$ sao cho $x(t_1) = x(t_2)$. Đặt $T = t_1 - t_2 > 0$. Xét các nghiệm $x(t, t_1, x(t_1))$ và $x(t + T, t_1, x(t_1))$ của hệ ôtônôm đã cho (hàm số thứ hai là nghiệm vì hệ là ôtônôm). Chúng cùng thoả mãn một điều kiện ban đầu tại $t = t_1$ vì $x(t_1) = x(t_2)$, nên do tính duy nhất nghiệm (mà ta giả thiết rằng phương trình ôtônôm đã cho có được) suy ra

$$x(t + T) \equiv x(t).$$

Gọi T_o là số sau đây

$$T_o = \inf\{\tau > 0 : x(t + \tau) = x(t)\}.$$

Nếu $T_o > 0$ thì nghiệm $x(t)$ tuần hoàn với chu kì (nhỏ nhất) $T_o (0 < T_o \leq T)$. Nếu $T_o = 0$ thì nghiệm $x(t)$ là nghiệm dừng (dừng lại tại một điểm) $x(t) = x_o$ (do tính chất của cận dưới đúng và tính liên tục của nghiệm).

1265. Xem bài 729.

1266. Điều kiện cần tìm là : p và q có đạo hàm cấp một và $p' + q' = \varepsilon(p - q)\sqrt{2(p + q)}$, trong đó $\varepsilon = \mp 1$. *Hướng dẫn* : Thế $y = e^u$, $z = e^v$ nhận được hệ mới $u'' + u'^2 - p = 0$, $v'' + v'^2 - q = 0$. Tìm điều kiện của p, q để chúng có các nghiệm riêng u_1, v_1 sao cho $u_1 + v_1 = 0$. Cộng hai phương trình lại (sau khi đã thay u_1, v_1 vào đó) và chú ý $u_1 + v_1 = 0$ sẽ nhận được $u_1' = \varepsilon\sqrt{\dfrac{p+q}{2}}$. Lấy phương trình thứ nhất trừ đi phương trình thứ hai ta được

$$u'' = \frac{p - q}{2}.$$

Vì $(u_1)' = u_1''$ nên

$$p' + q' = \varepsilon(p - q)\sqrt{2(p + q)}, \ \varepsilon = \pm 1. \tag{3}$$

Bạn đọc hãy thử lại tính đủ của điều kiện này.

Nếu y_1 và z_1 là các nghiệm riêng thoả mãn điều kiện $y_1 z_1 = 1$ thì Cy_1 và $\dfrac{1}{C}z_1$ cũng là các nghiệm riêng thoả mãn điều kiện đó với C là hằng số bất kì khác không.

Xét phương trình (2). Nếu đặt $u = p + q$, trong đó $q = q(x)$ thì để xác định u ta đi xác định $q(p) = p(x)$ cho trước. Thay $u = p + q$ vào (2) ta thấy lúc này (2) cho ta hệ thức (3). Như vậy nếu tạm xem như q đã xác định được và lập hệ

$$\begin{cases} y'' = p(x)y, \\ z'' = q(x)z \end{cases}$$

thì ta gặp lại vấn đề trên kia. Lưu ý rằng

$$q = \frac{z_1''}{z_1} = \frac{\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1}{y_1}\right)}{\dfrac{1}{y_1}} = -\frac{y_1''}{y_1} + 2\frac{y_1'^2}{y_1^2} = -p + 2\frac{y_1'^2}{y_1^2}.$$

Do đó

$$u = p + q = 2\frac{y_1'^2}{y_1^2}.$$

Từ đó và lí luận thêm chút ít ta thấy rằng việc giải (2) có thể quy về việc giải phương trình thứ nhất của hệ (1).

1267. Lưu ý rằng trong miền $\|y\| \geq b$ thì

$$\frac{d\,\|y\|^2}{dx} = \frac{d(y.y)}{dx} = 2\left(y.\frac{dy}{dx}\right) = 2(y.f) \leq 2k(x)\,\|y\|^2.$$

Từ đó ta có đánh giá

$$\|y(x)\| \leq \|y_o\| \exp\int_{x_o}^{x} k(t)dt + b,$$

với mọi $x \in [x_o\,;+\infty]$. Vì tích phân ở vế phải có giá trị hữu hạn tại mỗi một giá trị hữu hạn của x, nên nghiệm $y(x, x_o, y_o)$ tồn tại với mọi $x \in [x_o\,;+\infty)$ theo nguyên tắc thác triển liên tiếp trên $[x_o\,;+\infty)$.

1268. Chú ý rằng nếu $(x_o\,; y_o)$ là một điểm kì dị dạng tiêu điểm hoặc điểm nút trong miền G của hệ đã cho, thì xét trong một lân cận đủ nhỏ $U \subset G$ của điểm đó ta thấy các đường cong tích phân đều đi qua $(x_o\,; y_o)$ và lấp đầy lân cận đó (do định lí tồn tại). Giả sử hệ đã cho có tích phân đầu dạng $\varphi(x, y) = C$ với $\varphi \neq \text{const}$ và liên tục trong một lân cận khá bé của $(x_o\,; y_o)$ (có thể xem là U). Như vậy với một nghiệm bất kì $y = y(x)$, sẽ có một hằng số C_y (phụ thuộc vào nghiệm y) để có đồng nhất thức

$$\varphi(x, y(x)) \equiv C_y.$$

Do tính chất liên tục của φ

$$\lim_{x\to x_o} \varphi(x, y(x)) = \varphi(x_o, y_o) = C_y.$$

Như vậy $C_y = C$ là một hằng số nào đấy không phụ thuộc y, suy ra

$$\varphi(x, y) \equiv C, \forall(x, y) \in U.$$

Mâu thuẫn này kết thúc chứng minh của bài toán.

Kết luận trên không đúng với trường hợp điểm kì dị dạng yên điểm và tâm điểm vì các đường cong trong lân cận điểm kì dị nói chung không đi qua điểm đó.

1269. a) Ổn định ; b) Không ổn định.

1270. a) Ổn định tiệm cận ; b) Không ổn định.

1272. Không.

1273. Không ổn định.

1274. Ổn định.

1275. Không ổn định.

1276. $a < b < -1$.

1277. $-be < a < -e$.

1278. Không ổn định.

1279. (1 ; 2) và (2 ; −1) đều không ổn định.

1280. (2 ; 1) ổn định, (−2 ; 1) không ổn định.

1281. $(-1 ; 2k\pi)$ – ổn định ; $(-1 ; (2k + 1)\pi)$ – không ổn định.

1282. Ổn định.

1283. Không ổn định.

1284. Không ổn định.

1285. Ổn định.

1286. Ổn định.

1287. Không ổn định.

1288. Không ổn định.

1289. Ổn định.

1290. Không ổn định.

1291. Ổn định.

1292. Không ổn định.

1293. $3a > b > 0$.

1294. $a > 0, b > 0, 8a - a^2b > 4$.

1295. $0 < a < 8, 0 < b < 8a - a^2$.

1296. $-4 < ab < 0$ và $a = b = 0$.

1298. Nếu gọi $\lambda_j(A)$, j = 1, ..., n, là các nghiệm đặc trưng của ma trận hệ số A, của hệ vi phân, thì điều kiện cần và đủ là

$$\mathrm{Re}\lambda_j(A) \le 0, j = 1, 2, ..., n,$$

và các nghiệm đặc trưng với phần thực bằng không chỉ có ước cơ bản đơn.

Nếu

$$\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0,\ j = 1, 2, ..., n,$$

thì nghiệm không, là ổn định tiệm cận.

Để hiểu sâu hơn các kết quả này, độc giả có thể xem trong [5] (trang 86).

1299. Xem trong [5], trang 81.

1302. $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

1301. $z = f(xy + y^2)$.

1303. $u = f((x - y)/z, (x + y + 2z)^2/z)$.

1304. $u = F[e^{-2x}.(y + x), e^{-x}(3y + 2z)]$.

1305. $u = F(lx + my + nz, x^2 + y^2 + z^2)$.

1306. $u = F\left(\frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right)$.

1308. $u = F\left(x^2 + y^2 + z^2, \frac{yz}{x}\right)$.

1307. $u = F\left(\frac{y}{x}, x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

1309. $u = F\left(y, \frac{x^y}{z}\right); u = \frac{x^y}{z}$.

1310. $u = F[y^2 - z^2, 2x + (z - y)^2]$; $u = 2[y(y - z) + x]$.

1311. $z = F\left(\frac{y^2}{1 + x^2}\right); z = \frac{y^2}{1 + x^2}$.

1312. $u = F\left(y, \ln z - \frac{x}{y}\right)$; $u = \ln z - \frac{x}{y}$.

1313. $z = ye^x - e^{2x} + 1$.

1316. $u = (xy - 2z)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$.

1314. $z = y^2 e^{2\sqrt{x-2}}$.

1317. $F(x^2 - y^2, x - y + z) = 0$.

1315. $u = (1 - x + y)(2 - 2x + z)$.

1318. $F\left(e^{-x} - y^{-1}, z + \frac{x - \ln|y|}{e^{-x} - y^{-1}}\right) = 0$.

1319. $F(x^2 - 4z, (x + y)^2/x) = 0$.

1320. $F(y, ze^{-x/y}) = 0$ hoặc $z = e^{x/y}f(y)$.

1321. $F(z\sqrt{x}, \sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$ hoặc $z = \sqrt{x} + f(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

1322. $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

1323. $F(x^2 + y^2, z/x) = 0$.

1324. $F\left(\frac{x^2}{y}, xy - \frac{3z}{x}\right) = 0.$

1325. $F\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z}\right) = 0.$

1326. $F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \ln|xy| - \frac{z^2}{2}\right) = 0.$

1327. $F(z^2 - y^2, x^2 + (y-z)^2) = 0.$

1328. $F(x^2 + y^2, \operatorname{arctg}(x/y) + (z+1)e^{-z}) = 0.$

1329. $F\left(\frac{z}{x}, 2x - 4z - y^2\right) = 0.$

1330. $F(\operatorname{tg}z + \operatorname{cotg}x, 2y + 2\operatorname{tg}z\operatorname{cotg}x + \operatorname{cotg}^2x) = 0.$

1331. $F((x-y)(z+1), (x+y)(z-1)) = 0.$

1332. $F(z - \ln|x|, 2x(z-1) - y^2) = 0.$

1333. $F((x+y+z)/(x-y)^2, (x-y)(x+y-2z)) = 0.$

1334. $F(u(x-y), u(y-z), (x+y+z)/u^2) = 0.$

1335. $F((x-y)/z, (2u+x+y)z, (u-x-y)/z^2) = 0.$

1336. $F(x/y, xy - 2u, (z+u-xy)/x) = 0.$

1337. $F(z, x^2 - y^2z) = 0$; $z = \frac{x^2}{y^2}.$

1338. $F\left(y, \frac{z}{x}\right) = 0$ hoặc $z = xf(y)$; $z = xy.$

1339. $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0$ hoặc $u = xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$; $u = \frac{1}{2}(y+z).$

1340. $y^2 - x^2 - \ln\sqrt{y^2 - x^2} = z - \ln|y|.$

1341. $2x^2(y+1) = y^2 + 4z - 1.$

1342. $(x+2y)^2 = 2x(z+xy).$

1343. $\sqrt{\frac{z}{y^2}}\sin x = \sin\sqrt{\frac{z}{y}}.$

1344. $F(z, xe^{-y/z}) = 0, z = \frac{y}{\ln x - 1}.$

1345. $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^2}\right) = 0$ hoặc $z = x^2 f\left(\frac{y}{z}\right)$; $z = xy.$

1346. $2xy + 1 = x + 3y + z^{-1}.$

1347. $x - 2y = x^2 + y^2 + z.$

1348. $[(y^2z - 2)^2 - x^2 + z]y^2z = 1.$

1349. $3(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

1350. $2x^2 - y^2 - z^2 = a^2$.

1351. $xz = (xz - y - x + 2z)^2$.

1352. $x + y + z = 0$.

1353. $(x - y)(3x + y + 4z) = 4z$.

1354. $(1 + yz)^3 = 3yz(1 + yz - x) + y^3$

1355. $2(x^3 - 4z^3 - 3yz)^2 = 9(y + z^2)^3$.

1356. $xz + y^2 = 0$.

1357. $z = xy + f(y/x)$, ở đây f là một hàm khả vi tuỳ ý sao cho $f(1) = 0$.

1358. $z = Cxy^2$.

1359. Không có nghiệm.

1360. $z = Ce^{xy}$.

1361. $z = Ce^{\sin xy}$.

1362. $z = -\dfrac{1}{x + y^2 + C}$.

1363. $z = e^{x+y}(y + C)$.

1364. $z = 0$.

1365. Không có nghiệm.

1366. $x^3y^2z = C$.

1367. $z = Ce^{y/x}$.

1368. $z = e^{xy}(y + C)$.

1369. $z = y^2 - xy$.

1370. $x^2yz = C - x^3$; $x = 0$.

1371. $z = x^2(y + \ln x - x + C)$.

1372. $z = ax + by + a^2$.

1373. $z = ax + by + ab$.

1374. $z^2 a^2 = x + ay + b$.

1390. $z = Cx^2y^3$.

1391. $z = (y + C)(x - y^2)$.

1392. $z = ax + by - a^2b$.

1396. $u' = u^2 - v^2 + q(x)$, $v' = 2uv$.

1397. Nếu $y(x_1) = m_1$ là một số thực, thì $y(x)$ là nghiệm thực của phương trình (1) và như vậy khi $x < x_1$ cũng như khi $x > x_1$ không thể xảy ra $y(x) = m + in$ $(= y(x_o))$.

1399. $\varphi(x) = -x^2 + \dfrac{1}{2}x + C$.

1400. $y = Ce^{-2x} + \dfrac{2}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\cos x$ khi $y < \sin x$, $y = Ce^{-x}$ khi $y \geq \sin x$.

1401. $y_1 = \varphi(x) - 1$, $y = \varphi(x) - 1 + Ce^{-\varphi(x)}$.

1402. $y_1 = \sin x - 1$, $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$.

1406. $y - \varphi(x) = z$.

1407. $y = C\sin^{2k+1}x$.

1408. $y = Ce^{x^2}$

1409. *Giải.* Giả sử $y = y(x, C, \lambda)$ là nghiệm tổng quát của phương trình

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) + \varphi(y)\lambda.$$

Nếu giải phương trình $\int_a^b g[y(x, C, \lambda)]\,dx = \lambda$ ta tìm được $\lambda = \lambda(C)$ thì $y = y[x, C, \lambda(C)]$ là nghiệm cần tìm.

1410. $y = \frac{2}{3-e}e^x + \frac{1-e}{3-e}$. *Chỉ dẫn* : Đặt $\int_0^1 y(x)dx = \lambda$.

1411. *Giải* $y \equiv 0$ là một nghiệm hiển nhiên. Đặt $\sqrt{y(t)} = z(t)$, $\int_0^t z(s)ds = x(t)$. Khi đó

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \le \lambda x(t),\ 0 \le \frac{dx}{dt} \le \sqrt{\lambda x(t)},\ x(0) = 0.$$

Giải bất đẳng thức cuối với chú ý đến điều kiện ban đầu $x(0) = 0$, ta nhận được

$$\frac{dx}{\sqrt{\lambda x(t)}} \le dt,\ 2\sqrt{\lambda x(t)} \le t,\ x(t) \le \frac{\lambda t^2}{4}.$$

Ta có $z(t) \le \frac{\lambda t}{2}$, bởi vì nếu có dù chỉ một điểm $t^* \in (0\ ;\ +\infty)$, $z(t^*) < \frac{\lambda t^*}{2}$, thì

$$\frac{\lambda t^*}{2} < z(t^*) \le \sqrt{\lambda x(t^*)} \le \sqrt{\lambda . \frac{\lambda}{4} t^{*2}} = \frac{\lambda}{2} t^*$$

(mâu thuẫn !). Do đó $y(t) \le \frac{\lambda^2 t^2}{4}$.

1412. $y \equiv 0$. Do f liên tục suy ra $f \equiv 0$ ở trên các trục toạ độ. Tiếp tục bằng phản chứng.

1414. Xem [10] trang 409.

1423. $x = \sin e^t$, $y = \cos e^t$.

1424. $x = -\cos t$, $y = \sin t$,

1425. $x = -\cos t$, $y = \sin t$.

1427. *Giải.* Đạo hàm phương trình đã cho ta có

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'(\alpha(x)).\alpha'(x).$$

Theo phương trình đã cho $y'(\alpha(x)) = y(\alpha(\alpha(x))) = y(x)$, bởi vậy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha'(x)y.$$

Hiển nhiên rằng nếu $\alpha = a - x$, thì ta nhận được một phương trình tuyến tính với hệ số hằng số (-1) ; nếu $\alpha = \frac{k}{x}$ thì nhận được phương trình Ole $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$. Trong các trường hợp đó, điều kiện $\alpha(\alpha(x)) = x$ được thoả mãn.

1428. *Giải.* Đạo hàm phương trình đã cho ta có $y''(t) = iy'(it) = iy(-t)$, $y^{(4)}(t) = iy''(-t) = -y(t)$ hoặc $y^{(4)} + y = 0$, từ đó

$$y = A_1e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}t} + A_2e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}t} + A_3e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}t} + A_4e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}t}.$$

Nghiệm của phương trình đã cho là

$$y(t) = A\left(\text{ch}\frac{1+i}{\sqrt{2}}t + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\text{sh}\frac{1-i}{\sqrt{2}}t\right),$$

A là hằng số tuỳ ý. *Chú ý :* Phần thực và phần ảo của nghiệm, nếu xét riêng biệt, sẽ không thoả mãn phương trình đã cho.

1429. *Giải.* Thay x bởi $-x$. Khi đó $f'(-x) = xf(x) + p$. Cộng phương trình này với phương trình đã cho ta có $f'(x) + f'(-x) + xf(-x) - xf(x) = 2p$. Đặt $f(x) - f(-x) = g(x)$ thì suy ra $g'(x) - xg(x) = 2p$, từ đó

$$g(x) = Ce^{x^2/2} + 2pe^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt.$$

Vì $g(x)$ là hàm lẻ, nên $C = 0$ và ta có, một mặt $f(x) = f(-x) + g(x)$, mặt khác $f'(x) = -xf(-x) + p = -f'(-x) + g'(x)$. Từ đó, nếu đặt $f(-x) \equiv h(x)$ thì ta nhận được phương trình $h'(x) - xh(x) = g'(x) - p$. Giải phương trình này ta tìm được $h(x)$ và cuối cùng $f(x) = h(-x)$.

1430. *Giải.* Ta có $y'\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2y(t)$. Thế $x = \frac{1}{t}$. Khi đó

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}y\left(\frac{1}{x}\right).$$

Đạo hàm hệ thức này theo x, ta được

$$y''(x) = \frac{2}{x^3}y\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}y'\left(\frac{1}{x}\right).$$

Thay biểu thức thuận tiện hơn của $y\left(\frac{1}{x}\right)$ và $y'\left(\frac{1}{x}\right)$ vào ta có

$$y''(x) = \frac{2}{x^3}(-x^2y'(x)) + \frac{1}{x^4}(-x^2y(x)) = 0$$

hoặc là $y''(x) = -\frac{2}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}y(x)$.

Phương trình Ơle này có nghiệm

$$y(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x| + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right).$$

Thay giá trị này vào phương trình đã cho :

$$y(x) = Cx^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ khi } x > 0 ;$$

$$y(x) = C|x|^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x| - \frac{\pi}{3}\right) \text{ khi } x < 0.$$

1433. Tất cả các nghiệm cắt biên của miền $1 \le |x| + |y| \le \sqrt{6}$ đều đi vào trong miền này và ở trong đó không có điểm cân bằng. Do đó phải có một nghiệm tuần hoàn ở trong miền này. Khi $m = n = 1$ hệ có nghiệm tuần hoàn

$$x = \sqrt{2}\cos at,\ y = \sqrt{2}\sin at.$$

1434. $\int_0^x f(s)\cos s\,ds$ và $\int_0^x f(s)\sin s\,ds$ bị chặn khi $x \to +\infty$.

1437. $\lambda \ne \frac{2\pi k}{\omega}i,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

1440. Từ giả thiết suy ra có một điểm $x_o \in (a ; b)$ sao cho $y_1(x_o) \ne 0$. Gọi $(\alpha ; \beta)$ là khoảng cực đại nằm trong $(a ; b)$, chứa x_o có tính chất : $y_1(x) \ne 0$ với mọi $x \in (\alpha ; \beta)$. Trong $(\alpha ; \beta)$ ta có $\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} \equiv 0$ suy ra $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$, tức là $y_2(x) = Cy_1(x)$, $C = \text{const}$ (phụ thuộc tuyến tính trên $(\alpha ; \beta)$). Do đó, theo giả thiết, $(\alpha ; \beta)$ phải được chứa thực sự trong $(a ; b)$, $(\alpha ; \beta) \ne (a ; b)$. Có hai trường hợp xảy ra : hoặc $a < \alpha$ $(\beta \le b)$ hoặc $\beta < b$ $(a = \alpha)$. Xét trường hợp thứ nhất theo hai khả năng :

a) $a < \alpha$ và $\beta = b$. Dễ thấy $y_1(\alpha) = 0$ (do tính liên tục của y_1 và tính cực đại của $(\alpha ; \beta)$).

a_1) Nếu có một dãy $x_n (n = 1, 2, ...)$ dần đến $\alpha - 0$ mà $y_1(x_n) = 0$ thì suy ra $y_1'(\alpha) = 0$ (do định lí số gia hữu hạn Lagrăngiơ) và từ đó $y_2'(\alpha) = 0$ (vì $y_2 = Cy_1$, khi $x \in [\alpha ; b)$ và y_i' liên tục).

Vậy α là giá trị cần tìm.

a_2) Nếu ngược lại thì sẽ có một khoảng $(\alpha - \delta ; \alpha) \subset (a ; b)$ sao cho $y_1(x) \neq 0$ với mọi $x \in (\alpha - \delta ; \alpha)$, giả thiết rằng δ là số dương lớn nhất có tính chất đó, $0 < \delta \leq \alpha - a$. Như phần trước ta lại có

$$y_2(x) = C^* y_1(x),\ x \in (\alpha - \delta ; \alpha),\ C^* = \text{const}.$$

Do đó ở trên $(\alpha - \delta ; b)$ ta thấy

$$y_2'(x) = Cy_1'(x) \text{ khi } x > \alpha,$$

$$y_2'(x) = C^* y_1'(x) \text{ khi } x < \alpha.$$

Còn chính tại $x = \alpha$ thì $Cy_1'(\alpha) = C^* y_1'(\alpha)$ hay $(C - C^*) y_1''(\alpha) = 0$. Nếu $y_1'(\alpha) = 0$ thì như phần a_1) đã thấy, chứng minh kết thúc. Nếu $y_1'(\alpha) \neq 0$ thì $C = C^*$, và như vậy ta đã có một khoảng rộng hơn là $(\alpha - \delta ; b)$ mà ở trên đó $y_2(x) = Cy_1(x)$, tức là y_1, y_2 phụ thuộc tuyến tính ở trên đó.

Ta lại xét tiếp tại $\alpha - \delta$ bằng quá trình như đã làm tại α. Tóm lại, chỉ có một trường hợp đáng quan tâm có thể xảy ra là khi δ lặp lại nhiều lần (hữu hạn hoặc vô hạn lần). Nếu sau một số hữu hạn n lần mà $\alpha - \delta_1 - \delta_2 - ... - \delta_n = a$ hoặc khi n bằng vô hạn mà $\alpha - \delta_1 - \delta_2 - ... - \delta_n - ... = a$ thì y_1, y_2 sẽ phụ thuộc tuyến tính trên $(a ; b)$, mâu thuẫn với giả thiết. Nếu $\alpha_1 = \alpha - \delta_1 - \delta_2 - ... - \delta_n - ... > a$ thì như vậy tại α_1 phải xảy ra trường hợp a_1) và chứng minh cũng kết thúc.

b) $a < \alpha$ và $\beta \leq b$. Sau khi có $\alpha - \sum_i \delta_i = a$ sẽ trở lại làm tương tự ở phía phải của β. Trường hợp thứ hai làm tương tự.

Tóm lại, bài toán đã được giải trong tất cả các trường hợp có thể xảy ra.

1441. Nếu tập hợp không điểm của nghiệm không đồng nhất bằng không $y = y(x)$ trên $(a ; b)$ có chứa một điểm tụ x_o thì tại x_o ta có

$y(x_o) = y'(x_o) = 0$ (dùng định lí Rôn). Nhưng như vậy, theo định lí tồn tại duy nhất nghiệm, suy ra mâu thuẫn là $y(x) \equiv 0$.

1442. Nếu có vô số không điểm trên [a ; b] hữu hạn, thì tập các không điểm sẽ chứa ít nhất một điểm phụ thuộc [a ; b] và tiếp tục như lời giải của bài toán 1441.

1443. Trả lời ; $f(t) \neq t$, $f(+\infty) = f(-\infty) \neq \infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t) + 1}{[f(t) - t](t^2 + 1)}\, dt = 0.$$

1448. Trước hết theo định lí so sánh ta thấy $x_2 > x_2^*$. Sau đó tìm cách áp dụng bài toán 1034 (với chú ý rằng tỉ số $\frac{z}{y}$ ở bài toán 1034 là giảm một cách thực sự) hoặc cũng có thể chứng minh trực tiếp, chẳng hạn bằng phép phản chứng.

1461. Đây là một bài tập giải tích.

1468. Xem [3] trang 48.

1477. Có thể xem là một bài tập về phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp một tuyến tính, vì phương trình mà thừa số tích phân $\mu(x, y)$ phải thoả mãn có dạng

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

1480. Từ chú ý rằng $xy_1' = xy_2'$ ta được nghiệm tổng quát

$$y_1 = C_2x - C_1, \qquad (1)$$
$$y_2 = C_2x - 2C_1,$$

trong đó C_o, C_2 là hai hằng số bất kì. Nghiệm ứng với điều kiện ban đầu cho trước $(x_o,\ y_1^o, y_2^o)$ có dạng (1) với các hằng số C_i xác định từ hệ hai phương trình đại số tuyến tính sau :

$$\begin{cases} -C_1 + x_oC_2 = y_1^o, \\ -2C_1 + x_oC_2 = y_2^o. \end{cases} \qquad (2)$$

Định thức của hệ bằng x_o. Vậy nếu $x_o \neq 0$ thì có duy nhất C_1, C_2, tức là có duy nhất nghiệm. Nếu $x_o = 0$ thì từ (2) ta thấy có C_1 khi và chỉ khi $2y_1^o - y_2^o = 0$. Lúc này C_2 có thể lấy tuỳ ý và vì thế nghiệm không duy nhất.

Vả lại điều vừa nói cũng dễ thấy nếu ta viết hệ dưới dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & -\frac{1}{x} \\ \frac{2}{x} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

và chú ý rằng $x = 0$ là điểm gián đoạn duy nhất của ma trận hệ số.

Hai nghiệm $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ của hệ đã cho, với

$$\begin{cases} y_1 = c_2x - c_1 \\ y_2 = c_2x - 2c_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = d_2x - d_1 \\ z_2 = d_2x - 2d_1, \end{cases}$$

trong đó c_i, d_i là các hằng số nào đó, là độc lập tuyến tính với $x \in (-\infty ; +\infty)$ khi và chỉ khi $c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$. Giả sử y, z là hai nghiệm độc lập tuyến tính bất kì nào đó, ta tính định thức Vrônxki của chúng

$$W[y, z] = \begin{vmatrix} c_2x - c_1 & c_2x - 2c_1 \\ d_2x - d_1 & d_2x - 2d_1 \end{vmatrix} = (c_1d_2 - c_2d_1)x = Cx,$$

trong đó $C = c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$.

Như vậy mặc dầu y, z là hai nghiệm độc lập tuyến tính, nhưng định thức Vrônxki của chúng không phải luôn luôn khác không trên $(-\infty ; +\infty)$, mà

$W[y, z](0) = 0$. Nhưng ở đây không gặp phải mâu thuẫn, vì điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn của ma trận hệ số.

1481. Tương tự lời giải bài 1480.

1482. a) Nếu có thể bổ sung vào hệ m vectơ hàm ở (1) n – m vectơ hàm nữa để nhận được một hệ nghiệm cơ bản của một hệ dạng (2) thì bản thân hệ m vectơ hàm ở (1) đã là một hệ gồm m vectơ hàm độc lập tuyến tính trên (a ; b). Giả sử ngược lại, có giá trị $x_o \in (a ; b)$ nào đó sao cho

$$\text{rang } \{y^{(i)}(x_o), i = 1, ..., m\} < m,$$

thì có các số $C_1, C_2, ..., C_m$ nào đó không đồng thời bằng không sao cho

$$\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}(x_o) = 0.$$

Nếu vậy thì theo định lí duy nhất nghiệm, nghiệm

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}(x)$$

là nghiệm không của (2) trên (a ; b), điều đó mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của hệ m vectơ hàm (1) trên (a ; b).

b) Giả sử

$$\text{rang}\ \{y^{(i)}(x),\ i = 1, 2, ..., m\} = m,\ (x \in (a\ ;\ b)).$$

Chú ý rằng nếu ma trận Y(x) khả vi và $\det Y(x) \neq 0$ tại mọi $x \in (a\ ;\ b)$ thì có duy nhất một hệ vi phân dạng (2) nhận Y(x) làm ma trận nghiệm cơ bản, với ma trận hệ số

$$A(x) = Y'(x)\ Y^{-1}(x).$$

Lấy x_1 là một điểm tuỳ ý nào đó thuộc (a ; b). Theo giả thiết, phải có một định thức con cấp m nào đó lập nên từ các cột $k_1, k_2, ..., k_m$ của ma trận sau đây khác không :

$$(y_k^{(i)}(x_1)),\ i = 1, ..., m\ ;\ k = 1, ..., n \tag{3}$$

Ta kí hiệu định thức đó là $D_{k_1k_2...k_m}(x_1)$. Do tính liên tục, định thức $D_{k_1k_2...k_m}(x)$ phải khác không trong một khoảng nào đó $(a_1\ ;\ b_1)$ chứa x_1 và nằm trong (a ; b). Trên $(a_1\ ;\ b_1)$ ta bổ sung thêm vào hệ gồm m vectơ hàm ở (1) (n − m) vectơ hàm mới

$$\{\ y_k^{(i)}(x)\},\ i = m + 1, ..., n\ ;\ (k = 1, ..., n), \tag{4}$$

với các tính chất sau :

1. Các toạ độ thứ $k_1, k_2, ..., k_m$ của các vectơ hàm ở (4) bằng không :

$$y_k^{(i)}(x) \equiv 0 \text{ khi } k = k_1, k_2,..., k_m,\ i = m + 1, ..., n\ ;\ x \in (a_1\ ;\ b_1)\ ;$$

2. Tại các toạ độ khác $k_1, k_2,..., k_m$ thì chọn sao cho có dạng thức ma trận

$$(y_k^{(i)}(x))_{\substack{i = m+1,...,n \\ k \neq k_1,...,k_m}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) & & & & 0 \\ & \varepsilon_1(x) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & \varepsilon_1(x) \end{pmatrix},$$

trong đó $\varepsilon_1(x)$ là hàm khả vi nào đó trên $[a_1\ ;\ b_1]$ (nếu $a \neq a_1$, $b \neq b_1$), dương trong $(a_1\ ;\ b_1)$ và $\varepsilon_1(a_1) = \varepsilon_1(b_1) = \varepsilon_1'(a_1) = \varepsilon_1'(b_1) = 0$.

Dễ xây dựng một hàm $\varepsilon_1(x)$ với các tính chất đó.

Kết hợp (1) với (4) ta sẽ có trên $(a_1 ; b_1)$ một ma trận cấp n$Y(x)$ có tính chất : $Y(x)$ khả vi và

$$|\det Y(x)| = |D_{k_1 \dots k_m}(x)|\ \varepsilon_1^{n-m}(x) > 0.$$

Vậy ở trên $(a_1 ; b_1)$ ta xây dựng được hệ (2) với

$$A(x) = Y'(x)\, Y^{-1}(x).$$

Để "kéo dài" hệ (2) lên cả $(a ; b)$, ta làm như sau : Tại $x = x_2 = b_1$, theo giả thiết lại phải có một định thức cấp m nào đó $D_{l_1 l_2 \dots l_m}(x_2) \neq 0$ và lặp lại quá trình như đã làm tại x_1, nhưng bây giờ hàm khả vi là $\varepsilon_2(x)$ trên $[b_1 ; b_2]$, $\varepsilon_2(x)$ dương trong $(b_1 ; b_2)$, $\varepsilon_2(b_1) = \varepsilon_2(b_2) = \varepsilon_2'(b_1) = \varepsilon_2'(b_2) = 0$.

Cứ tiếp tục quá trình đó ở cả hai phía của $(a_1 ; b_1)$, do giả thiết, ta không bị dừng lại trước khi "kéo dài" được hệ (2) lên cả $(a ; b)$.

Chú ý : Thực ra ma trận $A(x)$ được xây dựng theo cách trên còn chưa được xác định tại một tập hợp không quá đếm được các điểm trên $(a ; b)$, đó là các điểm $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ Tuy nhiên điều đó có thể khắc phục được, vì để cho đơn giản, khi tiến hành ta đã "dán" $\varepsilon_i(x)$ với $\varepsilon_{i+1}(x)$ một cách khả vi tại các điểm $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ mà điều đó không nhất thiết để cho $Y(x)$ khả vi và không suy biến trên $(a ; b)$.

1483. Gọi K là tập hợp các không điểm của nghiệm $y(x)$ trên $[a_1 ; b_1]$. Từ giả thiết ta thấy K phải có ít nhất một điểm tụ $x_o \in [a_1 ; b_1] \cap K$. Bằng cách áp dụng nhiều lần định lí Rôn cho $y, y', \dots, y^{(n-2)}$ và sử dụng tính liên tục của $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, ta thấy

$$y(x_o) = y'(x_o) = \dots = y^{(n-1)}(x_o) = 0.$$

Theo định lí tồn tại duy nhất nghiệm thì $y(x) \equiv 0$ trên $(a ; b)$.

Bài toán này là tổng quát hoá của bài toán 1442.

1485. Trước hết giải phương trình

$$y' - ay = 0,$$

sau đó áp dụng phương pháp biến thiên hằng số Lagrăngiơ. (Đây là một phương trình vi phân đối số lệch).

1487. Vì y_1 và s^2y_1 cùng là nghiệm của (E) nên

$$y_1' = ay_1^2 + 2by_1 + au^2 \qquad (1)$$

$$s^2y_1' = as^4y_1^2 + 2bs^2y_1 + au^2. \qquad (2)$$

Nhân phương trình (1) với s^2 rồi đem trừ đi (2) ta được

$$(1 - s^2)(as^2 y_1^2 - au^2) = 0.$$

Dĩ nhiên có thể xem $s^2 \neq 1$. Hệ (1), (2) tương đương với hệ sau đây :

$$\begin{cases} y_1' = ay_1^2 + 2by_1 + au^2, & (1) \\ a(s^2y_1^2 - u^2) = 0. & (3) \end{cases}$$

Nếu $a \equiv 0$ thì (E) trở thành một phương trình tuyến tính thuần nhất, các nghiệm đều tỉ lệ với nhau.

Giả sử $a \neq 0$, $s \neq 0$. Từ (3) ta có

$$y_1 = \varepsilon\frac{u}{s}, \varepsilon = \pm 1.$$

Thay y_1 vào (1) ta được điều kiện (C) cần tìm là

$$\frac{u' - 2bu}{au^2} = \varepsilon\left(s + \frac{1}{s}\right), \varepsilon = \pm 1 \qquad (C)$$

Chú ý rằng điều kiện (C) là bất biến khi thay s bởi $\frac{1}{s}$, vả lại điều đó cũng có thể thấy ngay ở đầu bài của bài toán.

Bây giờ giả sử điều kiện (C) được thoả mãn.

Phương trình (E) có hai nghiệm riêng là

$$y_1 = \varepsilon\frac{u}{s} \text{ và } y_2 = \varepsilon us, \varepsilon = \pm 1.$$

Dùng phép thế

$$z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

ta nhận được phương trình

$$z' = \varepsilon au\left(\frac{1}{s} - s\right)z.$$

Phương trình cuối này có thể tích phân được nhờ một lần cầu phương.

1488. Giả sử (1) có hai thừa số tích phân cho trước $\lambda(x + y)$ và $\mu(x - y)$. Khi đó tích phân tổng quát của (1) có dạng

$$f\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \text{const},$$

trong đó f là một hàm khả vi tuỳ ý.

Từ hệ thức

$$\lambda P dx + \lambda Q dy = df\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = 0,$$

ta xác định được các hàm P và Q thông qua λ, μ cho trước và f tuỳ ý như sau :

$$P(x, y) = \frac{\lambda\mu_x' - \mu\lambda_x'}{\lambda^3} f'\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

$$Q(x, y) = \frac{\lambda\mu_y' - \mu\lambda_y'}{\lambda^3} f'\left(\frac{\mu}{\lambda}\right). \qquad (2)$$

Nhìn vào (2) ta thấy, ứng với mỗi cặp λ, μ cho trước, có vô số cặp P, Q, tức là có vô số phương trình dạng (1), xác định từ hệ thức (2) khi cho f là một hàm khả vi tuỳ ý của một biến số, sao cho phương trình vừa lập được (1) nhận đồng thời $\lambda(x + y)$ và $\mu(x - y)$ làm thừa số tích phân của nó.

1489. a) Từ hệ thức

$$\frac{\partial}{\partial x}(X(x)y + X_1(x)) = \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y)(X(x)y + X_1(x))]$$

suy ra

$$f(x, y) = \frac{Ay^2 + By + C}{Dy + E},$$

với $A = X'(x)/2$, $B = X_1'(x)$, $C = X_2'(x)$, $D = X(x)$, $E = X_1(x)$, trong đó X, X_1, X_2 là các hàm của biến x.

b) Điều kiện cho A, B, C, D, E là

$$E(2A - D') = D(B - E').$$

Tích phân tổng quát là

$$D\frac{y^2}{2}\exp\left(\int\frac{2A - D'}{D}dx\right) + Ey\exp\left(\int\frac{2A - D'}{D}dx\right) +$$
$$+ \int C\exp\left(\int\frac{2A - D'}{D}dx\right)dx = \text{const}.$$

1490. *Trả lời :* Điều kiện để cho phương trình (1) thừa nhận một tích phân trung gian dạng (2) là

$$\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} = aX_1(x) + X_2(x), \tag{3}$$

trong đó X_1 và X_2 là hai hàm bất kì nào đó của biến x, chỉ cần chúng thoả mãn hệ thức

$$X_2 + X_1' + X_1^2 = 0. \tag{4}$$

Khi đó tích phân trung gian (2) được xác định như sau :

$$f(x, y) = X(x), \tag{5}$$

$$\varphi_x' = bX, \varphi_y' = aX - X', \tag{6}$$

ở đây X liên hệ với X_1, X_2 bởi hệ thức :

$$\frac{X'}{X} = X_1 \text{ và } \frac{X''}{X} = -X_2.$$

Chỉ dẫn : Đạo hàm hệ thức (2) và đem đồng nhất với (1) ta được

$$f_y' = 0, a = \frac{f_x' + \varphi_y'}{f}, b = \frac{\varphi_x'}{f}. \tag{7}$$

Vậy hàm f(x, y) chỉ phụ thuộc vào x và nếu kí hiệu f = X(x) thì từ (7) suy ra (5), (6). Từ (6), vì $\varphi_{xy}'' = \varphi_{yx}''$, ta nhận được điều kiện (3).

Nếu b = 0 thì từ (3) ta có

$$-\frac{\partial a}{\partial x} = aX_1 + X_2.$$

1491. Đạo hàm hai lần hàm y từ (1) và đem kết quả nhận được đồng nhất với phương trình y" = f(x), suy ra hệ phương trình để xác định P, Q là

$$\begin{cases}(x - a)P(x) + (x - b)Q(x) = 0,\\ P(x) + Q(x) = 1.\end{cases}$$

1492. Cùng thay y_1 và $\frac{1}{y_1}$ vào phương trình đã cho ta tìm được $y_1' = \sqrt{-q}\, y_1$ (hay $y_1 = \exp\left(\int\sqrt{-q}dx\right)$), rồi đạo hàm đẳng thức này một lần nữa ta có

$$y_1'' = -\left(q + \frac{q'}{2\sqrt{-q}}\right)y_1.$$

Thay y_1', y_1'' vào phương trình

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

suy ra điều kiện cho p và q là :

$$q' + 2pq = 0. \qquad (1)$$

Ngược lại, nếu điều kiện (1) được thoả mãn thì phương trình đã cho có dạng

$$2qy'' - q'y' + 2q^2y = 0,$$

và phương trình này có hai nghiệm riêng

$$y_1 = \exp\left(\int\sqrt{-q}dx\right), y_2 = \frac{1}{y_1} = \exp\left(-\int\sqrt{-q}dx\right),$$

nên nghiệm tổng quát là

$$y = Ay_1 + By_2.$$

Với $p = -\frac{1}{x}$ thì $q = Cx^2$.

Nếu C dương, tức $C = a^2$, thì nghiệm tổng quát là

$$y = A\cos\frac{ax^2}{2} + B\sin\frac{ax^2}{2}.$$

Nếu C âm, $C = -b^2$ thì nghiệm tổng quát là

$$y = A\mathrm{ch}\frac{bx^2}{2} + B\mathrm{sh}\frac{bx^2}{2}.$$

1493. Tính y', y" từ y = zY rồi thay vào phương trình đã cho với chú ý $Y'' + pY' + qY = 0$ ta được

$$z''Y + z'(2Y' + pY) = 0. \qquad (1)$$

Đạo hàm (1) theo x một lần nữa và thay $Y'' = -pY' - qY$ ta có

$$(3z'' - pz')Y' + (z''' - 2qz' + p'z' + pz'')Y = 0. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình của z :

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 + \frac{p^2 - 2p' - 4q}{2} = 0. \qquad (3)$$

Đây là phương trình thuần nhất đối với z', z", z"' và nếu z là một nghiệm của (3) thì Az + B (A, B = const) cũng là một nghiệm của (3). Nghiệm tổng quát của (3) phụ thuộc ba hằng số.

1494. Từ $z = y_1y_2$, $y_1'' = y_1f$, $y_2'' = y_2f$ suy ra

$$2zz'' - z'^2 = 4z^2f - (y_1y_2' - y_2y_1')^2 = 4z^2f + \text{const},$$

vì

$$y_1y_2'' - y_2y_1'' = y_1y_2f - y_1y_2f \equiv 0.$$

1495. Phương trình của z là

$$z^{(4)} - 10fz'' - 10f'z' + 3z(3f^2 - f'') = 0. \qquad (1)$$

Nếu biết hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính y_1, y_2 của (E) thì nghiệm tổng quát của (E) là $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Như vậy y_1^3, y_2^3, $(C_1y_1 + C_2y_2)^3$ là các nghiệm của (1). Hiệu

$$(C_1y_1 + C_2y_2)^3 - C_1^3y_1^3 - C_2^3y_2^3$$

cũng là một nghiệm của (1). Bằng cách chọn C_i, ta được bốn nghiệm riêng độc lập tuyến tính của (1) là

$$y_1^3, y_1^2y_2, y_1y_2^2, y_2^3.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (1) là

$$z = Ay_1^3 + By_1^2y_2 + Cy_1y_2^2 + Dy_2^3.$$

1496. $9(X - 1) = 2(x + C)^{-2}$. Nghiệm tổng quát

$$y = (x + C)^{1/3}e^{-x}[A + B(x + C)^{1/3}],$$

với A, B là các hằng số tuỳ ý.

1497. $p'q'' - q'p'' - q'^2 + p'(pq' - qp') = 0. \qquad (*)$

Chỉ dẫn : Đạo hàm phương trình đã cho (của y_1)

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \qquad (1)$$

và chú ý rằng y_1' cũng thoả mãn (1) ta có

$$p'y_1' + q'y_1 = 0\,; \qquad (2)$$

đạo hàm (2) một lần nữa

$$p'y_1'' + (p'' + q')y_1' + q''y_1 = 0. \qquad (3)$$

Khử y_1, y_1', y_1'' từ (1), (2) và (3) suy ra (*).

1498. Đạo hàm hai vế của (2) rồi so sánh với (1) suy ra

$$A' + 2aC = 0,\ A + 2bC = 0,\ C' + 2cC = 0,\ B = 0,$$

Từ đó có điều kiện cho các hàm a, b, c :

$$b' = a + 2bc.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] А. Ф. Филиппов. Сборник задач по дифф. уравнениям. Наука, Москва 1973.

[2] Н. М. Матвеев. Сборник задачи упражнений по обыкновенныйдифф. уравнениям. Вышэйшая, школа, Минск 1970.

[3] И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифф уравнений. Наука, Москва 1970.

[4] Э. А. Коддингтони. Н. Левинсон Теория обыкновенных дифф. уравнений. Иност ранная литература, Москва 1958 .

[5] Ь. П. Демидович. Лекции по математической теории устойчивости. Наука. Москва 1967.

[6] Hoàng Hữu Đường, Võ Đức Tôn, Nguyễn Thế Hoàn. Phương trình vi phân (hai tập). Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1970.

[7] Hoàng Hữu Đường. Lý thuyết phương trình vi phân. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội 1975.

[8] Gaston Julia. Exercices d' Analyse (équtions differéntielles). Paris 1948.

[9] Abbé Potron. Exercices de calcul differéntiel et integral. Premier et second volume. Paris 1926.

[10] Н. Н. Бухгольц. Основой курс теоретической механики. Частв I. Наука, Москва 1972.

[11] В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. Москва 1958 (đã dịch ra tiếng Việt).

[12] В. И . Арнольд. Обыкновенные дифф. уравнения. Наука, Москва 1971.

[13] Ф. Хартман. Оьыновениые дифф. уравнения. Мир, Москва 1970.

[14] Э . Камке. Справочник по оьыкновенным Дифф. уравнениям. Наука, Москва 1965.

[15] Л. Э. Эльсгольц. Дифф. уравнеиия н вариационное исчисление. Москва 1965.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập nội dung :
NGUYỄN TRỌNG BÁ

Biên tập kĩ thuật :
TRẦN THU HƯƠNG

Trình bày bìa :
THANH TÙNG

Sửa bản in :
PHÒNG SỬA BẢN IN (NXB GIÁO DỤC)

Chế bản :
PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

BÀI TẬP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mã số : 7K607T7 – DAI

In 1.500 bản, khổ 16 x 24 cm, tại Xí nghiệp In ACS Việt Nam.
Số 10 Phạm Văn Đồng – Kiến Thụy – Hải Phòng.
Giấy phép xuất bản số : 11 – 2007/CXB/333 – 2119/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2007.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN – HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO ĐẠI HỌC BỘ MÔN TOÁN
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. Giải tích hàm	*Nguyễn Xuân Liêm*
2. Bài tập giải tích hàm	*Nguyễn Xuân Liêm*
3. Tôpô đại cương - Độ đo và tích phân	*Nguyễn Xuân Liêm*
4. Giải tích (hai tập)	*Nguyễn Xuân Liêm*
5. Toán học cao cấp (3 tập)	*Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)*
6. Bài tập toán học cao cấp (3 tập)	*Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)*
7. Đại số đại cương	*Nguyễn Hữu Việt Hưng*
8. Số đại số	*Hoàng Xuân Sính*
9. Hình học vi phân	*Đoàn Quỳnh*
10. Giải tích số	*Nguyễn Minh Chương (Chủ biên)*
11. Phương trình đạo hàm riêng	*Nguyễn Minh Chương*
12. Cơ sở phương trình vi phân và lí thuyết ổn định	*Nguyễn Thế Hoàn – Phạm Phu*
13. Mở đầu lí thuyết xác suất và ứng dụng	*Đặng Hùng Thắng*
14. Bài tập xác suất	*Đặng Hùng Thắng*
15. Lí thuyết xác suất	*Nguyễn Duy Tiến – Vũ Viết Yên*
16. Xác suất thống kê	*Nguyễn Văn Hộ*

Bạn đọc có thể mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên; 187B Giảng Võ; 232 Tây Sơn; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh; Số 62 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1; Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng, Quận 3; 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4.

Website : www.nxbgd.com.vn

8 934980 760314

Giá : 35.000 đ