ĐẶNG HÙNG THẮNG

BÀI TẬP XÁC SUẤT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Phần A

CÁC ĐỀ TOÁN

Chương I

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Gieo đồng thời hai con xúc sắc. Tính xác suất để :

a) Tổng số nốt xuất hiện trên hai con là 7.

b) Tổng số nốt xuất hiện trên hai con là 8.

c) Số nốt xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 2.

2. Gieo đồng thời ba con xúc sắc. Tính xác suất để :

a) Tổng số nốt xuất hiện của ba con là 8.

b) Tổng số nốt xuất hiện của ba con là 11.

3. Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để :

a) Cả 6 người đều là nam.

b) Có 4 nam và 2 nữ.

c) Có ít nhất hai nữ.

4. Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu đen. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tìm xác suất để chọn được 3 quả trắng, 2 quả đỏ và 1 quả đen.

5. Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 tới 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để :

a) Tất cả 10 tấm thẻ đều mang số chẵn.

b) Có đúng 5 số chia hết cho 3.

c) Có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có 1 số chia hết cho 10.

6. Một công ti cần tuyển 2 nhân viên. Có 6 người nạp đơn trong đó có 4 nữ và 2 nam. Khả năng được tuyển của mỗi người là như nhau.

a) Tính xác suất để cả hai nữ được chọn nếu biết rằng ít nhất một nữ đã được chọn.

b) Giả sử Hoa là một trong 4 nữ. Tính xác suất để Hoa được chọn. Tính xác suất để Hoa được chọn nếu biết rằng ít nhất một nữ đã được chọn.

7. Một hòm có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn.

8. Ở một nước có 50 tỉnh, mỗi tỉnh có hai đại biểu Quốc hội. Người ta chọn ngẫu nhiên 50 đại biểu trong số 100 đại biểu để thành lập một ủy ban. Tính xác suất để

a) Trong ủy ban có ít nhất một đại biểu của thủ đô.

b) Mỗi tỉnh đều có đúng 1 đại biểu trong ủy ban.

9. Tính xác suất để 12 người chọn ngẫu nhiên có ngày sinh rơi vào 12 tháng khác nhau.

10. Trong tuần lễ vừa qua ở thành phố có 7 tai nạn giao thông. Tính xác suất để mỗi ngày có đúng một tai nạn.

11. Một đoàn tầu có 4 toa đỗ ở một sân ga. Có 4 hành khách từ sân ga lên tầu, mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, 1 toa có 1 người và 2 toa còn lại không có ai.

12. Một máy bay có 3 bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Máy bay sẽ rơi khi có hoặc 1 viên đạn trúng vào A, hoặc hai viên đạn trúng vào B, hoặc ba viên đạn trúng vào C. Giả sử các bộ phận A, B, C lần lượt chiếm 15%, 30% và 55% diện tích máy bay. Tính xác suất để máy bay rơi nếu :

a) Máy bay bị trúng hai viên đạn.

b) Máy bay bị trúng ba viên đạn.

13. Một máy bay có 4 bộ phận A, B, C, D đặt liên tiếp nhau. Máy bay sẽ rơi khi có hai viên đạn trúng vào cùng một bộ phận, hoặc hai bộ phận kề nhau trúng đạn. Tính xác suất để máy bay rơi nếu :

a) 4 bộ phận có diện tích bằng nhau và máy bay bị trúng hai viên đạn.

b) Các bộ phận B, C, D có diện tích bằng nhau, bộ phận A có diện tích gấp đôi bộ phận B, và máy bay bị trúng hai viên đạn.

14. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số. Tính xác suất để số vé không có số 1 hoặc không có số 5.

15. Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số. Tính xác suất để số vé có chữ số 5 và chữ số chẵn.

16. Một đoàn tàu gồm 3 toa đỗ ở sân ga. Có 5 hành khách bước lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để mỗi toa đều có ít nhất một hành khách mới bước lên.

17. Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để ít nhất có một lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

18. Xạ thủ A bắn n viên đạn vào mục tiêu, còn xạ thủ B bắn m viên đạn vào mục tiêu đó. Xác suất bắn trúng của A trong một lần bắn (1 viên) là p_1, và của B là p_2. Tính xác suất để mục tiêu bị trúng ít nhất một viên đạn.

19. Trong một thành phố nào đó, tỉ lệ người thích xem bóng đá là 65%. Chọn ngẫu nhiên 12 người. Tính xác suất để trong đó có đúng 5 người thích xem bóng đá.

20. Gieo một con xúc sắc liên tiếp 6 lần. Tính xác suất để ít nhất có một lần ra "lục" (sáu).

21. Gieo một cặp hai con xúc sắc 24 lần. Tính xác suất để ít nhất có một lần cả hai con đều ra "lục".

22. Một sọt cam rất lớn được phân loại theo cách sau. Chọn ngẫu nhiên 20 quả cam làm mẫu đại diện. Nếu mẫu không có quả cam hỏng nào thì sọt cam được xếp loại 1. Nếu mẫu có một hoặc hai quả hỏng thì sọt cam được xếp loại 2. Trong trường hợp còn lại (có từ ba quả hỏng trở lên) thì sọt cam được xếp loại 3.

Giả sử tỉ lệ cam hỏng của sọt cam là 3%. Hãy tính xác suất để :

a) Sọt cam được xếp loại 1.

b) Sọt cam được xếp loại 2.

c) Sọt cam được xếp loại 3.

23. Trong một lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có xác suất bị cháy là $\frac{1}{4}$. Lớp học đủ ánh sáng nếu có ít nhất 4 bóng đèn sáng. Tính xác suất để lớp học không đủ ánh sáng ?

24. Một bài thi trắc nghiệm (multiple choice test) gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi cho 5 câu trả lời, trong đó chỉ có một câu đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm, và mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hú họa một câu trả lời. Tính xác suất để :

a) Anh ta được 13 điểm.

b) Anh ta bị điểm âm.

25. Gieo đồng thời 3 con xúc sắc. Anh là người thắng cuộc nếu có xuất hiện ít nhất 2 "lục". Tính xác suất để trong 5 ván chơi anh thắng ít nhất là ba ván.

26. Một người bắn 3 viên đạn. Xác suất để cả 3 viên trúng vòng 10 là 0,008, xác suất để 1 viên trúng vòng 8 là 0,15, và xác suất để 1 viên trúng vòng dưới 8 là 0,4.

Tính xác suất để xạ thủ đạt ít nhất 28 điểm.

27. Một máy bay có 5 động cơ, trong đó có 2 động cơ ở cánh phải, 2 động cơ ở cánh trái và 1 động cơ ở thân đuôi. Mỗi động cơ ở cánh phải và ở đuôi có xác suất bị hỏng là 0,1, còn mỗi động cơ ở cánh trái có xác suất bị hỏng là 0,05. Các động cơ hoạt động độc lập. Tính xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn trong các trường hợp sau :

a) Máy bay chỉ bay được nếu có ít nhất hai động cơ làm việc.

b) Máy bay chỉ bay được khi trên mỗi cánh của nó có ít nhất một động cơ làm việc.

28. Một người say rượu bước 8 bước. Mỗi bước anh ta tiến lên phía trước một mét hoặc lùi lại phía sau một mét với xác suất như nhau. Tính xác suất để sau 8 bước :

a) Anh ta trở lại điểm xuất phát.

b) Anh ta cách điểm xuất phát hơn $4m$.

29. Gieo ba con xúc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để :

a) Tổng số nốt xuất hiện là 8 nếu biết rằng ít nhất có một con ra nốt 1.

b) Có ít nhất một con ra lục nếu biết rằng số nốt trên 3 con là khác nhau.

30. Một gia đình có hai đứa con. Tìm xác suất để cả hai đều là con trai nếu biết rằng ít nhất trong hai đứa có một đứa là trai. (Giả thiết xác suất sinh con trai và con gái bằng nhau).

31. Một cuộc thi có 3 vòng. Vòng 1 lấy 90% thí sinh. Vòng 2 lấy 80% thí sinh của vòng 1 và vòng 3 lấy 90% thí sinh của vòng 2.

a) Tính xác suất để một thí sinh lọt qua 3 vòng thi.

b) Tính xác suất để một thí sinh bị loại ở vòng 2 nếu biết rằng thí sinh đó bị loại.

32. Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng (sinh đôi thật), hay do hai trứng khác nhau sinh ra (sinh đôi giả). Các cặp sinh đôi thật luôn có cùng giới tính. Đối với cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập với nhau và có xác suất 0,5 là con trai. Thống kê cho thấy 34% cặp sinh đôi đều là trai, 30% cặp sinh đôi đều là gái, và 36% cặp sinh đôi có giới tính khác nhau.

a) Tìm tỉ lệ cặp sinh đôi thật.

b) Chọn ngẫu nhiên một cặp sinh đôi thì được một cặp có cùng giới tính. Tính xác suất để đó là cặp sinh đôi thật.

33. Có hai chuồng thỏ. Chuồng thứ nhất có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng thứ hai có 3 con thỏ trắng và 7 thỏ đen. Từ chuồng thứ hai ta bắt ngẫu nhiên một con thỏ cho vào chuồng thứ nhất, rồi sau đó lại bắt ngẫu nhiên một con thỏ ở chuồng thứ nhất ra, thì được một thỏ trắng. Tính xác suất để thỏ trắng này là của chuồng thứ nhất.

34. Một chuồng gà có 9 con mái và 1 con trống. Chuồng gà kia có 1 con mái và 5 con trống. Từ mỗi chuồng ta bắt ra ngẫu nhiên một con làm thịt. Các con gà còn lại được dồn vào một chuồng thứ ba. Từ chuồng thứ ba này lại bắt ngẫu nhiên một con gà. Tính xác suất để ta bắt được gà trông.

35. Một chiếc máy bay có thể xuất hiện ở vị trí A với xác suất $\frac{2}{3}$ và ở vị trí B với xác suất $\frac{1}{3}$. Có ba phương án bố trí 4 khẩu pháo bắn máy bay như sau.

Phương án 1 : 3 khẩu đặt tại A, 1 khẩu đặt tại B.

Phương án 2 : 2 khẩu đặt ở A và 2 khẩu đặt ở B.

Phương án 3 : 1 khẩu đặt ở A và 3 khẩu đặt ở B.

Biết rằng xác suất bắn trúng máy bay của mỗi khẩu pháo là 0,7 và các khẩu pháo hoạt động độc lập với nhau, hãy chọn phương án tốt nhất.

36. Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỉ lệ bóng đèn đạt tiêu chuẩn là 80%. Trước khi xuất xưởng ra thị trường mỗi bóng đèn đều được qua kiểm tra chất lượng. Vì sự kiểm tra không thể tuyệt đối hoàn hảo, nên một bóng đèn tốt có xác suất 0,9 được công nhận là tốt, và một bóng đèn hỏng có xác suất 0,95 bị loại bỏ. Hãy tính tỉ lệ bóng đạt tiêu chuẩn sau khi qua khâu kiểm tra chất lượng sản phẩm.

37. Có bốn nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 5 người, nhóm thứ hai có 7 người, nhóm thứ ba có 4 người và nhóm thứ tư có 2 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong nhóm thứ nhất, nhóm thứ hai, nhóm thứ ba và nhóm thứ tư theo thứ tự là 0,8 ; 0,7 ; 0,6 và 0,5. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem xạ thủ này có khả năng ở trong nhóm nào nhất.

38. Trong số bệnh nhân ở một bệnh viện có 50% điều trị bệnh A ; 30% điều trị bệnh B và 20% điều trị bệnh C. Xác suất để chữa khỏi các bệnh A, B và C trong bệnh viện này tương ứng là 0,7 ; 0,8 và 0,9. Hãy tính tỉ lệ bệnh nhân được chữa khỏi bệnh A trong tổng số bệnh nhân đã được chữa khỏi bệnh.

39. Trong một kho rượu số lượng rượu loại A và rượu loại B bằng nhau. Người ta chọn ngẫu nhiên một chai rượu trong kho và đưa cho 5 người sành rượu nếm thử để xác định xem đây là loại rượu nào. Giả sử mỗi người có xác suất đoán đúng là 75%. Có 4 người kết luận chai rượu loại A và 1 người kết luận chai rượu loại B. Hỏi khi đó xác suất để chai rượu được chọn thuộc loại A là bao nhiêu ?

40. Biết rằng một người có nhóm máu AB có thể nhận máu của bất kì nhóm máu nào. Nếu người đó có nhóm máu còn lại (A hoặc B hoặc O) thì chỉ có thể nhận máu của người cùng nhóm với mình hoặc người có nhóm O.

Cho biết tỉ lệ người có nhóm máu O, A, B và AB tương ứng là 33,7% ; 37,5% ; 20,9% và 7,9%.

a) Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và một người cho máu. Tính xác suất để sự truyền máu thực hiện được.

b) Chọn ngẫu nhiên một người cần tiếp máu và hai người cho máu. Tính xác suất để sự truyền máu thực hiện được.

41. Một bệnh nhân bị nghi là có thể mắc một trong ba bệnh *A*, *B*, *C* với các xác suất tương ứng là 0,3 ; 0,4 và 0,3. Người đó đến khám bệnh ở 4 bác sĩ một cách độc lập. Bác sĩ thứ nhất chẩn đoán bệnh *A*, bác sĩ thứ hai chẩn đoán bệnh *B*, bác sĩ thứ ba chẩn đoán bệnh *C* và bác sĩ thứ tư chẩn đoán bệnh *A*. Hỏi sau khi khám bệnh xong, người bệnh cần đánh giá lại xác suất mắc bệnh *A*, *B*, *C* của mình là bao nhiêu. Biết rằng xác suất chẩn đoán đúng của mỗi ông bác sĩ là 0,6 ; và chẩn đoán nhầm sang hai bệnh còn lại là 0,2 và 0,2.

Chương II

ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

42. Một nhóm có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 3 người. Gọi X là số nữ ở trong nhóm. Lập bảng phân bố xác suất của X và tính EX, DX và mod$X$.

43. Cho ĐLNN X có phân bố xác suất như sau

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Tìm phân bố xác suất của $Y = \min\{X, 4\}$.

44. Một túi chứa 10 tấm thẻ đỏ và 6 tấm thẻ xanh. Chọn ngẫu nhiên ra ba tấm thẻ.

a) Gọi X là số thẻ đỏ. Tìm phân bố xác suất của X.

b) Giả sử rút mỗi tấm thẻ đỏ được 5 điểm và rút mỗi tấm thẻ xanh được 8 điểm. Gọi Y là số điểm tổng cộng trên ba thẻ rút ra. Tìm phân bố xác suất của Y.

45. Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối đồng chất. Gọi X là tổng số nốt xuất hiện trên hai mặt con xúc sắc. Lập bảng quy luật phân bố xác suất của X. Tính EX và DX.

46. Trong một chiếc hòm có 5 bóng đèn trong đó có 2 bóng tốt, 3 bóng hỏng. Ta chọn ngẫu nhiên từng bóng đem thử (thử xong không trả lại) cho đến khi thu được hai bóng tốt. Gọi X là số lần thử cần thiết. Tìm phân bố xác suất của X. Trung bình cần thử bao nhiêu lần ?

47. Hai xạ thủ **A** và **B** tập bắn. Mỗi người bắn hai phát. Xác suất bắn trúng đích của **A** trong mỗi lần bắn là 0,4 ; còn của **B** là 0,5.

a) Gọi X là số phát bắn trúng của **A** trừ đi số phát bắn trúng của **B**.

Tìm phân bố xác suất của X.

b) Tìm phân bố xác suất của

$$Y = |X|.$$

48. Trong một chiếc hộp có 4 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 4. Chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ rồi cộng hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là kết quả. Tìm phân bố xác suất của X.

49. Một người đi thi lấy bằng lái xe. Nếu thi không đạt anh ta lại đăng kí thi lại cho đến khi nào thi đạt mới thôi. Gọi X là số lần anh ta đi thi. Tìm phân bố xác suất của X, biết rằng xác suất thi đạt của anh ta là $\frac{1}{3}$. Giả sử có 243 người dự thi, mỗi người đều có xác suất thi đỗ là $\frac{1}{3}$ và cũng đều thi cho đến khi được bằng mới thôi. Có khoảng bao nhiêu người thi đạt ngay lần đầu ? Phải thi tới hai lần ? Phải thi ít nhất bốn lần ?

50. Cho hai ĐLNN X và Y có phân bố xác suất như sau

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,3	0,25	0,2	0,08	0,02

và

Y	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,2	0,15	0,1	0,05

a) Tính EX và EY.

b) Tính $P\{X + Y \leq 3\}$ nếu X và Y độc lập.

51. Hai đấu thủ A và B thi đấu cờ. Xác suất thắng của A là 0,4 trong mỗi ván chơi (không có hòa). Nếu thắng A sẽ được một điểm, nếu thua sẽ không được điểm nào. Trận đấu sẽ kết thúc khi hoặc A giành được 3 điểm trước (khi đó A là người thắng) hoặc B giành được 5 điểm trước (khi đó B là người thắng).

a) Tính xác suất thắng của A.

b) Gọi X là số ván cần thiết của toàn bộ trận đấu. Lập bảng phân bố xác suất của X.

52. Một lô hàng gồm 7 sản phẩm trong đó có 3 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên ra 4 sản phẩm để kiểm tra. Gọi X là số sản phẩm tốt trong 4 sản phẩm lấy ra. Tìm phân bố xác suất của X và tính EX.

53. Trong một chiếc hòm có 10 tấm thẻ trong đó 4 thẻ ghi số 1, 3 thẻ ghi số 2, 2 thẻ ghi số 3 và 1 thẻ ghi số 4.

Chọn ngẫu nhiên hai tấm thẻ và gọi X là tổng số thu được. Tìm phân bố xác suất của X.

54. Một người có một chùm chìa khóa 7 chiếc giống nhau trong đó chỉ có hai chiếc mở được cửa. Người đó thử ngẫu nhiên từng chiếc (thử xong bỏ ra ngoài) cho đến khi tìm được chìa mở được cửa. Gọi X là số lần thử cần thiết.

Hãy tìm phân bố xác suất của X và EX.

55. Một túi chứa 4 quả cầu trắng và 3 quả cầu đen. Hai người chơi A và B lần lượt rút một quả cầu trong túi (rút xong không trả lại vào túi). Trò chơi kết thúc khi có người rút được quả cầu đen. Người đó xem như thua cuộc và phải trả cho người kia số tiền là số quả cầu đã rút ra nhân với 5 USD.

Giả sử A là người rút trước và X là số tiền A thu được. Lập bảng phân bố xác suất của X. Tính EX. Nếu chơi 150 ván thì trung bình A được bao nhiêu ?

56. Các ĐLNN X và Y có bảng phân bố xác suất đồng thời như sau

X \ Y	1	2	3
1	0,12	0,15	0,03
2	0,28	0,35	0,07

a) Chứng minh rằng X và Y độc lập.

b) Tìm quy luật phân bố của ĐLNN $Z = XY$.

c) Tính EZ bằng hai cách và kiểm tra $EZ = EX.EY$.

57. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố xác suất như sau

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

Y	0	1	2	3	4
P	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

a) Tìm phân bố xác suất đồng thời của X, Y.

b) Tính $P\{X > Y\}$.

58. Cho X, Y là hai ĐLNN có phân bố xác suất đồng thời như sau

X \ Y	−1	1
−1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

Hãy tính EX, EY, cov (X, Y) và $\rho(X, Y)$.

59. Cho X, Y là hai ĐLNN có phân bố xác suất đồng thời như sau

X \ Y	−1	0	1
−1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	0	$\frac{2}{15}$	0

a) Tìm EX, EY, cov (X, Y) và $\rho(X, Y)$.

b) X và Y có độc lập hay không ?

60. Cho ĐLNN X có bảng quy luật phân bố như sau

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Xét ĐLNN $Y = X^3 - 4X^2 + 10$.

a) Tìm phân bố xác suất của Y.

b) Tính EY bằng hai cách.

c) Tính DY.

61. Cho X, Y, Z là ba ĐLNN độc lập có phân bố nhị thức. Biết rằng

$$X \backsim B(14\ ;\ 0{,}1)$$

$$Y \backsim B(9\ ;\ 0{,}1)$$

$$Z \backsim B(7\ ;\ 0{,}1)$$

Hãy tính $P\{X + Y + Z = 4\}$.

62. Giả sử $X \backsim B(2\ ;\ 0{,}4)$

$$Y \backsim B(2\ ;\ 0{,}7)$$

X và Y là hai ĐLNN độc lập.

a) Tìm phân bố xác suất của $X + Y$.

b) Chứng minh rằng $X + Y$ không có phân bố nhị thức.

63. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập.

a) Giả sử $X \backsim B(1\ ;\ 0{,}2)$ và $Y \backsim B(2\ ;\ 0{,}2)$. Lập bảng phân bố xác suất của X, Y và $X + Y$.

b) Giả sử $X \backsim B(1\ ;\ 0{,}5)$ và $Y \backsim B(2\ ;\ 0{,}2)$. Lập bảng phân bố xác suất của $X + Y$; $X + Y$ có phân bố nhị thức hay không ?

64. Tung một đồng xu cân đối $2n$ lần ; gọi $f(n)$ là xác suất để số lần ra mặt sấp bằng số lần ra mặt ngửa. Tính $f(n)$ và chứng tỏ rằng $f(n)$ là một hàm giảm của n.

65. Hai đấu thủ A và B đấu với nhau $2m + 1$ ván cờ. Xác suất thắng của A trong 1 ván là p. Tìm xác suất để A thắng nhiều ván hơn B. Tính giá trị của xác suất đó với $m = 2$ và $p = 0{,}25$.

66. (Bài toán Banach). Một nhà toán học luôn mang trong mình hai bao diêm, một bao ở túi phải, một bao ở túi trái. Khi cần lấy diêm ông ta chọn ngẫu nhiên một túi móc bao diêm từ túi ra và lấy một que diêm. Giả sử lúc đầu mỗi bao có n que diêm. Xét thời điểm mà nhà toán học phát hiện ra rằng bao diêm được móc ra đã hết diêm. Tính xác suất để khi đó bao kia còn k que diêm ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

67. Trong một cuộc xổ số người ta phát hành 10 vạn vé trong đó có 1 vạn vé trúng giải. Cần phải mua ít nhất bao nhiêu vé để với xác suất không nhỏ hơn 0,95 ta sẽ trúng ít nhất 1 vé ?

68. Trong một thành phố nhỏ, trung bình một tuần có 2 người chết.

Tính xác suất để

a) Không có người chết nào trong vòng 1 ngày.

b) Có ít nhất ba người chết trong vòng hai ngày.

69. Tại một trạm kiểm soát giao thông trung bình một phút có hai xe ôtô đi qua.

a) Tính xác suất để có đúng 6 xe đi qua trong vòng 3 phút.

b) Tính xác suất để trong khoảng thời gian t phút, có ít nhất 1 xe ô tô đi qua. Xác định t để xác suất này là 0,99.

* **70**. Tại một nhà máy nào đó trung bình một tháng có hai tai nạn lao động.

a) Tính xác suất để trong khoảng thời gian ba tháng xảy ra nhiều nhất là 3 tai nạn.

b) Tính xác suất để trong ba tháng liên tiếp, mỗi tháng xảy ra nhiều nhất một tai nạn.

* **71**. Một trạm cho thuê xe taxi có 3 chiếc xe. Hàng ngày trạm phải nộp thuế 8USD cho 1 chiếc xe (dù xe đó có được thuê hay không). Mỗi chiếc xe được cho thuê với giá 20USD.

Giả sử số yêu cầu thuê xe của trạm trong một ngày là ĐLNN X có phân bố Poátxông với tham số $\lambda = 2{,}8$.

a) Gọi Y là số tiền thu được trong 1 ngày của trạm. Lập bảng phân bố xác suất của Y. Tính số tiền trung bình trạm thu được trong 1 ngày.

b) Giải bài toán trên trong trường hợp trạm có 4 chiếc xe.

c) Trạm nên có 3 hay 4 chiếc xe ?

72. Số thư mà một cơ quan A nhận được trong một ngày là một ĐLNN X có phân bố Poátxông với tham số $\lambda = 1,5$. Tính xác suất để trong một ngày :

a) Cơ quan không nhận được thư nào.

b) Cơ quan nhận được 2 thư.

c) Cơ quan nhận được nhiều nhất 2 thư.

d) Cơ quan nhận được ít nhất 4 thư.

73. Một cửa hàng có 4 chiếc ôtô cho thuê ; số khách có nhu cầu thuê trong một ngày là một ĐLNN X có phân bố Poátxông.

a) Biết rằng $EX = 2$. Hãy tính số ôtô trung bình mà cửa hàng cho thuê trong một ngày.

b) Cửa hàng cần có ít nhất bao nhiêu ôtô để với xác suất không nhỏ hơn 0,98 cửa hàng đáp ứng được nhu cầu của khách hàng trong ngày ?

74. Số hoa mọc trong một chậu cây cảnh là một ĐLNN có phân bố Poátxông với tham số $\lambda = 3$. Người ta chỉ đem bán các chậu cây với số hoa là 2, 3, 4 hoặc 5.

a) Trong số các chậu cây đem bán có bao nhiêu phần trăm có 2 hoa ? 3 hoa ? 4 hoa và 5 hoa ?

b) Tính số hoa trung bình và độ lệch tiêu chuẩn số hoa của các chậu hoa đem bán.

75. Gieo một đồng tiền cho đến khi xuất hiện mặt ngửa thì dừng lại. Xác suất xuất hiện mặt ngửa là p. Gọi X là ĐLNN chỉ số lần gieo cần thiết.

a) Tìm phân bố xác suất của X.

b) Tìm phân bố xác suất của X với điều kiện trong n lần gieo đầu tiên chỉ đúng 1 lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa.

76. Cho $X \backsim$ Poátxông (λ_1)

$Y \backsim$ Poátxông (λ_2)

X và Y là hai ĐLNN độc lập.

Hãy tính $P\{X = k/X + Y = n\}$, ở đó $0 \leq k \leq n$.

Chương III

ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

77. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x) & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm mod.

c) Tính P{0,4 < X < 0,6}.

78. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ $f(x) = k(1-x)$ nếu $0 \le x \le 1$ và $f(x) = 0$ nếu trái lại. Tìm hằng số k, median và phương sai của X.

79. Cho ĐLNN liên tục X nhận giá trị trong khoảng $[0, \infty)$ có hàm phân bố

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2}\right\} & \text{với } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x \le 0 \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ, kì vọng, median và **mod**.

X **80.** Cho ĐLNN X có phân bố đều trên [1, 2]. Tính P{$2 < X^2 < 5$}.

81. Cho ĐLNN X có phân bố đều trên đoạn $[-1,3]$. Tính P{$X^2 < 2$}.

82. Cho ĐLNN X có hàm mật độ như sau

$$f(x) = \begin{cases} k(1+x) & \text{nếu } x \ge 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm EX.

83. Cho ĐLNN liên tục X có hàm phân bố

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ k(\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}) & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1. \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

ở đó $\alpha > \beta \geqslant 1$.

a) Tìm hằng số k.

b) Tính EX.

84. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tính P$\{X > 2\}$.

c) Tính median của X.

d) Tìm a để P$\{X < a\} = \frac{3}{4}$.

85. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2 - x) & \text{với } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Vẽ đồ thị của $f(x)$.

b) Tính P$\{X > 1{,}5]$ và P$\{0{,}1 < X < 1{,}1\}$.

86. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx\,(1 + x)^{-3} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) Tìm median của X.

b) Tìm mod của X.

87. Cho ĐLNN liên tục X có hàm phân bố

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha tgx} & \text{với } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{với } x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

ở đó $0 < \alpha < 1$.

a) Tìm hàm mật độ của X.

b) Tìm mod của X.

88. Tuổi thọ của một loại côn trùng nào đó là một ĐLNN X (đơn vị là tháng) với hàm mật độ như sau

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(4 - x) & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm k và vẽ đồ thị của $f(x)$.

b) Tìm mod X.

c) Tính xác suất để côn trùng chết trước khi nó được 1 tháng tuổi.

89. Cho ĐLNN liên tục X với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} & \text{nếu } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{với } x \text{ còn lại} \end{cases}$$

Tính kì vọng và phương sai của X.

90. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{với } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ k & \text{với } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 & \text{với } x \text{ còn lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm kì vọng, phương sai và median của X.

91. Cho ĐLNN X với hàm phân bố

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ \dfrac{2\alpha x}{\alpha^2 + x^2} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant \alpha \end{cases}$$

ở đó $\alpha > 0$ là hằng số.

a) Tìm hàm mật độ $f(x)$.

b) Tính kì vọng và phương sai của X theo α.

92. Khối lượng của một con gà 6 tháng tuổi là một ĐLNN X (đơn vị là kg) với hàm mật độ như sau :

$$f(x) = \begin{cases} k(x^2 - 1) & \text{với } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{với } x \text{ còn lại} \end{cases}$$

Tìm khối lượng trung bình của con gà 6 tháng tuổi và độ lệch tiêu chuẩn.

93. Cho ĐLNN liên tục X có hàm phân bố

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leqslant 0 \\ x^\alpha & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

ở đó $\alpha > 1$.

a) Tìm momen cấp k của X.

b) Tìm momen quy tâm cấp 1, 2, 3, 4

c) Tìm hệ số bất đối xứng và hệ số nhọn.

94. Diện tích lá của một loại cây nào đó là một ĐLNN X (đơn vị đo là cm^2) với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(x - 2)^2 & \text{với } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k và vẽ đồ thị của $f(x)$.

b) Tìm kì vọng và phương sai của X.

95. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-3/2} & \text{nếu } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k và hàm phân bố $F(x)$.

b) Tìm hàm mật độ của ĐLNN $Y = \dfrac{1}{X}$.

c) Tính $P\{0,1 < Y < 0,2\}$.

96. ĐLNN liên tục X có hàm mật độ như sau

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{nếu } |x| < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Tìm hằng số k và tính kì vọng, phương sai của ĐLNN $Y = 2X^2$.

97. Bán kính R của một vòng tròn vẽ ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0, a]$ với a là hằng số. Tìm diện tích trung bình của vòng tròn và độ lệch tiêu chuẩn.

98. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < -1 \\ ke^{-x}(1 + x)^2 & \text{nếu } x \geqslant -1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng median m của X thỏa mãn phương trình

$$e^{m+1} = 1 + (m + 2)^2.$$

99. Cho ĐLNN liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{với } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

ở đó k là hằng số.

Xét ĐLNN $Y = 2\sqrt{X}$. Hãy tính

a) $P\{\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2}\}$.

b) $P\{Y > 1\}$.

100. Một đoạn thẳng AB dài $10cm$ bị gãy ngẫu nhiên ở một điểm P. Hai đoạn AP và BP được sử dụng làm hai cạnh của một hình chữ nhật. Tính diện tích trung bình của hình chữ nhật và độ lệch tiêu chuẩn.

101. Cho Z là ĐLNN chuẩn tắc $Z \backsim N(0,1)$. Xét ĐLNN Y cho bởi

$$Y = \alpha + \beta Z + \gamma Z^2$$

ở đó α, β, γ là các hằng số.

Hãy tính EY và DY.

102. Một người hàng ngày đi bộ từ nhà tới nơi làm việc với quãng đường 600 m và đi với vận tốc đều *Vm/giây*. Biết rằng V là một ĐLNN và thời gian đi bộ của người đó là một ĐLNN có phân bố đều trong khoảng từ 6 phút đến 10 phút.

a) Tìm kì vọng và độ lệch tiêu chuẩn của V.

b) Tìm median của V.

103. Trọng lượng của một con bò là một ĐLNN có phân bố chuẩn với giá trị trung bình 250 *kg* và độ lệch tiêu chuẩn là 40*kg*. Tìm xác suất để một con bò chọn ngẫu nhiên có trọng lượng :

a) Nặng hơn 300 *kg*.

b) Nhẹ hơn 175 *kg*.

c) Nằm trong khoảng từ 260 *kg* đến 270 *kg*.

104. Cho ĐLNN X có hàm mật độ

$$f(x) = ke^{-\lambda|x|} \qquad -\infty < x < \infty$$

ở đó k là hằng số, $\lambda > 0$ là tham số cho trước

a) Tìm k theo λ.

b) Tìm hàm phân bố.

c) Tìm kì vọng, phương sai, median và mod của X.

105. Cho ĐLNN X liên tục có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm phân bố của X.

c) Tìm mod của X.

d) Tìm kì vọng và phương sai của X.

106. Thời gian đi từ nhà tới trường của sinh viên An là một ĐLNN T (đơn vị là phút) có phân bố chuẩn. Biết rằng 65% số ngày An đến trường mất hơn 20 phút và 8% số ngày mất hơn 30 phút.

a) Tính thời gian đến trường trung bình của An và độ lệch tiêu chuẩn.

b) Giả sử An xuất phát từ nhà trước giờ vào học 25 *phút*. Tính xác suất để An bị muộn học.

c) An cần phải xuất phát trước giờ học là bao nhiêu phút để xác suất bị muộn học của An bé hơn 0,02 ?

107. Một nhà máy bán một loại sản phẩm nào đó với giá 1USD một sản phẩm. Trọng lượng của sản phẩm là một ĐLNN có phân bố chuẩn với kì vọng μ *kg* và độ lệch tiêu chuẩn 1 *kg*. Giá thành làm ra một sản phẩm là

$$c = 0{,}05\mu + 0{,}3.$$

Nếu sản phẩm có trọng lượng bé hơn 8*kg* thì phải loại bỏ vì không bán được. Hãy xác định μ để lợi nhuận của nhà máy là lớn nhất.

108. Chiều dài của một loại cây là một ĐLNN có phân bố chuẩn. Trong một mẫu gồm 640 cây có 25 cây thấp hơn 18*m* và 110 cây cao hơn 24*m*.

a) Tính chiều cao trung bình của cây và độ lệch tiêu chuẩn.

b) Ước lượng số cây có chiều cao trong khoảng từ 16*m* đến 20*m* trong 640 cây nói trên.

109. Cho X là ĐLNN có phân bố mũ với tham số $\lambda = 2$. Tìm kì vọng và độ lệch tiêu chuẩn của ĐLNN $Y = e^{-X}$.

110. Cho X là ĐLNN liên tục với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-h^2x^2} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

ở đó $h > 0$ là một tham số dương cho trước và k là hằng số. X được gọi là ĐLNN *có phân bố Reley* với tham số h.

a) Tìm hằng số k.

b) Tính kì vọng và phương sai của X.

c) Tính $P\{X < \frac{1}{h\sqrt{2}}\}$.

111. Cho X là ĐLNN có hàm mật độ

$$f(x) = \frac{k}{e^x + e^{-x}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm phân bố $F(x)$.

c) Phải quan sát X bao nhiêu lần để thấy có ít nhất một lần X rơi vào khoảng $(\ln \frac{1}{\sqrt{3}}, \ln \sqrt{3})$ với xác suất 90% ?

112. Cho X là ĐLNN có phân bố mũ với tham số $\lambda = 1$. Xét ĐLNN $Y = 2X^2$. Hãy tính

a) $P\{2 < Y < 18\}$.

b) $P\{Y < 4\}$.

113. Cho X là một ĐLNN với kì vọng $\mu = EX$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = \sqrt{DX}$. Hãy tính $P\{|X - \mu| < 3\sigma\}$ trong các trường hợp sau đây :

a) X có phân bố chuẩn.

b) X có phân bố mũ.

c) X có phân bố đều trên $[-1,1]$.

d) X có phân bố Poátxông với tham số $\lambda = 0,09$.

Chương IV

ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC NHIỀU CHIỀU

114. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} kx & \text{nếu } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm các hàm mật độ của X và của Y.

c) X và Y có độc lập hay không ?

115. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi} & \text{nếu } \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của X và của Y.

116. Cho X, Y là hai ĐLNN có hàm phân bố đồng thời là

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y & \text{nếu } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Tính $P\{ \frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\}$.

117. Cho hai ĐLNN X, Y có hàm mật độ đồng thời như sau

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x^2 + \frac{xy}{2}) & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ & \phantom{\text{nếu }} 0 < y < 2 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm phân bố đồng thời của X và Y.

118. Cho hai ĐLNN X và Y có hàm mật độ như sau

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-x-y} & \text{nếu } 0 < x < y \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm các hàm mật độ của X và Y.

c) X và Y có độc lập hay không ?

119. Cho hai ĐLNN X và Y có hàm mật độ đồng thời

$$f(x, y) = \frac{k}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

a) Tìm hằng số k.

b) Tìm hàm phân bố đồng thời của X, Y.

c) X và Y có độc lập hay không ?

d) Tính xác suất để điểm ngẫu nhiên (X, Y) rơi vào hình chữ nhật với các đỉnh là $A(1, 1)$; $B(\sqrt{3}, 1)$ $C(1, 0)$ và $D(\sqrt{3}, 0)$.

120. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên đoạn [0,2]. Tính $P\{XY \leq 1,\ Y \leq 2X$ và $X \leq 2Y\}$.

121. Hai người bạn hẹn gặp nhau tại một vườn hoa trong khoảng từ 5 đến 6 giờ để cùng nhau đi chơi. Họ quy ước rằng sẽ đợi nhau không quá 5 phút. Tính xác suất để họ cùng nhau đi chơi.

122. Cho hai ĐLNN X và Y độc lập với nhau và cùng có phân bố đều trong khoảng $[a, b]$ $(0 < a < b)$. Tìm hàm phân bố và hàm mật độ của $Z = X + Y$.

123. Một điểm A rơi ngẫu nhiên vào một hình vuông D có cạnh bằng 1. Giả sử (X, Y) là tọa độ của A. Biết rằng hàm mật độ đồng thời của X và Y là

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (x, y) \in D \\ 0 \text{ nếu trái lại.} \end{cases}$$

Tính xác suất để khoảng cách từ A đến cạnh gần nó nhất không vượt quá 0,3.

124. Cho hai ĐLNN X và Y có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{nếu } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

Hãy tính $P\{X^2 + Y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

125. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập cùng có phân bố mũ với tham số λ. Tìm hàm phân bố và hàm mật độ của $Z = \frac{X}{Y}$.

126. Giả sử X và Y là hai ĐLNN độc lập ; X có phân bố đều trên [0,2] còn Y có phân bố đều trên [0,10].

Tìm hàm phân bố và hàm mật độ của $X + Y$.

127. Giả sử X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên đoạn [0,1].

Tìm hàm phân bố và hàm mật độ của $X + Y$.

128. Giả sử X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên [0,1].

Tìm hàm phân bố và hàm mật độ của XY.

129. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên đoạn [0,6]. Hãy tính

$$P\{-1 \leq Y - X \leq 2\}.$$

130. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập. X có phân bố đều trên $[0, \frac{1}{5}]$ còn Y có phân bố mũ với tham số $\lambda = 5$. Hãy tính

$$P\{Y \leq X\}.$$

131. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy\, e^{-(x^2 + y^2)} & \text{nếu } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$

132. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} a_1 a_2 e^{-(a_1 x + a_2 y)} & \text{nếu } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

ở đó $a_1 \neq a_2$.

Tìm hàm mật độ của $Z = X + Y$

133. Cho X, Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{nếu } x > 0,\ \ y > 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ của $U = X + Y$ và $V = \dfrac{X}{X + Y}$.

b) Chứng minh rằng U và V độc lập, X và Y độc lập.

134. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$.

Tìm hàm mật độ của $U = X + Y$ và $V = \dfrac{X}{X+Y}$.

135. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố đều trên đoạn $[0, 1]$. Tìm hàm mật độ của $U = X - Y$.

136. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố mũ với tham số $\lambda = 1$. Tìm hàm mật độ của $U = X - Y$.

137. Cho X, Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-(x+y)} & \text{nếu } x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

ở đó $\lambda > 0$ đã cho.

Tính $P\{X + Y < a\}$ với $a \in \mathbf{R}$ cho trước.

138. Cho $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các ĐLNN độc lập có phân bố mũ với tham số $\lambda > 0$.

a) Với mỗi $t > 0$ hãy tính

$$P\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n > t\}$$

b) Suy ra hàm phân bố và hàm mật độ của

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

139. Cho X, Y, Z là 3 ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$.

a) Tìm hàm mật độ của $X + Y + Z$.

b) Tính $P\left\{\frac{1}{2} \leqslant X + Y + Z \leqslant \frac{5}{2}\right\}$.

140. Mặt phẳng tọa độ được kẻ bởi các đường thẳng song song

$$y = n \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Một chiếc kim AB có độ dài bằng 1 được ném ngẫu nhiên lên mặt phẳng. Gọi $\theta \in [0, \pi]$ là góc tạo bởi kim với trục Ox, Z là khoảng cách từ điểm giữa I của kim đến đường thẳng gần nhất nằm phía dưới I. Giả thiết rằng θ và Z là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập, có phân bố đều trên tập giá trị của chúng. Tính xác suất để kim AB cắt một đường thẳng nào đó.

141. Cho X_1, X_2, X_3 là 3 ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[-1, 1]$.

a) Tìm hàm mật độ của $U = X_1 + X_2$

b) Tìm hàm mật độ của $V = X_1 + X_2 + X_3$. Vẽ đồ thị hai hàm mật độ tìm được.

142. Cho X, Y, Z là các ĐLNN độc lập có phân bố đều trên $[0, 1]$. Tìm hàm mật độ đồng thời của $(XY + Z^2)$. Từ đó hãy tính $P\{XY < Z^2\}$.

143. Giả sử X, Y, Z là ba ĐLNN độc lập, trong đó X, Y có phân bố đều trên $[0, 1]$ còn Z có mật độ

$$h(z) = \begin{cases} 2z & \text{nếu } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của $T = XY + Z^2$.

144. Cho X và Y là hai ĐLNN độc lập có phân bố mũ với tham số λ. Giả sử $Z = X + Y$.

Tìm hàm mật độ có điều kiện $f(Z/X = x)$ và $f(X/Z = z)$.

145. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{nếu } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ có điều kiện $f(y/x)$.

b) Tìm $P\{X^2 + Y^2 \leqslant 1\}$.

146. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2y} & \text{nếu } x \geqslant 1 \text{ và } \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant x\,. \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ của X và của Y.

b) Tìm hàm mật độ có điều kiện $f(y/x)$ và $f(x/y)$.

147. Cho X và Y là hai ĐLNN có phân bố chuẩn đồng thời với $EX = 35$, $EY = 20$, $DX = 36$, $DY = 16$ và $\rho(X, Y) = 0{,}8$.

Tìm kì vọng và phương sai của $2X - 3Y$.

148. Một em học sinh thấy rằng thời gian tự học ở nhà của em trong một ngày là một ĐLNN có phân bố chuẩn với trung bình 2,2 giờ và độ lệch tiêu chuẩn 0,4 giờ. Thời gian giải trí là một ĐLNN có phân bố chuẩn với trung bình 2,5 giờ và độ lệch tiêu chuẩn 0,6 giờ. Hệ số tương quan giữa thời gian học và thời gian giải trí là −0,5. Phân bố đồng thời của chúng cũng là phân bố chuẩn hai chiều. Tính xác suất để :

a) Tổng số thời gian học và thời gian chơi lớn hơn 5 giờ.

b) Thời gian học lớn hơn thời gian chơi.

149. Giả sử rằng trọng lượng hành khách đi máy bay có phân bố chuẩn với kì vọng $74kg$ và trọng lượng hành lí mang theo có phân bố chuẩn với kì vọng $20kg$.

Phân bố đồng thời của hai trọng lượng này cũng là phân bố chuẩn hai chiều.

a) Biết rằng có 10% hành khách có trọng lượng lớn hơn $85kg$ và 20% hành khách có hành lí nặng hơn $24kg$. Tìm độ lệch tiêu chuẩn của trọng lượng hành khách và trọng lượng hành lí.

b) Biết rằng có 10% hành khách mà tổng trọng lượng của họ và hành lí mang theo lớn hơn $108kg$. Tìm hệ số tương quan giữa trọng lượng hành khách và trọng lượng hành lí.

150. Trong một kì thi toán, số điểm X của vòng 1 có phân bố chuẩn với trung bình 48 và độ lệch tiêu chuẩn là 15. Số điểm Y của vòng 2 cũng có phân bố chuẩn với trung bình 56 và độ lệch tiêu chuẩn 12. Hệ số tương quan của X và Y là 0,7.

a) Tìm xác suất để tổng số điểm của 1 thí sinh chọn ngẫu nhiên lớn hơn 130 ; nhỏ hơn 90.

b) Tìm xác suất để một thí sinh chọn ngẫu nhiên có điểm vòng 1 cao hơn điểm vòng 2.

151. Cho X và Y là hai ĐLNN có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} k(1 - xy^3) & \text{nếu } |x| \leq 1,\ |y| \leq 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Tìm k và $\rho(X, Y)$.

152. Cho $X \backsim N(7\ ;\ 1,2^2)$ và

$$Y \backsim N(5\ ;\ 0,9^2)$$

a) Tìm $P\{X + Y < 9,5\}$

b) Tìm $P\{X < Y\}$.

c) Tìm $P\{X > 2Y\}$.

Giả thiết rằng X và Y độc lập.

153. Trọng lượng của người chồng có phân bố chuẩn với kì vọng $80kg$ và độ lệch tiêu chuẩn $9kg$, còn trọng lượng người vợ có phân bố chuẩn với kì vọng $60kg$ và độ lệch tiêu chuẩn $4kg$. Hệ số tương quan giữa trọng lượng hai vợ chồng là $\frac{2}{3}$.

Tính xác suất để vợ nặng hơn chồng.

Chương V

LUẬT SỐ LỚN VÀ CÁC ĐỊNH LÍ GIỚI HẠN

154. Cho (Z_n) là dãy các ĐLNN rời rạc xác định như sau : $P\{Z_n = n^\alpha\} = \frac{1}{n}$, $P\{Z_n = 0\} = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2...)$, α là số thực cho trước.

Với giá trị nào của α dãy (Z_n) hội tụ tới theo bình phương trung bình ?

155. Cho $X_1, X_2, ..., X_{12}$ là các ĐLNN độc lập với $EX_i = 16$, $DX_i = 1$, $(i = 1, 2, ..., 12)$.

Sử dụng bất đẳng thức Trêbưsép để tìm các hằng số a và b sao cho

$$P\left\{ a \leq \sum_{i=1}^{12} X_i \leq b \right\} \geq 0{,}99 .$$

156. Cho $X_1, X_2, ..., X_{10000}$ là các ĐLNN độc lập có phân bố đều trong đoạn $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$P\left\{ \left| \sum_{i=1}^{10^4} X_i \right| \geq 500 \right\} \leq \frac{1}{300} .$$

157. Gieo một con xúc sắc cân đối n lần một cách độc lập. Gọi S là số lần xuất hiện mặt lục. Chứng minh rằng

$$P\left\{ \frac{n}{6} - \sqrt{n} < S < \frac{n}{6} + \sqrt{n} \right\} \geq \frac{31}{36} .$$

158. Giả sử tiền điện của một gia đình phải trả trong 1 tháng là một ĐLNN với trung bình 16USD và độ lệch tiêu chuẩn 1USD. Sử dụng BĐT Trêbưsép, hãy xác định số M nhỏ nhất để với xác suất 0,99 số tiền điện phải trả trong 1 năm (12 tháng) không vượt quá M.

159. Giả sử X là ĐLNN với $EX = 5$ và $DX = 0,16$. Chứng minh rằng

a) $P\{3 < X < 7\} \geq 0,96$;

b) $P\{2 < X < 8\} \geq 0,98$;

c) $P\left\{3 < \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_9}{9} < 7\right\} \geq 0,99$;

trong đó $X_1, X_2, \ldots, X_9$ là các ĐLNN độc lập có cùng phân bố với X.

160. Cho dãy các ĐLNN độc lập (X_n) xác định như sau :

$$P\{X_n = n^\alpha\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_n = -n^\alpha\} = \frac{1}{2}$$

(ở đó $\alpha > 0$).

Chứng minh rằng nếu $\alpha < \frac{1}{2}$ thì dãy (X_n) tuân theo luật số lớn.

161. Cho dãy các ĐLNN độc lập (X_n) xác định như sau

$$P\{X_n = 2^n\} = 2^{-(2n+1)}$$

$$P\{X_n = -2^n\} = 2^{-(2n+1)} \qquad (n \geq 1)$$

$$P\{X_n = 0\} = 1 - 2^{-2n}.$$

Chứng minh rằng dãy (X_n) tuân theo luật số lớn.

162. Cho $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ là dãy các số dương thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n^2} = 0 .$$

Xét dãy (X_n) xác định như sau : với mỗi k, X_k nhận các giá trị $0 , \pm \frac{a_k}{2k+1}, \pm \frac{2a_k}{2k+1}, \dots, \pm \frac{ka_k}{k+1}$ với cùng xác suất $\frac{1}{2k+1}$.

Chứng minh rằng dãy (X_n) tuân theo luật số lớn.

163. Cho dãy các ĐLNN độc lập (X_n) xác định bởi

$$P\{X_n = \pm\sqrt{\ln n}\} = \frac{1}{2} \ (n \leqslant 1)$$

Dãy đó có tuân theo luật số lớn hay không ?

164. Một xí nghiệp sản xuất máy tính có xác suất làm ra sản phẩm phế phẩm là 0,02. Chọn ngẫu nhiên 250 máy tính để kiểm tra. Tính xác suất để :

a) Có đúng hai máy phế phẩm.

b) Có không quá hai máy phế phẩm.

165. Xác suất để một hạt giống không nảy mầm là 3%. Gieo 150 hạt. Tính xác suất để có ít nhất 6 hạt không nảy mầm.

166. Một khu nhà có 160 hộ gia đình. Xác suất để mỗi hộ có sự cố về điện vào mỗi buổi tối là 0,02. Tính xác suất để trong một buổi tối :

a) Có đúng 4 gia định gặp sự cố về điện.

b) Số gia đình gặp sự cố về điện là từ 2 tới 5.

167. Gieo một con xúc sắc 120 lần. Tính xác suất để số lần xuất hiện "lục" nhỏ hơn 15 trong các trường hợp sau :

a) Con xúc sắc được chế tạo cân đối.

b) Xác suất xuất hiện "lục" là $\frac{1}{10}$ trong một lần gieo.

168. Một nhà nghỉ có 1000 khách. Nhà ăn phục vụ bữa trưa làm hai đợt liên tiếp. Số chỗ ngồi của nhà ăn phải ít nhất là bao nhiêu để xác suất của biến cố : "không đủ chỗ cho người đến ăn" bé hơn 1% ?

169. Cũng bài toán trên, nhưng giả thiết nhà nghỉ có 500 cặp vợ chồng (mỗi cặp vợ chồng luôn đi ăn cùng với nhau).

170. Ở một khu phố *A*, mỗi ngày nhận 50 thí sinh đến thi lấy bằng lái xe. Xác suất thi đỗ của mỗi người là $\frac{1}{3}$. Tìm k lớn nhất để với xác suất 0,95 xảy ra sự kiện : "Số người thi đỗ lớn hơn k".

171. Một kì thi gồm 45 câu hỏi, với mỗi câu hỏi thí sinh cần chọn một trong 4 câu trả lời kèm theo trong đó chỉ có duy nhất một câu trả lời đúng. Một sinh viên hoàn toàn không học gì khi đi thi chọn ngẫu nhiên một trong 4 câu trả lời. Tính xác suất để :

a) Sinh viên đó trả lời đúng ít nhất 16 câu hỏi.

b) Sinh viên đó trả lời đúng nhiều nhất 9 câu.

c) Số câu trả lời đúng là từ 8 đến 12.

172. Một trường đại học có 750 sinh viên. Mỗi sinh viên trung bình trong 1 năm phải vào bệnh xá một ngày. Giả sử rằng khả năng bị bệnh của mỗi sinh viên phân bố đều ở các ngày trong năm. Bệnh xá cần ít nhất bao nhiêu giường để sự kiện : "không đủ giường cho người bệnh" chỉ có xác suất bé hơn 1% ?

173. Trong một thành phố nào đó có 46% dân số dưới 30 tuổi. Chọn ngẫu nhiên 100 người. Tính xác suất để trong mẫu số người dưới 30 tuổi nhiều hơn số người trên 30 ? Xác suất này là bao nhiêu nếu mẫu được chọn là 225 người ?

174. Một cơ quan có 80 nhân viên. Xác suất để một nhân viên đăng kí đi nghỉ mát trong dịp hè là $\frac{1}{5}$. Tìm số k nhỏ nhất để sự kiện : "Số người đăng kí đi nghỉ mát không vượt quá k" có xác suất ít nhất là 0,99.

175. Xác suất làm ra một phế phẩm của một nhà máy là 0,02. Trong một lô hàng gồm 25000 sản phẩm, hãy xác định các hằng số a, b để khẳng định : "số phế phẩm nằm trong khoảng từ a đến b" có xác suất không nhỏ hơn 0,95.

176. Ở một thành phố A có 54% dân số là nữ.

a) Chọn ngẫu nhiên 450 người. Tính xác suất để trong mẫu số nữ ít hơn số nam.

b) Xác định kích thước mẫu n để với xác suất 0,99 có thể khẳng định rằng số nữ là nhiều hơn số nam.

177. Chọn ngẫu nhiên 250 chiếc xe máy, ta thấy có 185 xe Honda.

a) Hãy ước lượng tỉ lệ θ xe Honda trong tổng số xe máy với độ tin cậy 95%

b) Xác định hằng số c sao cho với xác suất 0,99 ta có thể khẳng định $\theta > c$.

178. Một trường đại học có chỉ tiêu tuyển sinh là 300.

a) Giả sử có 325 người dự thi và xác suất thi đỗ của mỗi người là 90%. Tính xác suất để số người trúng tuyển không vượt quá chỉ tiêu.

b) Cần cho phép tối đa bao nhiêu người dự thi (xác suất đỗ của họ vẫn là 90%) để sự kiện : "Số người trúng tuyển không vượt quá chỉ tiêu" có xác suất không nhỏ hơn 0,99.

179. Chọn ngẫu nhiên 200 người, ta thấy có 42 người hút thuốc lá. Hãy ước lượng tỉ lệ người hút thuốc trong toàn bộ dân số với độ tin cậy 95%.

180. Một tỉnh A thông báo rằng tỉ lệ thi đỗ tốt nghiệp của học sinh trung học của tỉnh là 80%. Một thanh tra của Bộ giáo dục vốn tin rằng tỉ lệ này phải nhỏ hơn 80% đã làm một cuộc điều tra. Anh ta chọn ngẫu nhiên 72 học sinh thì thấy trong đó có 50 em tốt nghiệp.

a) Có bao nhiêu phần trăm số mẫu kích thước 72 mà số học sinh tốt nghiệp nhiều nhất là 50 nếu giả thiết tỉ lệ 80% là đúng ?

b) Bộ có cơ sở để bác bỏ tỉ lệ 80% của tỉnh hay không ?

181. Trọng lượng trung bình của một giống bò là μ *(kg)* (chưa biết), còn độ lệch tiêu chuẩn là 38,2*kg*. Chọn ngẫu nhiên 250 con bò, ta tìm được trọng lượng trung bình của chúng là 315,4*kg*. Từ số liệu này hãy cho một ước lượng về μ với độ tin cậy 95%.

182. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 400 con gà có trung bình mẫu là 2,08*kg* và độ lệch tiêu chuẩn là 0,22*kg*. Với độ tin cậy bao nhiêu có thể khẳng định rằng trọng lượng trung bình của giống gà đó là trong khoảng từ 2,06 *kg* đến 2,10*kg* ? Lớn hơn 2,07*kg* ?

183. Thời gian sống trung bình của một giống chuột nuôi trong phòng thí nghiệm là 258 ngày với độ lệch tiêu chuẩn 45 ngày. Chọn ngẫu nhiên 36 con chuột và cho uống thử một loại thuốc *A* hàng ngày. Kết quả cho thấy thời gian sống trung bình của nhóm chuột này là 274 ngày.

a) Nếu giả thiết rằng thuốc *A* không có ảnh hưởng tới thời gian sống của chuột, thì có bao nhiêu phần trăm trường hợp mẫu chuột kích thước 36 có thời gian sống trung bình không nhỏ hơn 274 ngày ?

b) Thí nghiệm trên có chứng tỏ thuốc *A* có tác dụng làm tăng thời gian sống cho chuột hay không ?

184. Thời gian làm việc của một linh kiện điện tử máy tính là một ĐLNN có trung bình 250 giờ, và độ lệch tiêu chuẩn 250 giờ.

a) Giả sử ta dự trữ 30 linh kiện. Tính xác suất để 30 linh kiện này đủ dùng ít nhất là 1 năm (8760 giờ).

b) Phải dự trữ ít nhất là bao nhiêu linh kiện để với xác suất 0,99 ta có thể đảm bảo cho máy tính hoạt động ít nhất 1 năm ?

Giả thiết rằng ngoài linh kiện đó các linh kiện khác luôn hoạt động tốt ít nhất 1 năm.

185. Trong kho có 100 lô hàng, mỗi lô có 90 sản phẩm tốt và 10 sản phẩm xấu. Với mỗi lô người ta kiểm tra ngẫu nhiên 5 sản phẩm (kiểm tra có hoàn lại). Tính xác suất để tổng số sản phẩm xấu trong 100 lô hàng là trong khoảng từ 40 đến 55.

186. Trung bình $1km$ một loại phương tiện giao thông tiêu thụ 0,9 lít xăng với độ lệch tiêu chuẩn là 0,05 lít. Hãy ước lượng số xăng tiêu thụ trên quãng đường $3300km$ với độ tin cậy 95%.

187. Bóng đèn có tuổi thọ là một ĐLNN có phân bố mũ với $\lambda = \frac{1}{200}$.

Một cửa hàng hàng ngày dùng 150 bóng nói trên trong 5 giờ. Hỏi cửa hàng cần dự trữ bao nhiêu bóng để với xác suất 0,95 có thể khẳng định rằng cửa hàng sẽ luôn duy trì được việc sử dụng ánh sáng như trên trong vòng 6 tháng (1 tháng = 30 ngày) ?

Phần B

LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

Chương I

1. a) Các trường hợp thuận lợi là (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1). Vậy $P = \frac{1}{6}$.

b) Các trường hợp thuận lợi là (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2). Vậy $P = \frac{5}{36}$.

c) $P = \frac{2}{9}$.

2. a) Các trường hợp có tổng bằng 8 là (2, 3, 3) ; (2, 2, 4) ; (1, 1, 6) ; (1, 2, 5), (1, 3, 4) và các hoán vị của chúng.

Từ đó số trường hợp có thể là $3 + 3 + 3 + 6 + 6 = 21$. Do đó $P = \frac{21}{216}$.

b) Các trường hợp có tổng bằng 11 là (1, 4, 6), (1, 5, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (3, 4, 4), (3, 3, 5) và các hoán vị của chúng.

Từ đó số trường hợp có thể là

$$6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27.$$

Do đó $P = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

3. a) $P = \frac{1}{C_{10}^{6}} = \frac{1}{210}$.

b) $P = \dfrac{C_6^4 . C_4^2}{C_{10}^6} = \dfrac{3}{7}$

c) $P = \dfrac{C_4^2 . C_6^4 + C_4^3 . C_6^3 + C_4^4 C_6^2}{C_{10}^6} = \dfrac{185}{210} = \dfrac{37}{42}$

4. Số trường hợp có thể C_{12}^6.

Số trường hợp thuận lợi $C_6^3 C_4^2 C_2^1$.

Vậy $P = \dfrac{20}{77}$

5. a) $P = \dfrac{C_{15}^{10}}{C_{30}^{10}} \approx \dfrac{1}{10005} = 0{,}0001$

b) Trong 30 số từ 1 đến 30 có đúng 10 số chia hết cho 3.

Vậy $P = \dfrac{C_{10}^5 C_{20}^5}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}130$.

c) Trong 30 số có 15 số lẻ, 15 số chẵn trong đó chỉ có 3 số chia hết cho 10. Vậy

$$P = \frac{C_{15}^5 C_{12}^4 C_3^1}{C_{30}^{10}} \approx 0{,}1484 .$$

6. a) Gọi A : "Cả hai nữ được chọn"

B : "Ít nhất có một nữ được chọn"

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{6/15}{14/15} = \frac{3}{7}$$

b) Xác suất để Hoa được chọn là $\frac{5}{15}$. Do đó xác suất để Hoa được chọn nếu biết rằng có 1 nữ được chọn là $\frac{5/15}{14/15} = \frac{5}{14}$.

7. $p = 1 - \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{13}{18}$.

8. a) $p = 1 - C_{98}^{50}/C_{100}^{50} \approx 0,7525$

b) $p = 2^{50}/C_{100}^{50} \approx 4126.10^{-14}$

9. Số trường hợp có thể : 12^{12}

Số trường hợp thuận lợi : $12\,!$

Vậy $p = 12\,!/12^{12}$.

10. $p = \frac{7!}{7^7}$.

11. Số cách chọn một toa có 3 người, một toa có 1 người và hai toa trống là $A_4^2 = 12$.

Từ đó $p = \frac{A_4^2 . C_4^3}{4^4} = \frac{3}{16}$.

12. a) Gọi **A** là biến cố : "Có ít nhất một viên trúng *A*"

B là biến cố : "Cả hai viên trúng *B*".

Khi đó $P(\mathbf{A}) = 1 - 0,85^2$.

$P(\mathbf{B}) = (0,3)^2$

Xác suất để máy bay rơi là

$$P = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B}) = 0,3675.$$

b) Máy bay không rơi khi có 1 viên trúng vào *B* và hai viên trúng vào *C*. Xác suất này là $3(0,55)^2(0,3)$.

Vậy P {Máy bay rơi} = $1 - 3(0,55)^2(0,3) = 0,72775$.

13. a) Đánh số bộ phận A, B, C, D là 1, 2, 3, 4.

Mỗi kết quả có thể là cặp (a, b) trong đó

a : điểm rơi của viên đạn 1

b : điểm rơi của viên đạn 2 ; $1 \leq a \leq 4$, $1 \leq b \leq 4$.

Khi đó $p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

b) Chia bộ phận A làm hai bộ phận có diện tích bằng nhau A_1 và A_2.

Đánh số các bộ phận A_1, A_2, B, C, D là 1, 2, 3, 4, 5. Mỗi kết quả có thể là cặp (a, b), $1 \leq a \leq 5$, $1 \leq b \leq 5$. Máy bay rơi khi các kết quả là : (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), ...

Có cả thảy 15 trường hợp thuận lợi.

Vậy $p = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

14. Gọi A là biến cố : "vé có chữ số 1" và B là biến cố : "vé có chữ số 5".

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5, \; P(\overline{B}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5.$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = \left(\frac{8}{10}\right)^5.$$

Xác suất cần tìm là

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B}) =$$

$$= 2\left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{8}{10}\right)^5.$$

15. Gọi A là biến cố : "Vé có chữ số 5" và B là biến cố "vé có chữ số chẵn". Ta cần tính $P(AB)$. Chuyển sang tính xác suất của biến cố đối. Biến cố đối của AB là $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Ta có $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A}\,\overline{B})$

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{9}{10}\right)^5 , \ P(\overline{B}) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = \left(\frac{4}{10}\right)^5 .$$

Vậy $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = (0,9)^5 + (0,5)^5 - (0,4)^5.$

Suy ra

$$P(AB) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 + (0,4)^5 - (0,9)^5 - (0,5)^5.$$

16. Giả sử ba toa tầu được kí hiệu là A, B và C. Gọi A, B và C tương ứng là các biến cố : "Toa A không có hành khách mới lên", "Toa B không có hành khách mới lên", và "Toa C không có hành khách mới lên".

Dễ thấy biến cố đối của biến cố đang xét là biến cố : $A \cup B \cup C$ "có ít nhất một toa không có hành khách mới lên".

Ta có

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) .$$

Dễ thấy

$$P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 , \ P(B) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 , \ P(C) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 ,$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 , \ P(ABC) = 0 .$$

Thay vào ta được :

$$P(A \cup B \cup C) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{31}{81} .$$

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{50}{81}$.

17. Kí hiệu ba lá thư đó là A, B, C. Gọi A là biến cố : "Lá thư A bỏ đúng địa chỉ", B là biến cố : "Lá thư B bỏ đúng địa chỉ" và C là biến cố : "Lá thư C bỏ đúng địa chỉ".

Ta phải tìm

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Dễ thấy

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$P(AB) = P(BC) = P(CA) = P(ABC) = \frac{1}{6}.$$

Vậy $P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

18. Gọi A là biến cố : "Xạ thủ **A** không bắn trúng" và B là biến cố "Xạ thủ **B** không bắn trúng".

Ta có $P(A) = (1 - p_1)^n$, $P(B) = (1 - p_2)^m$,

$P(AB) = P$ {Mục tiêu không bị trúng đạn} $= P(A)P(B) =$

$$= (1 - p_1)^n (1 - p_2)^m.$$

Từ đó xác suất cần tìm là $1 - (1 - p_1)^n (1 - p_2)^m$

19. Áp dụng công thức Becnuli :

$$p = C_{12}^5 (0,65)^5 (0,35)^7 = 0,0591.$$

20. $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0,6651$

21. $p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914$.

22. a) $p = (0,97)^{20} \approx 0,5438$

b) $p = 20(0,03)(0,97)^{19} + 190(0,03)^2.(0,97)^{18}$

$= 0,3364 + 0,0988 = 0,4352$

c) $1 - 0,54338 - 0,4352 = 0,021$.

23. Xác suất để 1 bóng sáng là $\frac{3}{4}$. Do đó P {có ít nhất 4 bóng sáng}

$$= C_6^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2 + C_6^5\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right) + C_6^6\left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$= 0{,}8305.$$

Vậy P {lớp không đủ ánh sáng} = 0,1695.

24. a) Anh ta được 13 điểm trong trường hợp trả lời đúng 5 câu và trả lời sai 7 câu. Vậy xác suất là

$$C_{12}^5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^7 = 0{,}0532$$

b) Anh ta bị điểm âm khi trả lời đúng ít hơn 3 câu. Thật vậy gọi x là số câu đúng, số câu sai là $12 - x$. Bất phương trình $4x < 12 - x$ xảy ra khi $x = 0, 1, 2$.

Vậy

P {Nhận điểm âm} =

$$= C_{12}^0\left(\frac{4}{5}\right)^{12} + C_{12}^1\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^{11} + C_{12}^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

$$= 0{,}0687 + 0{,}2062 + 0{,}2835 = 0{,}5583.$$

25. Xác suất thắng trong 1 ván là

$$C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}.$$

Vậy xác suất để thắng ít nhất 3 ván là

$$C_5^3\left(\frac{2}{27}\right)^3\left(\frac{25}{27}\right)^2 + C_5^4\left(\frac{2}{27}\right)^4\left(\frac{25}{27}\right) + \left(\frac{2}{27}\right)^5.$$

26. Từ điều kiện bài toán suy ra xác suất bắn trúng vòng 10 là 0,2 ; trúng vòng 9 là 0,25. Xạ thủ đạt ít nhất 28 điểm trong các trường hợp sau :

a) 1 viên 10 và 2 viên 9. Xác suất là

$$3(0{,}2)(0{,}25)^2 = 0{,}0375.$$

b) 2 viên 10 và 1 viên 9. Xác suất là

$$3(0{,}2)^2(0{,}25) = 0{,}03$$

c) 2 viên 10 và 1 viên 8. Xác suất là

$$3(0{,}2)^2(0{,}15) = 0{,}018.$$

d) Cả 3 viên 10. Xác suất là 0,008.

Vậy P{ít nhất 28 điểm} = 0,0935.

27. a) Máy bay sẽ rơi khi tất cả các động cơ đều hỏng hoặc chỉ có 1 động cơ làm việc.

P{tất cả các động cơ hỏng} = $(0,1)^3.(0,05)^2$

P{4 động cơ hỏng} = $2(0,1)^3(0,05)(0,95) +$

$+ 3(0,1)^2(0,9).(0,05)^2$.

Vậy P{máy bay rơi} = $(0,1)^3(0,05)^2 + 2(0,1)^3(0,05)(0,95) + 3(0,1)^2(0,9)(0,05)^2 = 0,00016$.

Vậy P{Máy bay bay an toàn} = 0,99984.

b) P{Cánh phải có ít nhất 1 động cơ làm việc} = $1 - (0,1)^2 = 0,99$

P{Cánh trái có ít nhất một động cơ làm việc}

$$= 1 - (0,05)^2 = 0,9975.$$

Vậy P{Máy bay bay an toàn} = $(0,99).(0,9975) \approx 0,9875$.

28. a) Anh ta trở lại điểm xuất phát khi tiến 4 bước và lùi 4 bước. Vậy

$$p = C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{70}{256}.$$

b) Anh ta cách điểm xuất phát hơn $4m$ nếu số bước tiến là 8, 7, 0, 1.

Vậy :

$$p = C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right) + C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^1\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{18}{256}.$$

29. a) Gọi A là biến cố : "Tổng số nốt là 8" và B là biến cố : "Có ít nhất một con ra nốt 1".

(Trong bài tập 2 ta có $P(A) = \dfrac{21}{216}$).

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Để tính P(AB), ta thấy các tổ hợp có tổng bằng 8 mà trong đó có "1" là (1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4).

Vậy $P(AB) = \frac{3+6+6}{216} = \frac{15}{216}$.

Dễ thấy $P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$.

Vậy $P(A/B) = \frac{15}{91}$.

b) Gọi A : "Có ít nhất một con ra lục"

B : "Số nốt trên 3 con khác nhau"

Ta có $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$;

$P(AB) = \frac{3.5.4}{216} = \frac{60}{216}$;

$P(B) = \frac{6.5.4}{216} = \frac{120}{216}$.

Vậy $P(A/B) = \frac{1}{2}$.

30. A : "cả hai đứa là trai"

B : "ít nhất có 1 đứa là trai"

Ta có $P(AB) = \frac{1}{4}$, $P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Vậy $P(A/B) = \frac{1}{3}$.

31. a) $p = (0,9)(0,8)(0,9) = 0,648$.

b) P {trượt ở vòng 2} = (0,9)(0,2) = 0,18.

Vậy xác suất để thí sinh trượt ở vòng 2 nếu biết rằng thí sinh đó trượt là $\frac{P\{\text{trượt ở vòng 2}\}}{P\{\text{trượt}\}} = \frac{0,18}{0,352} = 0,511$.

32. a) Kí hiệu B_1 : "cặp sinh đôi là thật",

B_2 : "cặp sinh đôi là giả",

A : "cặp sinh đôi cùng giới".

Theo giả thiết $P(A) = 0,34 + 0,3 = 0,64$ và $P(A/B_1) = 1$, $P(A/B_2) = \frac{1}{2}$.

Đặt $P(B_1) = x$, $P(B_2) = 1 - x$.

Theo công thức xác suất đầy đủ.

$$P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2)$$

$$\Leftrightarrow 0,64 = x + \frac{1-x}{2}$$

$$\Rightarrow x = 0,28.$$

b) $P(B_1/A) = \dfrac{P(B_1)\,P(A/B_1)}{P(A)} = \dfrac{0,28}{0,64} = 0,4375$

33. Kí hiệu E_1 : "Từ chuồng 2 bắt được thỏ trắng".

E_2 : "Từ chuồng 2 bắt được thỏ đen"

A : "Bắt được thỏ trắng ở lần bắt sau"

B : "Bắt được thỏ trắng của chuồng 1 ở lần bắt sau"

Ta có $P(A) = P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) =$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{11}{16} + \frac{7}{10}\cdot\frac{10}{16} = \frac{103}{160}.$$

$$P(B) = P(E_1)\,P(B/E_1) + P(E_2)\,P(B/E_2)$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{16} + \frac{7}{10}\cdot\frac{10}{16} = \frac{100}{160}.$$

Vậy $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{100}{103}$

34. E_1 : "Bắt được hai gà trống"

E_2 : "Bắt được hai gà mái"

E_3 : "Bắt được một gà trống và một gà mái"

E_1, E_2, E_3 là hệ đầy đủ với

$$P(E_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{60}$$
$$P(E_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{60}$$
$$P(E_3) = 1 - \frac{5}{60} - \frac{9}{60} = \frac{46}{60}$$

A : "Bắt được gà trống từ chuồng thứ ba"

Khi đó

$$P(A) = P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) +$$
$$P(E_3)\,P(A/E_3) = \frac{5}{60} \cdot \frac{4}{14} + \frac{9}{60} \cdot \frac{6}{14} + \frac{46}{60} \cdot \frac{5}{14}$$
$$= \frac{304}{840} = 0{,}3619$$

35. Xét phương án 1. Nếu máy bay xuất hiện ở A thì xác suất bắn hạ là $1 - (0{,}3)^3 = 0{,}973$. Nếu máy bay xuất hiện ở B thì xác suất bắn hạ là 0,7. Vậy theo công thức xác suất đầy đủ xác suất bắn hạ máy bay nếu theo phương án 1 là

$$\frac{2}{3}(0{,}973) + \frac{0{,}7}{3} = 0{,}882$$

Tương tự xác suất bắn hạ máy bay nếu theo phương án 2 là

$$\frac{2}{3}[1 - (0{,}3)^2] + \frac{1}{3}[1 - (0{,}3)^2] = 0{,}91$$

Xác suất hạ máy bay theo phương án 3 là

$$\frac{2}{3}(0{,}7) + \frac{1}{3}(0{,}973) = 0{,}971$$

Vậy theo phương án 2 là tốt nhất.

36. Gọi E_1 : "bóng đèn tốt"

E_2 : "bóng đèn hỏng"

A : "Bóng đèn được đóng dấu đã kiểm tra"

Ta có $P(E_1) = 0{,}8$

$$P(E_2) = 0{,}2.$$
$$P(A/E_1) = 0{,}9 \text{ và } P(A/E_2) = 0{,}05$$

Thành thử

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)\,P(A/E_1)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2)}$$

$$= \frac{(0,8)(0,9)}{(0,8)\,(0,9) + (0,2)\,(0,05)} = 0,986.$$

37. Gọi E_1 : "Xạ thủ thuộc nhóm 1"

E_2 : "Xạ thủ thuộc nhóm 2"

E_3 : "Xạ thủ thuộc nhóm 3"

E_4 : "Xạ thủ thuộc nhóm 4"

A : "Xạ thủ bắn trượt".

Theo đầu bài ta có

$P(E_1) = \frac{5}{18}$; $P(E_2) = \frac{7}{18}$; $P(E_3) = \frac{4}{18}$; $P(E_4) = \frac{2}{18}$;

$P(A/E_1) = 0,2$; $P(A/E_2) = 0,3$;

$P(A/E_3) = 0,4$ và $P(A/E_4) = 0,5$.

Áp dụng công thức Bayet, ta thu được

$$P(E_1/A) = \frac{\frac{5}{18}(0,2)}{\frac{5}{18}(0,2) + \frac{7}{18}(0,3) + \frac{4}{18}(0,4) + \frac{2}{18}(0,5)}$$

$$= \frac{10}{57}.$$

Tương tự $P(E_2/A) = \frac{21}{57}$, $P(E_3/A) = \frac{16}{57}$ và $P(E_4/A) = \frac{10}{57}$.

Vậy xạ thủ có khả năng ở nhóm hai nhất.

38. Gọi A : "Bệnh nhân điều trị bệnh A"

B : "Bệnh nhân điều trị bệnh B",

C : "Bệnh nhân điều trị bệnh C".

H : "Bệnh nhân được chữa khỏi bệnh"

Theo bài ra ta có

$P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,2$;

$P(H/A) = 0,7$; $P(H/B) = 0,8$; $P(H/C) = 0,9$.

Từ đó theo công thức Bayet

$$P(A/H) = \frac{(0,5(0,7)}{(0,5)(0,7) + (0,3)(0,8) + (0,2)(0,9)}$$

$$= \frac{5}{11} \approx 0,4545 .$$

39. Gọi A là biến cố : "Chai rượu thuộc loại A", B là biến cố : "Chai rượu thuộc loại B" và H là biến cố : "Có 4 người kết luận rượu loại A, 1 người kết luận rượu loại B".

Ta cần tính $P(A/H)$.

Áp dụng công thức Bayet

$$P(A/H) = \frac{P(A)\,P(H/A)}{P(A)\,P(H/A) + P(B)\,P(H/B)}$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} ;$$

$$P(H/A) = C_5^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{1}{4} , \; P(H/B) = C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{3}{4} .$$

Thay vào ta thu được

$$P(A/H) = \frac{27}{28} \approx 0,9642 .$$

40. a) Kí hiệu O, A, B và AB tương ứng là các biến cố : "Người cần tiếp máu có nhóm máu là O, A, B và AB"

Gọi H là biến cố : "Sự truyền máu thực hiện được". Theo công thức xác suất đầy đủ ta có

$$P(H) = P(O)\,P(H/O) + $$

$$+ P(A)\,P(H/A) + P(B)\,P(H/B) + P(AB)\,P(H/AB).$$

Theo dữ kiện của bài

$P(O) = 0,337$; $P(A) = 0,375$, $P(B) = 0,209$;

$P(AB) = 0,079$;

$P(H/O) = P(O) = 0,337$

$P(H/A) = P(O) + P(A) = 0,712$

$P(H/B) = P(O) + P(B) = 0,546$

$P(H/AB) = 1.$

Thay vào ta được $P(H) = 0,5737$.

b) Gọi E là biến cố : "Sự truyền máu không thực hiện được". Ta có

$P(E/O) = [1 - P(O)]^2 = 0,663^2.$

$P(E/A) = [1 - P(O) - P(A)]^2 = 0,288^2$

$P(E/B) = [1 - P(O) - P(B)]^2 = 0,454^2$

$P(E/AB) = 0.$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được

$$P(E) = 0,2223.$$

Vậy xác suất để truyền máu được là

$$1 - P(E) = 0,7777.$$

41. Kí hiệu H là biến cố đã xảy ra

Ta có

$P(H/A) = (0,6)(0,2)(0,2)(0,6) = 0,0144$

$P(H/B) = (0,2)(0,6)(0,2)(0,2) = 0.0048$

$P(H/C) = (0,2)(0,2)(0,6)(0,2) = 0,0048.$

Vậy $P(A/H) = \dfrac{P(A)\,P(H/A)}{P(H)} =$

$$\frac{(0,3)\,(0,0144)}{(0,3)\,(0,0144) + (0,4)\,(0,0048) + (0,3)\,(0,0048)} = \frac{432}{768} = 0,5625$$

$P(B/H) = 0,25$

$P(C/H) = 0,1875.$

Chương II

42. $P\{X = 0\} = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{5}{30}$;

$P\{X = 1\} = \dfrac{C_4^1 \cdot C_6^2}{C_{10}^3} = \dfrac{15}{30}$;

$P\{X = 2\} = \dfrac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \dfrac{9}{30}$;

$P\{X = 3\} = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{30}$.

Vậy bảng phân bố của X là

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{5}{30}$	$\dfrac{15}{30}$	$\dfrac{9}{30}$	$\dfrac{1}{30}$

Từ đó $EX = 1{,}2$; $DX = 0{,}56$; và $\mathrm{mod}X = 1$.

43. Rõ ràng Y nhận các giá trị 1, 3, 4

$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} = 0{,}1$

$P\{Y = 3\} = P\{X = 3\} = 0{,}2$

$P\{Y = 4\} = P\{X = 5\} + P\{X = 7\} + P\{X = 9\}$

$= 0{,}7$.

44. a) $P\{X = 0\} = \dfrac{C_6^3}{C_{16}^3} = \dfrac{2}{56}$;

$$P\{X = 1\} = \frac{C_{10}^1 . C_6^2}{C_{16}^3} = \frac{15}{56} ;$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_{10}^2 . C_6^1}{C_{16}^3} = \frac{27}{56} ;$$

$$P\{X = 3\} = \frac{C_{10}^3}{C_{16}^3} = \frac{12}{56} .$$

b) Ta có $Y = 5X + (3 - X)8 = 24 - 3X$.

$$P\{X = 0\} = P\{Y = 24\} = \frac{2}{56} ;$$

$$P\{X = 1\} = P\{Y = 21\} = \frac{15}{36} ;$$

$$P\{X = 2\} = P\{Y = 18\} = \frac{27}{56} ;$$

$$P\{X = 3\} = P\{Y = 15\} = \frac{12}{56} .$$

Vậy bảng phân bố xác suất của Y là

Y	15	18	21	24
P	$\dfrac{12}{56}$	$\dfrac{27}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{2}{56}$

45. Bảng quy luật phân bố của X như sau

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$EX = 7$; $DX = 5{,}833$.

46. $P\{X = 2\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$.

$P\{X = 3\} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{20}$.

$P\{X = 4\} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{20}$.

$P\{X = 5\} = 1 - \left(\frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{6}{20}\right) = \frac{8}{20}$.

Trung bình cần $EX = 4$ lần thử.

47. a) Kí hiệu A_i là biến cố : "A bắn trúng i viên", B_i là biến cố "B bắn trúng i viên" (i = 0, 1, 2). Dễ thấy

$P(A_o) = 0{,}36$; $P(A_1) = 0{,}48$; $P(A_2) = 0{,}16$;

$P(B_o) = 0{,}25$; $P(B_1) = 0{,}5$; $P(B_2) = 0{,}25$.

Từ đó $P\{X = -2\} = P(A_o)P(B_2) = 0{,}09$

$P\{X = -1\} = P(A_o)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) = 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}3$.

$P\{X = 0\} = P(A_o)P(B_o) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) = 0{,}37$

$P\{X = 1\} = P(A_1)P(B_o) + P(A_2)P(B_1) = 0{,}2$.

$P\{X = 2\} = P(A_2)P(B_o) = 0{,}04$.

Vậy bảng quy luật xác suất của X là

X	−2	−1	0	1	2
P	0,09	0,3	0,37	0,2	0,04

b) $P\{Y = 0\} = 0,37$.

$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} + P\{X = -1\} = 0,5$.

$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} + P\{X = -2\} = 0,13$.

48. $P\{X = 3\} = \dfrac{1}{C_4^2} = \dfrac{1}{6}$;

$P\{X = 4\} = \dfrac{1}{6}$;

$P\{X = 5\} = \dfrac{2}{6}$;

$P\{X = 6\} = \dfrac{1}{6}$ và $P\{X = 7\} = \dfrac{1}{6}$.

49. Ta có $P\{X = k\} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}\dfrac{1}{3}$.

Bảng phân bố xác suất của X như sau :

X	1	2	3	4	....
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	

Với 243 người có khoảng $\dfrac{243}{3} = 81$ người thi đạt ngay lần đầu, $\dfrac{243}{9} \times 2 = 54$ người phải thi hai lần. Xác suất để một người phải thi ít nhất 4 lần là $P\{X \geqslant 4\} = 1 - P\{X \leqslant 3\} = \dfrac{8}{27}$. Thành thử có khoảng $243 . \dfrac{8}{27} = 72$ người phải thi ít nhất 4 lần.

50. $EX = 1,82$;

$EY = 1,7$.

$P\{X + Y \leqslant 3\} = P\{X + Y = 0\} + P\{X + Y = 1\} +$

$+ P\{X + Y = 2\} + P\{X + Y = 3\}$.

$P\{X + Y = 1\} = P\{X = 0\}P\{Y = 1\} + P\{X = 1\}P\{Y = 0\}$ $= 0{,}12$.

$P\{X + Y = 0\} = 0{,}045$.

Tương tự tính $P\{X + Y = 2\}$, $P\{X + Y = 3\}$. Cuối cùng ta thu được $P\{X + Y \leqslant 3\} = 0{,}5225$.

51. a) A thắng trong các tình huống sau :

A_1 : "*A* thắng trong 3 ván đầu". Khi đó

$P(A_1) = (0{,}4)^3 = 0{,}064$.

A_2 : "3 ván đầu A thắng 2, ván thứ tư A thắng".

$P(A_2) = C_3^2(0{,}4)^2(0{,}6)(0{,}4) = 0{,}1152$.

A_3 : "4 ván đầu A thắng 2, ván thứ 5 A thắng".

$P(A_3) = C_4^2(0{,}4)^2(0{,}6)^2(0{,}4) = 0{,}13824$.

A_4 : "5 ván đầu A thắng 2, ván thứ 6 A thắng".

$P(A_4) = C_5^2(0{,}4)^2(0{,}6)^3(0{,}4) = 0{,}13824$.

A_5 : "6 ván đầu A thắng 2, ván thứ 7 A thắng"

$P(A_5) = C_6^2(0{,}4)^2(0{,}6)^4(0{,}4) = 0{,}124416$.

Vậy xác suất thắng của A là

$$P = \sum_{i=1}^{5} P(A_i) = 0{,}58.$$

b) Ta có $P\{X = 3\} = P(A_1) = 0{,}064$.

$P\{X = 4\} = P(A_2) = 0{,}1152$.

$P\{X = 5\} = P(A_3) + P(B \text{ thắng})$

$= 0{,}13824 + (0{,}6)^5 = 0{,}216$.

$P\{X = 6\} = P(A_4) + P\{B \text{ thắng}\}$

$= 0{,}13824 + C_5^4(0{,}6)^4(0{,}4)(0{,}6) = 0{,}29376$.

$$P\{X = 7\} = P(A_5) + C_6^4(0,6)^4(0,4)^2(0,6) = 0,31104.$$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là

X	3	4	5	6	7
P	0,064	0,1152	0,216	0,29376	0,31104

52.

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$EX = \frac{16}{7}.$$

53. $P\{X = 2\} = \dfrac{C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{6}{45}.$

$P\{X = 3\} = P\{$chọn tấm thẻ số 1 và số 2$\}$

$$= \frac{C_4^1C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45}.$$

$P\{X = 4\} = P\{$chọn tấm thẻ số 1, số 3$\} + P\{$chọn hai thẻ số 2$\} = \dfrac{C_4^1C_2^1}{C_{10}^2} + \dfrac{C_3^2}{C_{10}^2} = \dfrac{11}{45}.$

$P\{X = 5\} = P\{$chọn thẻ số 1 và 4$\} + P\{$chọn thẻ số 2 và 3$\}$

$$= \frac{C_4^1C_1^1}{C_{10}^2} + \frac{C_3^1.C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}.$$

Tương tự $P\{X = 6\} = \frac{4}{45}$;

$P\{X = 7\} = \frac{2}{45}$.

Phân bố của X là

X	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{45}$

54. $P\{X = 1\} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}$.

$P\{X = 2\} = \frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{10}{42}$.

$P\{X = 3\} = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{8}{42}$.

$P\{X = 4\} = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{6}{42}$.

$P\{X = 5\} = \frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{42}$.

$P\{X = 6\} = \frac{2}{42}$.

Vậy bảng phân bố xác suất của X là

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{12}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{2}{42}$

55. Kí hiệu T : "Rút được quả cầu trắng ; D : "Rút được quả cầu đen".

Các kết quả có thể là

$\omega_1 = D$, $\omega_2 = TD$, $\omega_3 = TTD$, $\omega_4 = TTTD$ và $\omega_5 = TTTTD$.

Ta có $P(\omega_1) = \frac{3}{7}$; $P(\omega_2) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$;

$P(\omega_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$; $P(\omega_4) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}$;

$P(\omega_5) = \frac{1}{35}$.

Nếu xảy ra ω_1 thì $X = -5$.

Nếu xảy ra ω_2 thì $X = 10$.

Nếu xảy ra ω_3, ω_4 hoặc ω_5 thì $X = -15$, 20 hoặc -25.

Vậy bảng phân bố xác suất của X là

X	-25	-15	-5	10	20
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{10}{35}$	$\frac{3}{35}$

$EX = -\frac{6}{7}$, tức là trung bình một ván A thua $\frac{6}{7}$ đô la :

Nếu chơi 150 ván thì A sẽ mất khoảng $150 \times \frac{6}{7} = 128{,}57$ USD.

56. a) Các bảng phân bố của X và Y như sau

X	1	2
P	0,3	0,7

Y	1	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Từ đó dễ thấy hệ thức $P\{X = x, Y = y\} = P\{X = x\}P\{Y = y\}$ thỏa mãn với mọi $x \in \{1, 2\}$ và $y \in \{1, 2, 3\}$.

b) $P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = 0{,}12$. $P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0{,}15 + 0{,}28 = 0{,}43$ v.v...

Kết quả như sau

Z	1	2	3	4	6
P	0,12	0,43	0,03	0,35	0,07

c) Cách thứ nhất : Từ bảng phân bố của Z ta có

$$EZ = (0,12).1 + (0,43).2 + \dots + (0,07)6 = 2,89.$$

Cách 2 : Tính $EZ = \sum xyP\{X = x,\ Y = y\}$. Ta có $EX = 1,7$, $EY = 1,7$ và $EX.\ EY = 2,89 = EZ$.

57. a) Dễ thấy phân bố đồng thời của X, Y là

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4
0	0,04	0,12	0,16	0,06	0,02
1	0,03	0,09	0,12	0,045	0,015
2	0,02	0,06	0,08	0,03	0,01
3	0,01	0,03	0,04	0,015	0,005

b) $P\{X > Y\} = 0,19$

58. $EX = -\frac{1}{8}$; $EY = 0$.

$$\text{cov}(X,\ Y) = -\frac{1}{8} \text{ và } \rho(X,\ Y) = -0,15.$$

59. a) $EX = -\frac{1}{5}$; $EY = 0$, $\rho(X,\ Y) = 0$.

b) X và Y không độc lập vì

$P\{X = 1\} = \frac{2}{15}$, $P\{Y = 1\} = \frac{5}{15}$ và $P\{X = 1,\ Y = 1\} = 0$.

60. $P\{Y = 1\} = P\{X = 3\} = 0,25$;

$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} = 0,3$;

$P\{Y = 10\} = P\{X = 0\} + P\{X = 4\} = 0,25$;

$P\{Y = 7\} = P\{X = 1\} = 0,2$.

Vậy kết quả là

Y	1	2	7	10
P	0,25	0,3	0,2	0,25

$EY = 4,75$

$EY^2 = 36,25$

$DY = 13,6875$.

61. Ta có $T = X + Y + Z \backsim B(30\ ;\ 0,1)$

Vậy $P\{T = 4\} = C_{30}^4(0,1)^4(0,9)^{26} \approx 0,1771$.

62. Ta có bảng phân bố của X và Y như sau

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

X	0	1	2
P	0,09	0,42	0,49

đặt $Z = X + Y$. Ta có

$P\{Z = 0\} = P\{X = 0\}P\{Y = 0\} = 0,0324$;

$P\{Z = 1\} = P\{X = 0\}P\{Y = 1\} + P\{X = 1\}P\{Y = 0\}$

$= 0,1944$.

Tương tự

$P\{Z = 2\} = 0,3924$;

$P\{Z = 3\} = 0,3024$;

$P\{Z = 4\} = P\{X = 2\}P\{Y = 2\} = 0,0784$.

Vậy bảng quy luật xác suất của $X + Y$ là :

$X+Y$	0	1	2	3	4
P	0,0324	0,1944	0,3924	0,3024	0,0784

b) Giả sử trái lại $T = X + Y$ có phân bố nhị thức $T \backsim B(4, p)$. Khi đó $P\{T = 4\} = p^4 = 0{,}0784$.

Mặt khác $P\{T = 0\} = (1 - p)^4 = 0{,}0324$

Vậy ta phải có $\begin{cases} p^4 = 0{,}0784 \\ (1-p)^4 = 0{,}0324 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \sqrt[4]{0{,}0784} \\ p = 1 - \sqrt[4]{0{,}0324} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt[4]{0{,}0784} + \sqrt[4]{0{,}0324}.$$ Vô lí !

63. a)

X	0	1
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Y	0	1	2
P	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

$X + Y \backsim B\left(3, \frac{1}{5}\right)$. Do đó ta có bảng

$X+Y$	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

b)

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tương tự như bài tập 62 ta có

$X + Y$	0	1	2	3
P	0,32	0,48	0,18	0,02

Nếu $X + Y$ có phân bố nhị thức thì $X + Y \backsim B(3, p)$.

Suy ra $p^3 = P\{X + Y = 3\} = 0,02$

$(1 - p)^3 = P\{X + Y = 0\} = 0,32$.

Điều này không xảy ra.

64. Ta có

$$f(n) = C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

65. Xác suất để A thắng r ván là

$$C_{2m+1}^{r}p^{r}(1 - p)^{2m+1-r}.$$

Vậy xác suất để A thắng ít nhất $m + 1$ ván là

$$\sum_{r=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^{r}p^{r}(1 - p)^{2m+1-r} =$$

$$= 1 - \sum_{r=0}^{m} C_{2m+1}^{r}p^{r}(1 - p)^{2m+1-r}$$

Với $m = 2$, $p = 0,25$, xác suất này là $\frac{53}{512}$.

66. Tại thời điểm đó nhà toán học đã rút ra $2n - k$ que diêm.

Gọi A là biến cố cần tìm.

A_1 : "Rút n que túi phải, $n - k$ que túi trái và lần thứ $2n - k + 1$ chọn túi phải".

A_2 : "Rút n que túi trái, $n - k$ que túi phải và lần thứ $2n - k + 1$ chọn túi trái".

Ta có $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$

Rõ ràng $P(A_1) = C_{2n-k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} . \frac{1}{2}$;

$$P(A_2) = C_{2n-k}^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} . \frac{1}{2}.$$

Vậy

$$P(A) = C_{2n-k}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

67. Gọi n là số vé cần mua. Ta phải có

$$1 - (0,9)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow$$

$$(0,9)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\lg 0,05}{\lg 0,9} = 28,8.$$

Vậy $n = 29$.

68. a) Gọi X là số người chết trong vòng 1 ngày : $X \backsim$ Poátxông $\left(\frac{2}{7}\right)$.

Vậy tra bảng phân bố Poátxông ta được $P\{X = 0\} \approx 0,7515$.

b) Gọi Y là số người chết trong vòng 2 ngày :

$$Y \backsim \text{Poátxông } \left(\frac{4}{7}\right).$$

Vậy tra bảng ta được $P\{Y \geq 3\} \approx 0,0204$.

69. a) Gọi X là số xe đi qua trong thời gian 3 phút.

Ta có $X \backsim$ Poátxông (6).

Tra bảng ta được $P\{X = 6\} = 0,1606$.

b) Gọi X là số xe đi qua trong khoảng thời gian t phút. Ta có $Y \backsim$ Poátxông $(2t)$. Từ đó $P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - e^{-2t} = 0,99$. Suy ra $t = 2,303$.

70. a) Gọi X là số tai nạn xảy ra trong 3 tháng.

Ta có $X \backsim$ Poátxông (6).

Vậy tra bảng ta được $P\{X \leq 3\} = 0,151$.

b) Gọi Y là số tai nạn xảy ra trong 1 tháng. Ta có $Y \backsim$ Poátxông (2). Vậy $P\{Y \leq 1\} = 0,406$. Xác suất để 3 tháng liên tiếp mỗi tháng không có quá 1 tai nạn là $(0,406)^3 = 0,067$.

71. Ta có bảng phân bố của X là

X	0	1	2	3	≥ 4
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,3081

a) Từ bảng phân bố của X ta thu được bảng phân bố của Y

$$P\{Y = -24\} = P\{X = 0\} ;$$
$$P\{Y = -4\} = P\{X = 1\} ;$$
$$P\{Y = 16\} = P\{X = 2\} ;$$
$$P\{Y = 36\} = P\{X \geq 3\}.$$

Y	−24	−4	16	36
P	0,0608	0,1703	0,2384	0,5305

Từ đó $EY = 20,8$.

b) Nếu trạm có 4 chiếc xe thì phân bố của số tiền Z mà trạm thu được trong 1 ngày sẽ là

Z	−32	−12	8	28	48
P	0,0608	0,1703	0,2834	0,2225	0,3081

Từ đó $EZ = 18,9$.

c) Vậy thì trạm nên có 3 chiếc xe.

72. a) $P\{X = 0\} = e^{-1.5} \approx 0{,}2231$;

$$P\{X = 2\} = e^{-1.5} \times \frac{1{,}5^2}{2!} \approx 0{,}2510 \ ;$$

$$P\{X \leqslant 2\} \approx 0{,}8088 \ ;$$

$$P\{X \geqslant 4\} = 1 - P\{X \leqslant 3\} \approx 0{,}0656.$$

73. a) Ta có $X \backsim$ Poátxông (2).

Gọi Y là số ô tô cho thuê. Ta có

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} \approx 0{,}1353 \ ;$$

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 1\} \approx 0{,}2707 \ ;$$

$$P\{Y = 2\} = P\{X = 2\} \approx 0{,}2707 \ ;$$

$$P\{Y = 3\} = P\{X = 3\} \approx 0{,}1804 \ ;$$

$$P\{Y = 4\} = P\{X \geqslant 4\} \approx 0{,}1429.$$

Từ đó

$$EY \approx 1{,}925.$$

b) Gọi n là số ô tô mà cửa hàng cần có. Ta phải có

$$P\{X \leqslant n\} > 0{,}98.$$

Tra bảng ta thấy $P\{X \leqslant 4\} \approx 0{,}9473$;

$$P\{X \leqslant 5\} \approx 0{,}9834.$$

Vậy $n = 5$.

74. a) Gọi X là số hoa trên một chậu cây :

$$X \backsim \text{Poátxông } (3).$$

Ta có $P\{X = 2\} \approx 0{,}2240$;

$$P\{X = 3\} \approx 0{,}2240 \ ;$$

$$P\{X = 4\} \approx 0{,}1680 \ ;$$

$$P\{X = 5\} \approx 0{,}1008 \ ;$$

và

$$P\{2 \leqslant X \leqslant 5\} \approx 0{,}7169.$$

Gọi Y là số hoa của chậu cây đem bán.

Ta có $P\{Y = 2\} = \dfrac{P\{X = 2\}}{P\{2 \leqslant X \leqslant 5\}} = 0,3125.$

Tương tự $P\{Y = 3\} = 0,3125$;

$P\{Y = 4\} = 0,2344$;

$P\{Y = 5\} = 0,1406.$

b) $EY = 3,203$;

$EY^2 = 11,328$;

$$\sigma_Y = 1,033.$$

75. a) Dễ thấy $X(\Omega) = \{1, 2, ...\}$, và $P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1}p.$ $(k \geqslant 1)$.

b) Gọi B là biến cố : "Trong n lần gieo đầu tiên chỉ có đúng 1 lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa".

Ta phải tìm $P\{X = k/B\}$.

Rõ ràng với $k > n$ thì

$$P\{X = k/B\} = 0.$$

Xét $k \leqslant n$. Ta có

$$P\{X = k/B\} = \frac{P\{X = k, B\}}{P(B)}$$

$$P(B) = C_n^1 pq^{n-1} = npq^{n-1} \text{ (ở đây } q = 1 - p).$$

$$P\{X = k, B\} = pq^{n-1}.$$

Do đó $P\{X = k/B\} = \dfrac{1}{n}.$

76. Ta có

$$P\{X = k/X + Y = n\} = \frac{P\{X = k, X + Y = n\}}{P\{X + Y = n\}}.$$

Ta có $P\{X = k, X + Y = n\} = P\{X = k, Y = n - k\} =$

$$P\{X = k\}P\{Y = n - k\} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!(n - k)!}$$

Vì $X + Y \backsim$ Poátxông $(\lambda_1 + \lambda_2)$ nên :

$$P\{X + Y = n\} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}.$$

Từ đó $P\{X = k/X + Y = n\} = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$

Như vậy phân bố của X với điều kiện $X + Y = n$ là phân bố nhị thức với $p = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Chương III

77. a) $k = 12$

b) $\text{mod}X = \frac{2}{3}$.

c) $P\{0,4 < X < 0,6\} = 12\int_{0,4}^{0.6} x^2(1 - x)dx = 0,296.$

78. $k = 2$.

$$EX = 2\int_0^1 x(1 - x)dx = \frac{1}{3}.$$

$$DX = \frac{1}{18}.$$

Tìm median : Hàm phân bố của X là

$$F(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{với } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{với } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{với } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Nếu x_o là median thì x_o là nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} F(x_o) = \frac{1}{2} \\ 0 \leqslant x_o \leqslant 1. \end{cases}$$

Vậy $x_o = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

79. Hàm mật độ

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{với } x > 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

$$EX = \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$DX = \frac{4 - \pi}{2}.$$

median = $\sqrt{2\log 2}$.

modX = 1.

80. $P\{2 < X^2 < 5\} = P\{\sqrt{2} < X < \sqrt{5}\} =$

$= P\{\sqrt{2} < X < 2\} = 2 - \sqrt{2}.$

81. $P\{X^2 < 2\} = P\{-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}\} =$

$= P\{-1 < X < \sqrt{2}\} = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{4}.$

82. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}$, do đó $k = 2$.

b) $EX = 2\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)^3} = 1.$

83. Vì $F(1) = 1$ nên $k = \dfrac{1}{\alpha - \beta}$.

Hàm mật độ $f(x) = F'(x) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(x^{\beta-1} - x^{\alpha-1})$.

Từ đó $EX = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}\displaystyle\int_0^1 (x^\beta - x^\alpha)dx = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)}$.

84. a) Ta có $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 9k$. Suy ra $k = \dfrac{1}{9}$.

b) $P\{X > 2\} = \frac{1}{9}\int_2^3 x^2 dx = \frac{19}{27}.$

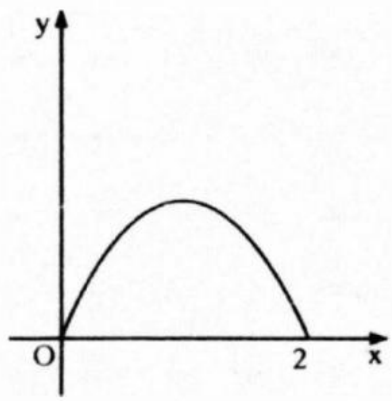
c) Hàm phân bố $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x < 0 \\ \frac{x^3}{27} & \text{với } 0 \le x \le 3 \\ 1 & \text{với } x \ge 3 \end{cases}$

Median m là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x^3}{27} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}.$$

d) $F(a) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a^3}{27} = \frac{3}{4} \Rightarrow a \approx 2{,}726.$

85. a) Đồ thị của $f(x)$ như sau



b) $P\{X > 1{,}5\} \approx 0{,}15625$;

$P\{0{,}9 < X < 1{,}1\} \approx 0{,}1495.$

86. a) $k = 2$.

b) Median là $1 + \sqrt{2}$.

c) $f(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$ và

$$f''(x) = -\frac{6(1-x)}{(1+x)^5} < 0 \text{ với } x = \frac{1}{2}$$

vậy $\text{mod}X = \frac{1}{2}$

87. a) Hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha \text{tg}x} \dfrac{1}{\cos^2 x} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

b) $f'(x) = f(\text{x}) \left[2\text{tg}x - \dfrac{\alpha}{\cos^2 x} \right] = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\text{tg}x = \frac{\alpha}{\cos^2 x} \Rightarrow \sin 2x = \alpha \ (*)$$

Ta có

$$f''(x) = f(\text{x}) \left[2\text{tg}x - \frac{\alpha}{\cos^2 x} \right]^2 + 2f(\text{x}) \frac{1}{\cos^2 x} [1 - \alpha \text{tg}x].$$

Do đó $f''(x) < 0$ nếu $\text{tg}x > \dfrac{1}{\alpha}$. Từ phương trình (*) suy ra

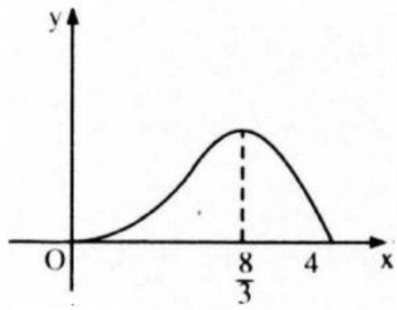
$$\text{tg}x = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}.$$

Vậy $\text{mod}X = m_o$ là giá trị mà

$$\text{tg}m_o = \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \qquad 0 < m_o < \frac{\pi}{2}.$$

88. a) Vì $\int_0^4 x^2(4-x)dx = \dfrac{64}{3}$ suy ra $k = \dfrac{3}{64}$.

Đồ thị của $f(x)$ như sau



Hình 2

b) $f'(x) = 0$ suy ra $\text{mod}X = \dfrac{8}{3}$

c) $P\{X < 1\} = \displaystyle\int_0^1 \frac{3}{64}x^3(4 - x)dx = \frac{13}{256}$.

89. $EX = \displaystyle\int_{-2}^{0} x\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)dx + \int_0^2 x\left(-\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)dx = 0.$

$$DX = \frac{2}{3}.$$

90. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = k\int_0^1 xdx + 3k$

$$= \frac{k}{2} + 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{7}.$$

b) $EX = \dfrac{2}{7}\displaystyle\int_0^1 x^2dx + \frac{2}{7}\int_1^4 xdx = \frac{47}{21} \approx 2{,}238.$

$EX^2 = \dfrac{2}{7}\displaystyle\int_0^1 x^3dx + \frac{2}{7}\int_1^4 x^2dx = \frac{85}{14}.$

Từ đó $DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{937}{882} \approx 1{,}062$.

Median $X = \frac{9}{4}$.

91. a) Hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\alpha(\alpha^2 - x^2)}{(\alpha^2 + x^2)^2} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

b) $EX = \int\limits_0^{\alpha} \frac{2\alpha x(\alpha^2 - x^2)dx}{(\alpha^2 + x^2)^2}$.

Dùng phép đổi biến $x = \alpha \mathrm{tg} u$, ta tìm được

$$EX = \alpha(1 - \ln 2) \approx \frac{3\alpha}{10}.$$

Tương tự $EX^2 = \alpha^2(\pi - 3)$.

Từ đó

$$DX = \alpha^2[(\pi - 3) - (1 - \ln 2)^2] \approx \frac{\alpha^2}{20}.$$

Ở đây $\pi \approx 3{,}1416$, $\ln 2 = 0{,}693$.

92. Ta có $\int\limits_2^3 (x^2 - 1)dx = \frac{16}{3}$. Từ đó $k = \frac{3}{16}$.

$$EX = \frac{3}{16}\int\limits_2^3 x(x^2 - 1)dx \approx 2{,}578 \text{ (kg)}.$$

$EX^2 = 6{,}725$. Từ đó $DX = 6{,}725 - (2{,}578)^2 \approx 0{,}0789$ (kg^2). Độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_X = \sqrt{DX} \approx 0{,}2809$ (kg).

93. Hàm mật độ $f(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$ với $0 \leqslant x \leqslant 1$ và bằng 0 nếu trái lại.

a) Suy ra $EX^k = \frac{\alpha}{\alpha + k}$.

b) Từ đó tính được các mômen trung tâm

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}$$

$$\alpha_3 = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+1)^3(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

$$\alpha_4 = \frac{3\alpha(3\alpha^2-\alpha+2)}{(\alpha+1)^4(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}$$

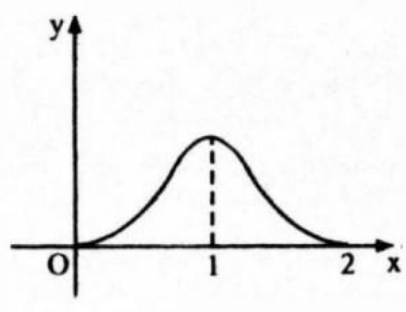
b) Hệ số bất đối xứng là

$$S = \frac{\alpha_3}{\alpha_2^{3/2}} = -\frac{2(\alpha-1)}{\alpha+3}\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hệ số nhọn là

$$E = \frac{\alpha_4}{\alpha_2^2} - 3 = \frac{6(\alpha^3-\alpha^2-6\alpha+2)}{\alpha(\alpha+3)(\alpha+4)}.$$

84. a) $\int_0^2 x^2(x-2)^2dx = \frac{16}{5}$, suy ra $k = \frac{15}{16}$. Đồ thị của $f(x)$ có dạng như sau



Hình 3

b) $EX = \frac{15}{16}\int_0^2 x^3(x-2)^2dx = 1$;

$$EX^2 = \frac{15}{16}\int_0^2 x^4(x-2)^2dx = \frac{8}{7}.$$

Từ đó $DX = \frac{8}{7} - 1 = \frac{1}{7}$.

95. a) $k = \frac{1}{2}$.

Hàm phân bố $F(x) = 0$ với $x < 1$; với $x \geq 1$ thì :

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_1^x t^{-3/2}dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b) Trước hết ta tìm hàm phân bố của Y. Với $y > 0$:

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\left\{\frac{1}{X} < y\right\} =$$

$$P\left\{X > \frac{1}{y}\right\} = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } y > 1 \\ \sqrt{y} & \text{nếu } 0 < y < 1. \end{cases}$$

Với $y < 0$ thì $F_Y(y) = 0$.

Vậy hàm mật độ của Y là

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{nếu } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

c) $P\{0,1 < Y < 0,2\} = F_Y(0,2) - F_Y(0,1) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}}$.

96. $k = \frac{3}{4}$.

$$\mathrm{E}Y = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} 2x^2(1 - x^2)dx = \frac{2}{5}.$$

$$\mathrm{E}Y^2 = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} 4x^4(1 - x^2)dx = \frac{12}{35}.$$

Từ đó $\mathrm{D}Y = \dfrac{32}{175}$.

97. $S = \pi R^2$.

Vậy $$\mathrm{E}S = \frac{\pi}{a}\int_0^a r^2 dr = \frac{\pi a^2}{3};$$

$$\mathrm{E}S^2 = \frac{\pi^2}{a}\int_0^a r^4 dr = \frac{\pi^2 a^4}{5}.$$

Vậy $\mathrm{D}S = \dfrac{4}{45}\pi^2 a^4$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_S = \dfrac{2}{3\sqrt{5}}\pi a^2$.

98. Ta có $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} e^{-x}(1 + x)^2 dx = 2e$

(dùng phép đổi biến $y = 1 + x$).

Từ đó $k = \dfrac{1}{2e}$.

Median m thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{2e}\int_{-1}^{m} e^{-x}(1 + x)^2 dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{1+m} e^{-y}y^2 dy = 1.$$

Nguyên hàm của $e^{-y}y^2$ là $-e^{-y}[(y + 1)^2 + 1]$.

Suy ra $e^{(-1-m)}[(m + 2)^2 + 1] = 1$.

Điều phải chứng minh.

99. a) $k = 3$.

$$P\left\{\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2}\right\} = P\left\{\frac{1}{16} < X < \frac{9}{16}\right\}$$

$$= 3\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{9}{16}} x^2dx = \frac{91}{512}.$$

b) $P\{Y > 1\} = P\left\{X > \frac{1}{4}\right\} = 3\int_{\frac{1}{4}}^{1} x^2dx = \frac{63}{64}.$

100. Kí hiệu $AP = X$, $BP = 10 - X$. Theo giả thiết X có phân bố đều trên đoạn $[0, 10]$. Ta có $S = X(10 - X)$. Vậy diện tích trung bình là

$$ES = \frac{1}{10}\int_0^{10} x(10 - x)dx = \frac{50}{3}\,(cm^2).$$

$$ES^2 = \frac{1}{10}\int_0^{10} x^2(10 - x)^2dx = \frac{1000}{3}.$$

Từ đó $DS = \frac{500}{9}$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_S = \frac{10\sqrt{5}}{3}\,(cm^2)$.

101. Ta có $EY = \alpha + \beta EZ + \gamma EZ^2 = \alpha + \gamma$.

$$EY^2 = E(\alpha + \beta Z + \gamma Z^2) =$$

$$E(\alpha^2 + \beta^2Z^2 + \gamma^2Z^4 + 2\alpha\beta Z + 2\alpha\gamma Z^2 + 2\gamma\beta Z^3).$$

Chú ý rằng $EZ = EZ^3 = 0$;

$$EZ^2 = 1,\ EZ^4 = 3$$

(sử dụng tích phân từng phần),

ta thu được

$$EY^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 3\gamma^2.$$

Từ đó $DY = EY^2 - (\alpha + \gamma)^2 = \beta^2 + 2\gamma^2$.

102. Gọi T là thời gian đi từ nhà tới trường (đơn vị là phút).

Khi đó $V = \frac{600}{60T} = \frac{10}{T}$ (m/s).

a) Vậy thì $EV = \frac{1}{4}\int_6^{10} \frac{10dt}{t} = \frac{5}{2}\ln\frac{10}{6} \approx 1,277$ (m/s).

$$EV^2 = \frac{1}{4}\int_6^{10} \frac{100}{t^2}dt = \frac{5}{3}.$$

Từ đó $DV = 0,0358$ và $\sigma_V = 0,189$ (m/s)

103. a) $P\{X > 300\} = 1 - \phi(1,25) = 0,1056$.

b) $P\{X < 175\} = \phi(-1,875) = 0,0303$.

c) $P\{260 < X < 270\} = \phi(0,5) - \phi(0,25) = 0,0928$.

104. a) Ta có $k\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\lambda}{2}$.

Với $x > 0$: $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$.

Với $x < 0$: $F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda t}dt = \frac{1}{2}e^{\lambda x}$.

c) $EX = 0$; $DX = \frac{2}{\lambda^2}$;

còn $\mathrm{mod}X = 0$ và median $X = 0$.

105. a) Ta có $\int_0^{\infty} x^2e^{-2x}dx = \frac{x^2e^{-2x}}{2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} xe^{-2x}dx =$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{2}dx = \frac{1}{4}. \text{ Từ đó } k = 4.$$

b) Hàm phân bố là

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}(2x^2 + 2x + 1) & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

c) $f'(x) = 8e^{-2x}x(1 - x)$.

Vậy $f'(x) = 0$ tại $x = 1$, tại điểm đó $f''(1) < 0$, do đó $\text{mod}X = 1$.

d) $\text{E}X = \frac{3}{2}$; $\text{E}X^2 = 3$.

Vậy $\text{D}X = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

106. a) Ta có $\text{P}\{T > 20\} = 0{,}65$.

$$\Rightarrow \text{P}\{T < 20\} = \phi\left(\frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}35 = \phi(-0{,}3853)$$

Vậy $\frac{20 - \mu}{\sigma} = -0{,}3853$ (1)

Tương tự

$$\text{P}\{T > 30\} = 0{,}08 \Rightarrow$$

$$\phi\left(\frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}92 = \phi(1{,}405)$$

$$\Rightarrow \frac{30 - \mu}{\sigma} = 1{,}405 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\mu = 22{,}12$ (*phút*)

$\sigma = 5{,}59$ (*phút*)

b) Ta có $\text{P}\{T > 25\} = 1 - \phi\left(\frac{25 - 22{,}12}{5{,}59}\right)$

$= 1 - \phi(0{,}51) = 0{,}3050$.

c) Giả sử An cần đi khỏi nhà trước t phút trước giờ vào học. Ta phải xác định t bé nhất để

$$\text{P}\{T > t\} \leqslant 0{,}02$$

$\Rightarrow t \geqslant 33{,}6$. Vậy $t = 33{,}6$ (phút).

107. Gọi X là trọng lượng sản phẩm. Xác suất để sản phẩm bị loại là

$$p = P\{X < 8\} = \phi(8 - \mu).$$

Gọi Y là lợi nhuận thu được cho một sản phẩm. Ta có

$$Y = -c \text{ với xác suất } p$$

và $Y = 1 - c$ với xác suất $q = 1 - p$.

Vậy lợi nhuận trung bình trên một sản phẩm là

$$EY = -pc + (1 - c)q = q - c$$

$$= 1 - p - c = 1 - \phi(8 - \mu) - 0{,}05\mu - 0{,}3.$$

Xét hàm $f(x) = 0{,}7 - 0{,}05x - \phi(8 - x)$

$$f'(x) = -0{,}05 + \varphi(8 - x), \text{ ở đó } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ khi } \left[\begin{array}{l} x = 10{,}04 \\ x = 5{,}96 \end{array}\right.$$

Mặt khác $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(8-x)^2}{2}} (8 - x) < 0$

khi $x = 10{,}04$. Vậy $f(x)$ đạt max tại $x = 10{,}04$.

Vậy cần chọn $\mu = 10{,}04$ (kg) để lợi nhuận nhà máy đạt cực đại.

108. a) Gọi X là chiều cao của cây. Ta có

$$P\{X < 18\} = \frac{25}{640} = 0{,}039 = \phi(-1{,}762) ;$$

$$P\{X > 24\} = \frac{110}{640} = 0{,}1718.$$

$$\Rightarrow P\{X < 24\} = 0{,}8281 = \phi(0{,}9463).$$

Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{18 - \mu}{\sigma} = -1{,}762 \\ \dfrac{24 - \mu}{\sigma} = 0{,}9463 \end{cases}$$

ở đó $\mu = EX$ và $\sigma^2 = DX$.

Từ hệ trên ta tìm được

$$\mu = 21,9 \ (m)$$

$$\sigma = 2,22 \ (m).$$

b) Ta có

$$P\{16 < X < 20\} = \phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{16-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \phi(-0,859) - \phi(-2,665) = 0,1913.$$

Vậy trong 640 cây có khoảng 640 × 0,1913 = 122 cây có chiều cao trong khoảng từ 16*m* đến 20*m*.

109. Hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Vậy nếu $Y = e^{-X}$ thì

$$EY = 2\int_0^\infty e^{-x}e^{-2x}dx = \frac{2}{3}.$$

$$EY^2 = 2\int_0^\infty e^{-2x}e^{-2x}dx = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $DY = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$;

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,2357.$$

110. a) Ta có $\int_0^\infty xe^{-h^2x^2}dx = \frac{1}{2h^2}e^{-h^2x^2}\Big|_0^\infty$

$$= \frac{1}{2h^2}. \text{ Suy ra } a = 2h^2.$$

b) $EX = 2h^2\int_0^\infty x^2e^{-h^2x^2}dx.$

Đổi biến số đặt $u = \sqrt{2}\,hx$.

Khi đó :

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2}h}\int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}.$$

$$EX^2 = 2h^2\int_0^{\infty} x^3 e^{-h^2x^2} dx.$$

Tích phân từng phần với $u = x^2$, $dv = 2h^2xe^{-h^2x^2}dx$, cho ta $EX^2 = \frac{1}{h^2}$.

Từ đó $DX = \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{4h^2} = \frac{4-\pi}{4h^2}$.

c) $P\left\{X < \frac{1}{h\sqrt{2}}\right\} = 2h^2\int_0^{h\sqrt{2}} xe^{-h^2x^2}dx = 0,0393.$

111. a) Ta có $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $k = \frac{2}{\pi}$.

b) $F(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^x.$

c) Ta có $P\left\{X \in \left(\ln\frac{1}{\sqrt{3}}, \ln\sqrt{3}\right)\right\} =$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\ln\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{3}$$

Gọi n là số quan sát cần thiết.

Ta cần có $P\{$không quan sát được $X \in \left(\ln\frac{1}{\sqrt{3}}, \ln\sqrt{3}\right)\} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 0{,}1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \geqslant 10 \Rightarrow n \geqslant \frac{1}{\lg 1{,}5} = 5{,}67$.

Vậy $n = 6$.

112. a) $P\{2 < Y < 18\} = P\{1 < X < 3\} = 0{,}3181$.

b) $P\{Y < 4\} = P\{X < \sqrt{2}\} = 1 - e^{-\sqrt{2}}$.

113. a) $P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = \phi(3) - \phi(-3) = 0{,}9973$.

b) Nếu X có phân bố mũ với tham số λ thì :

$$P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = P\left\{\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| < \frac{3}{\lambda}\right\}$$

$$= P\left\{-\frac{2}{\lambda} < X < \frac{4}{\lambda}\right\} = \int_0^{4/\lambda} \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= 1 - e^{-4} \approx 0{,}98168.$$

c) Nếu X có phân bố đều trên $[-1, 1]$ thì $DX = \frac{1}{3}$, do đó $\mu = 0$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = P\{|X| < \sqrt{3}\} = 1$.

d) Nếu X có phân bố Poátxông $(0{,}09)$ thì $\mu = 0{,}09$; $\sigma = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

Vậy $P\{|X - \mu| < 3\sigma\} = P\{|X - 0{,}09| < 0{,}9\} = P\{X = 0\} = e^{-0{,}09} = 0{,}91393$.

Chương IV

114. a) Ta có $\int_0^1 \int_0^x kududv = \int_0^1 ku^2du = \frac{k}{3}$. Suy ra $k = 3$.

b) Ta có $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$

$$= \int_0^x 3xdy = 3x^2 \text{ nếu } 0 < x < 1.$$

Vậy $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \int_y^1 3xdx = \frac{3(1-y^2)}{2}.$$

Vậy $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - y^2) & \text{nếu } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$

c) X và Y không độc lập vì

$$P\left\{X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right\} = 0,$$

nhưng $P\left\{X < \frac{1}{2}\right\} \neq 0$, $P\left\{Y > \frac{1}{2}\right\} \neq 0$.

115. Ta có

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \frac{1}{6\pi} \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy$$

$$= \frac{2}{6\pi} \int_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dy = \frac{2}{9\pi}\sqrt{9 - x^2}.$$

Vậy

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{9-x^2}}{9\pi} & \text{nếu } |x| < 3 \\ 0 & \text{nếu } |x| \geqslant 3 \end{cases}$$

Tương tự ta tìm được

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2} & \text{nếu } |y| \leqslant 2 \\ 0 & \text{nếu } |y| > 2. \end{cases}$$

116. Theo công thức tính xác suất, để (X, Y) rơi vào hình chữ nhật ta có :

$$P\left\{\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} < Y < \frac{\pi}{3}\right\} = F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) -$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) + F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} +$$

$$\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}08.$$

117. Ta có $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1 \Leftrightarrow$

$$k\int_0^1\int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dxdy = 1.$$

Dễ dàng tính được $\int_0^1 \int_0^2 x^2 dxdy = \frac{2}{3}$ và $\int_0^1 \int_0^2 \frac{xy}{2} dxdy = \frac{1}{2}$.

Từ đó $k = \frac{6}{7}$.

b) Rõ ràng với $x < 0$, $y < 0$ thì $F(x, y) = 0$ và với $x > 1$, $y > 2$ thì $F(x, y) = 1$. Ta xét các trường hợp còn lại.

i) Nếu $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7}\int_0^x \int_0^y \left(u^2 + \frac{uv}{2}\right) dudv = \frac{6}{7}\int_0^x \int_0^y u^2 dudv +$$

$$+ \frac{6}{7}\int_0^x \int_0^y \frac{uv}{2} dudv = \frac{6}{7}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{8}\right).$$

ii) Nếu $0 \leq x \leq 1$, $y > 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7}\int_0^x \int_0^2 \left(u^2 + \frac{uv}{2}\right) dudv = \frac{6}{7}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2}{2}\right).$$

iii) Nếu $x > 1$, $0 \leq y \leq 2$ thì

$$F(x, y) = \frac{6}{7}\int_0^1 \int_0^y \left(u^2 + \frac{uv}{2}\right) dudv = \frac{6}{7}\left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{8}\right).$$

118. a) Ta có $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$

$$\Leftrightarrow k\int_0^{\infty} e^{-x}dx \int_x^{\infty} e^{-y}dy = k\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{k}{2} = 1.$$

Vậy $k = 2$.

b) Hàm mật độ của X : Với $x > 0$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_x^{\infty} 2e^{-x} e^{-y} dy = 2e^{-2x}.$$

Vậy
$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

Hàm mật độ của Y : Với $y > 0$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \int_0^y 2e^{-x}e^{-y}dx = 2e^{-y}[1 - e^{-y}]$$

Vậy $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-y}[1 - e^{-y}] & \text{nếu } y > 0 \\ 0 & \text{nếu } y < 0 \end{cases}$

c) Ta có $P\{X > 2, Y < 1\} = \int_2^{\infty} dx \int_{-\infty}^{1} f(x, y)\, dx$.

Tuy nhiên $P\{X > 2\} > 0$

$P\{Y < 1\} > 0$.

119. a) $k = \dfrac{1}{\pi^2}$.

b) $F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u, v)\, du\, dv = \dfrac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\dfrac{dv}{1+v^2}\int_{-\infty}^{x}\dfrac{du}{1+u^2} =$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}y + \frac{1}{2}\right)$$

c) Hàm phân bố của X là

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}\, x + \frac{1}{2}.$$

Tương tự

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = \frac{1}{\pi}\text{arctg}y + \frac{1}{2}$$

Vì $F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$ nên ta kết luận : X và Y độc lập.

d) Ta có $P = \dfrac{1}{\pi^2}\int_0^1\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx\, dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \dfrac{1}{48}$.

Hoặc dùng cách khác : theo câu c) thì X và Y độc lập do đó

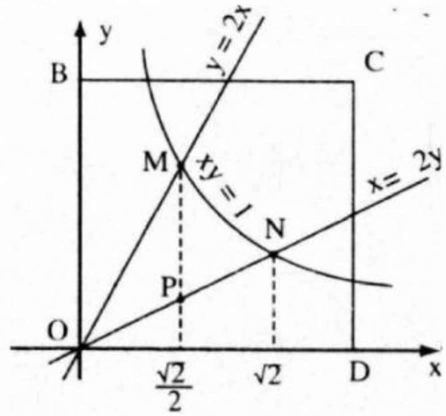
$$P\{1 < X < \sqrt{3},\ 0 < Y < 1\}$$

$$= P\{1 < X < \sqrt{3}\}\, P\{0 < Y < 1\} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{48}.$$

120. Xác suất cần tìm là $\frac{1}{4}$ của diện tích hình A cho bởi điều kiện :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ xy \leqslant 1 \\ y \leqslant 2x \\ x \leqslant 2y \end{cases}$$

Hình A là tam giác cong OMN ở đó $O(0,\ 0)$, $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$ và $N\left(\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *(hình 4)*.



Hình 4

$$S_{OMN} = S_{OMP} + S_{MPN}$$

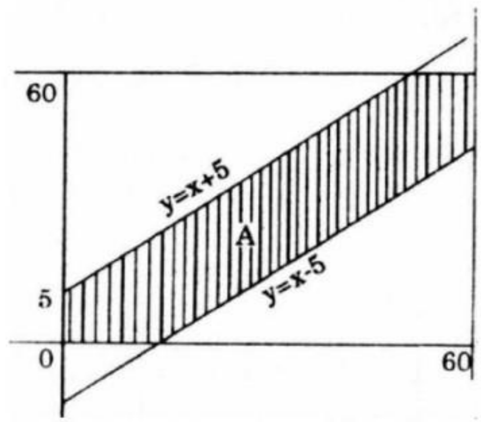
$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{x}{2}\right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2}\right) dx = \ln 2.$$

Vậy $p = \frac{ln2}{4}$.

121. Lấy gốc tọa độ là 5 giờ. Gọi X và Y là thời điểm đến của hai người (đo bằng phút). X và Y là hai ĐLNN có phân bố đều trong [0, 60]. Xác suất cần tìm là

$$\frac{1}{60 \times 60} \text{ diện tích hình } A = \frac{575}{3600} \approx 0,1597 .$$

(hình 5 : A là hình gạch xọc).

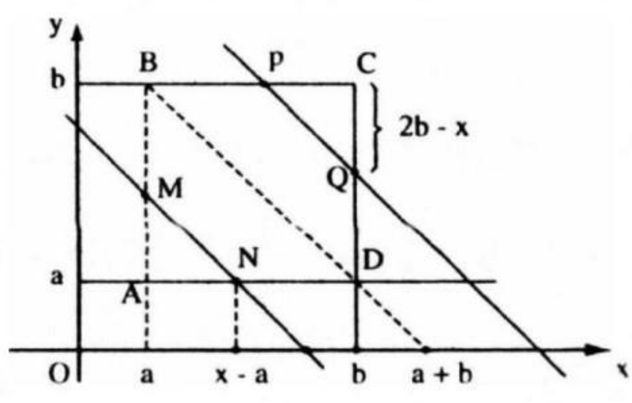


Hình 5

122. $P\{X + Y < x\} = 0$ khi $x \leq 2a$

$P\{X + Y < x\} = 1$ khi $x > 2b$

Khi $2a < x \leq a + b$, $P\{X + Y < x\}$ bằng tỉ số diện tích tam giác AMN với diện tích hình vuông $ABCD$ *(hình 6)*.



Hình 6

$$P\{X + Y < x\} = \frac{(x - 2a)^2}{2(b - a)^2}.$$

Khi $a + b < x \leq 2b$, $P\{X + Y < x\}$ bằng tỉ số diện tích đa giác $ABPQDA$ với diện tích hình vuông $ABCD$.

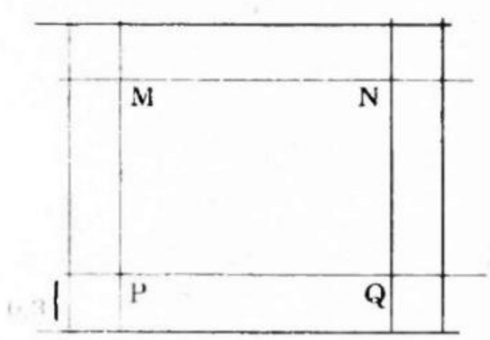
Vậy $P\{X + Y < x\} = 1 - \dfrac{(2b - x)^2}{2(b - a)^2}$.

Thành thử

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 2a \\ \dfrac{(x - 2a)^2}{2(b - a)^2} & \text{nếu } 2a < x \leq a + b \\ 1 - \dfrac{(2b - x)^2}{2(b - a)^2} & \text{nếu } a + b < x \leq 2b \\ 1 & \text{nếu } x > 2b \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2a}{(b - a)^2} & \text{nếu } 2a < x \leq a + b \\ \dfrac{2b - x}{(b - a)^2} & \text{nếu } a + b < x \leq 2b \\ 0 & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

123. Ta tìm xác suất của biến cố đối : "khoảng cách từ A đến các cạnh của hình vuông đều vượt quá 0,3". Đó chính là diện tích hình vuông $MNPQ = (0,4)^2 = 0,16$.



Hình 7

Vậy xác suất cần tìm là
$1 - 0,16 = 0,84$.

124. Ta cần tính tích phân

$$I = \iint_A \frac{3}{\pi}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy$$

ở đó A là hình tròn tâm O, bán kính $\frac{1}{2}$.

Ta chuyển sang tọa độ cực để tính tích phân trên.

Đặt $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Ta có

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} \frac{3}{\pi}(1 - r)\, r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2}.$$

125. Cố định $Z > 0$. Ta tìm

$$P\left\{\frac{X}{Y} < z\right\} = P\{X < zY\}$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y}\, dy \int_0^{zy} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda y z})\, dy$$

$$= 1 - \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y(z+1)}\, dy$$

$$= 1 - \frac{1}{z+1}.$$

Vậy hàm phân bố của $Z = \frac{X}{Y}$ là

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{z+1} & \text{nếu } z \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra hàm mật độ của Z là

$$f(z) = F'(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z+1)^2} & \text{nếu } z > 0 \\ 0 & \text{nếu } z < 0 \end{cases}$$

126. Hàm mật độ đồng thời của X, Y là

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ & \quad\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

cố định $z > 0$.

$$F(z) = P\{X + Y < Z\} = \iint\limits_{\{x+y \leqslant Z\} \cap B} \frac{1}{20} dx\, dy$$

ở đó B là hình chữ nhật $OABC = \{0 \leqslant x \leqslant 2 ; 0 \leqslant y \leqslant 10\}$.

i) Nếu $z < 0$ thì rõ ràng $F(z) = 0$

ii) Nếu $0 \leqslant z \leqslant 2$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OEF} = \frac{z^2}{40}$$

(*hình 8*).

iii) Nếu $2 \leqslant z \leqslant 10$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OGKC} = \frac{z-1}{10} ,$$

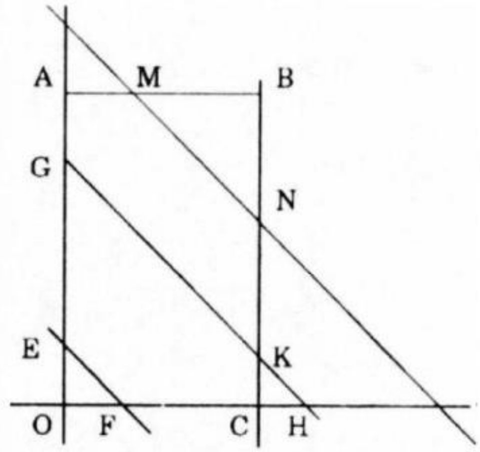
iv) Nếu $10 \leqslant z \leqslant 12$ thì

$$F(z) = \frac{1}{20} S_{OAMNC} = \frac{1}{20}\left[20 - \frac{(12-z)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{24z - z^2 - 104}{40} .$$

iv) Nếu $z > 12$ thì $f(z) = 1$.

Vậy hàm phân bố của $Z = X + Y$ là



Hình 8

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z < 0 \\ \dfrac{z^2}{40} & \text{nếu } 0 \leqslant z \leqslant 2 \\ \dfrac{z-1}{10} & \text{nếu } 2 \leqslant z \leqslant 10 \\ \dfrac{24z - z^2 - 104}{40} & \text{nếu } 10 \leqslant z \leqslant 12 \\ 1 & \text{nếu } z \geqslant 12 \end{cases}$$

Hàm mật độ của $Z = X + Y$ là

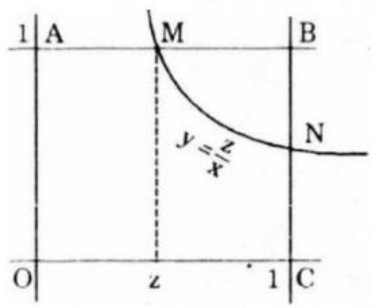
$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z < 0 \\ & \text{hoặc } z \geqslant 12 \\ \dfrac{z}{20} & \text{nếu } 0 \leqslant z \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{10} & \text{nếu } 2 \leqslant z \leqslant 10 \\ \dfrac{12 - z}{20} & \text{nếu } 10 \leqslant z \leqslant 12 \end{cases}$$

127. Xem bài tập 134.

128. Cố định $Z > 0$.

Ta có $F(z) = P\{XY < z\} = \iint\limits_{\{xy<z\} \cap B} dx\,dy$

ở đó B là hình vuông đơn vị $OABC$



Hình 9

Nếu $0 < z < 1$ thì $F(z)$ chính là diện tích hình $OAMNC$. Vậy :

$$F(z) = \int_0^z dz + \int_z^1 \frac{zdx}{x} = z - z\ln z.$$

Hiển nhiên $F(z) = 0$ nếu $z < 0$ và $F(z) = 1$ nếu $z > 1$.

Vậy

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } z < 0 \\ z(1 - \ln z) & \text{nếu } 0 < z \leqslant 1 \\ 1 & \text{nếu } z > 1, \end{cases}$$

Suy ra hàm mật độ

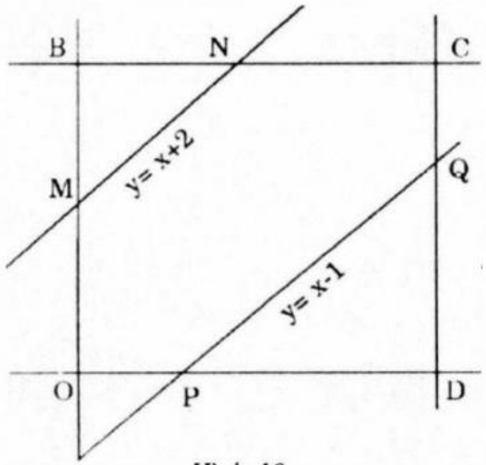
$$f(z) = \begin{cases} -\ln z & \text{nếu } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

129. Kí hiệu $A = \{(x, y) : x - 1 \leqslant y \leqslant x + 2\}$

$$B = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 6,\ 0 \leqslant y \leqslant 6\}$$

Xác suất cần tìm là $\frac{1}{36}$ diện tích $(A \cap B)$.

Trên hình vẽ ta thấy A là phần mặt phẳng nằm giữa hai đường thẳng $y = x + 2$ và $y = x - 1$, B là hình vuông $OBCD$



Hình 10

có cạnh $OD = 6$. Thành thử $A \cap B$ = đa giác $OMNCPQ$.

Dễ thấy $S_{OMNCPQ} = \dfrac{31}{2}$.

Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{31}{72}$.

130. Theo điều kiện hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{5} \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Hàm mật độ của Y là

$$g(y) = \begin{cases} 5\, e^{-5y} & \text{nếu } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Thành thử hàm mật độ đồng thời của X và Y là :

$$f(x, y) = f(x)\, f(y) = \begin{cases} 25\, e^{-5y} & \text{nếu } \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{5} \\ y \geqslant 0 \end{cases} \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Vậy

$$P\{Y \leqslant X\} = \int\limits_{\{y \leqslant x\} \cap B} 25\, e^{-5y}\, dx\, dy$$

ở đó $B = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{5},\ y \geqslant 0\}$.

Suy ra

$$P\{Y \leqslant X\} = \int_0^{\frac{1}{5}} dx \int_0^x 25e^{-5y}\, dy = \frac{1}{e}.$$

131. Xét phép biến đổi

$$\begin{cases} X = Z\cos\theta \\ Y = Z\sin\theta \end{cases}$$

ở đó $Z \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Jacobian là : } \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = Z.$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của (Z, θ) là

$$f(Z, \theta) = 4Z^3 \cos\theta \sin\theta\, e^{-z^2}$$

trên miền $Z \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

và bằng 0 nếu trái lại. Từ đó suy ra hàm mật độ của Z là

$$f(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4z^3 \cos\theta \sin\theta\, e^{-z^2}\, d\theta =$$

$$2z^3 e^{-z^2} \text{ nếu } z > 0.$$

132. Xét phép biến đổi $\begin{cases} Z = X + Y \\ V = X \end{cases}$

Phép biến đổi ngược là $\begin{cases} x = v \\ y = z - v \end{cases}$

Miền $\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ biến thành miền $\{v \geqslant 0,\ z \geqslant v\}$.

$$|J(z, v)| = 1.$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của (Z, V) là

$$f(z, v) = \begin{cases} a_1 a_2 e^{(a_2 - a_1) - a_2 z} & \text{nếu } v \geq 0,\ z \geq v \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Từ đó hàm mật độ của Z là

$$F(z) = 0 \text{ nếu } z < 0 \text{ và với } z > 0$$

$$f(z) = \int_0^z a_1 a_2 e^{(a_2 - a_1)v - a_2 z}\, dv$$

$$= \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} \left[e^{-a_1 z} - e^{-a_2 z} \right].$$

133. Xét phép biến đổi

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$$

Phép biến đổi ngược là

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1 - v) \end{cases}$$

Miền $\{x > 0,\ y > 0\}$ sẽ biến thành miền $\{u > 0,\ 0 < v < 1\}$.

$$|J(u, v)| = |-u| = u.$$

Vậy hàm mật độ đồng thời của U, V là

$$\begin{aligned} f(u, v) &= e^{-uv - u + uv} u \\ &= ue^{-u} \quad \text{nếu } u > 0 \\ &\qquad\qquad\ 0 < v < 1 \end{aligned}$$

và $f(u, v) = 0$ nếu trái lại.

Hàm mật độ của U là

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, dv = \int_0^1 ue^{-u}\, dv = ue^{-u} \text{ nếu } u > 0,$$

và $f(u) = 0$ nếu trái lại.

Hàm mật độ của V là

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)\, dv = \int_0^{\infty} ue^{-u}\, du = 1 \text{ nếu } 0 < v < 1.$$

và $g(v) = 0$ nếu trái lại.

b) Ta thấy rằng $f(u, v) = f(u)g(v)$.

Vậy U và V độc lập. Tương tự X và Y cũng độc lập.

134. Hàm mật độ đồng thời là

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \qquad\quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

Xét phép biến đổi $\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases}$

Phép biến đổi ngược là $\begin{cases} x = uv \\ y = u(1 - v) \end{cases}$

Miền $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ biến thành miền $\{0 < uv < 1, 0 < u(1 - v) < 1\}$.

Hàm mật độ đồng thời của U, V là

$$f(u, v) = \begin{cases} u \text{ nếu } \begin{cases} 0 < uv < 1 \\ 0 < u(1 - v) < 1 \end{cases} \\ 0 \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

Ta tìm hàm mật độ $f(u)$ của U. Nếu $u < 0$ thì $f(u) = 0$. Xét $u > 0$.

Khi đó $f(u, v) = v$ nếu $0 < v < \dfrac{1}{u}$ và $\dfrac{u - 1}{u} < v < 1$.

i) Nếu $0 < u < 1$ ta có

$$f(u) = \int_0^1 udv = u$$

ii) Nếu $u > 1$ và $\dfrac{1}{u} > \dfrac{u - 1}{u} \Leftrightarrow u < 2$ thì

$$f(u) = \int_{\frac{u-1}{u}}^{\frac{1}{u}} vdv = 2 - u$$

iii) Nếu $u > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{u} < \frac{u-1}{u}$ thì $f(u) = 0$.

Tóm lại $$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } u < 0 \\ u & \text{nếu } 0 \leq u \leq 1 \\ 2-u & \text{nếu } 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{nếu } u > 2 \end{cases}$$

Tiếp theo ta tìm hàm mật độ $g(v)$ của V.

Nếu $V < 0$ hay $v > 1$ thì $g(v) = 0$.

Xét $0 < v < 1$. Khi đó $f(u, v) = u$ nếu $0 < u < \frac{1}{v}$ và $0 < u < \frac{1}{1-v}$.

Vậy nếu $\frac{1}{v} < \frac{1}{1-v} \Leftrightarrow v > \frac{1}{2}$ thì $g(v) = \int_0^{\frac{1}{v}} udu = \frac{1}{2v^2}$.

Nếu $\frac{1}{v} > \frac{1}{1-v} \Leftrightarrow v < \frac{1}{2}$ thì $g(v) = \int_0^{1/1-v} udu = \frac{1}{2(1-v)^2}$.

Vậy

$$g(v) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } v < 0 \\ \dfrac{1}{2(1-v)^2} & \text{nếu } 0 < v < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2v^2} & \text{nếu } \dfrac{1}{2} \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } v > 1 \end{cases}$$

135. Xét phép biến đổi $\begin{cases} u = x - y \\ v = x \end{cases}$

Phép biến đổi ngược là

$$\begin{cases} x = v \\ y = v - u \end{cases}$$

Miền $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ biến thành miền $A = \{0 \leqslant v \leqslant 1,\ u \leqslant v \leqslant 1 + u\}$. Khi đó $f(u, v) = 1$ nếu $(u, v) \in A$.

Gọi $f(u)$ là hàm mật độ của $X - Y$

Rõ ràng nếu $u < -1$ hoặc $u > 1$ thì $f(u) = 0$.

Nếu $-1 < u < 0$ thì $f(u) = \int\limits_0^{1+u} dv = 1 + u$.

Nếu $0 < u < 1$ thì $f(u) = \int\limits_u^1 dv = 1 - u$.

Tóm lại

$$f(u) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{nếu } |u| \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu } |u| \geqslant 1 \end{cases}$$

136. Tương tự như bài 135 hàm mật độ đồng thời của U, V với $U = X - Y$, $V = X$ là

$$f(u, v) = \begin{cases} e^{-2v+u} & \text{nếu } (u, v) \in A \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}.$$

ở đó $A = \{0 \leqslant v,\ u \leqslant v\}$.

Gọi $f(u)$ là hàm mật độ của $X - Y$.

Nếu $u < 0$ thì

$$f(u) = \int\limits_0^{\infty} e^{-2v+u}\, dv = \frac{e^u}{2}.$$

Nếu $u > 0$ thì

$$f(u) = \int\limits_u^{\infty} e^{-2v+u}\, dv = \frac{e^{-u}}{2}$$

Tóm lại

$$f(u) = \frac{e^{-|u|}}{2} \text{ với mọi } u.$$

137. Kí hiệu $P(a) = P\{X + Y < a\}$.