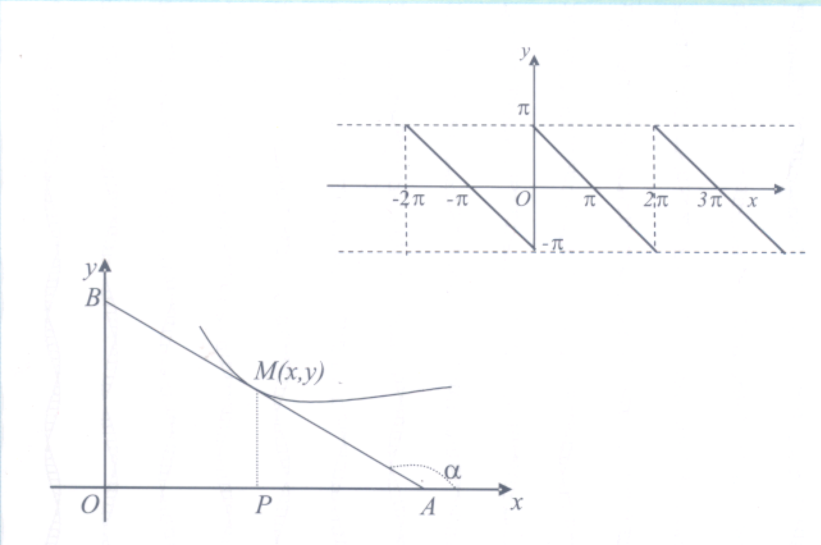
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

NGUYỄN ĐÌNH BÌNH - LÊ TRỌNG VINH

CHUỖI

VÀ

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
NGUYỄN ĐÌNH BÌNH – LÊ TRỌNG VINH

CHUỖI
VÀ
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Trong hoạt động khoa học kỹ thuật thường gặp nhiều vấn đề có liên quan đến việc tính tổng vô hạn các số hạng (là số hoặc hàm số), hoặc tìm nghiệm của phương trình hàm trong đó có chứa cả đạo hàm của hàm cần tìm. Trong giáo trình này chúng tôi đề cập tới hai vấn đề đó và chia ra làm hai chương.

Chương I. Giới thiệu khái niệm chung về chuỗi số, chuỗi hàm. Trong chuỗi hàm số có một lớp chuỗi thường gặp trong kỹ thuật đó là chuỗi luỹ thừa vì từ chuỗi đó ta có khả năng tính được tổng của nó biểu diễn dưới dạng biểu thức giải tích, với biểu thức giải tích đó ta có thể dự đoán được dáng điệu thay đổi của chuỗi vô hạn các số hạng. Ngược lại, với hàm số bất kỳ ta có thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa để việc tính toán thuận lợi.

Chương II. Trình bày các phương pháp giải phương trình vi phân cấp một, phương trình vi phân cấp hai và hệ phương trình vi phân cấp một thường gặp trong các bài toán kỹ thuật.

Hai vấn đề nêu trên là một bộ phận quan trọng của toán học cao cấp vì nó liên hệ chặt chẽ với các vấn đề thực tế thường gặp, đồng thời nhờ nó mà các mô hình kỹ thuật được giải quyết dễ dàng. Trong mỗi chương, đều có ví dụ minh hoạ và các bài tập để giúp sinh viên hiểu rõ hơn về lý thuyết.

Do phạm vi của các vấn đề là khá rộng, dù muốn cũng không thể giới thiệu hết các vấn đề mà thực tế kỹ thuật quan tâm. Vì thời lượng trong phạm vi của giáo trình toán cao cấp cho các ngành kỹ thuật có hạn, chúng tôi giới thiệu những vấn đề cơ bản nhất, giúp sinh viên dù được nghe giảng trên lớp hoặc không có điều kiện nghe giảng cũng có thể đọc và hiểu được vấn đề phục vụ cho học tập, nghiên cứu.

Giáo trình ***Chuỗi và Phương trình vi phân*** *được các tác giả biên soạn lần đầu nên không thể tránh khỏi những thiếu sót hoặc trình bầy chưa đầy đủ theo như mong muốn của sinh viên và độc giả. Chúng tôi hy vọng sẽ nhận được nhiều ý kiến đóng góp của bạn đọc.*

Các góp ý xin gửi về Khoa Toán-Tin ứng dụng, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, Số 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
CHUỖI

Trong chương này, trình bày các khái niệm về chuỗi số, một số tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương, chuỗi số có dấu bất kỳ, chuỗi số đan dấu. Phần chuỗi hàm số, trình bày một số khái niệm về chuỗi hàm hội tụ, hội tụ đều, chuỗi luỹ thừa, phương pháp tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa, chuỗi Taylor và chuỗi Fourier của hàm số. Để học tốt chương này, đòi hỏi người học cần ôn lại các kiến thức về giới hạn của dãy số và dãy hàm số.

1.1. CHUỖI SỐ

1.1.1. Khái niệm về chuỗi số

Định nghĩa 1.1.1. *Cho một dãy vô hạn các số* $\{a_n\}$, $n = 1,2,3,...$. *Biểu thức*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

được gọi là chuỗi số và ký hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Các số $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ được gọi là các *số hạng* của chuỗi số, và a_n được gọi là *số hạng tổng quát.*

Tổng n số hạng đầu tiên

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

gọi là *tổng riêng* thứ n của chuỗi số . Dãy số $\{S_n\}$, $n = 1,2,3,...$ được gọi là *dãy các tổng riêng* của chuỗi số (1).

Định nghĩa 1.1.2. *Chuỗi số* (1) *được gọi là chuỗi số hội tụ nếu dãy các tổng riêng* $\{S_n\}$ *của nó có giới hạn hữu hạn (khi* $n \to \infty$*)*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Giá trị S được gọi là tổng của chuỗi số (1) *và viết*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Nếu dãy $\{S_n\}$ *không có giới hạn hữu hạn thì ta nói chuỗi số* (1) *phân kỳ.*

Ví dụ 1. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Giải: Số hạng tổng quát $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, ta có tổng riêng

$$S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

và $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Vậy chuỗi số đã cho hội tụ và có tổng $S=1$.

Ví dụ 2. Xét chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$.

Giải: Ta có $S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$ là tổng một cấp số nhân công bội q, do đó

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}\text{ khi } q\neq 1.$$

+ Nếu $|q|<1$ thì $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ do đó $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-q}$ chuỗi đã cho hội tụ và có tổng $S=\frac{1}{1-q}$.

+ Nếu $|q|>1$ thì $\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$ do đó $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$, chuỗi đã cho phân kỳ.

+ Nếu $q=1$ thì $S_n=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}=n$, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n=\infty$, chuỗi đã cho phân kỳ.

+ Nếu $q=-1$ thì

$$S_n=1-1+1-\ldots+(-1)^n=\begin{cases}1 & \text{nếu } n \text{ lẻ}\\ 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn}\end{cases}$$

do đó không tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty}S_n$, chuỗi đã cho phân kỳ.

Vậy: + Nếu $|q| < 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ hội tụ và có tổng $S = \dfrac{1}{1-q}$.

+ Nếu $|q| \geq 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ phân kỳ.

Ví dụ 3. Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Giải: Ta có

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},\ \forall n \geq 1,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

1.1.2. Điều kiện ắt có của chuỗi số hội tụ

Định lý 1.1.1. *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Chứng minh: Ta có

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Do giả thiết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, có tổng là S và $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

nên

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Định lý được chứng minh.

Hệ quả: *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *không tồn tại hoặc tồn tại nhưng khác không thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ 1. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ, nếu số hạng tổng quát a_n được cho như sau:

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n+2}$; b) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n}$; c) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$.

Giải:

a) Dãy số $\{a_n\}$ không có giới hạn, vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$. Vậy chuỗi số đã cho phân kỳ.

b) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^2 = e^2 \neq 0$, do đó chuỗi số đã cho phân kỳ.

c) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n+2} = \infty$, vậy chuỗi số đã cho phân kỳ.

Chú ý: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì không được kết luận chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (chuỗi số đó có thể hội tụ, có thể phân kỳ).

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (chuỗi điều hòa).

Giải: Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Tuy nhiên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

Thật vậy, bằng phương pháp phản chứng, giả sử chuỗi hội tụ và có tổng S. Xét

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \text{ và } S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

ta có

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \ \forall n \geq 1,$$

do đó $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) \geq \dfrac{1}{2}$. Điều này mâu thuẫn với

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0.$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

1.1.3. Tính chất của chuỗi số hội tụ

Tính chất 1. *Nếu hai chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ có tổng lần lượt là* S *và* S', *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *cũng hội tụ và có tổng là* $S \pm S'$.

Chứng minh: Xét tổng riêng của chuỗi tổng $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, ta có

$$\overline{S_n} = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = S + S'$.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ hội tụ và có tổng $S + S'$.

Tương tự chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ hội tụ và có tổng $S - S'$.

Tính chất 2. *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ có tổng là S thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$, *trong đó c là hằng số, cũng hội tụ và có tổng là* cS.

Chứng minh: Xét tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$ là

$$\overline{S_n} = (ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n) = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k ,$$

ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k = c\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = cS$.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$ hội tụ và có tổng cS.

Chuỗi số

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots \qquad m = 0,1,2,... \qquad (2)$$

được gọi là *chuỗi dư thứ m* của chuỗi số (1).

Tính chất 3. *Chuỗi số (1) hội tụ khi và chỉ khi chuỗi số dư (2) hội tụ.*

Chứng minh: Giả sử chuỗi (1) hội tụ có tổng là S, S_m là tổng riêng thứ m của nó và S'_k là tổng riêng thứ k của chuỗi dư (2). Khi đó

$$S'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = S_m - S'_{k-m}.$$

Vì chuỗi (1) hội tụ nên $\lim\limits_{k\to\infty} S'_k = \lim\limits_{k\to\infty}(S_{m+k} - S_m) = S - S_m$ do đó chuỗi dư (2) hội tụ và có tổng $S' = S - S_m$.

Ngược lại chuỗi dư (2) hội tụ, giả sử có tổng S'. Với $k \geq m$ ta có

$$S'_{k-m} = S_k - S_m \Rightarrow S_k = S_m + S'_{k-m},$$

nên $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty}(S_m + S'_{k-m}) = S_m + S'$. Vậy chuỗi (1) hội tụ.

Hệ quả. *Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không đổi nếu ta bớt đi hoặc thêm vào chuỗi số đó một số hữu hạn các số hạng đầu tiên.*

1.1.4. Chuỗi số dương

Định nghĩa 1.1.3. *Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được gọi chuỗi số dương nếu mọi số hạng của nó là đều là số không âm, tức là $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}^+$. Nếu $a_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}^+$ thì chuỗi số đã cho được gọi là chuỗi số dương thực sự.*

Nhận xét: Dãy tổng riêng $\{S_n\}$ của chuỗi số dương là dãy đơn điệu tăng vì

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}, \ \forall n \geq 2.$$

Dãy $\{S_n\}$ có giới hạn khi dãy đó bị chặn trên.

Như vậy một chuỗi số dương có dãy tổng riêng bị chặn trên thì hội tụ.

Không mất tính tổng quát, từ nay về sau đối với các chuỗi số dương, ta chỉ xét các chuỗi số dương thực sự ($a_n > 0, \forall n \geq 1$), vì khi chuỗi có một số số hạng bằng 0, ta đánh số lại để được chuỗi số dương thực sự Chẳng hạn, đối với chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n+1},$$

số hạng tổng quát $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2n+1} = \begin{cases} 0 & khi\ \ n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{2n+1} & khi\ \ n = 2k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Vậy chuỗi số đã cho có thể được viết lại dưới dạng $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{2}{4k+1}$ là chuỗi số dương thực sự.

Sau đây ta trình bày một số tiêu chuẩn để xét sự hội tụ của chuỗi số dương thực sự và cũng gọi là chuỗi số dương.

1.1.4.1. ***Tiêu chuẩn so sánh 1.*** *Cho hai chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *thỏa mãn*

$$a_n \le b_n, \quad \forall n \ge n_0 \quad (n_0 \in \mathbf{N}^+). \qquad (3)$$

+Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

+Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ.*

Chứng minh: Theo hệ quả của tính chất 3, không làm giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết $n_0 = 1$.

Đặt

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n;\ S'_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Theo giả thiết (3), ta có

$$S_n \le S'_n, \quad \forall n \ge 1. \qquad (4)$$

+ Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ có tổng là S' thì $S'_n \le S'$(vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là chuỗi số dương), từ (4) ta có $S_n \le S'$, như vậy chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

có dãy $\{S_n\}$ bị chặn trên. Theo nhận xét trên, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

+ Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, từ (4) ta có $\lim_{n\to\infty} S'_n = +\infty$.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét các chuỗi số

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}; \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6+2(-1)^n}{2^{n+3}}.$$

Giải: a) Ta có $a_n = \dfrac{n+1}{n^2} > \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n} = b_n$, $\forall n \geq 1$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ (xem ví dụ 2, mục 1.1.2), theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2}$ phân kỳ.

b) Với $\forall n \geq 1$, ta có $4 \leq 6 + 2(-1)^n \leq 8 \Rightarrow \dfrac{6+2(-1)^n}{2^{n+3}} \leq \dfrac{8}{2^{n+3}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ hội tụ (vì là chuỗi cấp số nhân với công bội $|q| = \dfrac{1}{2} < 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{6+2(-1)^n}{2^{n+3}}$ hội tụ.

1.1.4.2.*Tiêu chuẩn so sánh 2.* *Cho hai chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k. \qquad (5)$$

1) *Nếu* $0 < k < +\infty$ *thì các chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

2) *Nếu* $k = 0$ *và nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

3) *Nếu* $k = +\infty$ *và nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ.*

Chứng minh:

+ Nếu $0 \le k < +\infty$, từ (5) theo định nghĩa giới hạn của dãy số ta có

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \ge n_0 \Rightarrow k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon,$$

hay

$$a_n < (k + \varepsilon) b_n. \qquad (6)$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ nên theo tính chất 2, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} (k+\varepsilon) b_n$ hội tụ.

Theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

+ Nếu $0 < k \le +\infty$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k}$, $0 \le \frac{1}{k} < +\infty$. Theo chứng minh trên, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

Chú ý. Nếu a_n và b_n là các VCB (hoặc các VCL) khi $n \to \infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ thì $a_n \sim b_n$ (tương đương) khi $n \to \infty$. Khi đó các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ (vì $0 < k = 1 < +\infty$).

Ví dụ 2. Xét các chuỗi số

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^4+n}}; \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{3^n}.$$

Giải: a) Đặt $a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{2n^4+n}}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^4+n}} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, theo tiêu chuẩn so sánh 2, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^4+n}}$ phân kỳ.

b) Ta có $a_n = \sin^2 \dfrac{\pi}{3^n} \sim \dfrac{\pi^2}{3^{2n}} = b_n$ khi $n \to \infty$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{3^{2n}} = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ hội tụ (vì $|q| = \frac{1}{9} < 1$) theo tiêu chuẩn so sánh 2, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{3^n}$ hội tụ.

1.1.4.3. *Tiêu chuẩn D'Alembert.* *Cho chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và tồn tại*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D. \qquad (7)$$

1) *Nếu* $D < 1$ *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

2) *Nếu* $D > 1$ *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

3) *Nếu* $D = 1$ *thì chưa kết luận (chuỗi số có thể hội tụ, có thể phân kỳ).*

Chứng minh:

1) Cho $D<1$, từ (7), với $\varepsilon>0$ đủ nhỏ sao cho $\varepsilon<1-D$ theo định nghĩa giới hạn

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < D+\varepsilon .$$

Đặt $D+\varepsilon=q$, $0<q<1$ ta được $a_{n+1}<qa_n$, với $\forall n \geq n_0$.

Theo hệ quả của tính chất 3, không làm giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết $n_0=1$. Khi đó ta có

$$a_2 < qa_1,$$

$$a_3 < qa_2 < q^2 a_1,$$

....

$$a_{n+1} < qa_n < \ldots < q^n a_1$$

Vì $0<q<1$ nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ hội tụ (xem ví dụ 2, mục 1.1.1). Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 1.

2) Cho $D>1$, từ (7) với $\varepsilon=D-1$ theo định nghĩa giới hạn

$$\exists n'_0 : \forall n \geq n'_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > D-\varepsilon=1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n .$$

Như vậy a_n không thể tiến tới 0 khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

3) Với $D=1$ chưa kết luận vì có trường hợp chuỗi hội tụ, cũng có trường hợp chuỗi phân kỳ, do đó không thể áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert để xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số trong trường hợp này. Chẳng hạn

+ Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ (ví dụ 1, mục 1.1.1), trong khi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1 .$$

+ Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (ví dụ 2, mục 1.1.2) mà

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{1.3.....(2n-1)}$.

Giải:

a) Ta có $a_n = \frac{n}{4^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{4^{n+1}}$ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)}{4^{n+1}} : \frac{n}{4^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{4n} = \frac{1}{4} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert chuỗi số đã cho hội tụ.

b) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}.(n+1)!}{1.3.....(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1.3.....(2n-1)}{3^n.n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert chuỗi số đã cho phân kỳ.

1.1.4.4. *Tiêu chuẩn Cauchy.* *Cho chuỗi số dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và tồn tại*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C. \tag{8}$$

1) *Nếu* $C < 1$ *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

2) *Nếu* $C > 1$ *thì chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

3) *Nếu* $C = 1$ *thì chưa kết luận.*

Chứng minh:

1) Cho $C < 1$, từ (8) với $\varepsilon < 1 - C$ theo định nghĩa giới hạn

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < C + \varepsilon .$$

Đặt $C + \varepsilon = q$, $0 < q < 1$ ta được $a_n < q^n$, với $\forall n \geq n_0$. Không làm giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết $n_0 = 1$. Khi đó ta có

$$a_n < q^n, \ \forall n \geq 1 .$$

Vì $0 < q < 1$ nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ hội tụ (xem ví dụ 2 mục 1.1.1). Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 1.

2) Cho $C > 1$, từ (8) với $\varepsilon = C - 1$ theo định nghĩa giới hạn

$$\exists n'_0 : \forall n \geq n'_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > C - \varepsilon = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1 .$$

Như vậy a_n không thể tiến tới 0 khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

3) Với $C = 1$ chưa kết luận vì có trường hợp chuỗi hội tụ, cũng có trường hợp chuỗi phân kỳ, do đó không thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy để xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số trong trường hợp này.

Ví dụ 4. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3} \right)^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(\ln n)^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n(n+3)}$

Giải:

a) Ta có $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{n+3} \right)^n$ và $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2 = C > 1$. Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi số đã cho phân kỳ.

b) Ta có $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3}{\ln n} = 0 = C < 1$. Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi số đã cho hội tụ.

c) Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right]^{\frac{n+3}{-(n+2)}}=e^{-1}=C<1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi số đã cho hội tụ.

1.1.4.5. ***Tiêu chuẩn tích phân.*** *Cho hàm số $f(x)$ liên tục, dương và giảm trên khoảng $[1;+\infty)$. Khi đó chuỗi số dương*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n),\ \text{với}\ f(n)=a_n,\ n=1,2,3...$$

và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Chứng minh: Hàm số $f(x)$ liên tục và giảm trên $[k;k+1]$ với $\forall k\ge 1$, nên theo định lý về giá trị trung bình của tích phân, ta có

$$f(k+1)\le\int\limits_k^{k+1}f(x)dx=f(c)\le f(k),\ c\in(k,k+1),$$

do đó

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(k+1)=\sum_{k=2}^{n}f(k)\le\int\limits_1^{n}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_k^{k+1}f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$$

hay $$\sum_{k=2}^{n}a_k\le\int\limits_1^{n}f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n}a_k\,. \qquad (9)$$

Theo tiêu chuẩn so sánh 1 và từ (9) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha\in\mathbf{R}.$

Giải: a) Do $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}=f(n)$, xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ liên tục, dương và giảm dần tới 0 trên $[2;+\infty)$. Mặt khác

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ.

b) Ta có $a_n=\frac{1}{n^\alpha}=f(n)$. Nếu $\alpha>0$ hàm số $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ liên tục, dương và giảm dần tới 0 trên khoảng $[1;+\infty)$. Tích phân

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$$

hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $0<\alpha\le 1$.

Theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},$$

hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $0<\alpha\le 1$.

Nếu $\alpha\le 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ vì $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$ không tiến tới 0 khi $n\to\infty$.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $\alpha\le 1$.

1.1.5. Chuỗi số có dấu bất kỳ, chuỗi số đan dấu

1.1.5.1. *Hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ*

Xét chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{10}$$

trong đó các số hạng a_n có dấu bất kỳ.

Cùng với chuỗi số (10), ta xét chuỗi trị tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \qquad (11)$$

Định nghĩa 1.1.4. *Nếu hai chuỗi số* (10) *và* (11) *cùng hội tụ, ta nói chuỗi số có dấu bất kỳ* (10) *hội tụ tuyệt đối.*

Nếu chuỗi trị tuyệt đối (11) *phân kỳ, chuỗi số* (10) *hội tụ, ta nói chuỗi số* (10) *bán hội tụ.*

Từ định nghĩa trên ta thấy việc xét sự hội tụ của chuỗi số có dấu bất kỳ có thể thông qua chuỗi trị tuyệt đối của nó (là chuỗi số dương) để xét.

Định lý 1.1.2. *Nếu chuỗi trị tuyệt đối* (11) *hội tụ thì chuỗi số có dấu bất kỳ* (10) *hội tụ và là hội tụ tuyệt đối.*

Chứng minh: Ta có

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \text{ với } \forall n \ge 1.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|), \qquad (12)$$

hội tụ. Cộng chuỗi số hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} -|a_n|$ với chuỗi (12) ta được chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

cũng hội tụ. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin(2n\beta)}{\sqrt[3]{n^7+7n^3+1}}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Giải: a) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$, ta có

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},\ \forall n \geq 1.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ (vì $\alpha = 2 > 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ hội tụ.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ hội tụ và là hội tụ tuyệt đối.

b) Ta có $n+1 \leq 2n$, $|\sin(2n\beta)| \leq 1$, $n^7 + 7n^3 + 1 \geq n^7$ do đó

$$|a_n| = \left|\frac{(n+1)\sin(2n\beta)}{\sqrt[3]{n^7 + 7n^3 + 1}}\right| \leq \frac{2n}{n^{7/3}} = 2\frac{1}{n^{4/3}}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1}{n^{4/3}}$ hội tụ (vì $\alpha = \frac{4}{3} > 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ và là hội tụ tuyệt đối.

Chú ý. Để chứng tỏ sự hội tụ một chuỗi số có dấu bất kỳ (10) ta có thể sử dụng Định lý 1.1.2 và các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương. Chuỗi số (11) phân kỳ thì chưa kết luận chuỗi số (10) hội tụ hay phân kỳ. Tuy nhiên ta có kết luận sau

1) Nếu $\lim_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$ thì chuỗi số có dấu bất kỳ (10) phân kỳ.

2) Nếu $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = D > 1$ thì chuỗi số có dấu bất kỳ (10) phân kỳ.

3) Nếu $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = C > 1$ thì chuỗi số có dấu bất kỳ (10) phân kỳ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^2}; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{n+1}.$$

Giải: a) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(\sqrt[n]{n})^2} = 3 = C > 1.$$

Vậy chuỗi số đã cho phân kỳ. (Chú ý $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$).

b) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{n+2} : \frac{2^n.n!}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{n+2} = +\infty.$$

Vậy chuỗi số đã cho phân kỳ.

Một số tính chất của chuỗi số hội tụ tuyệt đối

Tính chất 1. *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối và có tổng là S thì chuỗi số được suy ra từ chuỗi số đã cho bằng cách thay đổi vị trí các số hạng của nó một cách tùy ý cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là S.*

Tính chất 2. *Nếu hai chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ tuyệt đối có tổng lần lượt là S và S' thì chuỗi số*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

(gọi là tích của hai chuỗi số trên) cũng hội tụ tuyệt đối và có tổng là S.S'.

1.1.5.2. *Chuỗi số đan dấu. Tiêu chuẩn Leibnitz*

Định nghĩa 1.1.5. *Chuỗi số*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ... \qquad (13)$$

trong đó $a_n > 0$ *với* $\forall n \geq 1$, *được gọi chuỗi số đan dấu.*

Chuỗi số đan dấu là trường hợp riêng của chuỗi số có dấu bất kỳ. Vì vậy xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số đan dấu ta có thể xét như đối với chuỗi số có dấu bất kỳ. Tuy nhiên ta còn có tiêu chuẩn sau để xét về sự hội tụ của nó.

Tiêu chuẩn Leibnitz. *Chuỗi đan dấu (13) hội tụ nếu thoả mãn các điều kiện sau*

i) *dãy* $\{a_k\}$ *đơn điệu giảm (tức là* $a_k > a_{k+1},\ \forall k \geq n_0$*).*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Hơn nữa, tổng S của chuỗi số (13) thỏa mãn bất đẳng thức

$$0 \leq S \leq a_1.$$

Chứng minh: Với n là số chẵn $n = 2m$ (ta có thể xem $n_0 = 1$)

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Vì dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm $a_{2k-1} - a_{2k} > 0,\ \forall k \geq 1$, nên dãy $\{S_{2m}\}$ đơn điệu tăng. Mặt khác ta lại có

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

Vì dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm $a_{2k} - a_{2k+1} > 0,\ \forall k \geq 1 \Rightarrow S_{2m} < a_1$.

Vậy dãy $\{S_{2m}\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên nên có giới hạn

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S,\quad S \leq a_1.$$

Với n là số lẻ $n = 2m+1$ ta có $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. Theo giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2m+1} = 0$ do đó

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,\quad S \leq a_1$.

Chuỗi thỏa mãn giả thiết của tiêu chuẩn Leibnitz được gọi là *chuỗi Leibnitz*.

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}.$$

Giải: a) Chuỗi số đã cho là chuỗi số đan dấu. Ta có

$$a_n = \frac{1}{3n+2} > 0,\ a_n = \frac{1}{3n+2} > \frac{1}{3n+5} = \frac{1}{3(n+1)+2} = a_{n+1},\ \forall n > 1,$$

nên dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+2} = 0$. Theo tiêu chuẩn Leibnitz chuỗi số đã cho hội tụ.

b) Đặt $\varphi(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, sử dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\frac{1}{x}\ln x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Mặt khác

$$\varphi'(x) = \frac{\ln x}{x^2}(2 - \ln x) < 0 \text{ khi } x > e^2.$$

Vậy dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = \frac{\ln^2 n}{n} = \varphi(n)$ đơn điệu giảm khi $n > e^2$ và

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Theo tiêu chuẩn Leibnitz chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}$ hội tụ.

Chú ý: Đối với chuỗi Leibnitz thì chuỗi dư

$$R_m = \pm(a_{m+1} - a_{m+2} + a_{m+3} - \dots)$$

cũng là chuỗi Leibnitz và tổng của nó không vượt quá a_{m+1}

$$|R_m| \le a_{m+1}.$$

Ví dụ 4. Xét sự hội tụ của các chuỗi số

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}; \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}.$$

Giải: a) Dễ dàng thấy rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. Tuy nhiên chuỗi số trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ vì đây là chuỗi điều hòa.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ là chuỗi bán hội tụ.

b) Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$ (trong ví dụ 3, ý b) cũng là chuỗi số bán hội tụ vì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn tích phân.

Ví dụ 5. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-3n+2}$.

Giải: Đặt $a_n = (-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-3n+2}$. Xét chuỗi số tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-3n+2},$$

ta có

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n+1}}{n^2-3n+2} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ khi } n \to \infty.$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ (vì $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ hội tụ. Vậy chuỗi số đã cho hội tụ và là hội tụ tuyệt đối.

1.2. CHUỖI HÀM SỐ

1.2.1. Khái niệm về chuỗi hàm số

Định nghĩa 1.2.1. *Ta gọi chuỗi hàm số (chuỗi hàm) là chuỗi có dạng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1}$$

trong đó các số hạng $u_1(x),\ u_2(x),\ldots,\ u_n(x),\ldots$ *là các hàm số của x cùng xác định trên tập hợp* $D \subset \mathbf{R}$.

Ta nói chuỗi hàm (1) *hội tụ* tại điểm $x_0 \in D$ nếu chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0), \tag{2}$$

hội tụ và *hội tụ tuyệt đối* tại điểm $x_0 \in D$ nếu chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|, \tag{3}$$

hội tụ.

Nếu chuỗi số (2) phân kỳ thì ta nói chuỗi hàm (1) *phân kỳ* tại điểm x_0.

Tập hợp tất cả những điểm x sao cho chuỗi (1) hội tụ được gọi là *miền hội tụ* của chuỗi hàm (1).

Tổng $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ được gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi hàm (1).

Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

thì $S(x)$ là tổng của chuỗi hàm (1). Tổng của chuỗi hàm (1) là một hàm số xác định trên miền hội tụ của nó.

Ví dụ 1. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

Giải: a) Theo ví dụ 2 mục 1.1.1, chuỗi đã cho hội tụ nếu $|x| < 1$ và phân kỳ nếu $|x| \geq 1$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là khoảng $(-1;1)$ và có tổng

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{(chuỗi cấp số nhân lùi vô hạn).}$$

b) Chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ hội tụ nếu $x > 1$ và phân kỳ nếu $x \leq 1$ (Xem ví dụ 5b, mục 1.1.4).

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là khoảng $(1;+\infty)$.

c) Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$ trong đó $q = \ln x$, $x > 0$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{q^{n+1}}{n+1} : \frac{q^n}{n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}|q| \cdot \frac{n}{n+1} = |q|.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert nếu $|q| < 1$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$ hội tụ và nếu $|q| > 1$ chuỗi phân kỳ.

Nếu $q = -1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ (xem ví dụ 3, mục 1.1.5).

Nếu $q = 1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (vì đây là chuỗi điều hòa).

Bởi vậy chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$ hội tụ tuyệt đối nếu $|\ln x| < 1$ (tức là $e^{-1} < x < e$) và bán hội tụ tại $\ln x = -1$ (tức là $x = e^{-1}$). Tại những điểm khác chuỗi phân kỳ. Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$ là khoảng $[e^{-1};e)$.

1.2.2.Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định nghĩa 1.2.2. *Chuỗi hàm* (1) *được gọi là hội tụ đều tới hàm* $S(x)$ *trên tập* $E \subset \mathbf{R}$ *nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}^+ : \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in E \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon .$$

Từ định nghĩa của chuỗi hàm hội tụ đều ta thấy chuỗi hàm (1) hội tụ đều khi và chỉ khi chuỗi dư

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \ldots$$

hội tụ đều tới 0, nghĩa là

$$\sup_{x \in E} |R_n(x)| \to 0 \text{ khi } n \to \infty .$$

Ví dụ 2. Chứng minh chuỗi hàm số hội tụ đều trên tập E, nếu

a) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}, \quad E = \mathbf{R}$.

b) $u_n(x) = x^{n-1}, \quad E = \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

c) $u_n(x) = \dfrac{x}{(1 + (n-1)x)(1 + nx)}, \quad E = [1; +\infty)$.

Giải: a) Chuỗi hàm $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$ hội tụ với $\forall x \in \mathbf{R}$, vì nó thỏa mãn các

điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz. Ta có $S(x) - S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x^2 + k}$

cũng là chuỗi đan dấu và là chuỗi số dư, nên

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{x^2 + n + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in \mathbf{R},$$

từ $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Chọn $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ thì khi đó với $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ ta có

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

theo định nghĩa chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

b) Do $u_n(x) = x^{n-1}$ nên

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad \text{và} \quad S(x) = \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^n}{1-x}\right|.$$

Do $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - x \geq \frac{1}{2}$, nên

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \frac{|x^n|}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vì $\frac{1}{2^{n-1}} \to 0$, khi $n \to \infty$ nên $\sup_{x \in E} |R_n(x)| \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

c) Ta có

$$u_n(x) = \frac{x}{(1+(n-1)x)(1+nx)} = \frac{1}{(1+(n-1)x)} - \frac{1}{(1+nx)}$$

nên

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2x} - \ldots - \frac{1}{1+nx} = 1 - \frac{1}{1+nx},$$

từ đó

$$S(x) = 1, \quad R_n(x) = \frac{1}{1+nx}.$$

Bởi vì $x \in [1;+\infty) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 1 + nx \geq 1 + n$ cho nên với $\forall x \in [1;+\infty)$ ta có

$$0 < R_n(x) = \frac{1}{(1+nx)} \leq \frac{1}{1+n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty .$$

Vậy chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên khoảng $[1;+\infty)$.

Ví dụ 3. Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$ trên đoạn $[0;1]$.

Giải: Ta có tổng riêng

$$S_n(x) = 1 - x^1 + x^1 - x^2 + \ldots + x^n - x^{n+1} = 1 - x^{n-1},\ 0 \leq x \leq 1,$$

do đó

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}(1 - x^{n+1}) = S(x) = \begin{cases} 1, & khi\ 0 \leq x < 1, \\ 0, & khi\ x = 1. \end{cases}$$

khi đó $\sup\limits_{0\leq x\leq 1}|R_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| = 1 \not\to 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi hàm đã cho hội tụ không đều trên đoạn $[0;1]$.

Tiêu chuẩn Weierstrass. *Nếu tồn tại chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, sao cho*

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \geq 1, \forall x \in E, \tag{4}$$

thì chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

hội tụ tuyệt đối và đều trên E.

Ở đây không chứng minh. (Xem trong [6]).

Ví dụ 4. Chứng minh chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập E, nếu

a) $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, \quad E = \mathbf{R}$.

b) $u_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^5x^2}, \quad E = (0;+\infty)$.

Giải:

a) Ta có

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{với } \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Do chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ (vì $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) nên theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên $\mathbf{R}$.

b) Ta có $1 + n^5x^2 \geq 2n^{5/2}x$ khi $x > 0$, do đó

$$|u_n(x)| = \frac{2nx}{1 + n^5x^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \text{ với } \forall n \geq 1, \forall x \in (0;+\infty).$$

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ (vì $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) nên theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên khoảng $(0;+\infty)$.

Một số tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Tính chất 1. *Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ và tất cả các số hạng của chuỗi hàm là các hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$, thì $f(x)$ cũng là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$.*

Tính chất 2. *Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ và các hàm số $u_n(x)$ $(\forall n \geq 1)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Tính chất 3. *Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đến hàm $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$, các hàm số $u_n(x)$ $(\forall n \geq 1)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên* *đoạn* $[a,b]$*, đồng thời chuỗi hàm* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ *hội tụ đều trên đoạn* $[a,b]$ *thì* $f(x)$ *có đạo hàm trên* (a,b) *và*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Những tính chất trên đây ta công nhận và không chứng minh (xem [6], [7]), mà chỉ minh họa bằng một số ví dụ.

Ví dụ 5. Xét tính hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$ trên đoạn $[0;1]$.

Giải: Ta có các hàm số $u_n(x) = x^n - x^{n-1}$, $\forall n \ge 1$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và

$$S_n(x) = x^1 - x^0 + x^2 - x^1 + \ldots + x^n - x^{n-1} = -1 + x^n,$$

do đó

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}(-1 + x^n) = S(x) = \begin{cases} -1, & khi\ 0 \le x < 1, \\ 0, & khi\ x = 1. \end{cases}$$

Hàm số $S(x)$ gián đoạn trên đoạn $[0;1]$. Vậy theo tính chất 1, chuỗi hàm đã cho hội tụ không đều trên $[0;1]$.

Ví dụ 6. Có thể tích phân từng số hạng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ trên đoạn $[0;1]$ không?

Giải: Ta có các hàm số $u_n(x) = \frac{1}{2^n n^x}$, $\forall n \ge 1$, liên tục trên đoạn $[0;1]$ và

$$|u_n(x)| = \frac{1}{2^n n^x} \le \frac{1}{2^n} \text{ với } \forall n \ge 1, \forall x \in [0;1],$$

chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ (vì $q = \frac{1}{2} < 1$) theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ hội tụ đều trên đoạn $[0;1]$. Theo tính chất 2, có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi trên đoạn $[0;1]$.

Ví dụ 7. Hãy tính tổng của chuỗi hàm trên khoảng hội tụ của nó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Giải: Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ có khoảng hội tụ là $-1<x<1$ (xem ví dụ 1c, mục 1.2.1) và các số hạng $u_n(x)=\frac{x^n}{n}$ $\forall n\geq 1$ liên tục. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ có được bằng cách lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên đoạn $[-q,q]$, $0<q<1$ và có tổng $\frac{1}{1-x}$. Giả sử

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=f(x).$$

Lấy đạo hàm, ta được

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

từ đó

$$\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x).$$

Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\text{ với }-1<x<1.$$

1.3. CHUỖI LŨY THỪA

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (1)$$

trong đó $a_0, a_1, a_2, \ldots$ là các hằng số thực và được gọi là hệ số của chuỗi.

Trong trường hợp $x_0 = 0$, chuỗi lũy thừa (1) có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Rõ ràng chuỗi luỹ thừa (2) luôn hội tụ với $x = 0$. Bằng cách đặt $X = x - x_0$, chuỗi luỹ thừa (1) đưa được về chuỗi luỹ thừa (2). Do đó trong các mục tiếp theo ta chỉ xét chuỗi luỹ thừa (2).

1.3.1. Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

Xét chuỗi lũy thừa (2), với $x = x_0$ chuỗi lũy thừa (2) trở thành chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n, \tag{3}$$

nếu chuỗi (3) hội tụ thì ta nói rằng x_0 là *điểm hội tụ* của chuỗi lũy thừa, trong trường hợp trái lại x_0 là *điểm phân kỳ*.

Định nghĩa 1.3.1. *Tập hợp tất các các điểm $x \in \mathbf{R}$ mà tại đó chuỗi lũy thừa hội tụ thì được gọi là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.*

Ví dụ 1. + Chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ có miền hội tụ là $(-1;1)$.

+ Chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ có miền hội tụ là $[-1;1)$.

(Xem ví dụ 1 mục 1.2.1).

Định lý 1.3.1. (Abel) *Nếu chuỗi luỹ thừa (2) hội tụ tại điểm $x_0 \neq 0$ nào đó thì nó sẽ hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.*

Chứng minh. Theo giả thiết chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ, do đó số hạng tổng quát của nó dần tới 0

$$a_n x_0^n \to 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

vì vậy dãy số $\{a_n x_0^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ bị chặn, tức là tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho $|a_n x_0^n| \leq M$, $\forall n$. Ta có đánh giá

$$|a_nx^n| = \left|a_nx_0^n\frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n = Mq^n, \forall n.$$

Nếu $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Rightarrow |x| < |x_0|$, thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_nq^n$ hội tụ, suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ hội tụ. Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Hệ quả. *Nếu chuỗi luỹ thừa (2) phân kỳ tại điểm $x_1 \neq 0$ nào đó thì nó sẽ phân kỳ tại mọi điểm $x : |x| > |x_1|$ (tức là $x < -|x_1|$ hoặc $x > |x_1|$).*

Thật vậy: Theo giả thiết chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ phân kỳ tại $x_1 \neq 0$. Nếu nó hội tụ tại điểm $x_2 : |x_2| > |x_1|$, thì theo định lí Abel nó phải hội tụ tại x_1, trái với giả thiết. Vậy chuỗi phân kỳ tại mọi điểm x: $|x| > |x_1|$.

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa (2) có thể xẩy ra trong các trường hợp sau:

1) Chuỗi (2) hội tụ tại một điểm duy nhất $x = 0$.

2) Chuỗi (2) hội tụ tại mọi điểm $x \in \mathbf{R}$.

3) Tồn tại số $R > 0$ sao cho chuỗi hội tụ tuyết đối khi $|x| < R$ và phân kỳ khi $|x| > R$. Khoảng hội tụ của chuỗi (2) là $-R < x < R$. Tại $x = \pm R$ ta được các chuỗi số, phải xét cụ thể đối với các chuỗi số đó.

Ví dụ 1. Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} n^nx^n$. Với mọi $x \neq 0$, luôn tồn tại $n \in \mathbf{N}$ đủ lớn để $|nx| > 1 \Rightarrow |a_nx^n| = |n_nx^n| \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó chuỗi phân kỳ với mọi $x \neq 0$.

Ví dụ 2. Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Xét chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$, theo tiêu chuẩn D'Alembert ta có $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ với $\forall x \in \mathbf{R}$ khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối với $\forall x \in \mathbf{R}$.

Ví dụ 3. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$x+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{3^2}x^3+\dots\dots \qquad (*)$$

Giải: Đặt $a_nx^n=\frac{1}{n^2}x^n,\ a_{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}$. Theo tiêu chuẩn D'Alembert, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}|x|=|x|<1,$$

suy ra khoảng hội tụ của chuỗi đã cho là $-1<x<1$.

Chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối khi $-1<x<1$ và phân kỳ khi $x<-1,\ x>1$.

Tại $x=1$, từ (*) ta có

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots, \ (**)$$

là chuỗi số hội tụ (vì $\alpha=2>1$).

Tại $x=-1$, từ (*) ta có

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\cdots, \ (***)$$

chuỗi trị tuyệt đối của(***) trùng với chuỗi số (**) nên hội tụ.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ với mọi giá trị của x thỏa mãn bất đẳng thức $-1\le x\le 1$.

Định nghĩa 1.3.2. *Số $R>0$ sao cho chuỗi luỹ thừa (2) hội tụ với $|x|<R$ và phân kỳ với $|x|>R$, được gọi là bán kính hội tụ. Khoảng $(-R,R)$ được gọi là khoảng hội tụ.*

Trường hợp nếu chuỗi luỹ thừa (2) hội tụ tại điểm duy nhất $x=0$ thì $R=0$, nếu chuỗi (2) hội tụ tại mọi điểm $x\in\mathbf{R}$ thì $R=\infty$.

1.3.2. Cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

Xét chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \qquad (4)$$

trong đó $a_n\ne 0,\ \forall n$.

Định lý 1.3.2. *Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,$$

thì bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (4) *được xác định bởi công thức*

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty, \\ \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0. \end{cases}$$

Chứng minh. Xét chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ của (4), ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = \rho|x| = D.$$

Nếu $\rho = +\infty, x \neq 0$ thì $D = +\infty > 1$, theo theo D'Alembert chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ phân kỳ và $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ phân kỳ với mọi $x \neq 0$. Do đó $R = 0$.

Nếu $0 < \rho < +\infty$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ hội tụ khi $\rho|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \dfrac{1}{\rho}$.

Khi $\rho|x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \dfrac{1}{\rho}$ thì $D > 1$ và chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ phân kỳ.

Vậy $R = \dfrac{1}{\rho}$.

Nếu $\rho = 0$ thì $D = 0 < 1$, theo D'Alembert chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ hội tụ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Do đó $R = +\infty$.

Tương tự cách chứng minh trên ta có định lý sau

Định lý 1.3.3. *Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|} = \rho,$$

thì bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa (4) được xác định bởi công thức

$$R=\begin{cases}0, & \rho=+\infty,\\ \dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty,\\ +\infty, & \rho=0.\end{cases}$$

Ví dụ 1. Xét chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

Giải. Đặt $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $a_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbf{N}^+$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Do đó $R=1$ là bán kính hội tụ. Khoảng hội tụ của chuỗi đã cho là $(-1;1)$.

Với $x=-1$, ta có chuỗi $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ đó là chuỗi điều hoà, nó phân kỳ.

Với $x=1$, ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ đây là chuỗi đan dấu, nó thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz, nên hội tụ (xem ví dụ 3a, mục 1.1.5).

Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $(-1;1]$.

Ví dụ 2. Xét chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n(x+1)^n$.

Giải. Đặt $X=x+1$, ta có chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n X^n$ (*) và $a_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

Do $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, nên $R=1$ là bán kính của (*). Khoảng hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n X^n$ là $(-1;1)$.

Với $X=1$, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ có số hạng tổng quát là $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ mà

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0$ do đó chuỗi phân kỳ.

Với $X = -1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (-1)^n$, số hạng tổng quát có trị tuyệt đối là $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e \neq 0$ khi $n \to \infty$, do đó chuỗi phân kỳ.

Miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n X^n$ là $-1 < X < 1$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $-1 < x+1 < 1$ hay $-2 < x < 0$.

Ví dụ 3. Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^n n!}$.

Giải. Đặt $a_n = \frac{n+1}{2^n n!}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)!} : \frac{(n+1)}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{2(n+1)^2} = 0.$$

Nên bán kính hội tụ $R = +\infty$. Vậy miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa đã cho là $(-\infty; +\infty)$.

Chú ý. Trường hợp chuỗi hàm số có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{pn}$, đặt $X = x^p$ được chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$. Ta áp dụng các công thức trên để tìm bán kính hội tụ.

Ví dụ 4. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n}.$$

Giải: Nếu xét hình thức $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}2^n = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2$, do đó chuỗi có khoảng hội tụ là $-2 < x < 2$, điều này vô lí, vì với $x = \sqrt{3}$ ta có chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

chuỗi này phân kỳ $q = \frac{3}{2} > 1$.

Đối với chuỗi đã cho ta phải đặt $x^2 = X \geq 0$, ta được chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{2^n},$$

Có bán kính R = 2 nhưng do $X = x^2 \geq 0$ nên khoảng hội tụ của nó là $0 \leq X < 2$. Khoảng hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Khi $x = \sqrt{2}$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, chuỗi số này phân kỳ (vì $a_n = 1 \not\to 0$ khi $n \to \infty$). Tương tự chuỗi phân kỳ tại $x = -\sqrt{2}$.

Vậy miền hội tụ tụ của chuỗi hàm đã cho là $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

1.3.3. Tính chất của chuỗi lũy thừa

Tính chất 1. *Chuỗi luỹ thừa (2) hội tụ đều trên mọi đoạn $[a,b]$ thuộc vào khoảng hội tụ của nó.*

Tính chất 2. *Tổng của chuỗi luỹ thừa là một hàm số liên tục tại mọi điểm trong khoảng hội tụ.*

Tính chất 3. *Có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi luỹ thừa (2). Chuỗi mới nhận được có cùng bán kính hội tụ như chuỗi ban đầu.*

Tức là nếu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có khoảng hội tụ là $(-R, R)$, thì

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

cũng có khoảng hội tụ $(-R, R)$.

Tính chất 4. *Nếu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có khoảng hội tụ là $(-R, R)$, thì với mọi $x \in (-R, R)$, ta có*

$$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Bạn đọc có thể xem chứng minh các tính chất trên trong [1], [3], [5], [6].

Chú ý. Trong ví dụ 1a, mục 1.2.1, ta đã biết

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad (|x|<1). \; (*)$$

Từ (*) thay x bởi $-x$ ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}, \quad (|x|<1).$$

Ví dụ 1. Tính tổng của chuỗi

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots + nx^{n-1} + \cdots \text{ với } |x|<1.$$

Giải: Ta đã biết khi $|x|<1$ thì

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1.$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$ là tổng của chuỗi đã cho.

Ví dụ 2. Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ có khoảng hội tụ là $(-1;1)$. Hãy tính tổng của chuỗi đó.

Giải: Đặt $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Lấy đạo hàm

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow S'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Lấy tích phân hai vế trong khoảng hội tụ của nó , ta được

$$\int_0^x S'(t)dt = S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x).$$

Do $S(0) = 0$, nên

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = -\ln(1-x), \; (|x|<1).$$

1.3.4. Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa

Đối với chuỗi luỹ thừa, tổng là một hàm khả vi vô hạn lần trong khoảng hội tụ của nó, đồng thời ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi, vì vậy làm việc với chuỗi luỹ thừa rất thuận lợi. Vấn đề đặt ra những hàm số nào có thể biểu diễn được dưới dạng chuỗi luỹ thừa?

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và trong lân cận đó có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của một chuỗi luỹ thừa

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots ,$$

Hãy tìm các hệ số a_i, $i = 0,1,2,..$

Theo tính chất của chuỗi luỹ thừa, ta có

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots ,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3(x - x_0) \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$$

....

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots$$

....

Cho $x = x_0$, ta được

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \cdots$$

Vậy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (5)$$

Chuỗi luỹ thừa (5) được gọi là *chuỗi Taylor* của hàm $f(x)$ trong lân cận x_0. Các hệ số $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0,1,2,...$được gọi là *hệ số Taylor* của hàm $f(x)$ trong lân cận đó.

Nếu $x_0 = 0$, ta được chuỗi

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (6)$$

và gọi là *chuỗi Maclaurin.*

Ta sẽ xem xét điều kiện để chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ hội tụ và có tổng bằng $f(x)$.

Như vậy, về mặt hình thức chỉ cần hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn lần tại điểm x_0 và lân cận của nó thì có khai triển (5) (tức là chuỗi Taylor). Ta còn phải xét điều kiện nào để chuỗi Taylor hội tụ về hàm $f(x)$. Khi chuỗi Taylor (5) hội tụ về đúng $f(x)$, ta nói hàm $f(x)$ đã khai triển được thành chuỗi Taylor.

Định lý 1.3.4. *Nếu trong một lân cận nào đó của x_0, hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn lần và*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \ \forall n \in \mathbf{N},$$

trong đó M là một hằng số dương, thì hàm số $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.

Chứng minh. Theo công thức Taylor (công thức 32, chương 3, tập I [2]), trong một lân cận của x_0 ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

trong đó $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ là trị trung gian giữa x_0 và x.

Theo giả thiết của định lý ta có

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|\,x-x_0\,|^{n+1}.$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{X^n}{n!}$ hội tụ tuyệt đối với $\forall X \in \mathbf{R}$ (ví dụ 2, mục 1.3.1), do đó số hạng tổng quát $\dfrac{X^n}{n!} \to 0$, khi $n \to \infty$, nên $\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, khi $n \to \infty$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right| = 0$.

Khi đó, hàm $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{7}$$

1.3.5. Khai triển thành chuỗi Maclaurin một số hàm sơ cấp cơ bản

1.3.5.1. *Khai triển hàm $f(x)=e^x$ thành chuỗi Maclaurin*

Từ $f(x)=e^x$ ta có $f^{(n)}(x)=e^x$, $n=0,1,2,\ldots$ Với $\forall x\in(-R,R)$, $\forall R>0$, và $n\in N$ thì $|e^x|\le e^R=M$, theo định lý 1.3.4 hàm số $f(x)=e^x$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin trong khoảng $(-R,R)$ bất kỳ (nói cách khác hàm số khai triển được trên toàn trục số **R**).

Do $f^{(n)}(0)=1$, $n=0,1,2,\ldots$ Vậy

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbf{R}. \qquad (8)$$

Trong công thức (8) ta thay x bởi $-x$ ta được

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbf{R}. \quad (9)$$

Từ công thức (8) và (9) ta suy ra

$$\text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

$$\text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad \forall x\in\mathbf{R}.$$

1.3.5.2. *Khai triển hàm $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$ thành chuỗi Maclaurin*

Sử dụng công thức (6) ta có khai triển thành chuỗi Maclaurin. Từ $f(x)=(1+x)^\alpha$ ta có

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\ ,\ldots.$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ldots$$

Với $\forall x\in(-1;1)$ và $\forall n=0,1,2,\ldots$

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\right|$$
$$\le\left|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)\right|\le M$$

theo định lý 1.3.4 hàm số $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin. Mặt khác

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1),\ n=0,1,2,...$$

Theo công thức (6) ta được

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (10)$$

$\forall x\in(-1;1)$.

Trong công thức (10) với $\alpha=-1$, ta được

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \ (|x|<1). \qquad (11)$$

Trong công thức (11) thay x bởi $-x$, ta được

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ (|x|<1). \qquad (12)$$

Trong công thức (11) thay x bởi x^2, ta được

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ \ (|x|<1). \qquad (13)$$

Tích phân hai vế của (13) trong đoạn $[0,x]$, $|x|<1$, ta được

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},(|x|\le 1) \qquad (14)$$

công thức (14) đúng trong cả trường hợp $x=\pm 1$.

Trong công thức (11), tích phân hai vế trong đoạn $[0,x]$, $|x|<1$, ta được

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\ (|x|<1) \qquad (15)$$

Chú ý: Từ công thức (10) với $|x|<1$ ta suy ra được nhiều công thức khai triển của hàm số sơ cấp.

1.3.5.3. ***Khai triển hàm thành chuỗi Maclaurin của các hàm số***

$$f(x)=\cos x,\ f(x)=\sin x.$$

Từ $f(x)=\cos x$ ta có $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, $n=0,1,2,...$.

Với $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n = 0,1,2,...$ thì

$$\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1,$$

theo định lý 1.3.4 hàm số $f(x) = \cos x$ khai triển được thành chuỗi Maclaurin trên $\mathbf{R}$. Mặt khác $f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ 0 & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ 0 & n = 4k+3 \end{cases}$, $k = 0,1,2,...$

Theo công thức (6) ta được

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (16)$$

$\forall x \in \mathbf{R}$.

Tương tự, ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (17)$$

$\forall x \in \mathbf{R}$.

Chú ý: Các công thức từ (8) đến (17) là các công thức khai triển hàm số thành chuỗi Maclaurin. Trường hợp khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận x_0 (nghĩa là khai triển theo $x - x_0$), chỉ cần đặt $x - x_0 = X$ ta được khai triển Maclaurin đối với X, đổi về biến cũ $X = x - x_0$ ta được khai triển Taylor.

Ví dụ 1. Khai triển hàm số $f(x) = 2^x$ thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $x_0 = 1$.

Giải: Khai triển Taylor tại lận cận $x_0 = 1$, nghĩa là khai triển theo $x - 1$.

Đặt $X = x - 1 \Rightarrow x = 1 + X$, thay vào hàm số

$$f(x) = 2^x = 2^{(1+X)} = 2.2^X = 2.e^{X\ln 2} = F(X)$$

Theo công thức (8) ta được

$$F(X)=2.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(X\ln 2)^k}{k!}=2.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ln^k 2}{k!}X^k$$

Vậy $f(x)=2^x=2.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\ln^k 2}{k!}(x-1)^k$.

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Maclaurin hàm số $f(x)=\arcsin x$.

Giải: Ta có $f(x)=\arcsin x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x|<1)$. Sử dụng công thức (10) với $\alpha=-\frac{1}{2}$ và thay x bởi $-x^2$, ta được

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{1}{2}(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2+\ldots$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n+\ldots\quad(|x|<1)$$

$$=1+\frac{1}{2.1!}x^2+\frac{1.3}{2^2.2!}x^4+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.n!}x^{2n}+\ldots\quad(*)$$

Tích phân (*)trong đoạn $[0,x]$, $|x|<1$, ta được

$$f(x)=\arcsin x=x=x+\frac{1}{2.3.1!}x^3+\frac{1.3}{2^2.5.2!}x^5+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.(2n+1).n!}x^{2n+1}+\ldots$$

Ví dụ 3. Khai triển hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+3}$ theo $x-1$.

Giải: Đặt $X=x-1\Rightarrow x=1+X$, thay vào hàm số

$$f(x)=\frac{1}{X^2+2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{X^2}{2}}=F(X).$$

Áp dụng công thức (11) thay x bởi $\frac{X^2}{2}$, ta được

$$F(X)=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{X^2}{2}\right)+\left(\frac{X^2}{2}\right)^2-\left(\frac{X^2}{2}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{X^2}{2}\right)^n+\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2^2}X^4-\frac{1}{2^3}X^6+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}X^{2n}+\cdots\right]$$

Vậy

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2^2}(x-1)^4-\frac{1}{2^3}(x-1)^6+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}(x-1)^{2n}+\cdots\right].$$

Ví dụ 4. Khai triển hàm số $f(x)=\cos^2 2x$ theo $x-\frac{\pi}{4}$.

Giải: Đặt $x-\frac{\pi}{4}=X\Rightarrow x=X+\frac{\pi}{4}$, thay vào hàm số

$$f(x)=\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4X+\pi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4X)=F(X).$$

Áp dụng công thức (17) thay x bởi $4X$, ta được

$$F(X)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4X)^{2n}}{(2n)!}.$$

Vậy

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}.$$

Ví dụ 5. Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{3})^n}{n!}.$$

Giải: Theo công thức (8), ta có

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{3})^n}{n!}=1+\frac{(\sqrt{3})}{1!}+\frac{(\sqrt{3})^2}{2!}+\cdots+\frac{(\sqrt{3})^n}{n!}+\cdots=e^{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 6. Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$

Giải: Theo công thức (14), ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x,\ (|x|\le 1).$$

Thay $x=1$ ta được

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

1. 4. CHUỖI FOURIER

1.4.1. Đặt vấn đề

Trong nhiều lĩnh vực của khoa học kỹ thuật ta thường gặp các hiện tượng tuần hoàn, nghĩa là hiện tượng lặp lại sau một thời gian T nào đó. Để biểu diễn các hiện tượng tuần hoàn, trong toán học ta đã có hàm lượng giác tuần hoàn theo chu kỳ T, đó là các hàm $\sin\alpha t$, $\cos\alpha t$,... Tổng quát, $\varphi(t)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ T nếu $\varphi(t+T)=\varphi(t)$.

Một trong những hàm số biểu thị dao động đơn giản nhất là dao động điều hoà

$$S(t)=A\sin(\omega t+\varphi), \tag{1}$$

trong đó A là biên độ, ω là tần số dao động với chu kỳ $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, φ là góc lệch pha ban đầu.

Như vậy từ các hàm điều hoà đơn giản, chẳng hạn

$y_0=A_0$,

$y_1=A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$,

$y_2=A_2\sin(2\omega t+\varphi_2)$,

....

$y_n=A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$,

....

có chu kỳ tương ứng $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}, T_2 = \dfrac{2\pi}{2\omega}, \cdots, T_n = \dfrac{2\pi}{n\omega}, \cdots$. Lấy tổng các hàm đó ta được hàm tuần hoàn có chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Ngược lại, cho hàm tuần hoàn $\varphi(t)$ chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Với các điều kiện nào hàm $\varphi(t)$ có thể khai triển được thành tổng vô hạn (chuỗi) các hàm điều hoà đơn giản dạng (1):

$$\varphi(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \tag{2}$$

Các khai triển dạng (2) thường gặp trong kỹ thuật như phân tích một âm phức tạp thành tổng các âm cơ bản; phân tích dòng điện xung thành các dòng điện điều hoà.

Trong (2), đặt $x = \omega t$ ta có $\varphi(t) = \varphi\left(\dfrac{x}{\omega}\right) = f(x)$, $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ 2π và được viết lại dưới dạng

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{3}$$

trong đó $a_0 = 2A_0, a_k = A_k \sin\varphi_k,\ b_k = A_k \cos\varphi_k,\ k = 0,1,2,..$

Chuỗi (3) là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

Vấn đề đặt ra là: nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ 2π (có thể lấy là khoảng $[-\pi, \pi)$), thì với điều kiện nào hàm $f(x)$ có thể khai triển được thành chuỗi có dạng (3).

1.4.2. Chuỗi lượng giác

Định nghĩa 1.4.1. *Chuỗi hàm lượng giác là chuỗi hàm có dạng*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{4}$$

trong đó a_0, a_n, b_n, $(n = 1,2,3,...)$ *là các hằng số.*

Số hạng tổng quát của chuỗi (4) $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ $\frac{2\pi}{n}$, liên tục và khả vi đến mọi cấp.

Vì

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n| \text{ với } \forall x \in \mathrm{R},\ \forall n \geq 1,$$

nên nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ hội tụ thì theo dấu hiệu Weierstrass chuỗi lượng giác (4) hội tụ đều trên **R** và có tổng $S(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π.

1. 4.3. Chuỗi Fourier

Trước tiên ta xét bổ đề sau:

Bổ đề 1.4.1. *Với m,n là các số nguyên không âm, ta có*

1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0.$

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} 0, & n = 1,2,3,... \\ 2\pi, & n = 0. \end{cases}$

3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m \neq 0, \\ 2\pi, & n = m = 0. \end{cases}$

4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m \neq 0. \end{cases}$

5) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0.$

Các công thức này, chứng minh được bằng cách sử dụng các công thức lượng giác sau:

$$\cos^2 mx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2mx),$$

$$\sin^2 mx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2mx),$$

$$\cos mx.\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx.\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx.\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x].$$

Bổ đề 1.4.2. *Giả sử $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π, khả tích trên $[-\pi,\pi]$, có thể khai triển được thành chuỗi lượng giác*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (5)$$

hội tụ đều, các hệ số a_0, a_n, b_n, $n = 1,2,3,....$được tìm theo các công thức sau

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ n = 1,2,3,... \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\ n = 1,2,3,... \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Chứng minh. Để tính a_0, lấy tích phân hai vế của (5) trên $[-\pi,\pi]$, sử dụng Bổ đề 1.4.1, ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) = \pi a_0.$$

Do đó $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$

Để tính a_n, nhân hai vế của (5) với $\cos nx$, sau đó lấy tích phân hai vế trên $[-\pi,\pi]$, sử dụng bổ đề 1.4.1, ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = a_n\pi,$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ , \ n = 1,2,3,...$$

Tương tự, nhân hai vế của (5) với $\sin nx$, rồi lấy tích phân hai vế, ta được

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\ , \quad n = 1,2,3,....$$

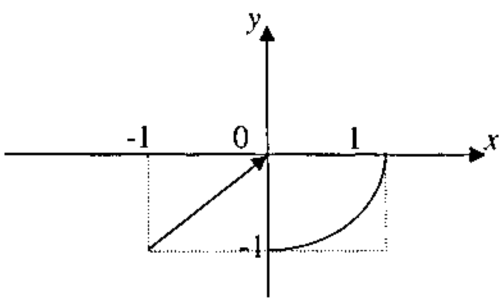
Các hệ số của chuỗi lượng giác được xác định theo công thức (6) gọi là *hệ số Fourier* của hàm $f(x)$; chuỗi lượng giác (5) có các hệ số là hệ số Fourier thì (5) gọi là *chuỗi Fourier* của hàm $f(x)$ trên $[-\pi;\pi]$.

Do chuỗi lượng giác (5) tuần hoàn chu kỳ 2π nên giá trị của nó lặp lại sau mỗi chu kỳ. Đồ thị là đường cong được lặp lại sau mỗi chu kỳ.

Như vậy, vấn đề đặt ra ở đây là với điều kiện nào của hàm số $f(x)$ thì nó có thể khai triển được thành chuỗi Fourier và chuỗi đó hội tụ về đúng hàm số $f(x)$?

Định nghĩa 1.4.2. *Hàm $f(x)$ gọi là đơn điệu từng khúc trên $[a,b]$ nếu có thể chia đoạn đó bởi một số hữu hạn điểm chia $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_k = b$ tạo thành các khoảng $(a,x_1),(x_1,x_2),..,(x_{k-1},b)$ sao cho trên mỗi khoảng đó hàm $f(x)$ đơn điệu.*

Ví dụ 1: $f(x) = \begin{cases} x & -1 \le x < 0 \\ x^2 - 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$ là hàm đơn điệu từng khúc trên đoạn $[-1,1]$ (Hình 1.1).



Hình 1.1

Từ định nghĩa ta thấy rằng nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[a,b]$ thì trên đoạn đó hoặc là hàm số $f(x)$ liên tục hoặc có thể có các điểm gián đoạn loại 1. Thực vậy, giả sử $c \in (a,b)$ là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$, do đơn điệu và bị chặn nên tồn tại

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0)$$

hữu hạn.

Sau đây ta phát biểu, không chứng minh một định lý về điều kiện đủ để một hàm số có thể khai triển được thành chuỗi Fourier (xem [6], [7]).

Định lý 1.4.1. (Dirichlet) *Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-\pi;\pi]$ thì chuỗi Fourier của nó hội tụ với $\forall x$ đến tổng $S(x)$ và*

i) $S(x) = f(x)$ *tại những điểm liên tục của* $f(x)$.

ii) $S(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *tại những điểm gián đoạn (loại 1).*

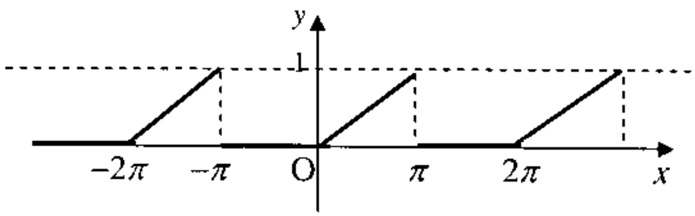
Ta quy ước, giá trị của hàm số $f(x)$ tại các điểm biên của mỗi chu kỳ $[-\pi;\pi]$ là đại lượng $\dfrac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Từ định lý này ta suy ra lớp hàm khai triển được thành chuỗi Fourier khá rộng và nó được sử dụng rộng rãi trong các ngành toán học cũng như các ngành khoa học kỹ thuật khác. (Ở không chứng minh định lý, xem [3], [5]).

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, trong đó

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x^2 - 1, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Giải: Đồ thị của $f(x)$ được mô tả trong Hình 1.2.



Hình 1.2

Rõ ràng hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet.

Ta có $\quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right] = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx = \frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi n^2}, & n = 2m-1 \\ 0, & n = 2m \end{cases},$$

$m = 1, 2, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx = \frac{-1}{n\pi}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2m-1 \\ -\dfrac{1}{n}, & n = 2m \end{cases},$$

$m = 1, 2, \ldots$

Vậy

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right).$$

Công thức đúng với mọi x trên trục số, trừ những điểm $x = (2m+1)\pi$, tại đó tổng của chuỗi ở vế phải bằng trung bình cộng của giới hạn trái, giới hạn phải, nghĩa là bằng

$$\frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

1.4.4. Khai triển Fourier của hàm số chẵn, hàm số lẻ

Giả sử $f(x)$ là hàm số chẵn trên $[-\pi;\pi]$, thì $f(x)\sin nx$ là hàm số lẻ, $f(x)\cos nx$ là hàm số chẵn. Khi đó

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Vậy chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ chẵn là

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad n=1,2,... \tag{7}$$

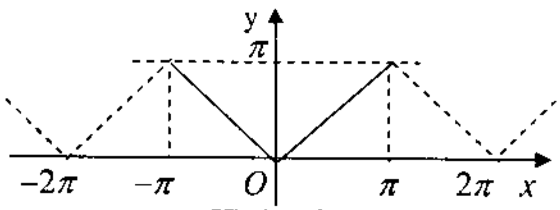
Tương tự, nếu $f(x)$ là hàm số lẻ trên $[-\pi;\pi]$ thì $f(x)\sin nx$ là hàm số chẵn, $f(x)\cos nx$ là hàm số lẻ. Ta có khai triển

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{8}$$

trong đó $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$, $n=1,2,.....$

Ví dụ 3. Khai triển Fourier của hàm $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi;\pi]$.

Giải: Hàm $f(x)$ là hàm số chẵn, đồ thị của $f(x)$ và thác triển tuần hoàn của nó được mô tả trong Hình 1.3.



Hình 1.3

Rõ ràng hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet. Ta có $b_n = 0$ $(n = 1,2,..)$ và

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{x\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right] = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & khi \;\; n=2k+1, \\ 0, & khi \;\; n=2k. \end{cases}$$

Khi đó với mọi $x \in [-\pi;\pi]$, ta có

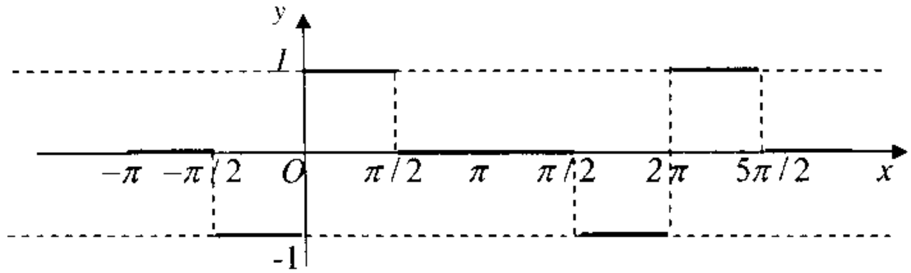
$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right].$$

Ví dụ 4. Cho hàm $f(x)$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π và

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{khi } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{khi } \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi.\end{cases}$$

Khai triển Fourier của hàm $f(x)$.

Giải: Đồ thị của $f(x)$ được mô tả trong Hình 1.4.



Hình 1.4

Rõ ràng hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet. Vì $f(x)$ là hàm số lẻ nên $a_n=0$ $(n=0,1,2,..)$ và

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}0dx\right]\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

Vậy

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin nx.$$

1.4.5. Khai triển Fourier của hàm số tuần hoàn chu kỳ bất kỳ

Cho $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $2l$, $l>0$, đơn điệu tùng khúc và bị chặn trên $[-l,l]$.

Bằng cách đổi biến $x'=\dfrac{\pi x}{l}$, ta có

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}x'\right) = F(x')$$

trong đó $F(x')$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, đơn điệu tùng khúc và bị chặn trên $[-\pi, \pi]$. Vậy

$$f(x) = F(x') = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx' + b_n \sin nx',$$

hay

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (9)$$

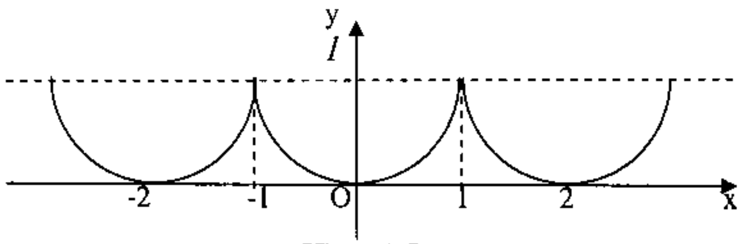
trong đó

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x')\cos nx'\,dx' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x')\sin nx'\,dx' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1,2,3,...$$

Ví dụ 5. Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm $f(x) = x^2$, tuần hoàn chu kỳ $2l = 2$ trên $[-1,1]$

Giải: Hàm $f(x)$ là hàm số chẵn, đơn điệu từng khúc trên $[-1,1]$ đồ thị của $f(x)$ và thác triển tuần hoàn của nó được mô tả trong Hình 1.5.



Hình 1.5

Do $f(x)$ là hàm số chẵn, nên $b_n = 0$ $(n = 1,2,..)$ và

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx$$ tích phân từng phần hai lần ta được

$$a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos n\pi = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2 n^2} & n=2k, \\ -\dfrac{4}{\pi^2 n^2} & n=2k-1, \end{cases} \qquad k = 1,2...$$

Khi đó với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left[\cos\pi x - \frac{1}{2^2}\cos 2\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \cdots\right].$$

1.4.6. Khai triển Fourier của hàm số bất kỳ

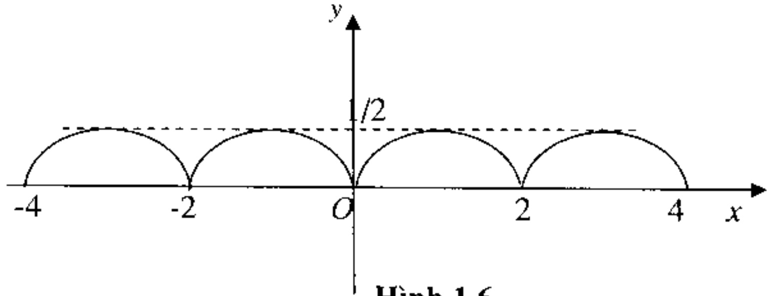
Giả sử $f(x)$ là hàm bất kỳ, có thể không tuần hoàn, xác định và đơn điệu từng khúc trên $[a,b]$. Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, trước hết ta phải xây dựng $F(x)$ tuần hoàn, đúng bằng hàm $f(x)$ trên $[a,b]$. Nếu $F(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi đó tại mọi điểm $x \in [a,b]$ (trừ ra những điểm gián đoạn trong khoảng (a,b) bằng đúng hàm $f(x)$. Khi đó ta được khai triển của hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier trên $[a,b]$. Chẳng hạn, hàm số $f(x)$ xác định và đơn điệu từng khúc trên $[0,l]$, ta bổ sung cho hàm số trên $[-l,0]$ một cách tuỳ ý, để được hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, xác định và đơn điệu trên $[-l,l]$. Thông thường người ta bổ sung sao cho $f(x)$ là hàm số chẵn hoặc lẻ trên $[-l,l]$.

Để hiểu rõ hơn, ta xét ví dụ sau

Ví dụ 6. Khai triển hàm số $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ trên $[0;2]$ thành chuỗi Fourier.

Giải: Hàm số $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ xác định trên $[0;2]$, nghĩa là xác định trên nửa chu kỳ $l = 2$. Ta cần thác triển hàm $f(x)$ thành hàm xác định trên $[-2;2]$ với chu kỳ $2l = 4$. Có nhiều cách thác triển khác nhau. Nếu thác triển thành hàm số $F(x)$ chẵn, tuần hoàn, chu kỳ $2l = 4$ thì

$$F(x)=\begin{cases} f(-x)=-\left(x+\dfrac{x^2}{2}\right), & -2\le x<0,\\ f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$



Hình 1.6

Hàm số $F(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet (Hình 1.6).

Do $F(x)$ là hàm số chẵn, nên $b_n=0$ $(n=1,2,..)$ và

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}F(x)dx=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}F(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

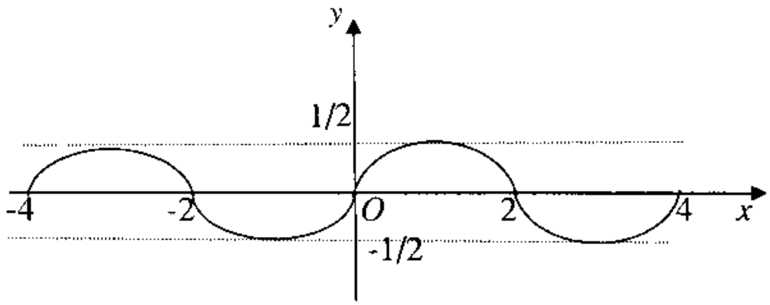
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi=-\frac{4[1+(-1)^n]}{n^2\pi^2},\ k=1,2,3,...$$

Do đó tại mỗi điểm liên tục ta có khai triển Fourier của hàm $f(x)$ là:

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

Nếu thác triển thành hàm số $F(x)$ lẻ, tuần hoàn, chu kỳ $2l = 4$,thì

$$F(x) = \begin{cases} -f(-x) = -\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right), & -2 \le x < 0, \\ f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$



Hình 1.7

Hàm số $F(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet (Hình 1.7).

Do $F(x)$ là hàm số lẻ, nên $a_n = 0$ $(n = 0,1,2,..)$ và áp dụng công thức tích phân từng phần hai lần, ta được

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{8}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{8}{n^3\pi^3}\cos n\pi + \frac{8}{n^3\pi^3} = \frac{8}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n],\ n = 1,2,3,...$$

Ta có khai triển Fourier của hàm $f(x)$ là:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

BÀI TẬP GIẢI SẴN

Bài 1. Tìm tổng riêng và tổng của các chuỗi số

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;   2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.

Giải: 1) Phân tích $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$, khi đó tổng riêng của chuỗi là

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Ta có $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

2) Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, tổng riêng của chuỗi là

$$S_n = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}.$$

Ta có $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{3}{4}$.

Bài 2. Dùng điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, chứng minh các chuỗi số sau phân kỳ

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+1}}{n(2n+1)}$;   2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{2n}$.

Giải: 1) Ta có $a_n = \dfrac{\sqrt{n^4+1}}{n(2n+1)}$, do

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n(2n+1)} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Vậy theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, chuỗi đã cho phân kỳ.

2) Ta có $a_n = n\sin\dfrac{\pi}{2n}$, do

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Vậy theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, chuỗi đã cho phân kỳ.

Bài 3. Áp dụng tiêu chuẩn so sánh xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+5^n+n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\pi}{n\sqrt{n}}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

Giải: 1) Ta có $\dfrac{3^n}{3^n+5^n+n} < \dfrac{3^n}{5^n} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$, $\forall n \geq 1$, mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ hội tụ (vì $q = \dfrac{3}{5} < 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Ta có $\sqrt[4]{1+x^4} > x \Rightarrow \displaystyle\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx > \int_0^n x\,dx = \frac{n^2}{2}$, do đó

$$0 < a_n = \frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx} < \frac{2}{n^2},\ \forall n \geq 1,$$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ hội tụ (vì $\alpha = 2 > 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số đã cho hội tụ.

3)Ta có $a_n = \arctan\frac{\pi}{n\sqrt{n}} > \frac{\pi}{n\sqrt{n}} = \frac{\pi}{n^{3/2}} = b_n$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ (vì $\alpha=\frac{3}{2}>1$), nhưng không áp dụng được tiêu chuẩn so sánh 1. Ta xét

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\frac{\pi}{n\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{n\sqrt{n}}} = 1$$

Theo tiêu chuẩn so sánh 2, hai chuỗi có cùng tính chất.
Vậy chuỗi số đã cho hội tụ.

4) Ta có

$$a_n = \sqrt{n}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \sim \sqrt{n}\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^{1/2}} \text{ khi } n\to\infty,$$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ (vì $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh 2, chuỗi số đã cho phân kỳ.

Bài 4. Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert hoặc Cauchy, xét sự hội tụ của các chuỗi sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n!)^2}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}$.

Giải: 1) Ta có $a_n = \frac{5^n(n!)^2}{(2n)!}$ và

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} : \frac{5^n(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{5(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5}{4} = D.$$

Vì $D = \frac{5}{4} > 1$ theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi số đã cho phân kỳ.

2) Ta có $a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}$ và

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-3}}\right)^{\frac{-3(n-1)}{n+2}} = e^{-3} = C.$$

Do $C = e^{-3} < 1$ theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi số đã cho hội tụ .

Bài 5. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln n)}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$, (β là tham số).

Giải: 1) Ta có $a_n = f(n) = \frac{1}{n(1+\ln n)}$, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$ liên tục, dương và giảm trên $[2;+\infty)$. Mặt khác

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_2^{+\infty}\frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x} = \ln(1+\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ.

2) Ta có $a_n = f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}$ liên tục, không âm và giảm trên $[2;+\infty)$. Mặt khác

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}dx = \int_2^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{\beta}} = \begin{cases} +\infty, & \beta \le 1, \\ \frac{1}{(\beta-1)(\ln 2)^{\beta-1}}, & \beta > 1. \end{cases}$$

Vậy theo tiêu chuẩn tích phân, chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ phân kỳ khi $\beta \le 1$, hội tụ khi $\beta > 1$.

Bài 6. Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$;   2) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

Giải: 1) Chuỗi số đã cho là chuỗi số dương, ta có $a_n=\frac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$ và

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{5}{2e}.$$

Do $e>2,5\Rightarrow C=\frac{5}{2e}<1$ theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Ta có $\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\sin\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$, chuỗi số đã cho là chuỗi số dương.

$$\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\sin\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\frac{2}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\text{ khi } n\to\infty,$$

mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kỳ (vì $\alpha=\frac{1}{2}<1$), theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi số đã cho phân kỳ.

Bài 7. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $1,1+1,01+1,001+1,0001+\cdots$;

2) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\sqrt{3}}+\cdots$;

3) $\frac{1}{2}+\frac{1.4}{2.6}+\frac{1.4.7}{2.6.10}+\frac{1.4.7.10}{2.6.10.14}+\cdots$.

Giải: 1) Ta có $a_n=1,\underbrace{00\ldots\ldots0}_{n-1\text{ số }0}1=1+\frac{1}{10^n}$, $n=1,2,\ldots$ $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1\neq 0$, theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, thì chuỗi số đã cho phân kỳ

2) Ta có $a_n = \frac{n}{3^{n/2}}, a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{(n+1)/2}}$, $n = 1, 2, \ldots$, chuỗi đã cho là chuỗi số dương và

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^{n/2}}{3^{(n+1)/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = D < 1 .$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi số đã cho hội tụ.

3) Số hạng tổng quát của chuỗi số đã cho là

$$a_n = \frac{1.4.7.10\ldots(3n-2)}{2.6.10.14\ldots(4n-2)} \Rightarrow a_{n+1} = a_n\frac{3n+1}{4n+2},$$

và

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi số đã cho hội tụ.

Bài 8. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos\frac{2n-1}{2n+1}$;   2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Giải: 1) Đặt $a_n = (-1)^{n+1}\cos\frac{2n-1}{2n+1}$, ta có $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \cos 1 \neq 0$, theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, thì chuỗi số đã cho phân kỳ

2) Đặt $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{n}{n^2}} = e^0 = 1$.

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$. Vậy theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, thì chuỗi số đã cho phân kỳ.

Bài 9. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n/2}n!}{n^n}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\frac{\sin n}{n}.$$

Giải: 1) Ta có $a_n = \dfrac{3^{n/2}n!}{n^n}$, chuỗi đã cho là chuỗi số dương và

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{(n+1)/2}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}:\frac{3^{n/2}n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{e} = D.$$

Vì $D = \dfrac{\sqrt{3}}{e} < 1$, theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Chuỗi số đã cho là chuỗi số có dấu bất kỳ. Ta có

$$|a_n| = \frac{|\sin n|}{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right) \le \frac{1}{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right) < \frac{2}{2n\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

khi $n\to\infty$.

Mà chuỗi số $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ (vì $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi số đã cho hội tụ tuyệt đối.

Bài 10. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n}; \qquad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

Giải: 1) Chuỗi số đã cho là chuỗi số dương. Ta có

$$a_n=\frac{2^n+n^2}{3^n+n}\sim\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ khi } n\to\infty,$$

mà chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ hội tụ (vì $|q|=\frac{2}{3}<1$), do đó chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Vì $\ln n<n,\ \forall n\ge 2\Rightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$. Mà chuỗi điều hoà $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ, theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi số đã cho phân kỳ.

Bài 11. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{10^{\ln n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Giải: 1) Chuỗi số đã cho là chuỗi số dương. Ta có $10^{\ln n}=n^{\ln 10}>n^2,\ \forall n>1$. Do đó

$$a_n=\frac{2n-3}{10^{\ln n}}\sim\frac{2}{n^{\ln 10-1}} \text{ khi } n\to\infty,$$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{\ln 10-1}}$ hội tụ (vì $\alpha=\ln 10-1>1$), theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Chuỗi số đã cho là chuỗi số có dấu bất kỳ, ta xét $|a_n|=\frac{\left|\cos\frac{2n\pi}{3}\right|}{2^n}\le\frac{1}{2^n},\ \forall n\ge 1$, mà chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ (vì $q=\frac{1}{2}<1$), theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi số đã cho hội tụ tuyệt đối.

Bài 12. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n+4}}{\sqrt{n^4-2n^2+5}}$.

Giải: 1) Chuỗi số đã cho là chuỗi số đan dấu, ta xét

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-2}}\right)^{\frac{-2(n+1)}{n+3}}=e^{-2}\ne 0,$$

theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, thì chuỗi số đã cho phân kỳ.

2) Chuỗi số đã cho là chuỗi số dương, ta xét

$$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n+4}}{\sqrt{n^4 - 2n^2 + 5}} \sim \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \text{ khi } n \to \infty,$$

mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ phân kỳ (vì $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi số đã cho phân kỳ.

Bài 13. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+3n+5}{14n^2 - 2\cos n}}; \qquad 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^n}{(1+n)^n}.$$

Giải: 1) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+3n+5}{14n^2 - 2\cos n}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \neq 0$, theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, thì chuỗi số đã cho phân kỳ.

2) Ta có $a_n = \frac{1+n^n}{(1+n)^n} \sim \frac{n^n}{(1+n)^n}$ khi $n \to \infty$. Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$, theo tiêu chuẩn so sánh 2, chuỗi số đã cho phân kỳ.

Bài 14. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}; \qquad 2)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}\right).$$

Giải: 1) Đặt $a_n = \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$. Chuỗi số đã cho là chuỗi số dương, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^{2n+2}} : \frac{7^n (n!)^2}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} = \frac{7}{e^2}.$$

Vì $e > 2,7 \Rightarrow e^2 > 7,29 \Rightarrow D = \frac{7}{e^2} < 1$, theo tiêu chuẩn D'Alembert, chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Chuỗi số đã cho là chuỗi số dương. Ta có

$$\ln\left(1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)=\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}\right)\sim\frac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}\sim\frac{3}{2\sqrt{n}} \text{ khi } n\to\infty.$$

Mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{2\sqrt{n}}$ phân kỳ (vì $\alpha=\frac{1}{2}<1$), theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi đã cho phân kỳ.

Bài 15. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{3n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$.

Giải: 1) Do $a_n=f(n)=\frac{\ln n}{3n^2}$. Xét hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{3x^2}$ liên tục, dương trên $[2;+\infty)$. Ta có

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}3x^2-6x\ln x}{9x^4}=\frac{1-2\ln x}{3x^3}<0, \text{với } \forall x\geq 2,$$

do đó $f(x)$ đơn điệu giảm trên $[2;+\infty)$.

Mặt khác

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{3x^2}dx=-\frac{1}{3}\int_2^{+\infty}\ln x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln x\Big|_2^{+\infty}+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{1}{x}\Big|_2^{+\infty}\right]=\frac{1}{6}(\ln 2+1).$$

Theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi số đã cho hội tụ.

2) Chuỗi số đã cho là chuỗi số dương.Ta có

$$n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1\sim\frac{\ln n}{n^2+1} \text{ khi } n\to\infty,$$

và $\frac{\ln n}{n^2+1}<\frac{\ln n}{n^2}$, $\forall n\geq 2$ mà $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ hội tụ (kết quả trên), theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi số đã cho hội tụ.

Bài 16. Xét sự hội tụ và tính tổng của chuỗi số:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ với } a_n = \frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}.$$

Giải: Ta có $a_n = \dfrac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2}$ hội tụ (vì $\alpha = 2 > 1$), theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi đã cho hội tụ.

Phân tích

$$a_n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{n+\frac{3}{2}} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{n+\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+4}.$$

Khi đó tổng riêng thứ n của chuỗi số đã cho là

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+5}\right),$$

do đó $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{3}\left(-1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{5}{6} = \dfrac{2}{9}$.

Vậy tổng của chuỗi số đã cho là $S = \dfrac{2}{9}$.

Bài 17 . Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^3+4}{n^3+5}\right); \qquad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n - \ln n}.$$

Giải: 1) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+4}{n^3+5} = 1 \neq 0$, theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, thì chuỗi số đã cho phân kỳ.

2) Ta có

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{n - \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n},$$

trong đó chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$ là chuỗi đan dấu thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz, nên hội tụ; chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n - \ln n}$ phân kỳ vì

$\dfrac{1}{n-\ln n} \sim \dfrac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi điều hoà $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ. Vậy tổng của một chuỗi hội tụ và một chuỗi phân kỳ là một chuỗi phân kỳ.

Bài 18. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}a_n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

Giải: 1) Ta có $\left|\dfrac{n+1}{n}a_n\right| = \dfrac{n+1}{n}|a_n| \le 2|a_n|$, $\forall n \ge 1$. Mà $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối, theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n}a_n$ hội tụ tuyệt đối.

2) Ta có $\left|\dfrac{a_n}{n}\right| \le \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$, $\forall n \ge 1$. Ta đã biết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ (vì $\alpha = 2 > 1$), mặt khác, vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối, nên $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$. Với n đủ lớn ta có

$$a_n^2 < |a_n|,\ \ \forall n \ge 1,$$

vì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối, theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ. Do đó chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ hội tụ, lại theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ hội tụ tuyệt đối.

Bài 19 . Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$.

Giải: 1) Ta có

$$a_n = \frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{n^n} = 1, \quad \forall n \geq 1,$$

do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 1$, theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, thì chuỗi số đã cho phân kỳ.

2) Ta có

$$a_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2 \sim n.\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \text{ khi } n \to \infty,$$

mà chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, theo tiêu chuẩn so sánh 2 chuỗi số đã cho phân kỳ.

Bài 20. Cho hai chuỗi số phân kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ trong đó các số hạng $a_n \geq 0, b_n \geq 0$. Xét sự hội tụ của các chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$.

Giải: + Vì $a_n \leq \max(a_n, b_n)$, $\forall n \geq 1$, mà chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ, do đó chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ phân kỳ.

+ Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Ví dụ:

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ với $\begin{cases} a_{2n} = 0 \\ a_{2n+1} = 1 \end{cases}$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ với $\begin{cases} b_{2n} = 1 \\ b_{2n+1} = 0 \end{cases}$ thì $\min(a_n, b_n) = 0$, $\forall n \geq 1$, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ hội tụ.

Với $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{2n} \Rightarrow \min(a_n, b_n) = \dfrac{1}{2n}$, $\forall n \ge 1$, thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ phân kỳ.

Bài 21. Nếu chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và chuỗi có dấu bất kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, hãy chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ cũng hội tụ. Nếu các chuỗi có dấu bất kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, có kết luận được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ hội tụ hay không?

Giải: + Giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nên $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, do đó với n đủ lớn thì $|b_n| < 1$ và $|a_n b_n| = a_n |b_n| < a_n$, theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ hội tụ tuyệt đối.

+ Nếu các chuỗi có dấu bất kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, thì không kết luận chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n)$ hội tụ. Ví dụ $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, theo tiêu chuẩn Leibnitz các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

Bài 22. Nếu chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, hãy chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ cũng hội tụ. Nếu chuỗi có dấu bất kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, có kết luận được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ hay không?

Giải: + Giả thiết chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nên $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, do đó với n đủ lớn thì $a_n^2 \le a_n$, theo tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ.

+ Nếu chuỗi có dấu bất kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì không kết luận được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ .

Chẳng hạn, nếu $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ (theo định lý Leibnitz), nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ (chuỗi điều hoà).

Bài 23. Khảo sát sự hội tụ theo tham số thực a của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^a} - 1\right)$.

Giải: Trường hợp 1: $a \ge 0$, do $n^{n^a} - 1 > n - 1$ mà $\lim_{n\to\infty}(n-1) = +\infty$ suy ra $\lim_{n\to\infty}\left(n^{n^a} - 1\right) = +\infty$, chuỗi phân kỳ.

Trường hợp 2: $a < 0$. Do $n^{n^a} - 1 \ge 0$ nên chuỗi số đã cho là chuỗi số dương. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} n^{n^a} = \lim_{n\to\infty} e^{n^a \ln n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n^a \ln n} = e^0 = 1,$$

nên $n^{n^a} - 1 \sim \ln\left(n^{n^a} - 1 + 1\right) = n^a \ln n$ khi $n \to \infty$.

Ta xét $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \ln n \qquad (*)$

+ Nếu $-1 \le a < 0$ thì $n^a \ln n \ge n^a = \dfrac{1}{n^{-a}}$, $\forall n \ge 3$ mà $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{-a}}$ phân kỳ $\Rightarrow$ chuỗi (*) phân kỳ $\Rightarrow$ chuỗi đã cho phân kỳ.

+ Nếu $a < -1$, khi đó $\exists\, \varepsilon > 0, \alpha_1 > 1$ để $-a = \alpha_1 + \varepsilon$. Ta viết

$$n^a \ln n = \frac{1}{n^{\alpha_1}}.\frac{\ln n}{n^{\alpha}}.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0$ nên $\frac{1}{n^{\alpha_1}}.\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} \le \frac{1}{n^{\alpha_1}}$, với mọi $n \ge n_0$, n_0 là số tự nhiên nào đó. Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_1}}$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi (1) hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi đã cho hội tụ.

Kết luận : $a \ge -1$ chuỗi phân kỳ.

$a < -1$ chuỗi hội tụ.

Bài 24. Cho chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ với các số hạng $a_n > 0$ và tồn tại

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = q \text{ (hữu hạn).}$$

Chứng minh rằng chuỗi này hội tụ khi $q > 1$, phân kỳ khi $0 < q < 1$.

Giải: +Giả sử q > 1 khi đó $\exists \alpha$ sao cho $q > \alpha > 1$.

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = q$, $\exists n_0$ sao cho $\forall n \ge n_0 \Rightarrow \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} > \alpha$, do đó

$$\ln(1/a_n) > \alpha \ln n \Rightarrow a_n < \frac{1}{n^{\alpha}},\ \ \forall_n \ge n_0.$$

Chuỗi $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ với $\alpha > 1$, theo Tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

+ Với $0 < q < 1$ khi đó $\exists \beta$ sao cho $q < \beta < 1$.

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = q$, $\exists n_1$ sao cho $\forall n \ge n_1 \Rightarrow \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} < \beta$, do đó

$$\ln(1/a_n) < \beta \ln n \Rightarrow a_n > \frac{1}{n^{\beta}}, \forall n \ge n_1.$$

Chuỗi $\sum \frac{1}{n^{\beta}}$ phân kỳ vì $\beta < 1$, theo Tiêu chuẩn so sánh 1, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Bài 25. Xét sự hội tụ và tính tổng của chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{2^n}.$$

Giải: Chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, (xem bài 11, ý 2).

Ta tính tổng của chuỗi. Vì

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = 1, & khi\ n = 3k, \\ \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, & khi\ n \neq 3k, \end{cases}$$

do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{3k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{2^{3k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{2^{3k+2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} - \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = -\frac{2}{7}.$$

Vậy tổng của chuỗi số đã cho là $S = -\frac{2}{7}$.

Bài 26. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}.$$

Giải: Hàm $u_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}$ xác định với mọi x. Xét các trường hợp:

+ Nếu $|x| < 1$, thì $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} = 1 \neq 0$ chuỗi phân kỳ.

+ Nếu $|x| = 1$, thì $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \neq 0$ chuỗi phân kỳ.

+ Nếu $|x|>1$, thì $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = \dfrac{1}{x^2}$. Chuỗi đã cho hội tụ khi $\dfrac{1}{x^2} < 1$ hay $x^2 > 1$ chuỗi hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $x > 1$ hoặc $x < -1$.

Bài 27. Chứng minh các chuỗi hàm số sau hội tụ đều trên miền tương ứng

$$1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^3x^2},\quad x\in \mathbf{R};\qquad 2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(1+nx^2)}{1+n^3x^2},\quad x\in\mathbf{R}.$$

Giải: 1) Ta có $|u_n(x)| = \dfrac{x^2}{1+n^3x^2} < \dfrac{x^2}{n^3x^2} = \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n\geq 1, \forall x\neq 0$. Nếu $x=0$, ta có $u_n(x) = 0 < \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \geq 1$.

Như vậy $|u_n(x)| < \dfrac{1}{n^3}$, $\forall x\in \mathrm{R}$, $\forall n\geq 1$, mà chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ hội tụ, theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên **R**.

2) Nếu $x\neq 0$, ta có

$$u_n(x) = \frac{\ln(1+nx^2)}{1+n^3x^2} < \frac{1+nx^2}{1+n^3x^2} \sim \frac{nx^2}{n^3x^2} = \frac{1}{n^2} \text{ khi } n\to\infty.$$

Nếu $x=0$, ta có $u_n(x) = 0 < \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n\geq 1$.

Như vậy $|u_n(x)| < \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x\in\mathrm{R}$, $\forall n \geq 1$, mà chuỗi số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ, theo tiêu chuẩn Weierstrass chuỗi hàm đã cho hội tụ đều trên **R**.

Bài 28. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^n.$$

Giải: Đặt $u_n(x) = \dfrac{n+1}{n^2+n+1}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^n$, $x\neq -1$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{(n+1)^2+n+2}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{n+1} : \frac{n+1}{n^2+n+1}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2+n+2}\cdot\frac{n^2+n+1}{n+1}\cdot\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = \left|\frac{2x-1}{x+1}\right|.$$

Chuỗi hàm đã cho hội tụ khi $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<1 \Rightarrow 0<x<2$, chuỗi phân kỳ khi $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2. \end{array}\right.$

Tại $x=2$, có chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+n+1}$. Ta có $\frac{n+1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n}$ khi $n\to\infty$, mà chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ, suy ra chuỗi số trên phân kỳ.

Tại $x=0$, ta có chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{n+1}{n^2+n+1}$, đây là chuỗi đan dấu vì $\frac{n+1}{n^2+n+1}>0, \forall n\geq 0$.

Đặt $b_n = \frac{n+1}{n^2+n+1}$ ta có $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Đặt $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(x^2+2x)}{(x^2+x+1)^2} < 0, \forall x>0$, do đó hàm $f(x)$ đơn điệu giảm với $\forall x>0$, ta có $b_{n+1}\leq b_n\ \forall n>0$. Theo tiêu chuẩn Leibnitz, chuỗi số hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là: $0\leq x<2$.

Bài 29. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{n^3+1}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2n}.$$

Giải: Đặt $u_n(x) = \frac{n(n+1)}{n^3+1}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2n}$, $x\neq -1$. Ta có

$$\lim_{a\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{a\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^3+1}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2n+2} : \frac{n(n+1)}{n^3+1}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2n}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^3+1}\cdot\frac{n^3+1}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2.$$

Chuỗi hàm đã cho hội tụ khi $\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2<1\Leftrightarrow x>1$. Do đó khoảng hội tụ của chuỗi hàm là $x>1$.

Khi $x=1$ ta có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n^3+1}$. Vì $\frac{n(n+1)}{n^3+1}\sim\frac{1}{n}$ khi $n\to\infty$, mà chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ suy ra chuỗi số trên phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $x>1$.

Bài 30. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{10^{n-1}.x^n}{n!}.$$

Giải: Chuỗi hàm đã cho là chuỗi lũy thừa với các hệ số $a_n=(-1)^{n-1}\frac{10^{n-1}}{n!}\neq 0$.

Ta có

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^n}{(n+1)!}:\frac{10^{n-1}}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{(n+1)}=0\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}=\infty.$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi là khoảng $(-\infty,+\infty)$.

Bài 31. Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=6}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+4n}{5n-n^2}(x-1)^n.$$

Giải: Đặt $a_n=(-1)^n\frac{n^2+4n}{5n-n^2}$, ta có

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+4(n+1)}{5(n+1)-(n+1)^2}\cdot\frac{5n-n^2}{n^2+4n}=1\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}=1.$$

Khoảng hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $-1<x-1<1\Leftrightarrow 0<x<2$.

Tại mút $x = 2$, có chuỗi $\sum_{n=6}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+4n}{5n-n^2}$ là chuỗi số đan dấu, ta có $\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2+4n}{5n-n^2}\right| = 1 \neq 0$, chuỗi phân kỳ.

Tại mút $x = 0$, có chuỗi $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{n^2+4n}{5n-n^2}$, ta có $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n}{5n-n^2} = 1 \neq 0$, chuỗi phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $0 < x < 2$.

Bài 32. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n (x-5)^{2n}.$$

Giải: Đặt $X = (x-5)^2$, với điều kiện $X \geq 0$, có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n X^n$ (*) là chuỗi lũy thừa với các hệ số $a_n = \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n \neq 0$. Ta có

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3},$$

do đó chuỗi (*) có bán kính hội tụ là $R = 3$, và khoảng hội tụ là $0 \leq X < 3$.

Tại mút $X = 3$, có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^n$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+2}\right)^n = e^{1/3} \neq 0,$$

chuỗi phân kỳ.

Như vậy miền hội tụ của chuỗi (*) là $0 \leq X < 3$, do đó miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là $0 \leq |x-5| < \sqrt{3} \Leftrightarrow 5-\sqrt{3} < x < 5+\sqrt{3}$.

Bài 33. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{n/2}(x+4)^n.$$

Giải: Đặt $X = x + 4$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{n/2} X^n$ (*) là chuỗi lũy thừa, với $a_n = \left(\frac{9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{n/2} \neq 0$. Ta có

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{1/2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

do đó chuỗi (*) có bán kính hội tụ là $R = 2$, khoảng hội tụ là $-2 < X < 2$.

Tại mút $X = 2$, có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4.9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{n/2}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4.9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{n/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-76}{36n+40}\right)^n = e^{-\frac{19}{9}} \neq 0,$$

chuỗi phân kỳ.

Tại mút $X = -2$, có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4.9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{n/2}$ là chuỗi phân kỳ do

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{4.9(n-1)}{4(9n+10)}\right)^{n/2}\right| = e^{-\frac{19}{9}} \neq 0.$$

Như vậy miền hội tụ của chuỗi (*) là $-2 < X < 2$, do đó miền hội tụ của chuỗi đã cho là $-2 < x + 4 < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2$.

Bài 34. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2 - x + 1\right)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Giải: Đặt $X = x^2 - x + 1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{\sqrt{n+1}}$ (*). Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa (*), ta có $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ và

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = 1$$

do đó chuỗi (*) có bán kính hội tụ là $R = 1$ và khoảng hội tụ là $-1 < X < 1$.

Tại mút $X = 1$, ta được chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ phân kỳ (vì $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ phân kỳ do $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Tại mút $X = -1$, có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ là chuỗi đan dấu, hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Như vậy miền hội tụ của chuỗi (*) là $-1 \le X < 1$. Khi đó miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là

$-1 \le x^2 - x + 1 < 1$ hay $0 < x < 1$.

Bài 35. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^2} \left(\frac{4x-3}{x}\right)^n$.

Giải: Đặt $u_n(x) = \frac{n^3}{(n^2+1)^2} \left(\frac{4x-3}{x}\right)^n$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3}{((n+1)^2+1)^2} \left(\frac{4x-3}{x}\right)^{n+1} : \frac{n^3}{(n^2+1)^2} \left(\frac{4x-3}{x}\right)^n \right| = \left|\frac{4x-3}{x}\right|.$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi

$$\left|\frac{4x-3}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow |4x-3| < |x| \Leftrightarrow 15x^2 - 24x + 9 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} < x < 1.$$

Tại $x = 1$, ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^2}$, $\frac{n^3}{(n^2+1)^2} \sim \frac{1}{n}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, do đó $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^2}$ phân kỳ.

Tại $x=\dfrac{3}{5}$, ta có chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n^3}{\left(n^2+1\right)^2}$. chuỗi này thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz, chuỗi hội tụ (là chuỗi bán hội tụ).

Vậy miền hội tụ là $\dfrac{3}{5}\le x<1$.

Bài 36. Cho $a>0$, $b>0$, tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^n+b^n}$.

Giải: Đặt $c_n=\dfrac{1}{a^n+b^n}$ ta được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$.

Nếu $0<a<b$, ta có

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{n+1}+b^{n+1}}:\frac{1}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1}{a\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+b}=\frac{1}{b},$$

do đó chuỗi luỹ thừa có bán kính hội tụ là $R=b$, khoảng hội tụ là $(-b,b)$.

Tại mút $x=-b$, có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{b^n}{a^n+b^n}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{b^n}{a^n+b^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1}=1\neq 0,$$

theo điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, chuỗi trên phân kỳ.

Tại mút $x=b$, có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b^n}{a^n+b^n}$. Tương tự như trên, chuỗi phân kỳ.

Vậy: +Trong trường hợp $0<a<b$ chuỗi luỹ thừa có miền hội tụ là $(-b,b)$.

+ Nếu $0<b\le a$, lập luận tương tự trường hợp trên chuỗi có miền hội tụ là $(-a,a)$.

Bài 37. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n!}$ (1)

1) Tìm miền hội tụ D của chuỗi hàm số (1).

2) Gọi $S(x)$ là tổng của chuỗi hàm (1), chứng minh

$$S''(x) - 2S'(x) + 4S(x) = 0,\ \forall x \in \mathbf{D}.$$

Giải: 1) Đặt $u_n(x) = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n!}$, ta có

$$|u_n(x)| = \left|2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n!}\right| \le \frac{2^n}{n!}|x|^n = v_n(x),\quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Xét chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$, vì $\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} = 0 < 1$, chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$ hội tụ với $\forall x \in \mathbf{R}$. Do đó chuỗi hàm số đã cho hội tụ với $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Đặt $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $a_n = \frac{2^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{3}$, theo tính chất của chuỗi lũy thừa ta có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n,$$

$$\Rightarrow S''(x) - S'(x) + 4S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n!}\left[\cos\frac{n+2}{3}\pi - \cos\frac{n+1}{3}\pi + \cos\frac{n}{3}\pi\right]x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n!}\left[2\cos\frac{n+1}{3}\pi.\cos\frac{1}{3}\pi - \cos\frac{n+1}{3}\pi\right]x^n = 0.$$

Bài 38. Cho chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

1) Tìm miền hội tụ của chuỗi.

2) Tính tổng của chuỗi trong khoảng hội tụ của nó.

Giải: 1) Đặt $X = x-1$, có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{X^{n+1}}{n(n+1)}$ (*), với $a_n = (-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$.

Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

do đó chuỗi (*) có bán kính hội tụ là $R = 1$ và khoảng hội tụ là $-1 < X < 1$.

Tại mút $X = -1$, ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (**) ta có $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$, mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ (vì $\alpha = 2 > 1$), do đó $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ.

Tại mút $X = 1$, ta được chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(n+1)}$ (***) có chuỗi trị tuyệt đối trùng với chuỗi (**) đã xét ở trên. Do đó chuỗi (***) hội tụ.

Như vậy miền hội tụ của chuỗi (*) là $-1 \le X \le 1$, do đó miền hội tụ của chuỗi đã cho là $-1 \le x-1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$.

2) Đặt $t = x-1 \Rightarrow t \in (-1;1)$, $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}$. Theo tính chất của chuỗi lũy thừa ta có thể lấy đạo hàm cũng như tích phân từng số hạng của chuỗi trong khoảng (-1;1):

$$S'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^t t^{n-1}dt =$$

$$= \int_0^t\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{n-1}\right)dt = \int_0^t\frac{dt}{1+t} = \ln(1+t).$$

Tích phân 2 vế đẳng thức này trên [0,t]; ta được

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \ln(1+t)dt = (t+1)\ln(1+t) - t.$$

Khi $t = 0$ thì $S(0) = 0$.

Vậy $S(x) = x\ln x - x + 1$ với $x \in (0;2)$.

Bài 39. Cho chuỗi hàm số

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}.$$

1) Tìm miền hội tụ.

2) Tính tổng của chuỗi hàm trong khoảng hội tụ của nó.

Giải: 1) Đặt $u_n(x)=(-1)^n\frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{(x-1)^{3n+5}}{3n+3}:(-1)^n\frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+1}{3n+3}\right|\left|(x-1)^3\right|=\left|(x-1)^3\right|.$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi $\left|(x-1)^3\right|<1\Leftrightarrow 0<x<2$.

Tại $x=0$ ta có chuỗi $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ ta có $\frac{1}{3n+1}\sim\frac{1}{3n}$ khi $n\to\infty$, mà chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ, do đó $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ phân kỳ.

Tại $x=2$ ta có chuỗi đan dấu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ chuỗi này thoả mãn các điều kiện của tiêu chuẩn Leibnitz, chuỗi hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(0;2]$.

2) Tính tổng $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}$,

$$S(x)=(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{(3n+1)}}{3n+1}=(x-1)G(x),$$

trong đó $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{(3n+1)}}{3n+1}$ (*) là chuỗi lũy thừa, nên

$$G'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{3n}=\frac{1}{1+(x-1)^3}\ ,\ (0<x<2).$$

$$\Rightarrow G(x)=\int\frac{dx}{1+(x-1)^3}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C\ ,(**)$$

từ (*) và (**) ta có $G(1)=0=-\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}+C\Rightarrow C=\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

Vậy $S(x)=(x-1)\left[\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-3}{\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]$, với $0<x<2$.

Bài 40. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{2n}(2n-1)!}.$$

*Giải:*1) Đặt $u_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{3^{2n}(2n-1)!}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{9.2n.(2n+1)}\right|x^2=0.x^2=0<1,\forall x\in\mathbf{R}$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm đã cho là khoảng $(-\infty,+\infty)$.

2) Tính tổng

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{2n}(2n-1)!}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left[\frac{\left(\frac{x}{3}\right)}{1!}-\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^7}{7!}+\dots\right]=$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right) \qquad \text{(theo công thức (17) mục 1.3.5).}$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{2n}(2n-1)!} = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ với $\forall x \in \mathrm{R}$.

Bài 41. Tính tổng của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}.$$

Giải: Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 x^{4n-4}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(-x^4\right)^{n-1}dx = \int_0^1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^4\right)^n\right]dx =$$

$$= \int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^1\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}dx\right] = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^1\frac{d\left(-\frac{1}{x}-x\right)}{\left(-\frac{1}{x}-x\right)^2-2} + \int_\varepsilon^1\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{-x-\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{-x-\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right]\Bigg|_\varepsilon^1 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-x^2-\sqrt{2}x-1}{-x^2+\sqrt{2}x-1}\right| + \arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right]\Bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right].$$

Bài 42. Viết khai triển Maclaurin cho hàm

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}.$$

Giải: Ta có

$$f(x)=\frac{1-x}{(1+x)(1-x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}=\frac{1-x}{1-x^{16}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{1-x}=\frac{1}{1-x^{16}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{16n},\ |x|<1.$$

(Theo công thức (12) mục 1.3.5).

Vậy $f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{16n}$ hoặc $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^{16n}$ với $-1<x<1$.

Bài 43. Khai triển hàm $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ thành chuỗi Maclaurin.

Giải: Ta có

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$$

với $-1<x<1$ (sử dụng công thức (12) mục 1.3.5).

Bài 44. Khai triển hàm $f(x)=xe^{-x}$ thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm $x_0=1$.

Giải: Đặt $X=x-1$, khi đó

$$f(x)=(1+X)e^{-(X+1)}=e^{-1}[e^{-X}+Xe^{-X}]=e^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nX^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nX^{n+1}}{n!}\right)=$$

$$=e^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nX^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nX^{n+1}}{n!}\right),$$

(sử dụng công thức (8) mục 1.3.5).

Biến đổi chỉ số $n+1=m$, ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}X^{n+1}}{n!}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m}X^{m}}{(m-1)!}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}X^{n}}{(n-1)!}.$$

Khi đó

$$f(x)=e^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}X^{n}}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}X^{n}}{(n-1)!}\right)=e^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}(1-n)X^{n}\right)=$$

$$=e^{-1}\left(1-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}(1-n)X^{n}\right)=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}(1-n)(x-1)^{n}.$$

Vậy $f(x)=xe^{-x}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}(1-n)(x-1)^{n}$.

Bài 45. Khai triển hàm $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ theo chuỗi lũy thừa của $\frac{x}{1+x}$.

Giải: Đặt $t=\frac{x}{1+x}\Rightarrow f(x)=\varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t}}$. Sử dụng công thức (10) mục 1.3.5, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}}=(1-t)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}t^{2}+\cdots+\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}t^{n-1}+\cdots$$

khi đó

$$\varphi(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t}}=t+\frac{1}{2}t^{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}t^{3}+\cdots+\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}t^{n}+\cdots$$

Vậy

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{3}+\cdots+\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n}+\cdots$$

Bài 46. Khai triển thành chuỗi Taylor hàm số $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ trong lân cận $x_0=2$.

Giải: Ta có $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ có đạo hàm mọi cấp bị chặn trong lân cận

$x_0 = 2$, $f(2) = 1$ và

$$f'(x) = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(2) = 0,$$

$$f''(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2.\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f''(2) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

$$f'''(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \sin\left[\frac{\pi}{4}x + \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow f'''(2) = 0,$$

....

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \sin\left[\frac{\pi}{4}x + n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow f^{(n)}(2) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \sin(n+1)\frac{\pi}{2},$$

....

mà $\sin(n+1)\dfrac{\pi}{2} = \begin{cases} 1 & n = 4k \\ 0 & n = 4k+1 \\ -1 & n = 4k+2 \\ 0 & n = 4k+3 \end{cases}$, $\quad k = 0,1,2,....$

Vậy ta có chuỗi

$$f(x) = \sin\frac{\pi x}{4} = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{(x-2)^4}{4!} - \cdots$$

$$+ (-1)^k \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} \frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

Chú ý. Ta cũng có thể sử dụng khai triển của $\sin x$, $\cos x$. Đặt $x-2=X$, ta được

$$f(x) = \sin\frac{\pi x}{4} = \sin\frac{\pi(X+2)}{4} = \sin\left(\frac{\pi X}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

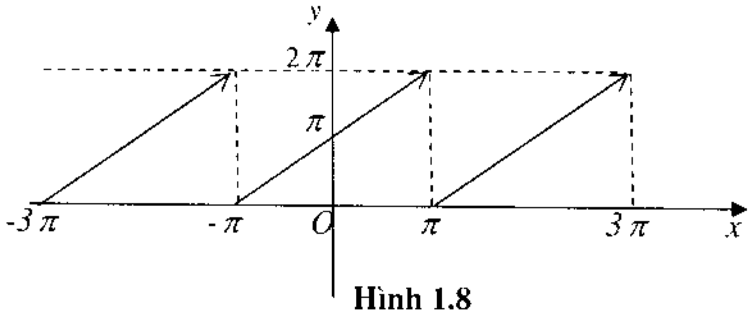
$$= \cos\frac{\pi}{4}X = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}X\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{4}X\right)^4 - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{4}X\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!4^{2n}}(x-2)^{2n}.$$

Bài 47. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số

$$f(x)=\pi+x,\quad -\pi\le x\le\pi .$$

Giải: Xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π sao cho $g(x)=f(x)=\pi+x,\quad -\pi\le x\le\pi$ (Hình 1.8).



Hình 1.8

Hàm số đã cho thỏa mãn các điều kiện của định lý Dirichlet. Ta có :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=2\pi+0=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\cos nxdx+0=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,\ n=1,2,3,...$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$=0+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=-\frac{2x}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi+\frac{2}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ \ n=1,2,3,...$$

Vậy

$$f(x)=\pi+x=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \text{ với } -\pi<x<\pi\ ;\ f(k\pi)=\pi\ ,\ k=2n+1.$$

Bài 48. Viết khai triển Fourier của hàm $f(x)=|\sin x|$ trên $[-\pi,\pi]$.

Giải: Hàm $f(x)$ là hàm số chẵn. Hàm số $f(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet. (Hình 1.9)

Ta có $b_n=0$ $(n=1,2,..)$ và

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=-\frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi},$$

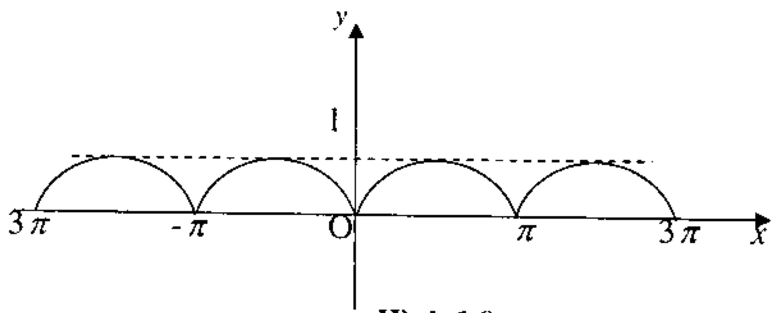
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)x+\sin(1-n)x]dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x+\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right]\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{1+n}\cos n\pi-\frac{1}{1-n}\cos n\pi-\frac{1}{1+n}-\frac{1}{1-n}\right]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(1-n^2)}, & khi\, n=2k\\ 0, & khi\, n=2k+1\end{cases}$$

trong đó $k = 1, 2, ...$



Hình 1.9

Khi đó với mọi $x\in[-\pi;\pi]$, ta có

$$|\sin x|=\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{-3}+\frac{\cos 4x}{-15}+\cdots+\frac{\cos 2kx}{(1-4k^2)}+\cdots\right].$$

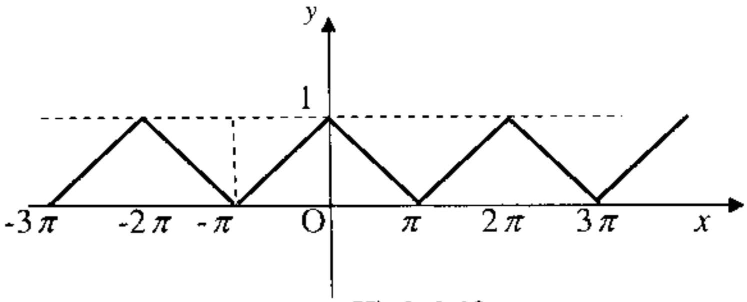
..

Bài 49. Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin của hàm số sau:

$$f(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le \pi$$

Giải: Do muốn khai triển thành chuỗi của các hàm cosin, ta thác triển hàm số đã cho thành $F(x)$ là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π (Hình 1.10) và

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le \pi, \\ 1 + x, & -\pi \le x \le 0. \end{cases}$$



Hình 1.10

Do $F(x)$ là hàm số chẵn, nên $b_n = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ Ta có

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - x)\,dx = 2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[(1 - x)\sin nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots$$

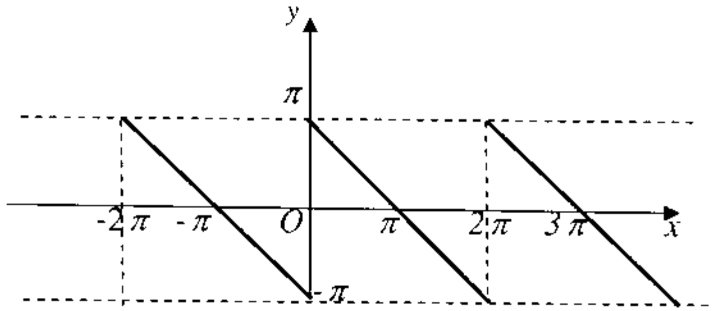
Vậy $f(x) = 1 - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k - 1)x}{(2k - 1)^2}$ với $0 \le x \le \pi$.

Bài 50. Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số sin của hàm số sau

$$f(x) = \pi - x, \quad 0 < x < \pi.$$

Giải: Do muốn khai triển thành chuỗi của các hàm sin, ta thác triển hàm số đã cho thành $F(x)$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π (Hình 1.11) và

$$F(x) = f(x) = \pi - x,\ 0 < x < \pi .$$



Hình 1.11

Do $F(x)$ là hàm số lẻ, nên $a_n = 0,\ n = 0,1,2,3,...$ Ta có

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\, dx = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left((\pi - x)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\pi + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{n},\ \ n = 1,2,3,...$$

Vậy $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad (0 < x < \pi)$.

Bài 51. Khai triển hàm cho trên $(-2;2)$ có chu kỳ $2l = 4$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x \le 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \end{cases}$$

thành chuỗi Fourier.

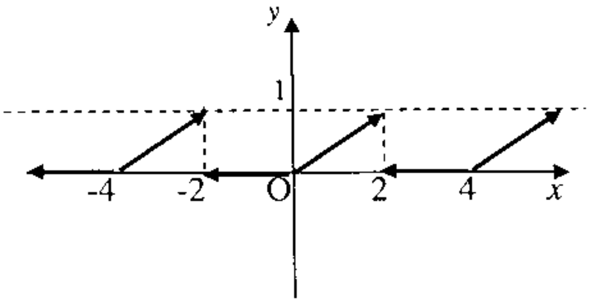
Giải: Đồ thị hàm $F(x)$ được mô tả trong Hình 1.12, là thác triển của hàm $f(x)$.

Hàm số $F(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Dirichlet. Ta có

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}F(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}0dx + \int_0^2\frac{x}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \begin{cases} \dfrac{-2}{\pi^2 n^2}, & khi\, n = 2k+1, \\ 0, & khi\, n = 2k. \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} F(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$



Hình 1.12

Vậy tại mỗi điểm liên tục của hàm $F(x)$ ta có

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right].$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Tìm tổng riêng và tổng của các chuỗi số:

1. 1. 1) $\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots;$

2) $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots;$

3) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots.$

1.2. 1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+\cdots;$

2) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)+\cdots;$

3) $\left(3+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{2.3^{n-1}}\right)+\cdots.$

1. 3. 1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1};$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}.$

1. 4. Dùng điều kiện ắt có của chuỗi hội tụ, chứng minh các chuỗi số sau phân kỳ

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n(2n+1)};$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+3};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{2n};$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2+1}{n^2}.$

1. 5. Áp dụng định lý so sánh xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+5^n+n};$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{3+(-1)^n}{n^2};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\int_0^n\sqrt{1+x^3}\,dx}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{3n^2+2n+1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}-1)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1.6. Tìm những giá trị của α để chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ, với

1) $a_n=\left(\text{arctg}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}$; 2) $a_n=n^{\alpha}(\ln(n^2+1)-2\ln n)$.

1.7. Áp dụng tiêu chuẩn D'Alembert xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.5...(4n-3)}{2.6...(4n-2)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{3^n(3n+4)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{4^{3n}(n!)^3}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$, $a>0, a\neq e$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.6....(3n)!}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}$.

1. 8. Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy, xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^3+3n+1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{(\ln(n+1))^{n/2}}$, $\alpha>0$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{n/2}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n/3}$.

1.9. Áp dụng tiêu chuẩn tích phân xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln n)}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$.

1.10. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{3n^2+4}{2n^2+3}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2,6)^n n!}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^{2n}n!}{(2n)!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\sqrt{n+2}}{n\ln^2(n+1)}$.

1.11. Chứng minh rằng các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n!)^2}$ có số hạng tổng quát $a_n \to 0$ khi $n\to\infty$

Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

1.12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}dx$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/n}\frac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{\cos^2 x}{x}dx$.

1.13. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln n}{\sqrt{n}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[5]{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n.\cos\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}}$.

1.14. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\frac{n+1}{n}$;

3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1-\sqrt{n}(-1)^n}{n-\sqrt{n}(-1)^n}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}+(-1)^n}$; .

1.15. Xét sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của các chuỗi số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2 2^n}{3^n+1}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n.\cos\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^6 n}{\sqrt{n}}\cos\frac{\pi n}{6}$.

1.16. Chứng minh chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập E, nếu

1) $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n+\sqrt{x}}}$, $E = [0;+\infty)$;

2) $u_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{n} - \dfrac{x^n}{n+1}$, $E = [-1;1]$;

3) $u_n(x) = \dfrac{x}{(n+x)(1+n+x)}$, $E = [0;+\infty)$;

4) $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \dfrac{\sin(n+1)x}{\sqrt{n+1}}$, $E = (-\infty;+\infty)$.

Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

1.17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (5-x^2)^n$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-nx^2}$.

1.18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)^n$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n\sin x}$

1.19. Tìm khoảng hội tụ của các chuỗi hàm số sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x+1)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\dfrac{1}{3^n}\right)(x-3)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}2n+3}{3n^2+4} x^{2n+1}$.

Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

1.20. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n.n!}{n^n} x^{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n - n^4}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{(x-1)^n}$;

4) $\sum_{n=2}^{\infty}(-3)^n.\frac{(x-1)^{2n+1}}{n+1}$.

1.21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln^n x}{3^n(n+1)}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-nx}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cos^n x$.

1.22. Cho $a\ge 0$, tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+a^n}$.

1.23. Tìm miền hội tụ và tính tổng của chuỗi hàm trong khoảng hội tụ của nó

1) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)x^n$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{3n+2}}{3n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}$;

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{3^{2n}(2n+1)}$;

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n+3}}{3^{2n}}$.

1.24. Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{\infty}2^n\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n!}$. (1)

1) Tìm miền hội tụ D của chuỗi hàm số (1).

2) Gọi $S(x)$ là tổng của chuỗi hàm số (1), chứng minh

$$S''(x)-2S'(x)+4S(x)=0, \forall x\in D.$$

1.25. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n$ trên đoạn $[-1,1]$.

Khai triển thành chuỗi Maclaurin các hàm số sau:

1.26. 1) $(1+x)e^{-x}$;

2) $(1-x)\ln(1-x)$;

3) $(1+x^2)\arctan x$;

4) $\frac{3x+4}{x^2+x-6}$.

1.27. 1) $\ln(12 - x - x^2)$; 2) $\cos^2 x$;

3) $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$; 4) $\int\limits_0^x \frac{\arctan t}{t}dt$.

1.28. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm x_0

1) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, $x_0 = 1$;

2) $(x+1)\cos^2 x$, $x_0 = -1$;

3) $\ln(x^2 + 2x + 2)$, $x_0 = -1$;

4) $\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 2}$, $x_0 = 1$.

Tìm tổng của các chuỗi số :

1.29. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

1.30. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+3)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(3n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3n+1)}$.

1.31. Khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Fourier, hãy tính tổng của chuỗi hàm tại điểm x_0:

1) $f(x) = x$, $-\pi \le x \le \pi$, $x_0 = \pi$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & -\pi \le x < 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$ $x_0 = -\pi$;

4) $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi < x \le 0,\\ 3x, & 0 < x \le \pi;\end{cases}$ $x_0 = \pi$.

1.32. Khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Fourier :

1) $f(x)=\begin{cases}1, & 0 < x < l,\\ \dfrac{1}{2}, & x = l,\\ 1, & l < x < 2l;\end{cases}$ trên khoảng $(0;2l)$;

2) $f(x)=|x|$ trên khoảng $[-1;1]$;

3) $f(x)=\begin{cases}a, & -\pi/2 < x < \pi/2,\\ b, & \pi/2 \le x < 3\pi/2;\end{cases}$ trên khoảng $(-\pi/2;3\pi/2)$;

4) $f(x)=\begin{cases}x, & 0 \le x \le 1,\\ 2-x, & 1 < x \le 2;\end{cases}$ trên khoảng $[0;2]$.

1.33. Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, xác định trên **R**, thỏa mãn

$$f(x)=\cos\frac{x}{2},\ \forall x \in [-\pi,\pi].$$

1) Khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

2) Tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$.

1.34. Khai triển hàm số $f(x)=x,\ 0 \le x \le \pi$ thành chuỗi Fourier theo cosin.

1.35. Khai triển hàm số $f(x)=\cos 2x, 0 \le x \le \pi$ thành chuỗi Fourier theo sin.

1.36. Khai triển thành chuỗi Fourier trên $(0;\pi)$ theo cosin hàm số sau

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2} \le x < \pi.\end{cases}$$

1.37. Khai triển thành chuỗi Fourier trên $(0;\pi)$ theo sin hàm số sau

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$$

1.38. Khai triển hàm số $f(x)=x^2$ thành chuỗi Fourier

1) Trên đoạn $[-\pi;\pi]$ theo cosin.

2) Trên khoảng $(0;\pi)$ theo sin.

3) Trên khoảng $(0;2\pi)$ theo cosin và sin.

Từ các khai triển này tính tổng các chuỗi số sau

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\ \ S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2};\ S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

1.39. Khai triển hàm số $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, $0\le x\le 1$ thành chuỗi Fourier

1) theo cosin;

2) theo sin.

ĐÁP SỐ

1.1. 1) $S_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}$, $S=\dfrac{1}{3}$; 2) $S_n=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$, $S=\dfrac{1}{3}$;

3) $S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$, $S=\dfrac{1}{4}$.

1. 2. 1) $S_n=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$, $S=\dfrac{3}{4}$

2) $S_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2.3^n}-\dfrac{1}{4.5^n}$, $S=\dfrac{3}{4}$

3) $S_n=\dfrac{51}{8}-\dfrac{3}{2^{n-1}}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{8.3^{n-1}}$, $S=\dfrac{51}{8}$

1.3. 1) $S_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$, $S=\dfrac{3}{4}$;

2) $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right)$, $S = \frac{1}{3}$;

3) $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$;

4) $S_n = \frac{1}{2}\left(\sin 2 - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $S = \frac{1}{2}\sin 2$.

1.5. 1) Hội tụ ; 2) Hội tụ; 3) Hội tụ;
4) Phân kỳ; 5) Hội tụ; 6) Phân kỳ.

1.6. 1) $\alpha > \frac{1}{2}$; 2) $\alpha < 1$.

1.7. 1) Hội tụ; 2) Không kết luận; 3) Phân kỳ; 4) Hội tụ;
5) Hội tụ khi $a < e$; Phân kỳ khi $a > e$; 6) Hội tụ.

1.8. 1) Hội tụ; 2) Hội tụ; 3) Không kết luận;
4) Hội tụ với bất kỳ α; 5) Hội tụ; 6) Hội tụ.

1.9. 1) Phân kỳ; 2) Phân kỳ.

1.10. 1) Phân kỳ; 2) Hội tụ; 3) Hội tụ;
4) Phân kỳ; 5) Phân kỳ; 6) Hội tụ.

1.12. 1) Hội tụ; 2) Hội tụ; 3) Phân kỳ

1.13. 1) Hội tụ; 2) Bán hội tụ; 3) Phân kỳ;
4) Hội tụ; 5) Hội tụ; 6) Hội tụ.

1.14. 1) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \to e^{-1} \neq (n \to \infty)$. Chuỗi phân kỳ.

2) $a_n = \ln\frac{n+1}{n} > 0 \quad \forall n \geq 1$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0$

$f(x) = \ln\frac{x+1}{x} \to f'(x) < 0\ \forall x > 1 \Rightarrow \{a_n\}$ đơn điệu giảm. Chuỗi hội tụ.

3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n-1)} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n-1)} \text{ hội tụ tuyệt đối do } \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)} \sim \frac{1}{n^{3/2}},\ n\to\infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n-1} \text{ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}u_n \text{ hội tụ.}$$

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}u_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n.\sqrt[3]{n}-1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n.\sqrt[3]{n}-1}$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n.\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt[3]{n}-1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz ,

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-1}$ hội tụ do $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-1} \sim \frac{1}{n\sqrt[3]{n}},\ n\to\infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}u_n$ hội tụ.

1.15. 1) Bán hội tụ; 2) Hội tụ tuyệt đối; 3) Bán hội tụ; 4) Bán hội tụ.

1.17. 1) Hội tụ tuyệt đối khi $x > 0$; 2) Hội tụ tuyệt đối khi $1/e \le x \le e$;
3) Hội tụ tuyệt đối khi $2 < |x| < \sqrt{6}$; 4) Hội tụ tuyệt đối khi $x \ne 0$.

1.18. 1) Bán hội tụ khi $x \ne k2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; 2) Bán hội tụ khi $x\in\mathbf{R}$;
3) Hội tụ tuyệt đối khi $|x| < 3$; 4) Hội tụ tuyệt đối trong khoảng $2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, bán hội tụ khi $x = k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

1.19. 1) $-2 < x < 0$; 2) $0 < x < 6$; 3) $-\dfrac{7}{2} < x < \dfrac{1}{2}$; 4) $-1 < x < 1$.

1.20. 1) $-\sqrt{\dfrac{e}{2}} < x < \sqrt{\dfrac{e}{2}}$; 2) $-1 < x < 3$;

3) $(-\infty,1-e)\cup(e+1,+\infty)$; 4) $\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{3}},1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

1.21. 1) $e^{-3} < x \le e^3$; 2) $x > 0$; 3) $x > -1$; 4) $\dfrac{\pi}{3}+k\pi < x < \dfrac{2\pi}{3}+k\pi$.

1.22. + Trường hợp $0 \le a \le 1$: miền miền hội tụ là $[-1,1]$;
+ Trường hợp $a > 1$: miền miền hội tụ là $(-1,1)$;

$$x = \pm a \Rightarrow |U_n| = \frac{a^n}{n+a^n} \to 1 \ne 0.$$

1.23. 1) $(-1;1)$, $S(x)=\dfrac{x(3-x)}{(1-x)^3}$;

2) $(-1;1)$, $S(x)=\dfrac{2x}{(1+x)^3}$;

3) $(2;0)$, $S(x)=(x+1)\left[\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]$;

4) $(-1;1)$ $S(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$;

5) $-3<x<3$, $S(x)=3x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{X^{2n+1}}{2n+1}=3x^2\left(-X+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+X}{1-X}\right|\right)$, $X=\dfrac{x}{3}$, $|X|<1$;

6) $S(x)=x^3F\left(\dfrac{x}{3}\right)=9x^3.\dfrac{9+x^2}{\left(9-x^2\right)^2}$.

1.24. 1) Miền hội tụ $\mathbf{R}$; 2) $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ với $a_n=\dfrac{2^n}{n!}\sin\dfrac{n\pi}{3}$.

1.25. Với $\forall x\in[-1,1]\to\left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|<1\Rightarrow|u_n(x)|\le\dfrac{n+1}{3^n}=v_n$ $\forall n\ge 1$; $\forall x\in[-1,1]$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}$ hội tụ. Theo định lý Weierstrass chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ hội tụ đều trên $[-1,1]$.

1.26. 1) $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$, $-\infty<x<\infty$;

2) $-x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2(n+1)}}{n4^n}$, $|x|<1$;

3) $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2(n+1)}$, $|x|<1$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}((-1)^n3^{-(n+1)}-2^{-n})x^n$, $|x|<1$.

1.27. 1) $\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{-n}-3^{-n}}{n}x^n,\quad |x|<3$;

2) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ |x|<+\infty$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1},\ |x|<+\infty$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1},\ |x|<1$.

1.28. 1) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-(n+1)})(x-1)^n,\ |x|<1$;

2) $\frac{1+\cos 2}{2}(x+1)+\cos 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}(x+1)^{2n+1}+\sin 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+2},\quad |x|<+\infty$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^{2n},\quad |x|<1$;

4) $1+(x-1)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{2n},\quad |x|<1$.

1.29. 1) $2e$; 2) $3e^2$; 3) $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$; 4) $\frac{3}{2}$;

1.30. 1) $2\ln 2$; 2) $\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\ln 2$; 3) $3-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-2\ln 2$; 4) $3-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{3}{2}\ln 2$.

1.31. 1) $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},\ |x|<\pi,\ 0$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\quad 0<|x|<\pi,\ \frac{1}{2}$;

3) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\sin nx}{n}\right),\ |x|<\pi,\ \frac{\pi}{2}$;

4) $f(x)=\frac{5\pi}{4}-5\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-(-1)^n)\frac{\cos nx}{\pi n^2}+(-1)^n\frac{\cos nx}{n}\right),\ |x|<\pi,\ \frac{5\pi}{2}$.

1.32. 1) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{2n-1}{l}\pi x, |x|<\pi$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$;

3) $f(x)=\frac{a+b}{2}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$;

4) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

1.33. 1) $f(x)=\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{4}{\pi}.\frac{1}{1-4n^2}\cos nx$.

2) Thay $x=0$ có $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{1-4n^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

1.34. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

1.35. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$.

1.36. $f(x)=\frac{\pi}{8}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{n\pi}{4}\cos nx$..

1.37. $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$.

1.38. 1) $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$;

2) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2}\right)\sin nx$;

3) $f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)$; $S_1=\frac{\pi^2}{6}$; $S_2=\frac{\pi^2}{12}$; $S_3=\frac{\pi^2}{8}$.

1.39. 1) $f(x)=\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\pi x$;

2) $f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\pi^2(2n-1)^2}\right)\left(\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}-\frac{\sin 2n\pi x}{2n}\right)$.

CHƯƠNG 2
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chương này trình bày một số phương pháp tìm nghiệm của phương trình vi phân và hệ phương trình thường gặp trong kỹ thuật. Để học tốt chương này người học cần đọc lại và nắm vững các công thức tính đạo hàm, tích phân của hàm số một biến số và nhiều biến số đã được học trong giáo trình Toán học giải tích (tập1, tập 2) [2].

2.1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Nhiều vấn đề được đặt ra trong khoa học kỹ thuật cần thiết phải tìm mối liên hệ giữa hai đại lượng x và y, nhưng thường không thể có được ngay mối liên hệ giữa chúng mà liên hệ đó còn thông qua đạo hàm các cấp của đại lượng này với đại lượng khác. Mối liên hệ như vậy được gọi là *phương trình vi phân.*

Trong giáo trình này ta chỉ đề cập đến những phương trình phụ thuộc vào một biến số độc lập. Còn phương trình phụ thuộc vào nhiều biến số độc lập (phương trình đạo hàm riêng) sẽ xét trong giáo trình khác.

2.1.1. Bài toán dẫn đến phương trình vi phân

Xét một số bài toán dẫn đến phương trình vi phân.

Ví dụ 1. Tìm phương trình chuyển động của một vật khối lượng m rơi tự do với lực cản của không khí tỉ lệ với đạo hàm của vận tốc rơi.

Giải: Gọi $v(t)$ là vận tốc rơi của vật. Khi đó có hai lực tác động lên vật rơi là trọng lực $F_1 = mg$ (cùng chiều với chuyển động của vật) và lực cản của không khí $F_2 = -\alpha v(t)$ (ngược chiều với chuyển động), trong đó g là gia tốc trọng trường, $\alpha > 0$ là hệ số cản. Theo định luật của Newton, ta có

$$m\frac{dv}{dt} = F,\ F = F_1 + F_2 = mg - \alpha v \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v,$$

đây là phương trình mà ngoài hàm cần tìm $v(t)$, nó còn chứa cả đạo hàm vận tốc $v'(t)$. Nó là phương trình vi phân cấp một.

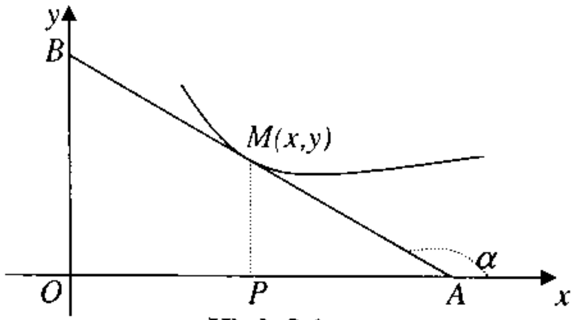
Ví dụ 2. Một thanh kim loại được nung nóng đến 100^0C đặt trong môi trường luôn có nhiệt độ không đổi 20^0C. Tìm quy luật thay đổi nhiệt độ của kim loại.

Giải: Gọi $T(t)$ là nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm t. Theo định luật Newton về sự giảm nhiệt của vật thì tốc độ giảm nhiệt $\frac{dT}{dt}$ tỷ lệ với hiệu nhiệt độ của vật thể và nhiệt độ môi trường tại thời điểm đó $\big(T(t)-20\big)$. Vậy

$$\frac{dT}{dt}=-k\big(T(t)-20\big),\ \ k>0,$$

là phương trình vi phân cấp một với ẩn hàm $T(t)$.

Ví dụ 3. Tìm phương trình của một đường cong đi qua điểm $(2;3)$ và có tính chất sau: mọi đoạn thẳng của tiếp tuyến với đường cong nằm giữa hai trục tọa độ đều bị tiếp điểm chia thành hai phần bằng nhau (Hình 2.1).



Hình 2.1

Giải: Giả sử $M(x,y)$ là điểm tùy ý trên đường cong phải tìm. Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong là y'. Mặt khác, hệ số góc đó lại bằng $\tan\alpha=-\frac{y}{PA}$. Nhưng khi $M(x,y)$ là điểm giữa của đoạn *AB* thì *P* là điểm giữa của đoạn *OA*, do đó $OP=PA=x$. Vậy

$$\tan\alpha=-\frac{y}{x} \text{ hay } y'=-\frac{y}{x}. \qquad (1)$$

Đẳng thức (1) cho ta mối liên hệ giữa biến số độc lập x, hàm cần tìm y và y' nghĩa là ta có phương trình vi phân.

Với phương trình này ta dễ dàng kiểm tra được rằng hàm số $y = \frac{C}{x}$ (C là hằng số bất kỳ) thỏa mãn phương trình (1).

Do muốn tìm đường cong đi qua điểm $(2;3)$, ta buộc $y = \frac{C}{x}$ phải đi qua điểm đó. Từ đó suy ra $C = 6$. Vậy đường cong cần tìm có phương trình là $y = \frac{6}{x}$.

Từ các ví dụ trên ta có các khái niệm chung về phương trình vi phân, nghiệm, nghiệm riêng,...

2.1.2. Định nghĩa

Phương trình vi phân là phương trình (đẳng thức) liên hệ giữa biến độc lập x, hàm cần tìm y và các đạo hàm $y', y'', ..., y^{(n)}$ của nó. *Cấp* của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình.

Như vậy phương trình vi phân cấp n có dạng

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

hoặc dưới dạng giải được theo đạo hàm $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Các phương trình trong các ví dụ 1,2,3, mục 2.1.1 là phương trình vi phân cấp một.

Phương trình $y'' - x^2 y = 6e^x$ phương trình vi phân cấp hai (vì có y'').

Phương trình $y''' = 2y'' - 3y' + x$ là phương trình vi phân cấp ba (vì có y'''),...

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số $y = \varphi(x)$ mà khi thay vào phương trình đã cho ta được đồng nhất thức.

Đồ thị của hàm số $y = \varphi(x)$ được gọi là *đường cong tích phân.*

Chẳng hạn trong ví dụ 3, hàm số $y = \frac{C}{x}$ (C - const) đều là nghiệm của phương trình (1). Nhưng chỉ có một đường cong đi qua điểm $(2;3)$.

2.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

2.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp một

Phương trình vi phân cấp một tổng quát có dạng

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

trong đó $y' = \dfrac{dy}{dx}$, F là hàm số của ba biến số x, y, y' (y là hàm số cần tìm).

Nếu phương trình (1) giải được đối với y', thì phương trình vi phân cấp một có dạng

$$y' = f(x, y). \qquad (2)$$

trong đó f là hàm số của hai biến số x và y.

Bài toán Cauchy: Tìm $y = y(x)$ là nghiệm của phương trình (1) hoặc (2) thoả mãn điều kiện

$$y(x_0) = y_0, \qquad (3)$$

tức là, tìm đường cong tích phân của phương trình (1) hoặc (2) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Điều kiện (3) gọi là điều kiện ban đầu (hay sơ kiện).

Ví dụ 1. Xét bài toán Cauchy

$$y' = 2x, \quad y(1) = 2.$$

Giải: Dễ ràng thấy rằng $y = x^2 + C$ (*) là nghiệm của phương trình $y' = 2x$, với C là hằng số bất kỳ. Với $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ thay vào (*): $2 = 1^2 + C \Rightarrow C = 1$.

Vậy nghiệm của bài toán là $y = x^2 + 1$.

Bài toán Cauchy có thể có hoặc không có nghệm. Nếu bài toán Cauchy có nghiệm thì vấn đề đặt ra là có duy nhất hay không. Định lý sau cho ta biết điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy.

Định lý 2.1.1. (Tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán (2)-(3))

Nếu hàm số $f(x, y)$ liên tục trong miền $D \subset \mathbf{R}^2$, thì với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$, bài toán (2)-(3) có nghiệm $y = y(x)$ xác định trong một lân *cận của x_0. Ngoài ra, nếu đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}$ cũng liên tục trên D thì nghiệm đó là duy nhất.*

Ở đây không chứng minh (xem [1], [4], [5]).

Hàm số $y = \varphi(x, C)$, C là hằng số tuỳ ý, được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp một trên trên miền $D \subset \mathbf{R}^2$, nếu với mọi điểm $(x_0, y_0) \in D$ tồn tại duy nhất hằng số C_0 sao cho $y = \varphi(x, C_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$.

Như vậy, hàm số $y = \varphi(x, C)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

+ là nghiệm của phương trình đó,

+ phương trình $y_0 = \varphi(x_0, C)$ tồn tại duy nhất C_0.

Nghiệm bất kỳ nhận được từ nghiệm tổng quát khi cho hằng số C một giá trị cụ thể được gọi là *nghiệm riêng*. Tất nhiên nghiệm của mọi bài toán Cauchy đều là nghiệm riêng.

Nếu không tìm được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một dưới dạng tường $y = \varphi(x, C)$, mà tìm được dưới dạng hệ thức $\Phi(x, y, C) = 0$ (dạng ẩn). Hệ thức đó được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình vi phân cấp một. Với $C = C_0$ thì $\Phi(x, y, C_0) = 0$ gọi là *tích phân riêng* của phương trình vi phân.

Về mặt hình học, tích phân tổng quát (hay nghiệm tổng quát) là một họ đường cong tích phân phụ thuộc tham số C, nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Lưu ý rằng, không phải bất kỳ nghiệm nào của phương trình vi phân cũng nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho hằng số C những giá trị cụ thể. Nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát cho dù C lấy bất kỳ giá trị nào được gọi là *nghiệm kỳ dị*. (Trong giáo trình này chúng ta sẽ không nghiên cứu sâu về nghiệm kỳ dị).

Ví dụ 2. Phương trình $y' = \frac{y}{x}$ có nghiệm $y = Cx$ là nghiệm tổng quát trong miền $D = \{(x, y) \mid x \neq 0\}$ (mặt phẳng bỏ trục tung). Thật vậy, với mọi

$(x_0, y_0) \in D$, hàm số $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$ liên tục trong lân cận của điểm (x_0, y_0), cho nên bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất, nghiệm đó chính là $y = C_0 x$ với $C_0 = \dfrac{y_0}{x_0}$.

Ví dụ 3. Xét phương trình vi phân $y' = \sqrt{1-y^2}$, $|y| \le 1$. Khi $y \ne \pm 1$, ta được

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \Rightarrow \arcsin y = x + C \Rightarrow y = \sin(x+C),$$

là nghiệm tổng quát. Ngoài ra ta thấy y = 1 và y = - 1 cũng là nghiệm, nhưng chúng không được nhận từ nghiệm tổng quát, đó là các nghiệm kỳ dị.

Nói chung, không có một phương pháp tổng quát để giải phương trình vi phân cấp một. Sau đây, ta xét một số phương trình vi phân cấp một có thể giải được bằng phương pháp tích phân.

2.2.2. Phương trình vi phân biến số phân ly

Phương trình vi phân biến số phân ly là phương trình viết được dưới dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0. \qquad (1)$$

Cách giải phương trình (1): Lấy tích phân hai vế phương trình (1), ta được

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

nếu $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$, thì

$$F(x) + G(y) = C,$$

là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 1. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0.$$

Giải: Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{ydy}{1+y^2} = C_1,$$

do đó, tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=C_1 \text{ hay } \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=e^{2C_1}=C>0 .$$

Nhận xét: Phương trình dạng

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0, \tag{2}$$

có thể đưa được về dạng biến số phân ly. Thật vậy

- Nếu $g_1(y)f_2(x)\neq 0$, bằng cách chia hai vế của (2) cho $g_1(y)f_2(x)$, ta được

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0,$$

đó là phương trình vi phân với biến số phân ly.

- Nếu $g_1(y)=0$ tại b (tức $g_1(b)=0$) thì $y=b$ là nghiệm của (2) và là nghiệm kỳ dị.

- Nếu $f_2(x)=0$ tại a (tức $f_2(a)=0$) thì $x=a$ là nghiệm của (2) và là nghiệm kỳ dị.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$y'=xy(y+2).$$

Giải: Phương tình đã cho viết lại được dưới dạng $dy=xy(y+2)dx$.

Nếu $y(y+2)\neq 0$, ta có phương trình vi phân với biến số phân ly

$$\frac{dy}{y(y+2)}-xdx=0,$$

lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int\frac{dy}{y(y+2)}-\int xdx=\frac{1}{2}\ln|C|,$$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+2}\right|-x^2=\ln|C|, C\neq 0$ hay $\frac{y}{y+2}=Ce^{x^2}$, $C\neq 0$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Nếu $y(y+2)=0$, thì $y=0, y=-2$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý 1. Một số phương trình khuyết đưa được về dạng biến số phân ly

+ Dạng

$$y' = f(x), \tag{3}$$

có công thức nghiệm tổng quát

$$y = \int f(x)dx + C.$$

+ Dạng

$$y' = f(y), \tag{4}$$

công thức nghiệm được xác định như sau

Nếu $f(y) \neq 0$ thì $y' = f(y)$ được viết dưới dạng $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ hay $dx = \dfrac{dy}{f(y)}$, khi đó công thức nghiệm tổng quát là

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Nếu $f(y) = 0$ tại $y = b$ thì $y = b$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $f(y) \equiv 0$ thì $y = C$ là nghiệm của phương trình.

Chú ý 2. Phương trình

$$y' = f(ax + by + c), \tag{5}$$

có thể đưa về biến phân ly.

Nếu $b = 0$, ta có dạng (3).

Nếu $a = 0$, ta có dạng (4).

Nếu $a \neq 0, b \neq 0$, bằng cách đổi biến $z = ax + by + c$. Thay cho việc tìm hàm y, ta tìm hàm $z = z(x)$. Ta có $z' = a + by'$, thay vào (5), ta được

$$z' = bf(z) + a,$$

đó là phương trình dạng (4), đã biết cách giải.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$y' = \sin y.$$

Giải: Phương trình được viết lại dưới dạng $\dfrac{dy}{dx} = \sin y$ hay $dx = \dfrac{dy}{\sin y}$ với $\sin y \neq 0$.

Khi đó lấy tích phân hai vế biểu thức $dx = \dfrac{dy}{\sin y}$, ta được

$$x = \int \frac{dy}{\sin y} + C \Leftrightarrow x = \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| + C,$$

đây là nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $\sin y = 0$, $y = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ thì $y = k\pi$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$1 + y' = (x+y)^2.$$

Giải: Phương trình đã cho không phải là dạng biến số phân ly, nhưng nếu đặt $z = x + y$, ta có $z' = 1 + y'$, thay vào phương trình đã cho, ta được

$$z' = z^2,$$

hay

$$\frac{dz}{dx} = z^2.$$

Nếu $z \neq 0$, ta có $\dfrac{dz}{z^2} = dx$, đây là phương trình vi phân biến số phân ly.

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx + C \Leftrightarrow -\frac{1}{z} = x + C,$$

hay $-\dfrac{1}{x+y} = x + C$.

Nếu $z = 0$ thì $x + y = 0$ hay $y = -x$ là nghiệm, vì $y' = -1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có tích phân tổng quát $-\dfrac{1}{x+y} = x + C$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$y' = \cos(x - y - 1).$$

Giải: Đặt $z = x - y - 1$, ta có $z' = 1 - y'$ hay $y' = 1 - z'$, thay vào phương trình dã cho, ta được

$$1 - z' = \cos z \Leftrightarrow z' = 1 - \cos z,$$

hay

$$dz = (1 - \cos z)dx.$$

Nếu $1 - \cos z \neq 0$, ta có $\dfrac{dz}{1 - \cos z} = dx$, đây là phương trình vi phân với biến số phân ly. Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int \frac{dz}{1 - \cos z} = \int dx + C \Leftrightarrow -\cot\frac{z}{2} = x + C,$$

hay

$$z = -2\operatorname{arccot}(C + x) + k\pi \Leftrightarrow x - y - 1 = -2\operatorname{arccot}(C + x) + k\pi, (k \in \mathbf{Z}).$$

Nếu $1 - \cos z = 0$ thì $z = 2k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$ $\Leftrightarrow y = x - 1 + 2k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$ là các nghiệm.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm

$$y = x - 1 + 2k\pi,$$

$$y = x - 1 + 2\operatorname{arccot}(C + x) + k\pi, (k \in \mathbf{Z}).$$

Ví dụ 6. Xét lại ví dụ 2 của mục 2.1.1, ta đã xác lập được phương trình $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - 20)$, $k > 0$ (*) với $T(0) = 100$. Giả sử biết thêm rằng sau 20 phút, nhiệt độ kim loại còn 60^0C. Hỏi sau bao nhiêu phút, nhiệt độ kim loại còn 30^0C?

Giải: Từ (*) ta có

$$\frac{dT}{T - 20} = -kdt \Rightarrow \ln(T - 20) = -kt + \ln C, \ (**)$$

$$T(0) = 100 \Rightarrow C = 80,$$

$$T(20) = 60 \Rightarrow \ln 40 = -k20 + \ln 80 \Rightarrow k = \frac{1}{20}\ln 2.$$

Từ (**), ta có $T = 20 + \dfrac{80}{2^{\frac{t}{20}}}$. Với $T = 30^0C \Rightarrow t = 60$.

Vậy sau 60 phút nhiệt độ thanh kim loại còn 30^0C.

2.2.3. Phương trình đẳng cấp

Hàm $F(x,y)$ được gọi là *thuần nhất* bậc α nếu với x,y và $t>0$ bất kỳ, ta có

$$F(tx,ty) = t^{\alpha}F(x,y).$$

Chẳng hạn các hàm

$\dfrac{x-y}{2x+y}$, $\dfrac{x^2+xy}{x-y}$, x^2-2yx là các hàm thuần nhất bậc 0, 1, 2 tương ứng.

Nhận xét: Nếu hàm $f(x,y)$ là thuần nhất bậc 0 thì $f(x,y)$ là hàm số của một biến $\dfrac{y}{x}$, tức là hàm $f(x,y)$ có thể viết ở dạng $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Phương trình đẳng cấp là phương trình dạng

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Cách giải phương trình (1): Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, $\Rightarrow y' = u + xu'$. Thay vào (1), ta được

$$u + xu' = \varphi(u) \Leftrightarrow xu' = \varphi(u) - u.$$

Nếu $\varphi(u) - u \neq 0$, ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u)-u},$$

đây là phương trình biến số phân ly (đã biết cách giải).

Nếu $\varphi(u) - u = 0 \Rightarrow xu' = 0$ do đó $u' = 0 \Rightarrow u = C \Rightarrow y = Cx$ cũng là một họ nghiệm của phương trình (1).

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$$

Giải: Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$, thay vào phương trình đã cho, ta được

$$u + u'x = u + \sin u \Leftrightarrow u'x = \sin u.$$

Nếu $\sin u \neq 0$, ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sin u},$$

đây là phương trình biến số phân ly. Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = \ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| + \ln|C|, C \neq 0,$$

do đó $x = C\tan\frac{u}{2} \Rightarrow x = C\cot\frac{y}{2x}$, đây là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Nếu $\sin u = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ thì rõ ràng $y = k\pi x$ cũng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}.$$

Giải: Hàm vế phải của phương trình đã cho $\frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$ là thuần nhất bậc 0. Do $x \neq 0$ nên $\frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}$, ta được phương trình đẳng cấp

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$, thay vào phương trình đã cho, ta được

$$u + u'x = \frac{1-u+u^2}{u} \Leftrightarrow u'x = \frac{1-u+u^2}{u} - u \Leftrightarrow u'x = \frac{1-u}{u}.$$

Nếu $1-u \neq 0$, ta có

$$\frac{dx}{x} = \frac{udu}{1-u},$$

đây là phương trình biến số phân ly. Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|x| = -u - \ln|1-u| + \ln|C|,\ C \neq 0,$$

do đó $x = \dfrac{C}{(1-u)e^u} \Rightarrow x = \dfrac{C}{\left(1-\dfrac{y}{x}\right)e^{\frac{y}{x}}}$, đây là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ngoài ra $u \equiv 1$, tức $y = x$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

Giải: Hàm vế phải của phương trình đã cho là thuần nhất bậc 0, do đó ta có thể biến đổi về phương trình đẳng cấp .

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, $y = ux \Rightarrow x\dfrac{du}{dx} + u = u + \dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow x\dfrac{du}{dx} = sign\, x\sqrt{1-u^2}$

với $sign\, x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

Nếu $1 - u^2 \neq 0$, ta có

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = signx\frac{dx}{x} \Rightarrow \arcsin u = signx \ln|x| + C.$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$, ta được tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\arcsin\frac{y}{x} = signx \ln|x| + C.$$

Ngoài ra $u = \pm 1$ thì $y = \pm x$ cũng là nghiệm của phương trình.

Chú ý 1. Phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ sẽ đưa được về phương trình đẳng cấp nếu các hàm số $P(x,y), Q(x,y)$ là thuần nhất cùng bậc.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$$

Giải: Các hàm $x^2 + y^2$, xy thuần nhất cùng bậc hai, nên sẽ đưa được về phương trình đẳng cấp.

Đặt $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$[x^2 + (xu)^2]dx = x^2u(udx + xdu)$$

hay

$$x^2dx = x^3udx.$$

+ Nếu $x \neq 0$, ta được

$$udu = \frac{1}{x}dx.$$

đây là phương trình biến số phân ly. Tích phân hai vế, ta có

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln|C|,\ C \neq 0,$$

hay $\dfrac{y^2}{2x^2} = \ln|Cx|$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

+ $x = 0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Chú ý 2. Phương trình dạng

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2}$$

trong đó a_i, b_i, c_i $(i = 1,2)$ là hằng số, có thể đưa về phương trình đẳng cấp.

Trường hợp 1. Nếu $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Nói cách khác, hệ

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất (x_0, y_0). Đặt $x = u + x_0$, $y = v + y_0$. Vì $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du}$,

nên ta có

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}{a_2(u+x_0)+b_2(v+y_0)+c_2}\right) \Leftrightarrow \frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right),$$

đây là phương trình vi phân đưa được về dạng đẳng cấp (đã biết cách giải).

Trường hợp 2. Nếu $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, khi đó $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$. Đặt

$$z = a_1x + b_1y \Rightarrow a_2x + b_2y = \frac{z}{\lambda},$$

phương trình đã cho có dạng

$$\frac{z' - a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + c_1}{\dfrac{z}{\lambda} + c_2}\right) \Leftrightarrow z' = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{\dfrac{z}{\lambda} + c_2}\right),$$

ta được phương trình có biến phân ly (đã biết cách giải).

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$(2x + 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Giải: Phương trình đã cho không phải là phương trình đẳng cấp, nhưng nếu $x + y - 3 \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với phương trình $y' = -\dfrac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$, có thể đưa về dạng phương trình đẳng cấp. Thật vậy, xét hệ

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}, \quad D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

hệ có nghiệm duy nhất $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Đặt $x = 1 + u, y = 2 + v$, ta được

$$(2u - 4v)du + (u + v)dv = 0,$$

là phương trình đẳng cấp.

Đặt $v = uz$, $dv = udz + zdu$, ta được

$$\left(2-3z+z^2\right)du+u\left(1+z\right)dz=0. \ (*)$$

Khi đó, nếu $2-3z+z^2 \neq 0$, ta có phương trình biến số phân ly

$$\frac{du}{u}+\frac{(1+z)dz}{2-3z+z^2}=0 \Rightarrow \frac{u\left(z-2\right)^3}{\left(z-1\right)^2}=C$$

hay

$$u\left(\frac{v}{u}-2\right)^3=C\left(\frac{v}{u}-1\right)^2,$$

do đó $\left(y-2x\right)^3=C\left(y-x-1\right)^2$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Nếu $2-3z+z^2=0 \Leftrightarrow z=1, z=2$, phương trình (*) còn có nghiệm $z=1$ và $z=2$.

Với các nghiệm z = 1 và z = 2 ta có $y=x+1 \, và \, y=2x$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Nếu $x+y-3=0 \Leftrightarrow y=3-x$ không là nghiệm.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\left(2x-2y-1\right)dx+\left(x-y+1\right)dy=0$.

Giải: Nếu $x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$ không là nghiệm.

Nếu $x-y+1 \neq 0$, phương trình được viết lại dưới dạng

$$y'=-\frac{2x-2y-1}{x-y+1}.$$

Do $D=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0$, đặt $z=x-y \Rightarrow z'=1-y'$ hay $y'=1-z'$. Ta có

$$1-z'=-\frac{2z-1}{z+1} \Leftrightarrow z'=\frac{3z}{z+1},$$

hay $\frac{z+1}{z}dz=3dx$, đây là phương trình biến số phân ly. Tích phân hai vế, ta được $z+\ln|z|=3x+C$. Thay $z=x-y$, ta được là tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$x-y-3x+\ln|x-y|=C.$$

Ví dụ 7. Giải phương trình $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

Giải: Xét hệ

$$\begin{cases} x+y+2=0, \\ 2x+2y-1=0. \end{cases}$$

Do $D=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$, đặt $x+y=z,\ dy=dz-dx$ ta có

$$(z+2)dx+(2z-1)(dz-dx)=0.$$

Nếu $z\neq 3$, ta có

$$(3-z)dx+(2z-1)dz=0 \Rightarrow -2z-5\ln|z-3|+x=C.$$

Thay $z=x+y$, ta được

$$x+2y+5\ln|x+y-3|=C,$$

là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ngoài ra với $z=3$ hay là $x+y=3 \Leftrightarrow y=3-x$ cũng là nghiệm của phương trình.

2.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ là các hàm số của x (hoặc là hằng số).

Nếu $q(x)\equiv 0$ thì phương trình

$$y'+p(x)y=0, \tag{2}$$

được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp một thuần nhất.*

Nếu $q(x)\not\equiv 0$ thì phương trình (1) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất.*

Cách giải phương trình (1): Ta tiến hành theo các bước

+ Trước hết xét phương trình thuần nhất (2) tương ứng, phương trình (2) có dạng biến số phân ly. Vì $y=0$ là nghiệm của (2), nhưng không thể là nghiệm của phương trình (1) nên ta chỉ xét $y \neq 0$ và ta có $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$.

Tích phân hai vế, ta được

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|,\ C \neq 0 \text{ hay } y = Ce^{-\int p(x)dx},\ (*)$$

đây là nghiệm tổng quát của (2) với $C = const.$

+ Do phải tìm nghiệm của phương trình (1), nên từ (*), coi $C = C(x)$ và tìm $C(x)$ sao cho

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (**)$$

là nghiệm của (1).

Thế (**) vào (1) ta được

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Từ đó ta có

$$C(x) = \mathcal{C} + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx, \quad (***)$$

với $\mathcal{C}$ là hằng số bất kỳ. Thế (***) vào (**) ta được nghiệm tổng quát của (1) là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\mathcal{C} + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]. \qquad (3)$$

Phương pháp tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1) như trên gọi là *phương pháp biến thiên hằng số* (phương pháp Lagrange).

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2.$$

Giải: Phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' - \frac{1}{x}y = 0,$$

giải ta được nghiệm $y = Cx$.

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng $y = C(x)x$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x).x - C(x) + C(x) = x^2 \Leftrightarrow C'(x).x = x^2$$

$$\Rightarrow C'(x) = x \Leftrightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là $y = \left(\frac{x^2}{2} + \mathcal{C}\right)x$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}.$$

Giải: Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y' + y\cos x = 0,$$

giải ta được nghiệm $y = Ce^{-\sin x}$.

Tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng $y = C(x)e^{-\sin x}$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x)c^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \Rightarrow C'(x) = 1 \Leftrightarrow C(x) = x + \mathcal{C}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là $y = (x + \mathcal{C})e^{-\sin x}$.

Chú ý. Để giải phương trình (1), ta có thể sử dụng phương pháp sau: Nhân cả hai vế của (1) với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx},$$

hay

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Lấy tích phân cả hai vế ta được

$$ye^{\int p(x)dx} = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \Leftrightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right],$$

đây chính là công thức (3) đã được chứng minh ở trên.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}.$$

Giải: Nhân hai vế với $e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos x}$, ta được

$$\frac{1}{\cos x}y'+y\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$d\left(y\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}dx.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\frac{y}{\cos x}=C+\tan x \Leftrightarrow y=C\cos x+\sin x,$$

đây là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Giải phương trình $y'\left(x+y^2\right)=y$.

Giải: Bản thân phương trình đã cho không phải là phương trình vi phân tuyến tính đối với y, nhưng có thể coi x là hàm số, y là đối số. Khi đó, ta có

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^2}{y},$$

hay là $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=y$, đây là một phương trình tuyến tính đối với x. Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=0,$$

giải ta được nghiệm $x=Cy$.

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng $x=C(y).y$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(y).y-C(y)+C(y)=y \Rightarrow C'(y)=1 \Rightarrow C(y)=y+\mathcal{C}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là $x=\left(y+\mathcal{C}\right)y$.

2.2.5. Phương trình Bernoulli

Phương trình vi phân dạng

$$y'+p(x)y=q(x)y^\alpha, \qquad (1)$$

trong đó α là số thực bất kỳ với $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, được gọi là *phương trình Bernoulli*.

Trường hợp $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp một (đã biết cách giải).

Nếu $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$ và nếu $y^{\alpha} \neq 0$ phương trình (1) được giải như sau: chia cả hai vế phương trình (1) cho y^{α}, ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \quad (*)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Thay vào phương trình (*), ta có

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x),$$

là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z (đã biết cách giải).

Khi $\alpha > 0$ thì $y = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\quad y' + \dfrac{1}{x}y = xy^2$.

Giải: Nếu $y \neq 0$, phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = x. \ (*)$$

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$, thay vào (*), ta được $z' - \dfrac{1}{x}z = -x$ đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z. Theo công thức (3) mục 2.2.4, ta được $z = -x^2 + Cx$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là $y = \dfrac{1}{-x^2 + Cx}$.

Ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\quad y' + \dfrac{2}{x}y = 3x^2y^{4/3}$.

Giải: Nếu $y \neq 0$, phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$y^{-\frac{4}{3}}y' + \frac{2}{x}y^{1-\frac{4}{3}} = 3x^2. \ (*)$$

Đặt $z = y^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow z' = -\frac{1}{3} y^{-\frac{4}{3}} y'$ thay vào (*), ta được

$$z' - \frac{2}{3x} z = -x^2, \ (**)$$

đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z.
Phương trình thuần nhất tương ứng của (**) là

$$z' - \frac{2}{x} z = 0,$$

giải ta được nghiệm $z = Cx^{2/3}$.

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất (**) dưới dạng $z = C(x)x^{2/3}$. Thế vào phương trình (**) ta được

$$C'(x).x^{2/3} = -x^2 \Leftrightarrow C'(x) = -x^{4/3} \quad \Rightarrow C(x) = -\frac{3}{7}x^{7/3} + \mathcal{C}.$$

Khi đó phương trình (**) có nghiệm tổng quát là $z = \left(-\frac{3}{7}x^{7/3} + \mathcal{C}\right)x^{2/3}$.

Vậy phương trình đã cho có tích phân tổng quát là $y^{-\frac{1}{3}} = \left(-\frac{3}{7}x^{7/3} + \mathcal{C}\right)x^{2/3}$.

Ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Chú ý. Một số phương trình vi phân, khi ta coi y là hàm của biến số x thì nhận được phương trình không thuộc những dạng đã xét. Do đó ta có thể coi x là hàm của biến số y để nhận được phương trình quen thuộc.

Ví dụ 3. Giải phương trình $(x^2y^3 + xy)dy - dx = 0$.

Giải: Nếu coi y là hàm của biến số x thì nhận được phương trình

$$y' = \frac{1}{x^2y^3 + xy},$$

không thuộc dạng đã xét.

Nếu coi x là hàm của biến số y ta được phương trình

$$x' - yx = y^3x^2,$$

dạng Bernoulli đối với x.

+ Nếu $x \neq 0$, phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$x^{-2}x' - yx^{-1} = y^3 \ (*).$$

Đặt $z = x^{-1} \Rightarrow z' = -x^{-2}x'$, thay vào (*), ta được

$$z' + yz = -y^3 \quad (**),$$

đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z biến số y.

Phương trình thuần nhất tương ứng của (**) là

$$\frac{dz}{dy} + yz = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -ydy,$$

giải ta được nghiệm $z = Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

Tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (**) dưới dạng $z = C(y)e^{-\frac{y^2}{2}}$. Thế vào phương trình (**), ta được

$$C'(y)e^{-\frac{y^2}{2}} = -y^3 \Leftrightarrow C'(y) = -y^3e^{\frac{y^2}{2}},$$

$$\Rightarrow C(y) = \int -y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy + \mathcal{C} \Rightarrow C(y) = -y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + \mathcal{C}.$$

Phương trình (**) có nghiệm tổng quát là $z = \left(-y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + \mathcal{C}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Vậy phương trình đã cho có tích phân tổng quát là $\frac{1}{x} = -y^2 + 2 + \mathcal{C}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

+ $x = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Tìm các đường cong sao cho đoạn thẳng OB bị cắt bởi tiếp tuyến trên trục tung bằng bình phương tung độ PM của tiếp điểm (Hình 2.2).

Giải: Giả sử $M(x, y)$ là điểm nằm trên đường cong phải tìm $y = y(x)$. Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại M có dạng

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$

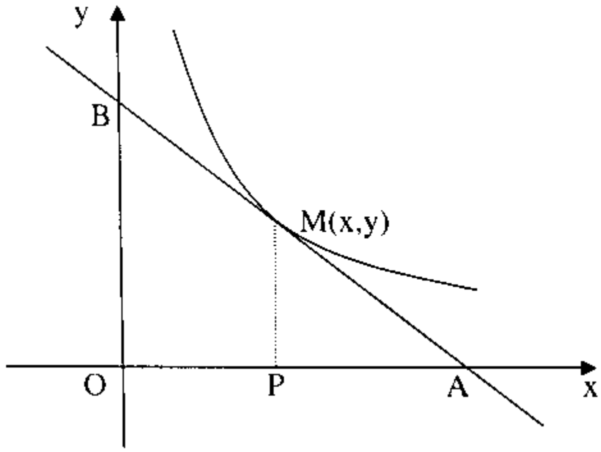
Cho $x = 0$ ta có $Y = OB = y - xy'$. Theo giả thiết ta có

$$y - xy' = y^2.$$

Với $x \neq 0$ ta có phương trình vi phân

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2.$$

Đây là phương trình Bernoulli. Giải ra ta được tích phân tổng quát của phương trình đã cho là $\frac{1}{y} = \frac{x+C}{x}$.



Hình 2.2

Vậy các đường cong cần tìm là $y = \frac{x}{x+C}$, $x \neq -C$.

2.2.6. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

được gọi là *phương trình vi phân toàn phần* nếu $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó, nghĩa là

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Nếu các đạo hàm riêng $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ liên tục trên miền **D** và

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \tag{2}$$

thì $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ nào đó. Khi đó phương trình (1) được viết dưới dạng

$$du(x,y)=0,$$

và tích phân tổng quát của nó là

$$u(x,y)=\mathscr{C}. \tag{3}$$

Để tìm $u(x,y)$ ta lưu ý rằng, nếu $du(x,y)$ là vi phân toàn phần của vế trái (1) thì

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y). \tag{5}$$

Lấy tích phân hệ thức (4) theo x, ta được

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)\Rightarrow u(x,y)=\Phi(x,y)+C(y), \tag{6}$$

trong đó $\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$, $C(y)$ là hằng số đối với biến x và là một hàm bất kỳ (khả vi) theo y. Tiếp theo, lấy đạo hàm (6) theo y, kết hợp (5), ta có

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}+\frac{dC(y)}{dy}=Q(x,y),$$

từ đó ta tìm được $C(y)$ và có $u(x,y)$ theo công thức (6).

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$(3y^2+2xy+2x)dx+(6xy+x^2+3)dy=0.$$

Giải: Đặt $P=3y^2+2xy+2x$, $Q=6xy+x^2+3$, ta có

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=6y+2x=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y},\ \forall(x,y)$$

thỏa mãn điều kiện (2). Vế trái của phương trình đã cho là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ nào đó.

Đối với $u(x,y)$ ta có

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x \qquad (*),$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3 \qquad (**).$$

Lấy tích phân (**) theo y, ta được

$$u(x,y) = 3xy^2 + x^2y + 3y + C(x) \qquad (***).$$

Đạo hàm (***) theo x, kết hợp (*), ta được

$$3y^2 + 2xy + \frac{dC(x)}{dx} = 3y^2 + 2xy + 2x,$$

do đó $\dfrac{dC(x)}{dx} = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + C_1$, thay vào (***) ta được $u(x,y)$.

Theo công thức (3) $u(x,y) = \mathscr{C}$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho, hay

$$3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C,\ C = \mathscr{C} - C_1.$$

Chú ý. Theo kết quả của Định lý bốn mệnh đề tương đương (xem [1], [2]), ta có thể tìm $u(x,y)$ theo các công thức sau

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy, \qquad (7)$$

hoặc $$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy. \qquad (8)$$

trong đó (x_0, y_0) là điểm bất kỳ, sao cho tại đó $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục và các đạo hàm riêng cấp một liên tục và $u(x,y) = \mathscr{C}$ là tích phân tổng quát của phương trình (1).

Ví dụ 2. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0.$$

Giải: Vì $\dfrac{\partial}{\partial y}(x + y - 1) = 1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(e^y + x)$ với $\forall (x,y)$ thỏa mãn điều kiện (2), nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tính

$u(x,y)$ theo (7) lấy $x_0 = 0, y_0 = 0$, ta có

$$u(x,y) = \int_0^x (x-1)dx + \int_0^y (e^y + x)dy = \frac{x^2}{2} - x + e^y + xy - 1$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\frac{x^2}{2} - x + e^y + xy - 1 = \mathscr{C} \text{ hay } \frac{x^2}{2} - x + e^y + xy = C,\ C = \mathscr{C} + 1.$$

Chú ý. Phương trình

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{9}$$

mà

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial P(x,y)}{\partial y},$$

thì phương trình đó không là phương trình vi phân toàn phần. Ta có thể tìm một hàm số $\mu = \mu(x,y)$ sao cho khi nhân μ với hai vế của (9), ta được một phương trình vi phân toàn phần

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0, \tag{10}$$

nghĩa là

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}.$$

Hàm số $\mu(x,y)$ có tính chất như trên được gọi là *thừa số tích phân* của phương trình (1).

Hàm số $\mu(x,y)$ được tìm như sau: giả sử $\mu(x,y)$ là thừa số tích phân của (1), thì

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y},$$

hay

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}. \tag{11}$$

Trong một số trường hợp đặc biệt, đẳng thức (11) cho phép tìm được thừa số tích phân μ cụ thể.

Trường hợp 1. Nếu $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\varphi(x)$ (là hàm của một biến x). Khi đó ta tìm được thừa số tích phân μ dưới dạng hàm một biến $\mu(x)$ và

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}. \qquad (12)$$

Trường hợp 2. Nếu $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=\psi(y)$ (là hàm của một biến y). Khi đó ta tìm được thừa số tích phân μ dưới dạng hàm một biến $\mu(y)$ và

$$\mu(y)=e^{\int\psi(y)dy}. \qquad (13)$$

Ví dụ 3.Giải phương trình $\left(x^2-\sin^2 y\right)dx+x\sin 2ydy=0$.

Giải: Đặt $P=x^2-\sin^2 y$, $Q=x\sin 2y$, ta có

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2\sin y\cos y,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\sin 2y.$$

Như vậy $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, nhưng $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\dfrac{-2\sin y\cos y-\sin 2y}{x\sin 2y}=-\dfrac{2}{x}$.

Sử dụng công thức (12) ta được thừa số tích phân

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

Khi đó phương trình

$$\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx+\frac{\sin 2y}{x}dy=0,\ (*)$$

là phương trình vi phân toàn phần, phương trình (*) có thể viết dưới dạng

$$d\left(x+\frac{\sin^2 y}{x}\right)=0\Rightarrow x+\frac{\sin^2 y}{x}=C,$$

là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Ví dụ 4. Giải phương trình $(x^2y^2+y)dx+(y^2-x)dy=0$.

Giải: Đặt $P=x^2y^2+y,\ Q=y^2-x$, ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x^2y+1,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$.

Như vậy $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, nhưng $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=\dfrac{2(x^2y+1)}{-y(x^2y+1)}=-\dfrac{2}{y}$.

Sử dụng công thức (13) ta được thừa số tích phân

$$\mu(y)=e^{\int\psi(y)dy}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\frac{1}{y^2}.$$

Nhân hai vế phương trình đã cho với $\dfrac{1}{y^2}$, ta được

$$(x^2+\frac{1}{y})dx+(1-\frac{x}{y^2})dy=0,\quad (*)$$

đây là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình (*). Chọn $x_0=0,y_0=1$, theo công thức (8) ta có

$$u(x,y)=\int_0^x\left(x^2+\frac{1}{y}\right)dx+\int_1^y dy=\frac{x^3}{3}+\frac{x}{y}+y-1=\mathscr{C}$$

Vậy $3y^2+x^3y+3x=3Cy$ (trong đó $C=3(\mathscr{C}+1)$) là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

2.3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI

2.3.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp hai

Phương trình vi phân cấp hai là phương trình có dạng

$$F(x,y,y',y")=0. \tag{1}$$

Nếu (1) giải được đối với đạo hàm $y"$ thì phương trình vi phân cấp hai có dạng

$$y"=f(x,y,y'). \tag{2}$$

Chẳng hạn:

$$y"=x^2+xy,$$

$$yy"+(y')^2=0,$$

$$y"-xy'+x^2y=xe^x$$

là những phương trình vi phân cấp hai (vì có chứa đạo hàm cấp hai).

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp hai (2) thỏa mãn điều kiện

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \tag{3}$$

với x_0, y_0, y'_0 là những số cho trước. Điều kiện (3) được gọi là điều kiện ban đầu (hay sơ kiện).

Định lý 2.3.1. (Tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy (2)-(3)).

Nếu hàm số $f(x,y,y')$ *và các đạo hàm riêng* $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ *liên tục trong miền mở* $D \subset \mathbf{R}^3$ *thì với mọi điểm* $(x_0, y_0, y'_0) \in D$, *tồn tại duy nhất một nghiệm* $y = y(x)$ *của phương trình* (2) *xác định trong lân cận của* x_0, *thỏa mãn điều kiện ban đầu* (3). (Xem [4], [5]).

Hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, trong đó C_1, C_2 là những hằng số tuỳ ý, được gọi là *nghiệm tổng quát* của phương trình vi phân cấp hai trong miền $D \subset \mathbf{R}^3$ nếu thoả mãn các điều kiện sau:

+ là nghiệm của phương trình vi phân cấp hai với mọi C_1, C_2,

+ với mọi điểm $(x_0, y_0, y'_0) \in D$, tồn tại duy nhất một cặp số C_1^0, C_2^0 sao cho $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy (thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$).

Từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ bằng cách cho các hằng số C_1, C_2 những giá trị cụ thể C_1^0, C_2^0 thì $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$được gọi là *nghiệm riêng* của phương trình đã cho.

Còn nếu từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, kết hợp với điều kiện ban đầu (3) ta xác định được các hằng số $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0$ thì $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ được gọi là nghiệm của bài toán Cauchy (2)-(3). Nghiệm của bài toán Cauchy là một nghiệm riêng.

Hệ thức $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình cấp hai dưới dạng hàm ẩn được gọi là *tích phân tổng quát* của phương trình đó. Hệ thức $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0)=0$ với C_1^0, C_2^0 là những số cụ thể được gọi là *tích phân riêng.*

Về mặt hình học, tích phân tổng quát hay nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là họ đường cong trong mặt phẳng tọa độ Oxy phụ thuộc hai tham số C_1, C_2. Các đường cong đó gọi là *đường cong tích phân.*

Sau đây sẽ trình bày cách giải một số phương trình vi phân cấp hai.

2.3.2. Phương trình giảm cấp được

1. Phương trình vế phải không chứa y và y' dạng

$$y''=f(x). \tag{1}$$

Cách giải: Lấy tích phân lần thứ nhất theo biến x, ta được

$$y'=\int f(x)dx+C_1,$$

nghĩa là ta đã giảm từ cấp hai xuống cấp một. Tích phân một lần nữa theo biến x, ta có nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2,\quad (\ C_1,\ C_2 \text{ là các hằng số bất kỳ}).$$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y''=x+\sin 2x.$$

Giải: Lấy tích phân hai vế, ta được

$$y'=\int(x+\sin 2x)dx+C_1 \Rightarrow y'=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1$$

là phương trình vi phân cấp một.

Tiếp tục lấy tích phân một lần nữa, ta được

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\right)dx+C_2 \Rightarrow y=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2$$

là nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

2. Phương trình không chứa y dạng

$$F(x,y',y'')=0. \tag{2}$$

Cách giải: Đặt $y'=z(x)$, thay việc tìm hàm y ta tìm hàm z. Ta có $y''=z'(x)$, thay vào phương trình (2), ta được

$$F(x,z,z')=0,$$

là phương trình vi phân cấp một, giải được z, sau đó từ $y' = z(x)$ ta tìm được y.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x^2.$$

Giải: Phương trình đã cho không chứa y nên đặt $y' = z(x)$, ta có $y'' = z'(x)$. Khi đó phươngtrình đã cho có dạng

$$z' - \frac{1}{x} z = x^2,$$

là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z. Theo ví dụ 1, mục 2.2.4 phương trình có nghiệm tổng quát là $z = \frac{x^3}{2} + C_1 x$, mặt khác $z = y'$ ta có phương trình

$$y' = \frac{x^3}{2} + C_1 x$$

tích phân hai vế ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{x^4}{8} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$y'' + 2y' = e^x y'^2,$$

với điều kiện $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Giải: Đặt $z = y' \Rightarrow z' = y''$, ta được

$$z' + 2z = e^x z^2 \quad (*)$$

là phương trình Bernoulli đối với z.

Ta có $z = 0$ là một nghiệm của phương trình (*) nên từ $y' = z = 0 \Rightarrow y = C$ là họ nghiệm đặc biệt, nhưng không thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho.

Với $z \neq 0$, phương trình Bernoulli đưa về dạng

$$z^{-2} z' + 2z^{-1} = e^x.$$

Đặt $z^{-1} = u$, ta được

$$u' - 2u = -e^{x},$$

là phương trình tuyến tính cấp một đối với u, theo công thức (3) mục 2.2.4 ta được nghiệm tổng quát

$$u = e^{x} + C_1 e^{2x},$$

mà $z^{-1} = u \Rightarrow y' = \dfrac{1}{u}$, do đó $y' = \dfrac{1}{e^{x} + C_1 e^{2x}}$. Kết hợp với điều kiện $y'(0) = 1$, ta có $1 = \dfrac{1}{1 + C_1} \Rightarrow C_1 = 0$, như vậy

$$y' = \frac{1}{e^{x}} \text{ và } y = \int \frac{dx}{e^{x}} + C_2 \Rightarrow y = -e^{-x} + C_2.$$

Kết hợp với điều kiện $y(0) = 1$, ta có $1 = -1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 2$.

Vậy nghiệm cần tìm là $y = -e^{-x} + 2$.

3. Phương trình không chứa x dạng

$$F(y, y', y'') = 0. \qquad (3)$$

Cách giải: Đặt $z = y'$, nhưng quan niệm z là hàm số hợp của đối số trung gian y ta có $z = z(y)$ và

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Khi đó phương trình (3) đưa được về dạng $F\left(y, z, z\dfrac{dz}{dy}\right) = 0$ là phương trình cấp một hàm cần tìm z, biến số y.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$yy'' - y'^2 = 0.$$

Giải: Phương trình đã cho không chứa x nên đặt $z = y' \Rightarrow y'' = z\dfrac{dz}{dy}$, ta được

$$yz\frac{dz}{dy} - z^2 = 0 \Leftrightarrow z\left(y\frac{dz}{dy} - z\right) = 0.$$

Nếu $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ $(= \text{const})$ là một nghiệm của phương trình.

Nếu $y\dfrac{dz}{dy} - z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z} \Rightarrow z = C_1 y$, mà $z = y'$ do đó

$$y' = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln y = C_1 x + C_2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = e^{C_1 x + C_2}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$yy'' - y'^2 = y^4,$$

với điều kiện $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Giải: Đặt $y' = z$, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$. Ta có

$$yz\frac{dz}{dy} - z^2 = y^4. \ (*)$$

+ Nếu $y \neq 0$, ta có $(*) \Leftrightarrow z\dfrac{dz}{dy} - \dfrac{1}{y}z^2 = y^3$ (phương trình Bernoulli)

Đặt $z^2 = v \Rightarrow 2z\dfrac{dz}{dy} = v' \Rightarrow v' - \dfrac{2}{y}v = 2y^3$ (phương trình tuyến tính cấp một).

Giải ra ta được $v = \left(y^2 + C_1\right)y^2$, mà $z^2 = y'^2 = v$.

Kết hợp $y'(0) = 1$, $y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y'^2 = y^4$.

Vì $y'(0) = 1 > 0 \Rightarrow y' = y^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\dfrac{1}{y} = x + C_2$.

Kết hợp $y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = -1$.

Vậy nghiệm cần tìm là $\dfrac{1}{y} = 1 - x$ hay $y = \dfrac{1}{1-x}$.

+ $y = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho, song không thoả mãn điều kiện ban đầu.

2.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

2.3.3.1. Một số khái niệm chung

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình có dạng

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \quad a<x<b, \tag{1}$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là các hàm số liên tục trên khoảng (a,b).

Nếu $f(x)\not\equiv 0$, phương trình (1) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất.*

Nếu $f(x)\equiv 0, \forall x\in(a,b)$, phương trình

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{2}$$

được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất.*

Nếu $p(x), q(x)$ là các hằng số thì phương trình (1) được gọi là *phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số.*

Ký hiệu vế trái của (1) là $L(y)$, tức là: $L(y)=y''+p(x)y'+q(x)y$ thì L là một ánh xạ tuyến tính từ tập **R** vào tập **R**, và nó được gọi là *toán tử vi phân tuyến tính cấp hai*. Toán tử $L(y)$ có tính chất tuyến tính:

1. $L(ky)=kL(y)$, k hằng số .
2. $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$.

Các tính chất này được kiểm tra một cách dễ dàng.

2.3.3.2. Cấu trúc nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

Định lý 2.3.1. *Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (2) thì $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (C_1, C_2 là hằng số tuỳ ý) cũng là một nghiệm của phương trình thuần nhất (2).*

Chứng minh. Theo giả thiết $y_1(x)$, $y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình thuần nhất (2), do đó

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0,$$
$$y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_1=0.$$

Thay $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ vào phương trình (2), ta được

$$[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]''+p(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]'+q(x)[C_1y_1(x)+C_2y_2(x)]=$$
$$=C_1[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1]+C_2[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2]=0,$$

Vậy $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (2).

Định nghĩa 2.3.1. *Các hàm số* $y_1(x), y_2(x)$ *được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên khoảng* (a,b), *nếu tồn tại các số* α_1, α_2 *không đồng thời bằng 0, sao cho.*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \forall x \in (a,b). \qquad (3)$$

Nếu hệ thức (3) *chỉ thoả mãn trong trường hợp* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *thì hai hàm số* $y_1(x), y_2(x)$ *được gọi là độc lập tuyến tính.*

Như vậy, hai hàm số $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính nếu tỷ số $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$ trên khoảng (a,b).

Ví dụ 1. Các hàm số e^x, e^{2x} độc lập tuyến tính trên khoảng (a,b) bất kỳ.

Các hàm số $x, 2x$ phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a,b) bất kỳ.

Định nghĩa 2.3.2 *Cho các hàm số* $y_1(x), y_2(x)$ *khả vi trên khoảng* (a,b). *Định thức*

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wronski của các hàm $y_1(x), y_2(x)$.

Định lý 2.3.2. *Nếu các hàm số* $y_1(x), y_2(x)$ *khả vi và phụ thuộc tuyến tính trên khoảng* (a,b) *thì định thức Wronski của chúng bằng 0 trên khoảng đó.*

Nghĩa là $W[y_1, y_2] = 0, \ \forall x \in (a,b)$.

Chứng minh. Vì các hàm số $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a,b), nên ta có $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \forall x \in (a,b)$ trong đó các số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0.

Lấy đạo hàm hai vế của hệ thức $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$, ta được

$$\alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) = 0.$$

Khi đó ta có hệ phương trình với các ẩn α_1, α_2

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Hệ (4) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất, để hệ (4) có nghiệm không tầm thường α_1, α_2, thì định thức của hệ trên bằng 0. Mà định thức của hệ cũng là định thức Wronski $W[y_1, y_2]$. Vậy $W[y_1, y_2] = 0$.

Nhận xét: Nếu hệ (4) có định thức $W[y_1, y_2] \neq 0$ (dù chỉ tại một điểm nào đó của (a,b)), thì hệ có nghiệm tầm thường duy nhất $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tức $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên khoảng (a,b).

Ví dụ 2. Các hàm $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ (với $k_1 \neq k_2$) là độc lập tuyến tính trên mọi khoảng (a,b), vì

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1) e^{(k_1 + k_2)x} \neq 0, \forall x \in (a,b).$$

Định lý 2.3.3. *Các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất* (2) *độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $W[y_1, y_2] \neq 0$ với mọi $\forall x \in (a,b)$.*

Chứng minh. Nếu $W[y_1, y_2] \neq 0$ trên (a,b) thì theo định lý 2.3.2 các hàm $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính.

Ngược lại, cho các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên (a,b), ta cần chứng minh $W[y_1, y_2] \neq 0$ với mọi $\forall x \in (a,b)$.

Bằng phương pháp phản chứng, giả sử $\exists x_0 \in (a,b) : W[y_1, y_2] = 0$. Khi đó hệ

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

có $W[y_1, y_2] = 0$, nên có nghiệm không tầm thường α_1, α_2 (không đồng thời bằng 0).

Hàm số $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất (2). Hơn nữa, theo (5) thì nghiệm đó thỏa mãn điều kiện ban đầu.

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0.$$

Theo tính duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy, thì $y = 0$ là nghiệm trên (a,b). Như vậy $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0$ trên (a,b), tức là $y_1(x), y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính. Định lý được chứng minh.

Định lý 2.3.4. *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất* (2) *trên (a,b), thì nghiệm tổng quát của phương trình đó là*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{6}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý.

Chứng minh. Theo định lý 2.3.1, hàm số có dạng (6) là nghiệm của (2) với mọi hằng số C_1, C_2.

Ngược lại, giả sử $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ là một nghiệm của (2) với điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \; x_0 \in (a,b),$$

thì phải tồn tại duy nhất cặp hằng số C_1^0, C_2^0 sao cho $C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Thật vậy, xét hệ phương trình với các ẩn C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{7}$$

Vì các nghiệm $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên (a,b), nên định thức của hệ phương trình là

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Vậy hệ (7) có nghiệm duy nhất C_1^0, C_2^0.

Như vậy để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2), ta phải biết hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình đó. Tuy nhiên, nếu biết một nghiệm của phương trình (2) thì ta có thể tìm một nghiệm riêng của (2) độc lập tuyến tính với nghiệm đã biết theo định lý sau:

Định lý 2.3.5. *Nếu đã biết $y_1 = y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất* (2) *ta có thể tìm một nghiệm riêng $y_2 = y_2(x)$ của* (2) *độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ theo công thức :*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx. \tag{9}$$

Chứng minh. Giả sử ta biết $y_1(x) \neq 0$ là một nghiệm của (2). Ta tìm nghiệm thứ hai dạng $y_2(x) = y_1(x).u(x)$, với hàm $u(x) \neq const$ (khi đó $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính). Ta có

$$y_2' = y_1'u + y_1u',\ y_2'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''.$$

Thế (9) vào (2), ta được

$$y_1u'' + [2y_1' + p(x)y_1]u' + [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)] = 0.$$

Vì $y_1(x)$ là nghiệm của (2) nên $y_1'' + p(x)y_1' + q(x) = 0$, do đó

$$y_1u'' + [2y_1' + p(x)y_1]u' = 0.$$

Đặt $z = u'$, ta được phương trình phân ly

$$y_1z' + (2y_1' + p(x)y_1)z = 0.$$

Giải phương trình trên, ta được

$$z = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}, \text{ mà } z = u',$$

do đó $u = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$ hay $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$ là điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Tìm ngl iệm tổng quát phương trình

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0,$$

biết phương trình có nghiệm riêng $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

Giải: Theo công thức (9), nghiệm riêng thứ hai được tính

$$y_2(x)=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}.$$

Chú ý. Nếu $y=\varphi(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2) thì $y=a\varphi(x)$ (a =const) cũng là nghiệm của phương trình đó. Trong ví dụ trên $y_2=-\frac{\cos x}{x}$ ta có thể lấy $y_2=\frac{\cos x}{x}$.

2.3.3.3. Cấu trúc nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất (1).

Định lý 2.3.6. *Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất* (1) *bằng nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất tương ứng* (2) *cộng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất* (1).

Chứng minh. Giả sử $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) tương ứng (1), y^* là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (1), nghĩa là

$$\overline{y}''+p(x)\overline{y}'+q(x)\overline{y}=0,$$
$$y^{*}{}''+p(x)y^{*}{}'+q(x)y^*=f(x).$$

Cộng hai hệ thức trên ta được

$$(\overline{y}''+y^{*}'')+p(x)(\overline{y}'+y^{*}')+q(x)(\overline{y}+y^{*}')=f(x).$$

Vậy $y=\overline{y}+y^{*}$ là nghiệm của phương trình (1).

Vì $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2), phụ thuộc hai hằng số C_1, C_2 do đó $y=\overline{y}+y^{*}$ cũng phụ thuộc hai hằng số C_1, C_2. Lý luận tương tự như định lý 2.3.4, ta có $y=\overline{y}+y^{*}$ là nghiệm tổng quát của phương trình (1).

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Ta trình bày phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất khi biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng bằng *phương pháp biến thiên hằng số*. Xét phương trình không thuần nhất

$$y''+p(x)y'+q(x)=f(x). \qquad (10)$$

Giả thiết $y_1=y_1(x), y_2=y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất tương ứng

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \qquad (11)$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (11) có dạng

$$\overline{y}=C_1y_1+C_2y_2,$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (10) dưới dạng

$$y^{*}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2, \qquad (12)$$

trong đó $C_1=C_1(x)$, $C_2=C_2(x)$ là các hàm số của x cần xác định. Ta có

$$y^{*}{}'=C_1'y_1+C_2'y_2+C_2y_1'+C_2y_2'.$$

Để đơn giản hơn trong tính toán, ta chọn C_1, C_2 sao cho

$$C_1'y_1+C_2'y_2=0.$$

Khi đó

$$y^{*}{}'=C_1y_1'+C_2y_2',$$

$$y^{*}{}''=C_1'y_1'+C_2'y_2'+C_1y_1''+C_2y_2''.$$

Thay vào phương trình (10), ta được

$$C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Vì y_1, y_2 là nghiệm của phương trình thuần nhất (11), tức là

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0,$$

cho nên ta có

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Như vậy C_1, C_2 có thể tìm được từ hệ sau

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases} \qquad (13)$$

Vì định thức của hệ (13) cũng là định thức Wronski của hai nghiệm độc lập tuyến tính y_1, y_2 của phương trình thuần nhất (11), nên khác 0, do đó hệ có nghiệm duy nhất. Giải (13) ta được $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$, lấy tích phân ta được $C_1(x) = \Phi_1(x)$, $C_2(x) = \Phi_2(x)$. Từ đó ta tìm được nghiệm riêng $y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ của phương trình không thuần nhất (10).

Phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (10) như trên gọi là *phương pháp biến thiên hằng số* (phương pháp Lagrange).

Ví dụ 5. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 1$, biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng có hai nghiệm riêng $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$, $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$.

Giải: Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\bar{y} = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}.$$

Nghiệm riêng của phương trình đã cho được tìm dưới dạng

$$y^* = C_1(x)\frac{\sin x}{x} + C_2(x)\frac{\cos x}{x},$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ được xác định từ hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x} + C_2'(x)\dfrac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x)\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' + C_2'(x)\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)' = 1, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x} + C_2'(x)\dfrac{\cos x}{x} = 0. \\ C_1'(x)(x\cos x - \sin x) + C_2'(x)(-x\sin x - \cos x) = x^2. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được

$$C_1'(x) = x\cos x,\ C_2'(x) = -x\sin x.$$

Tích phân ta được

$$C_1(x) = x\sin x + \cos x,\ C_2'(x) = x\cos x - \sin x.$$

Từ đó ta có một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất là

$$y^* = (x\sin x + \cos x)\frac{\sin x}{x} + (x\cos x - \sin x)\frac{\cos x}{x} = 1.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \bar{y} + y^* = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x} + 1.$$

Định lý 2.3.7. (Nguyên lý xếp chồng nghiệm)

Nếu $y_1^*(x), y_2^*(x)$ *tương ứng là nghiệm riêng của các phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x), \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

thì $y^* = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ *là một nghiệm riêng của phương trình*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Bạn đọc dễ dàng chứng minh định lý này.

Ví dụ 6. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 1 + \frac{\cot x}{x},$$

biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng dạng $y_1 = x^\alpha \sin x$, α là hằng số cần xác định.

Giải: Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0\,,\ (*)$$

Để $y_1 = x^{\alpha}\sin x$ là nghiệm của phương trình (*), ta tính

$y_1' = \alpha x^{\alpha-1}\sin x + x^{\alpha}\cos x$,

$y_1'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin x + 2\alpha x^{\alpha-1}\cos x - x^{\alpha}\sin x$,

thay vào (*) và đồng nhất theo hệ số của $\sin x, \cos x$ ta được $\alpha = -1$, do đó $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

Tìm nghiệm riêng y_2 của (*) (xem ví dụ 4) ta được $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$. Nghiệm tổng quát của (*) là

$$\bar{y} = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}.$$

ta tìm y^* là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $y^* = y_1^* + y_2^*$. Trong đó y_1^* là một nghiệm của phương trình

$y''+\dfrac{2}{x}y'+y=1$ và $y_1^*=1$ (xem ví dụ 5). Còn y_2^* là một nghiệm riêng của phương trình

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{\cot x}{x}.$$

Ta tìm nghiệm riêng y_2^* bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

$$y_2^* = C_1(x)\frac{\sin x}{x} + C_2(x)\frac{\cos x}{x},$$

trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ được xác định từ hệ

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x} + C_2'(x)\dfrac{\cos x}{x} = 0, \\[2mm] C_1'(x)\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' + C_2'(x)\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)' = \dfrac{\cot x}{x}, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} C_1'(x)\dfrac{\sin x}{x} + C_2'(x)\dfrac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x)\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + C_2'(x)\dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = \dfrac{\cot x}{x}. \end{cases}$$

Giải ta được $y_2^* = \dfrac{\sin x}{x}\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \bar{y} + y^* = C_1\,\frac{\sin x}{x} + C_2\,\frac{\cos x}{x} + 1 + \frac{\sin x}{x}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

2.3.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số là phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (1)$$

trong đó p, q là các hằng số.

2.3.4.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất hệ số hằng số

Xét phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2)$$

trong đó p, q là các hằng số. Ta biết rằng, để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) tương ứng, cần phải biết hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của nó. Ta tìm nghiệm của (2) dưới dạng $y = e^{kx}$, trong đó k là số cần được xác định. Thế $y = e^{kx}$ vào (2) ta được

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Như vậy để hàm $y = e^{kx}$ là nghiệm của phương trình (2) thì số k cần tìm phải thỏa mãn phương trình

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (3)$$

Phương trình (3) được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình vi phân (2). Phương trình (3) có thể có nghiệm thực (đơn, bội) hoặc phức liên hợp như sau:

Trường hợp 1. $\Delta = p^2 - 4q > 0$, phương trình (3) có hai nghiệm thực phân biệt k_1 và k_2 ($k_1 \neq k_2$). Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ độc lập tuyến tính (vì $\frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$) nên có nghiệm tổng quát

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{4}$$

Trường hợp 2. $\Delta = p^2 - 4q = 0$, phương trình (3) có nghiệm thực kép là k ($k = k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$). Vậy phương trình (2) có một nghiệm riêng $y_1 = e^{kx}$. Ta tìm nghiệm riêng thứ hai theo công thức (9) mục 2.3.3:

$$y_2 = e^{kx} \int \frac{e^{-\int p dx}}{e^{2kx}} dx.$$

Vì $k = -\frac{p}{2}$, do đó

$$y_2 = e^{kx} \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = xe^{kx} = e^{kx} \int dx = xe^{kx}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (2) là

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{5}$$

Trường hợp 3. $\Delta = p^2 - 4q < 0$, phương trình (3) có cặp nghiệm phức liên hợp

$k_1 = \alpha + i\beta,\ \ k_2 = \alpha - i\beta,\ \ (\beta \neq 0)$ (trong đó i là đơn vị ảo $i^2 = -1$).

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\left[\cos\beta x + i\sin\beta x\right],$$
$$\tilde{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}\left[\cos\beta x - i\sin\beta x\right].$$

Vì tổ hợp tuyến tính của chúng cũng là nghiệm của phương trình (2) nên ta lấy

$$y_1 = \frac{1}{2}\left[\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2\right] = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}\left[\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\right] = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Các nghiệm này độc lập tuyến tính. Vậy nghiệm tổng quát của (2) có dạng

$$y = e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right]. \qquad (6)$$

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Giải: Phương trình đặc trưng

$$k^2 + 4k + 3 = 0,$$

có hai nghiệm $k_1 = -1, k_2 = -3$.

Vậy theo công thức (4), phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5.$$

Giải: Phương trình đặc trưng $k^2 - 10k + 25 = 0$ có nghiệm kép $k = 5$, do đó theo công thức (5), nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$$

Từ điều kiện ban đầu $y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$, mặt khác

$$y' = 5C_1e^{5x} + C_2e^{5x} + 5C_2xe^{5x},$$

nên $y'(0) = 5 \Rightarrow 5C_1 + C_2 = 6 \Rightarrow C_2 = 1,$

Vậy nghiệm cần tìm là $y = e^{5x}(1 + x)$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$y'' + 2y' + 4y = 0.$$

Giải: Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 4 = 0$ có các nghiệm phức $k = -1 \pm i\sqrt{3}$ (vì $\Delta' = -3 = 3i^2$).

Vậy theo công thức (6), phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x\right).$$

2.3.4.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng không thuần nhất

Ta đã biết nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 có dạng:

$$y = \overline{y} + y^*,$$

trong đó $\overline{y}$ là ngiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2) đã tìm được theo công thức (4), (5), (6); Nghiệm riêng y^* của (1) được tìm bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange.

Tuy vậy, khi vế phải $f(x)$ có dạng đặc biệt, ta có phương pháp khác để tìm nghiệm riêng y^* tiện lợi cho trường hợp hệ số hằng, đó là phương pháp *hệ số bất định*. Ta xét một số trường hợp sau:

Trường hợp 1. $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, trong đó α là hằng số thực, $P_n(x)$ là đa thức bậc n

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n.$$

Trong trường hợp này, nghiệm riêng y^* của (1) được tìm từ một trong các dạng sau:

$$y^* = \begin{cases} e^{\alpha x}Q_n(x) & \text{nếu } \alpha \text{ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3)} \\ xe^{\alpha x}Q_n(x) & \text{nếu } \alpha \text{ trùng với nghiệm đơn thực của phương trình đặc trưng (3)} \\ x^2e^{\alpha x}Q_n(x) & \text{nếu } \alpha \text{ trùng với nghiệm kép thực của phương trình đặc trưng (3)} \end{cases} \quad (7)$$

trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức cần được xác định, cùng bậc với $P_n(x)$:

$$Q_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n.$$

Các hệ số A_i, $i = \overline{0,n}$ được tìm bằng cách buộc y^* phải thỏa mãn phương trình (1), nghĩa là tính y^*', y^*'' thay vào (1), đồng nhất hai vế theo lũy thừa của x ta được hệ phương trình đại số tuyến tính $n+1$ phương trình $n+1$ ẩn $A_0, A_1, ..., A_n$. Giải ta được A_i, $i = \overline{0,n}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $y'' - y' - 2y = 4x^2$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - y' - 2y = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 - k - 2 = 0$ có nghiệm $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

+ Vế phải $f(x) = 4x^2$ ($\alpha = 0, n = 2$), ta có $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng cần tìm dưới dạng đa thức bậc hai (theo công thức (7)

$$y^* = Ax^2 + Bx + C.$$

Để xác định A, B, C ta tính

$$y^{*\prime} = 2Ax + B, \quad y^{*\prime\prime} = 2A.$$

Thế $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ vào phương trình đã cho, ta được

$$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (2A - 2B - 2C) = 4x^2.$$

Đồng nhất hệ số hai vế theo lũy thừa của x, ta được

$$\begin{cases} -2A = 4 \\ -2A - 2B = 0 \\ 2A - 2B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{A} = -2, \mathrm{B} = 2, \mathrm{C} = -3.$$

Do đó, phương trình đã cho có một nghiệm riêng $y^* = -2x^2 + 2x - 3$.

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \overline{y} + y^* =$$
$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

Ví dụ 5. Giải phương trình $y'' + y' = 2x^2 + 1$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y'' + y' = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 + k = 0$ có nghiệm $k_1 = 0, k_2 = -1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

+ Vế phải $f(x) = 2x^2 + 1$ ($\alpha = 0, n = 2$), ta có $\alpha = 0$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên theo công thức (7) nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y^* = x(Ax^2 + Bx + C),$$

hay

$$y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Để xác định A, B, C ta tính

$$y^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B.$$

Thế $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ vào phương trình đã cho, ta được

$$3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + C) = 2x^2 + 1.$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có

$$\begin{cases} 3A = 4 \\ 6A + 2B = 0 \\ 2B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{2}{3}, B = -2, C = 5.$$

Do đó, phương trình đã cho có một nghiệm riêng $y^* = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 5$.

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \overline{y} + y^* =$$

$$= C_1 + C_2e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - 2x + 5.$$

Ví dụ 6. Giải phương trình $y'' + 4y = e^{-2x}x$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y'' + 4y = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 + 4 = 0$ có nghiệm $k_{1,2} = \pm 2i$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

+ Vế phải $f(x) = e^{-2x}x$ ($\alpha = -2, n = 1$), ta có $\alpha = -2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên (theo công thức (7) nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y^* = e^{-2x}(Ax + B).$$

Lấy đạo hàm

$$y^{*\prime} = e^{-2x}(-2Ax + A - 2B),$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{-2x}(-4Ax - 4A + 4B).$$

Thế $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ vào phương trình đã cho, ta được

$$e^{-2x}(8Ax + 8B - 4A)) = e^{-2x}x.$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta có

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 8B - 4A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{8},\ B = \frac{1}{16}.$$

Do đó, phương trình đã cho có một nghiệm riêng $y^* = e^{-2x}\left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right)$.

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \overline{y} + y^* =$$

$$= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{-2x}\left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\right).$$

Ví dụ 7. Giải phương trình $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + y = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 1 = 0$ có nghiệm kép $k = -1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

+ Vế phải $f(x) = e^{-x}$ ($\alpha = -1, n = 0$), ta có $\alpha = -1$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên (theo công thức (7) nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y^* = Ax^2 e^{-x}.$$

Lấy đạo hàm

$$y^{*\prime} = Ae^{-x}(2x - x^2),$$

$$y^{*\prime\prime} = Ae^{-x}(2 - 4x + x^2).$$

Thế $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ vào phương trình đã cho, ta được

$$Ae^{-x}(0x^2 + 0x + 2) = e^{-x} \Leftrightarrow 2Ae^{-x} = e^{-x}.$$

Đồng nhất hệ số hai vế , ta có

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Do đó, phương trình đã cho có một nghiệm riêng $y^* = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$.

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \overline{y} + y^* =$$

$$= C_1 e^{x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}.$$

Ví dụ 8. Giải phương trình $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}(x-2)$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y'' - 2y' - 3y = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 - 2k - 3 = 0$ có nghiệm $k = -1$, $k = 3$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

+ Vế phải $f(x) = e^{2x}(x-2)$ ($\alpha = 2, n = 1$), ta có $\alpha = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên (theo công thức (7) nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y^* = e^{2x}(Ax + B).$$

Lấy đạo hàm

$$y^{*\prime} = e^{2x}(2Ax + A + 2B),$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B).$$

Thế $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ vào phương trình đã cho, ta được

$$e^{2x}(-3Ax - 3B + 2A) = e^{2x}(x-2).$$

Đồng nhất hệ số hai vế , ta có

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ 2A - 3B = -2 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3},\ B = -\frac{4}{9}.$$

Phương trình đã cho có một nghiệm riêng $y^* = e^{2x}\left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)$.

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = \overline{y} + y^* =$$

$$= C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + e^{2x}\left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right).$$

Ví dụ 9. Giải phương trình $y'' + y' + y = xe^{x} + 2e^{-x}$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y''+y'+y=0$, phương trình đặc trưng $k^2+k+1=0$ có nghiệm $k_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y}=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Vế phải $f(x)$ không có dạng đặc biệt, nhưng đặt $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ thì $f_1(x)$, $f_2(x)$ có dạng đặc biệt, cụ thể $f_1(x)=xe^x$ ($\alpha=1$, $n=1$), ta có $\alpha=1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, $f_2(x)=2e^{-x}$ ($\alpha=-1$, $n=0$), ta có $\alpha=-1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng cần tìm có dạng (nguyên lí xếp chồng nghiệm)

$$y^*=y_1^*+y_2^*=(Ax+B)e^x+Ce^{-x},$$

và $y^{*\prime}=(Ax+A+B)e^x-Ce^{-x}$, $y^{*\prime\prime}=(Ax+2A+B)e^x+Ce^{-x}$.

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$2Axe^x+(2A+2B)e^x+2Ce^{-x}=xe^x+2e^{-x}.$$

Đồng nhất hai vế, ta có

$$\begin{cases}2A=1\\2A+2B=0\\2C=2\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=1.$$

Do đó ta được một nghiệm riêng $y^*=\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)e^x+e^{-x}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$y=\bar{y}+y^*=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^x+e^{-x}.$$

Trường hợp 2. $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$, trong đó α, β là các hằng số thực, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức bậc n,m tương ứng. Trong trường hợp này nghiệm riêng y^* của phương trình (1) được tìm từ một trong các dạng sau:

a) $y^* = e^{\alpha x}\left[G_k(x)\cos\beta x + H_k(x)\sin\beta x\right]$ nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3). (8)

b) $y^* = xe^{\alpha x}\left[G_k(x)\cos\beta x + H_k(x)\sin\beta x\right]$ nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (3). (9)

Trong đó $G_k(x), H_k(x)$ là các đa thức bậc k với $k = \max\{m,n\}$ và

$$G_k(x) = A_0 + A_1x + ... + A_kx^k,\ H_k(x) = B_0 + B_1x + ... + B_kx^k,$$

các hệ số A_j, B_j, $j = \overline{0,k}$ được xác định bằng cách tính $y^{*'}$, $y^{*''}$. Thay vào phương trình (1), đồng nhất hai vế theo hai bước sau:

a) đồng nhất theo hệ số của $\cos\beta x$, $\sin\beta x$,

b) đồng nhất tiếp theo lũy thừa của x ta được hệ $2k+2$ phương trình với $2k+2$ ẩn để xác định A_j và B_j, $j = \overline{0,k}$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $y'' + 2y' - 3y = \cos x$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y'' + 2y' - 3y = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 + 2k - 3 = 0$ có nghiệm $k = 1$, $k = -3$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-3x}.$$

+Vế phải $f(x) = \cos x$ ($\alpha = 0, \beta = 1$, $m = 0, n = 0, k = \max\{m,n\} = 0$). Ta có $\alpha \pm \beta i = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên theo công thức (8) nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng

$$y^* = A\cos x + B\sin x.$$

Tính đạo hàm

$$y^{*'} = -A\sin x + B\cos x,$$

$$y^{*''} = -A\cos x - B\sin x.$$

Thế $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ vào phương trình đã cho, ta được

$$(-4A + 2B)\cos x + (-2A - 4B)\sin x = \cos x.$$

Đồng nhất hai vế theo hệ số của $\cos x$ và $\sin x$, ta được

$$\begin{cases} -4A+2B=1 \\ -2A-4B=0 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{5},\ B=\frac{1}{10}.$$

Do đó, phương trình đã cho có một nghiệm riêng $y^*=-\frac{1}{5}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$.

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y=\overline{y}+y^*=$$

$$=C_1e^x+C_2e^{3x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{1}{10}\sin x.$$

Ví dụ 11. Giải phương trình $y''+4y=e^x-\cos 2x$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y''+4y=0$, phương trình đặc trưng $k^2+4=0$ có nghiệm $k_{1,2}=\pm 2i$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Ta tìm nghiệm riêng $y^*=y_1^*+y_2^*$ (nguyên lí xếp chồng nghiệm).

+ Xét phương trình $y''+4y=e^x$ (*), vế phải $f_1(x)=e^x$ ($\alpha=1,\ n=0$), ta có $\alpha=1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên (theo công thức (7) nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y_1^*=Ae^x \Rightarrow y_1^{*\prime}=Ae^x, y_1^{*\prime\prime}=Ae^x.$$

Thế vào phương trình (*), ta được

$$5Ae^x=e^x \Rightarrow A=\frac{1}{5}.$$

Do đó, phương trình (*) có một nghiệm riêng $y_1^*=\frac{1}{5}e^x$.

+ Xét phương trình $y''+4y=-\cos 2x$ (**), vế phải $f_2(x)=-\cos 2x$

($\alpha=0,\beta=2,\ m=0,n=0,k=\max\{m,n\}=0$), ta có $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên theo công thức (9) nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y_2^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

hay

$$y_2^*=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x\,.$$

Tính đạo hàm

$$y_2^*{}'=(A+2Bx)\cos 2x+(-2Ax+B)\sin 2x,$$

$$y_2^*{}''=(-4Ax+4B)\cos 2x+(-4A-4Bx)\sin 2x.$$

Thế $y_2^*, y_2^*{}', y_2^*{}''$ vào phương trình (**), ta được

$$4B\cos 2x-4A\sin x=-\cos 2x\,.$$

Đồng nhất hai vế theo sin2x và cos2x, ta có

$$A=0,\ B=-\frac{1}{4}\,.$$

Do đó, phương trình (**) có một nghiệm riêng $y_2^*=-\frac{1}{4}x\sin 2x$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$y=\overline{y}+y^*=\overline{y}+y_1^*+y_2^*=$$

$$=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{5}e^x-\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Chú ý. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai dạng

$$(ax+b)^2y''+p(ax+b)y'+qy=f(x),$$

trong đó a,b,p,q ($a\neq 0$) là các hằng số, gọi là *phương trình Euler*. Trong trường hợp này ta đặt $ax+b=e^t$ nếu $ax+b>0$ và $ax+b=-e^t$ nếu $ax+b<0$, sẽ đưa phương trình trên về về phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số.

Chẳng hạn, xét phương trình

$$x^2y''+pxy'+qy=x^3,\ (*)$$

trong đó p,q là hằng số.

Đổi biến số

$$x = e^t \text{ với } x > 0 \text{ và } x = -e^t \text{ với } x < 0.$$

Giả sử $x = e^t$, ta có

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}.e^t = x\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

$$= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}.e^t = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Như vậy, ta có $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$, $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}$. Thế vào phương trình (*), ta được

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = e^{3t},$$

đây là phương trình tuyến tính có hệ số hằng biến số t đã biết cách giải.

Ví dụ 12. Giải phương trình $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x,\ x > 0$.

Giải: Đặt $x = e^t$, khi đó phương trình đã cho trở thành phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng số

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t \Rightarrow y = c_1e^t + c_2te^t + 2 + t.$$

Trở lại biến x ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1x + C_2x\ln x + 2 + \ln x.$$

2. 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

2.4.1. Hệ phương trình vi phân cấp một

Hệ n phương trình vi phân cấp một có dạng

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \qquad (1)$$

được gọi là *hệ chuẩn tắc*, trong đó x là biến độc lập, $y_1, y_2, ..., y_n$ là các ẩn hàm phải tìm .

Bài toán Cauchy đối với hệ (1): Tìm nghiệm $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ của hệ (1), thoả mãn điều kiện ban đầu

$$y_i(x_0) = y_i^0, \ i = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

trong đó $x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ là những số cho trước.

Định lý 2.4.1.(Về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy)

Giả sử các hàm số $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ cùng với các đạo hàm riêng $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., n$, liên tục trong miền $D \in \mathbf{R}^{n+1}$, $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in D$. Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$, bài toán Cauchy (1)-(2) *có một nghiệm duy nhất.*

Tập hợp n hàm số

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \ i = 1, 2, ..., n, \qquad (3)$$

trong đó $C_1, C_2, ..., C_n$ là các hằng số tuỳ ý, được gọi là *nghiệm tổng quát* của hệ (1) nếu (3) :

+ là nghiệm của hệ phương trình vi phân (1) với mọi $C_1, C_2, ..., C_n$,

+ với mọi điểm $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0) \in D$, hệ phương trình

$$y_i^0 = y_i(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \ i = 1, 2, ..., n$$

giải ra được đối với các hằng số $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$. (Xem [4]).

Cách giải hệ phương trình vi phân

Từ hệ (1), ta đưa về một phương trình vi phân đối với một ẩn hàm bằng cách khử những ẩn hàm chưa biết còn lại của hệ (1) được một phương trình cấp cao. Giải phương trình vi phân cấp cao đó, sau đó tìm những ẩn hàm chưa biết còn lại. Phương pháp đó gọi là *phương pháp khử*.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y_1' = \cos x - y_2, \\ y_2' = 4\cos x - \sin x + 3y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

Giải: Lấy đạo hàm phương trình thứ nhất theo x

$$y_1'' = -\sin x - y_2',$$

kết hợp với phương trình thứ hai, ta có

$$y_1'' = -\sin x - 4\cos x + \sin x - 3y_1 + 4y_2 =$$

$$= -4\cos x - 3y_1 + 4y_2.$$

Để khử y_2, ta thay $y_2 = \cos x - y_1'$ (từ phương trình thứ nhất), ta được

$$y_1'' + 4y_1' + 3y_1 = 0,$$

là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai đối với y_1 hệ số hằng số. Giải phương trình này, ta được nghiệm tổng quát là

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Từ hệ thức $y_2 = \cos x - y_1'$, ta có $y_2 = \cos x - C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \\ y_2 = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} + \cos x. \end{cases}$$

2.4.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một với hệ số hằng

Đối với hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một hệ số hằng có nhiều phương pháp để giải. Sau đây ta sẽ trình bày một phương pháp, gọi là *phương pháp Euler*. Không mất tính tổng quát, ta xét hệ ba phương trình, ba ẩn hàm x, y, z, biến số độc lập t

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases} \qquad (1)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của hệ (1) dưới dạng

$$x = \alpha e^{\lambda t},\ y = \beta e^{\lambda t},\ z = \gamma e^{\lambda t}, \qquad (2)$$

trong đó các hằng số α, β, γ, λ cần được xác định sao cho (2) là nghiệm của (1). Thay (2) vào (1), ta được

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-\lambda)\gamma = 0.\end{cases} \tag{3}$$

Hệ (3) là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Đẳng thức (4) là một phương trình bậc ba đối với λ và nó được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ (1). Nghiệm của nó gọi là *giá trị riêng* của hệ.

Ta hạn chế xét phương trình (4) có 3 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Thay lần lượt vào phương trình (3), với mỗi giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tương ứng ta được nghiệm của hệ (3) là $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Khi đó nghiệm của hệ (1) được viết dưới dạng

$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\alpha_3 e^{\lambda_3 t}, \\ y(t) = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\beta_3 e^{\lambda_3 t}, \\ z(t) = C_1\gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\gamma_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm nghiệm tổng quát của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Giải: Lập phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

+ Với $\lambda_1 = 1$ ta có hệ $\begin{cases}(-1-1)\alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + (4-1)\beta = 0\end{cases}$, thực chất ta chỉ có một phương trình $\alpha + \beta = 0$. Ta lấy $\alpha = 1, \beta = -1$, khi đó với $\lambda_1 = 1$ ta có các nghiệm riêng $x_1 = e^t, y_1 = -e^t$.

+ Tương tự với $\lambda_2 = 2$ ta có các nghiệm riêng $x_2 = 2e^{2t}, y_2 = -3e^{2t}$.

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases}x = C_1e^t + 2C_2e^{2t}, \\ y = -C_1e^t - 3C_2e^{2t}.\end{cases}$$

BÀI TẬP GIẢI SẴN

Bài 1. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$\text{cotan}y dx - x\ln x dy = 0.$$

Giải: Nếu $x\ln x \neq 0,\ \cos y \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{dx}{x\ln x} - \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0,$$

đây là phương trình phân ly biến số. Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int\frac{dx}{x\ln x} - \int\frac{\sin y}{\cos y}dy = \ln|C|,\ C \neq 0,$$

do đó, tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\ln|\ln x| + \ln|\cos y| = \ln|C| \quad \text{hay} \quad \ln x.\cos y = C.$$

Bài 2. Giải phương trình

$$y' = \frac{1}{2x+y}.$$

Giải: Đặt $z = 2x + y$, ta có $z' = 2 + y'$ hay $y' = z' - 2$, thay vào phương trình đã cho, ta được

$$z' - 2 = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z' = \frac{2z+1}{z}.$$

Nếu $z \neq -\dfrac{1}{2}$, ta có

$$dx = \frac{zdz}{2z+1},$$

đây là phương trình vi phân với biến số phân ly. Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int dx = \int \frac{zdz}{2z+1} + C_1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\ln|2z+1| + C_1,$$

hay $\ln|4x+2y+1| = 2y + \ln|C|$, $\ln|C| = 4C_1 \Rightarrow 4x+2y+1 = Ce^{2y}$.

Nếu $z = -\frac{1}{2}$ thì $2x + y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -2x - \frac{1}{2}$ cũng là nghiệm (vì nó thỏa mãn phương trình đã cho).

Vậy phương trình đã cho có tích phân tổng quát $4x+2y+1 = Ce^{2y}$ và một nghiệm $y = -2x - \frac{1}{2}$ (nghiệm kỳ dị).

Bài 3. Bằng cách đặt $y = u.x$, hãy giải phương trình sau $xy' = y + \frac{x^5e^x}{4y^3}$ với điều kiện ban đầu $y(1) = 1$.

Giải: Điều kiện $x \neq 0$, $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^4e^x}{4y^3}$ (*). Đặt $y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$.

Thay vào phương trình (*), ta được

$$u' = \frac{e^x}{4u^3} \Rightarrow 4u^3du = e^xdx.$$

Đó là phương trình biến số phân ly, giải ta được

$$u^4 = e^x + C \Rightarrow y^4 = x^4\left(e^x + C\right),$$

Với điều kiện $y(1) = 1$, ta có $C = 1 - e$.

Vậy nghiệm cần tìm là $y^4 = x^4\left(e^x + 1 - e\right)$.

Bài 4. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

Giải: Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$y' = \frac{y}{x} + sign(x)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad , \quad (*)$$

đây là phương trình đẳng cấp. Đặt $\frac{y}{x} = u$, ta có

$$x\frac{du}{dx} + u = u + sign(x)\sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow sign(x)\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \ (u \neq 1).$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$sign(x)\ln|x| = \arcsin u - C \Rightarrow \arcsin u = sign(x)\ln|x| + C.$$

Thay $u = \frac{y}{x}$, phương trình đã cho có tích phân tổng quát của là

$$\arcsin\frac{y}{x} = sign(x)\ln|x| + C.$$

(Khi $y = x$ thì từ (*) ta có $y' = 1$, nên $y = x$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho).

Bài 5. Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$\frac{dx}{x^2 - 4xy} + \frac{dy}{7x^2 - 2xy + 6y^2} = 0.$$

Giải: Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$y' = \frac{7 - 2\left(\frac{y}{x}\right) + 6\left(\frac{y}{x}\right)^2}{4\left(\frac{y}{x}\right) - 1}, \quad (*)$$

đây là phương trình đẳng cấp. Đặt $\frac{y}{x} = u$, ta có $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$.

Thay vào phương trình (*), ta được

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2u^2 - u + 7}{4u - 1} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{4u - 1}{2u^2 - u + 7}du,$$

đây là phương trình biến số phân ly. Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{4u-1}{2u^2-u-7}du - \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{d(2u^2-u-7)}{2u^2-u-7} - \ln|C|$$

hay

$$\ln|x| = \ln|2u^2-u-7| - \ln|C| \Leftrightarrow x = \frac{2u^2-u-7}{C}.$$

Từ đó suy ra tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$2y^2 - xy + 7x^2 = Cx^3.$$

Bài 6. Giải phương trình $(x+2)(y'+1) = y$.

Giải: Nếu $x+2 \neq 0$, phương trình đã cho được viết lại dưới dạng

$$(x+2)y' - y = -(x+2) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x+2}y = -1$$

là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

Xét phương trình thuần nhất

$$y' - \frac{1}{x+2}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2},$$

có nghiệm $y = C(x+2)$.

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dưới dạng $y = C(x).(x+2)$.

Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$C'(x).(x+2) = -1 \Rightarrow C'(x) = \frac{-1}{x+2} \Rightarrow C(x) = -\ln|x+2| + \mathcal{C}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là

$$x = (\mathcal{C} - \ln|x+2|)(x+y).$$

Chú ý rằng $x = -2$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 7. Giải phương trình vi phân $y' = 3\left(2xe^{-3x} - y\right)$.

Giải: Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng tương đương $y' + 3y = 6xe^{-3x}$ (*), đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

Phương trình thuần nhất $y'+3y=0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y}=-3dx$ có nghiệm tổng quát $y=Ce^{-3x}$.

Xem $C=C(x)$, ta có $y=C(x)e^{-3x}$. Thay vào phương trình (*) ta có $C'e^{-3x}=6xe^{-3x} \Rightarrow C'=6x \Rightarrow C=3x^2+\mathcal{C}$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=\left(3x^2+\mathcal{C}\right)e^{-3x}.$$

Bài 8. Giải phương trình vi phân $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{2}{x^2\cos x}$.

Giải:+Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}y=0$ là $y=\dfrac{C}{x^2}$, C là hằng số.

+ Coi $C=C(x)$, ta có $y=\dfrac{C(x)}{x^2}$. Thay vào phương trình đã cho ta có

$$C'\frac{1}{x^2}=\frac{2}{x^2\cos x} \Rightarrow C'=\frac{2}{\cos x} \Rightarrow C=\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+\mathcal{C}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y=\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+\mathcal{C}\right]\frac{1}{x^2}.$$

Bài 9. Giải phương trình $2ydx+(y^2-6x)dy=0$ với $y(1)=1$.

Giải: Nếu $y\neq 0$, phương trình đã cho được viết lại dưới dạng tương đương

$$\frac{dx}{dy}+\frac{y^2-6x}{2y}=0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}, (*)$$

đây là phương trình tuyến tính cấp một đối với ẩn hàm x.

+ Phương trình thuần nhất $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{3}{y}x=0$ có nghiệm tổng quát $x=Cy^3$.

+ Coi $C=C(y)$, ta có $x=C(y)y^3$. Thay vào phương trình (*), ta được

$$C'=-\frac{1}{2y^2} \Rightarrow C=\frac{1}{2y}+\mathcal{C}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $x = \left(\frac{1}{2y} + C\right)y^3$.

Vì $y(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Vậy nghiệm cần tìm là $x = \frac{y^2}{2}(1+y)$.

Bài 10. Giải phương trình $\quad xy' + y = y^2 \ln x$.

Giải: Phương trình đã cho có dạng Bernoulli. Nếu $y \neq 0$, phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x}. \quad (*)$$

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$, thay vào (*), ta được $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$ đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với z. Theo công thức (3), mục 2.2.4, ta được $z = 1 + \ln x + Cx$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là $y = \frac{1}{1 + \ln x + Cx}$.

Ngoài ra $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 11. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx}x^3 \sin y + 2y = x\frac{dy}{dx}.$$

Giải: Viết phương trình đã cho dưới dạng tương đương

$$x^3 \sin y + 2y\frac{dx}{dy} = x \Leftrightarrow 2y\frac{dx}{dy} - x = -x^3 \sin y, (*)$$

ta được phương trình Bernoulli với hàm x, biến y. Chia hai vế phương trình (*) cho x^3, $(x \neq 0)$ ta được

$$2yx^{-3}\frac{dx}{dy} - x^{-2} = -\sin y.$$

Đặt $z = x^{-2} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy}$ ta được phương trình tuyến tính

$$y\frac{dz}{dy} + z = \sin y \text{ hay } \frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = \frac{\sin y}{y}, \ (y \neq 0).$$

Tính theo công thức (3), mục 2.2.4 ta được

$$z = \frac{C - \cos y}{y} \Rightarrow x^{-2} = \frac{C - \cos y}{y} \Rightarrow y = (C - \cos y)x^2.$$

Chú ý rằng $y = 0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 12. Giải phương trình

$$(3x^2y + x^3)dx - (y^3 - x^3)dy = 0.$$

Giải: Đặt $P = 3x^2y + x^3$, $Q = -y^3 + x^3$, ta có $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ với $\forall(x, y)$, nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$, theo công thức (7), mục 2.2.6 ta có tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\int_0^x (x^3)dx - \int_0^y (y^3 - x^3)dy = C,$$

hay

$$\frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} + x^3y = C.$$

Bài 13. Giải phương trình vi phân

$$(x + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

với điều kiện y (0) = 2.

Giải: Ta có $P = x + e^{x/y}, Q = e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$. Do $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$ với $\forall(x, y)$, $y \neq 0$, nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Tính $u(x, y)$ (lấy $x_0 = 0, y_0 = 1$), theo công thức (7), mục 2.2.6 ta có

$$u(x, y) = \int_0^x \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \int_1^y dy = \left(\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}}\right)\Bigg|_0^x + y\Bigg|_1^y = \frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} - 1.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} - 1 = C.$$

Khi $x = 0, y = 2$, ta có $\frac{x^2}{2} + ye^{\frac{x}{y}} - 1 = 2$.

Bài 14. Tìm hàm số $h(x)$ sao cho phương trình

$$h(x)\left[(y + \cos y)dx + (1 - \sin y)dy\right] = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(x)$ tìm được.

Giải: Đặt $P(x,y) = h(x).(y + \cos y)$, $Q(x,y) = h(x).(-\sin y + 1)$, chúng liên tục cùng với các đạo hàm riêng trên $\mathbf{R}^2$ nếu $h(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$.

Để phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần thì

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow h' = h, \ \left(y \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right) \Rightarrow h = Ce^x,\ C \neq 0.$$

Với $h = Ce^x$, ta có phương trình vi phân toàn phần

$$e^x(y + \cos y)dx + e^x(1 - \sin y)dy = 0. \ (*)$$

Chọn $(x_0, y_0) = (0;0)$, khi đó

$$\int_0^x e^x dx + \int_0^y e^x(1 - \sin y)dy = C,$$

$$e^x\Big|_0^x + e^x(y + \cos y)\Big|_0^y = C,$$

$$e^x - 1 + e^x(y + \cos y) - e^x = C.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình (*) là

$$e^x(y + \cos y) - 1 = C.$$

Bài 15. Tìm hàm số $h(y)$ sao cho phương trình

$$h(y)\left[(1 - \sin x)dx + (\cos x + x)dy\right] = 0,$$

là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(y)$ tìm được.

Giải: Đặt $P(x,y) = h(y)(1 - \sin x), Q(x,y) = h(y)(\cos x + x)$. $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trên $\mathbf{R}^2$ nếu $h(y)$ liên tục trên $\mathbf{R}$.

Để phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần thì

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Leftrightarrow h'=h,\ \left(x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)\Leftrightarrow h=Ce^{y},\ C\neq 0.$$

Với $h=Ce^{y}$, ta có phương trình vi phân toàn phần

$$e^{y}\left(1-\sin x\right)dx+e^{y}\left(x+\cos x\right)dy=0.\ (*)$$

Chọn $(x_0,y_0)=(0;0)$, khi đó

$$\int_0^y e^{y}dy+\int_0^x e^{y}\left(1-\sin x\right)dx=\mathcal{C}.$$

Vậy $e^{y}-1+e^{y}\left(x+\cos x\right)=\mathcal{C}$ là tích phân tổng quát của phương trình đã cho.

Bài 16. Giải phương trình

$$(3y^2-x)dx+2y(y^2-3x)dy=0$$

bằng cách tìm thừa số tích phân $h(t),\ t=y^2+x$.

Giải: Đặt $P\left(x,y\right)=h(t)(3y^2-x),\ \ Q(x,y)=h(t)2y(y^2-3x),\ \ t=y^2+x$.

Để phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần thì

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.\ (*)$$

Mà

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-6y.h+2y(y^2-3x).h_t'.t_x'=$$

$$=-6y.h+2y(y^2-3x).h_t'$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6y.h+(3y^2-x).h_t'.t_y'=$$

$$=6y.h+2y(3y^2-x).h_t'.$$

Từ điều kiện (*) suy ra

$$h_t'(4y^3+4xy)=-12hy\Leftrightarrow\frac{dh}{dt}=-\frac{3h}{t}\Leftrightarrow\frac{dh}{h}=-\frac{3dt}{t},$$

đây là phương trình biến số phân ly với ẩn hàm h đối số t. Giải ta được $h=\dfrac{C}{t^3}$ hay $h=\dfrac{C}{(y^2+x)^3},\ \ C\neq 0$ là hàm cần tìm.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình vi phân toàn phần sau

$$\frac{3y^2 - x}{(y^2 + x)^3}dx + \frac{2y(y^2 - 3x)}{(y^2 + x)^3}dy = 0 . (*)$$

Chọn $(x_0, y_0) = (0;1)$. khi đó

$$\int_0^x \frac{3y^2 - x}{(y^2 + x)^3}dx + \int_1^y \frac{2}{y^5}dy = C,$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{4y^2}{(y^2 + x)^3} + \frac{-1}{(y^2 + x)^2} \right)dx + \int_1^y \frac{2}{y^5}dy = C,$$

$$\Rightarrow -\left[2y^2(y^2 + x)^{-2} - (y^2 + x)^{-1} \right]\Big|_0^x + \frac{2}{-4}y^{-4}\Big|_1^y = C,$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình (*) là

$$-\frac{1}{2y^4} + \frac{1}{2} - \frac{2y^2}{(y^2 + x)^2} + \frac{1}{y^2 + x} + \frac{1}{y^2} = C .$$

Bài 17. Giải phương trình $x(1 + xy)dy - ydx = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân.

Giải: Đặt $P = -y,\ Q = x(1 + xy)$, ta có

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{x(1 + xy)} = -\frac{2}{x} .$$

Sử dụng công thức (12), mục 2.2.6 ta được thừa số tích phân

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} .$$

Nhân hai vế phương trình đã cho với $\frac{1}{x^2}$, ta được

$$\left(\frac{1 + xy}{x} \right)dy - \frac{y}{x^2}dx = 0 ,$$

là phương trình vi phân toàn phần. Ta có thể viết nó dưới dạng

$$d\left(\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}\right)=0.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là $\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=C$.

Bài 18. Giả sử y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm riêng khác nhau của phương trình vi phân $y'+p(x)y=q(x)$. Trong đó $p(x).q(x)$ là các hàm số liên tục khoảng $(-\infty;+\infty)$. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{y_2-y_1}{y_1-y_3}$ không phụ thuộc vào biến x.

Giải: Theo giả thiết y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm riêng khác nhau phương trình $y'+p(x)y=q(x)$, nên ta có

$$y_2'-y_1'+p(x)\left(y_2-y_1\right)=0\Rightarrow y_2-y_1=C_1e^{-\int p(x)dx},$$

$$y_1'-y_3'+p(x)\left(y_1-y_3\right)=0\Rightarrow y_1-y_3=C_2e^{-\int p(x)dx},$$

do đó $\frac{y_2-y_1}{y_1-y_3}=\frac{C_1}{C_2}=const$ không phụ thuộc x.

Ta cũng có thể viết

$$y_1=e^{-\int p(x)dx}\left(C_1+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

$$y_2=e^{-\int p(x)dx}\left(C_2+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

$$y_3=e^{-\int p(x)dx}\left(C_3+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 19. Cho phương trình tuyến tính $y'+ky=q(x)$, trong đó k là số thực, $q(x)$ là hàm số liên tục theo biến x và có giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to+\infty}q(x)=b$. Chứng minh rằng nếu $k>0$ thì mọi nghiệm của phương trình trên đều dẫn tới $\frac{b}{k}$ khi $x\to+\infty$; nếu $k<0$ thì chỉ có một nghiệm có tính chất như vậy. Hãy tìm nghiệm đó.

Giải: Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho trong đoạn $[0;x]$ viết được dưới dạng

$$y(x)=\frac{y(0)+\int_0^x q(t)e^{kt}dt}{e^{kx}}\ (*).$$

Ta xét các trường hợp :

+ Trường hợp $k>0$, nếu $b\neq 0$ áp dụng quy tắc L'Hopital ta có

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\frac{b}{k}.$$

Nếu $b=0$ áp dụng định nghĩa giới hạn: $\forall\varepsilon>, \exists M>0,$ nếu $x>M\Rightarrow |q(x)|<\varepsilon$. Khi đó với x đủ lớn thì

$$|y(x)|=\left|\frac{y(0)+\int_0^x q(t)e^{kt}dt}{e^{kx}}\right|<\left|\frac{y(0)+\varepsilon\int_0^x e^{kt}dt}{e^{kx}}\right|=\left|\frac{y(0)}{e^{kx}}+\frac{+\frac{\varepsilon}{k}\left(e^{kx}-1\right)}{e^{kx}}\right|<\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon'$$

do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

+ Trường hợp $k<0$, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx}=0$. Để $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{b}{k}$ thì

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y(0)+\int_0^x q(t)e^{kt}dt\right]=0,$$

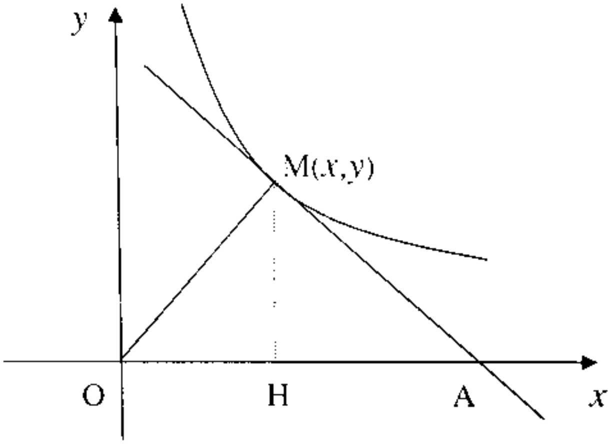
do đó $y(0)=\int_{+\infty}^0 q(t)e^{kt}dt$ (**). Khi $k<0$ thì (**) hội tụ. Thay (**) vào (*), ta được $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{b}{k}$, tồn tại duy nhất. (Kiểm chứng nhờ quy tắc L'Hopital

$$y(x)=\int_{+\infty}^x q(t).e^{k(t-x)}dt.$$

Bài 20. Tìm đường cong sao cho tam giác xác định sau đây có diện tích không đổi a^2: các cạnh của tam giác là trục hoành Ox, tiếp tuyến của đường cong và đoạn thẳng nối tiếp điểm với gốc toạ độ O (Hình 2.3).

Giải: Phương trình tiếp tuyến MA của đường cong

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$



Hình 2.3

Với $M(x,y)$ là tiếp điểm, $A(x_0,y_0)$ là giao điểm của tiếp tuyến và trục hoành Ox, thì khi đó

$$x_0 = \frac{xy'-y}{y'},\ y_0 = 0.$$

Do đó diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}MH.OA = \frac{1}{2}yx_0 = a^2,$$

hay $\frac{1}{2}y\left(\frac{xy'-y}{y'}\right) = a^2$, ta có phương trình vi phân

$$xyy' - y^2 = 2a^2y' \text{ hay } xy - 2a^2 = y^2\frac{dx}{dy}.$$

Với $y \neq 0$, ta có $x' - \frac{1}{y}x = -\frac{2a^2}{y^2}$, đây là phương trình vi phân tuyến tính đối với x. Giải ra ta có

$$x = y\left(\frac{a^2}{y^2} + C\right).$$

Bài 21. Giải phương trình $y'' - \dfrac{y'}{x-1} - (x-1)x = 0$, với $y(2) = 1, y'(2) = -1$.

Giải: Phương trình đã cho là phương trình vi phân cấp hai dạng khuyết y. Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = p'$. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$p' - \frac{1}{x-1}p = x(x-1) \text{ (phương trình tuyến tính cấp 1).}$$

Giải phương trình trên ta được $p = (x-1)\left(C_1 + \dfrac{x^2}{2}\right)$, mà $y' = p$ nên

$$y' = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1 x - C_1 \Rightarrow y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} - C_1 x + C_2.$$

Kết hợp điều kiện $y(2) = 1, y'(2) = -1$, ta có $C_1 = -3,\ C_2 = \dfrac{1}{3}$.

Vậy nghiệm cần tìm là

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - 3\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}.$$

Bài 22. Giải phương trình $2yy'' - y'^2 = 1$, với điều kiện $y(1) = 1,\ \ y'(1) = 1$.

Giải: Phương trình đã cho là phương trình vi phân cấp hai dạng khuyết x. Đặt $y' = p,\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, ta có

$$p\frac{dp}{dy} - \frac{1}{2y}p^2 = \frac{1}{2y},\ (*)$$

đây là phương trình Bernoulli. Đặt $p^2 = z \Rightarrow 2p\dfrac{dp}{dy} = z'$, ta được

$$z' - \frac{1}{y}z = \frac{1}{y}, \text{ (phương trình tuyến tính cấp một).}$$

Giải ra ta được $z = \left(-\dfrac{1}{y} + C_1\right)y$, mà $p^2 = y'^2 = z$.

Kết hợp $y'(1) = 1,\ y(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow y'^2 = 2y - 1$.

Vì $y'(1) = 1 > 0 \Rightarrow y' = \sqrt{2y-1} \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{\sqrt{2y-1}} \Rightarrow x = \sqrt{2y-1} + C_2$.

Kết hợp $y(1) = 1 \Rightarrow C_2 = 0$.

Vậy nghiệm cần tìm là $y = \dfrac{x^2+1}{2}$.

Bài 23. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$(1+x)x^2y'' - (1+2x)xy' + (1+2x)y = 0,$$

biết một nghiệm của nó là $y_1 = x$.

Giải: $x = 0$, $x = -1$ không là nghiệm của phương trình.

Nếu $(1+x)x \neq 0$, phương trình đã cho được viết lại dưới dạng tương đương

$$y'' - \frac{(1+2x)}{(1+x)x}y' + \frac{(1+2x)}{(1+x)x^2}y = 0.$$

Biết một nghiệm riêng $y_1 = x$, khi đó một nghiệm riêng khác được tìm dưới dạng $y_2 = u.y_1$, trong đó $u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$ (công thức (9) định lí 2.3.5),

ta có $\tilde{u} = \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} = \dfrac{1}{x^2} e^{\int \frac{(1+2x)}{(1+x)x}dx} = \dfrac{1}{x^2} e^{\int\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}\right)dx} = \dfrac{1}{x^2}(1+x)x = \dfrac{1}{x} + 1$,

nên $u = \int \tilde{u}dx = \int\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)dx = \ln|x| + x \Rightarrow y_2 = x\ln|x| + x^2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x + C_2\left(x\ln|x| + x^2\right).$$

Bài 24. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$y'' + y'\tan x - y\cos^2 x = 0,$$

biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $y = e^{\alpha.\sin x}$, với α là tham số cần xác định.

*Giải:*Từ $y = e^{\alpha\sin x} \Rightarrow y' = \alpha\cos x e^{\alpha\sin x}$, $y'' = \alpha e^{\alpha\sin x}(\alpha\cos x - \sin x)$. Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$\left(\alpha^2 - 1\right)\cos^2 x = 0,\ \forall x \Rightarrow \alpha = \pm 1.$$

Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm $y_1 = e^{-\sin x}$ và $y_2 = e^{\sin x}$, mà y_1, y_2 độc lập tuyến tính. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 e^{\ \sin x} + C_2 e^{\sin x}.$$

Bài 25. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$\left(2x - x^2\right) y'' + 2\left(x - 1\right) y' - 2y = -2.$$

biết rằng nó có hai nghiệm riêng là $y_1 = 1$, $y_2 = x$.

Giải: Xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$\left(2x - x^2\right) y'' + 2\left(x - 1\right) y' - 2y = 0. \ (*)$$

Theo giả thiết $y_1 = 1$, $y_2 = x$ là hai nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho, do đó $Y_1 = y_1 - y_2 = 1 - x$ là một nghiệm của phương trình thuần nhất (*) (Kiểm tra bằng cách thay trực tiếp vào phương trình thuần nhất (*)).

Ta viết lại phương trình (*) dưới dạng

$$y'' + \frac{2\left(x-1\right)}{2x - x^2} y' - \frac{2}{2x - x^2} y = 0. \ (**)$$

Áp dụng công thức (9) định lí 2.3.5, ta tìm nghiệm riêng Y_2 của (*)

$$Y_2 = Y_1 \int \frac{1}{Y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Ta có

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{2(x-1)}{2x-x^2}dx} = e^{\int \frac{d(2x-x^2)}{2x-x^2}} = 2x - x^2,$$

và

$$\int \frac{1}{Y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx = \int \frac{2x - x^2}{(x-1)^2} dx = -\int \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= -\int \left(1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = -\left(x + \frac{1}{x-1}\right) = -\frac{x^2 - x + 1}{x-1},$$

khi đó $Y_2 = -(x-1)\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -(x^2 - x + 1)$.

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$\overline{y} = C_1Y_1 + C_2Y_2 = C_1(x-1) + C_2(x^2 - x + 1).$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \overline{y} + y^*$, trong đó y^* là một nghiệm riêng của nó có thể chọn là $y^*_1 = 1$ hoặc $y^*_2 = x$, vậy

$$y = C_1(x-1) + C_2(x^2 - x + 1) + 1$$

Bài 26. Giải phương trình $x^2y'' - 3xy' + 4y = x\ln x$ bằng cách đặt $x = e^t$.

Giải: Do $x > 0$, ta có $t = \ln x$ ta có phương trình vi phân trở thành

$$y''_{tt} - 4y'_t + 4y = e^t t \quad (*).$$

+ Xét phương trình thuần nhất y''−4y'+4y = 0, phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$

có nghiệm kép $k = 2$, khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = \left(C_1 + C_2t\right)e^{2t}.$$

+ Vế phải $f_1(t) = e^t t$ ($\alpha = 1, n = 1$), ta có $\alpha = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên (theo công thức (7), mục 2.3.4) nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y^* = e^t(At + B) \Rightarrow y^{*\prime} = e^t(At + A + B), y^{*\prime\prime} = e^t(At + 2A + B).$$

Thế vào phương trình (*), ta được

$$A = 1, B = 2 \;\Rightarrow y^* = e^t(t + 2)$$

Phương trình (*) có nghiệm tổng quát

$$y = \overline{y} + y^* = \left(C_1 + C_2t\right)e^{2t} + e^t(t + 2).$$

Do $e^t = x$ nên phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là

$$y = \left(C_1 + C_2\ln x\right)x^2 + x(\ln x + 2).$$

Bài 27 **.** Giải phương trình $y'' - y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Giải: Xét phương trình thuần nhất $y'' - y = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0$ có nghiệm $k = \pm 1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1e^{x} + C_2e^{-x}.$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho được tìm dưới dạng $y^* = C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{-x}$, trong đó $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ được xác định từ hệ

$$\begin{cases} C_1'e^{x} + C_2'e^{-x} = 0, \\ C_1'e^{x} - C_2'e^{-x} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}. \end{cases}$$

Giải hệ trên và tích phân ta được

$$C_1(x) = \frac{1}{2}[x - \ln(e^{x}+1)],\ C_2(x) = -\frac{1}{2}[x - \ln(e^{x}+1)].$$

Khi đó

$$y^* = \frac{1}{2}e^{x}[x - \ln(e^{x}+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[x - \ln(e^{x}+1)].$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}[x - \ln(e^{x}+1)] - \frac{1}{2}e^{-x}[x - \ln(e^{x}+1)]$$

Bài 28. Giải phương trình vi phân $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Giải: Xét phương trình thuần nhất $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$, khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất đã cho được tìm dưới dạng $y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, trong đó $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$ được xác định từ hệ

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0 \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $C_1' = -1$, $C_2' = \dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow C_1 = -x,\ C_2 = \ln|\sin x|$.

Khi đó

$$y^* = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|.$$

Bài 29. Giải phương trình $y'' + 2y' + y = e^{-x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Giải: Ta có

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} + \frac{1}{x}e^{-x}.$$

Xét phương trình thuần nhất $y'' + 2y' + y = 0$, có phương trình đặc trưng

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = -1,$$

do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$.

Nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất được tìm theo nguyên lí xếp chồng nghiệm $y^* = y_1^* + y_2^*$.

+ Xét phương trình $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ (*), do $\alpha = -1$ trùng với nghiệm kép của phương trình đặc trưng, $n = 0$, ta có nghiệm riêng dạng

$$y_1^* = Ax^2e^{-x} \Rightarrow y_1^{*}{}' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x} = \left(2Ax - Ax^2\right)e^{-x},$$

$$y_1^{*}{}'' = \left(2A - 2Ax\right)e^{-x} - \left(12Ax - Ax^2\right)e^{-x} = \left(2A - 4Ax + Ax^2\right)e^{-x}.$$

Thay vào phương trình (*), ta được

$$\left(2A - 4Ax + Ax^2\right)e^{-x} + 2\left(2Ax - Ax^2\right)e^{-x} + Ax^2e^{-x} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \left(2A + 0x + 0x^2\right)e^{-x} = e^{-x},$$

đồng nhất hệ số hai vế, ta có $2A = 1 \Leftrightarrow \mathrm{A} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y_1^* = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$.

+ Xét phương trình $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$. Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $y_2^* = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$, trong đó $C_1(x)$ $C_2(x)$ được xác định từ hệ

$$\begin{cases} e^{-x}C_1' + xe^{-x}C_2' = 0 \\ -e^{-x}C'_1 + (1-x)e^{-x}C_2' = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + xC_2' = 0, & (1) \\ = C_1' + (1-x)C_2' = \dfrac{1}{x}, & (2) \end{cases}$$

Từ $(1)+(2) \Rightarrow C_2' = \dfrac{1}{x} \Rightarrow C_2 = \ln|x|$.

$\Rightarrow C_1' + 1 = 0 \Rightarrow C_1 = -x$. Như vậy $y_2^* = -xe^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + y^* = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|.$$

Bài 30. Giải phương trình vi phân $y'' - 5y' + 4y = 3xe^{4x} + 2\sin x$.

Giải: + Phương trình thuần nhất tương ứng là $y'' - 5y' + 4y = 0$ (*), phương trình đặc trưng

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 4.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{4x}.$$

Nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất được tìm theo nguyên lí xếp chồng nghiệm $y^* = y_1^* + y_2^*$.

+ Xét phương trình $y'' - 5y' + 4y = 3xe^{4x}$. (**)

Do $\alpha = 4$ trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng, $n = 1$ nên nghiệm riêng có dạng

$$y_1^* = (Ax + B)xe^{4x}$$
$$= (Ax^2 + Bx)e^{4x},$$

tính

$$y_1^{*}{}' = e^{4x}\left[4Ax^2 + (4B + 2A)x + B\right],$$
$$y_1^{*}{}'' = e^{4x}\left[16Ax^2 + (16A + 16B)x + (8B + 2A)\right].$$

Thay vào phương trình (**) ta có: $6Ax + 2A + 3B = 3x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A = 3 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y_1^* = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^{4x}.$$

+ Xét phương trình $y'' - 5y' + 4y = 2\sin x$. (***)

Vì $\alpha \pm i\beta = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, $n = 0, m = 0$ nên nghiệm riêng có dạng

$$y_2^* = A\sin x + B\cos x,$$

tính

$$y_2^*{}' = A\cos x - B\sin x.$$

$$y_2^*{}'' = -A\sin x - B\cos x.$$

Thay vào (***) ta có $(3A + 5B)\sin x + (3B - 5A)\cos x = 2\sin x$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A + 5B = 2 \\ -5A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3}{17} \\ B = \dfrac{5}{17} \end{cases} \Rightarrow y_2^* = \frac{1}{17}(3\sin x + 5\cos x).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1e^x + C_2e^{4x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^{4x} + \frac{1}{17}(3\sin x + 5\cos x).$$

Bài 31. Giải phương trình $y'' - y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\cos 2x$.

Giải: + Xét phương trình thuần nhất $y'' - y = 0$, phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0$ có nghiệm $k = \pm 1$, do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất được tìm theo nguyên lí xếp chồng nghiệm $y^* = y_1^* + y_2^*$.

+ Xét phương trình $y''-y=\frac{x}{2}$ (*), vế phải $f_1(x)=\frac{x}{2}$ ($\alpha=0$, $n=1$), ta có $\alpha=0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y_1^*=Ax+B \Rightarrow y_1^*{}'=A, y_1^*{}''=0.$$

Thế vào phương trình (*), ta được

$$A=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_1^*=-\frac{x}{2}.$$

+ Xét phương trình $y''-y=\frac{x}{2}\cos 2x$ (**), vế phải $f_2(x)=\frac{x}{2}\cos 2x$, ($\alpha=0, \beta=2, m=0, n=1, k=\max\{m,n\}=1$), ta có $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng cần tìm có dạng

$$y_2^*=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x.$$

Ta có

$$y_2^*{}'=A\cos 2x-2(Ax+B)\sin 2x+C\sin 2x+2(Cx+D)\cos 2x,$$

$$y_2^*{}''=-4A\sin 2x-4(Ax+B)\cos 2x+4C\cos 2x-4(Cx+D)\sin 2x.$$

Thay $y^*{}', y^*{}''$ vào phương trình (**) và biến đổi ta được

$$[4C-5(Ax+B)]\cos 2x-[4A+5(Cx+D)]\sin 2x=\frac{x}{2}\cos 2x$$

Đồng nhất hai vế theo hệ số của $\cos 2x$, $\sin 2x$ ta được hệ

$$\begin{cases} 4C-5(Ax+B)=\dfrac{x}{2}, \\ 4A+5(Cx+D)=0. \end{cases}$$

Đồng nhất lần nữa theo lũy thừa của x, ta được

$$\begin{cases} 5A=\dfrac{1}{2} \\ 4C-5B=0 \\ 5C=0 \\ 4A+5D=0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $A = -\frac{1}{10}, B = 0, C = 0, D = \frac{2}{25}$.

Do đó, phương trình (**) có một nghiệm riêng

$$y_2^* = -\frac{x}{10}\cos 2x + \frac{2}{25}\sin 2x.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm tổng quát

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* =$$

$$= C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{x}{2} - \frac{x}{10}\cos 2x + \frac{2}{25}\sin 2x.$$

Bài 32. Giải phương trình vi phân

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos^2 x.$$

Giải: Xét phương trình thuần nhất $y'' - 4y' + 4y = 0$, có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2,$$

do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Vế phải của phương trình đã cho được viết lại dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x = f_1(x) + f_2(x),$$

trong đó $f_1(x) = \frac{1}{2}e^{2x},\ f_2(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x$.

+ Xét phương trình $y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{2}e^{2x}$ (*), do $\alpha = 2$ trùng với nghiệm kép của phương trình đặc trưng, $n = 0$, nên nghiệm riêng có dạng

$$y_1^* = Ax^2e^{2x} \Rightarrow y_1^{*\prime} = A(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}) = 2A(x + x^2)e^{2x},$$

$$y_1^{*\prime\prime} = 2A[(1 + 2x)e^{2x} + (x + x^2)2e^{2x}] = 2Ae^{2x}(1 + 4x + 2x^2).$$

Thay vào phương trình (*) và đồng nhất theo lũy thừa của x, ta được

$$A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_1^* = \frac{1}{4}x^2e^{2x}.$$

+ Xét phương trình $y'' - 4y' + 4y = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x$ (**), vì $\alpha \pm i\beta = 2 \pm 2i$

không là nghiệm của phương trình đặc trưng. $n=0, m=0$ nên nghiệm riêng có dạng

$$y_2^* = e^{2x}[B\cos 2x + C\sin 2x].$$

Tính $y_2^*{}'$, $y_2^*{}''$ thay vào phương trình (**) và đồng nhất hai vế theo hệ số của $\cos 2x$, $\sin 2x$ ta được hệ phương trình. Giải hệ ta được

$$B = -\frac{1}{8},\ C = 0 \Rightarrow\ y_2^* = -\frac{1}{8}(\cos 2x)e^{2x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\cos 2x\right)e^{2x}.$$

Bài 33. Giải phương trình vi phân

$$x^2y'' - \left(6x^2 + 2x\right)y' + \left(9x^2 + 6x + 2\right)y = 4x^3e^{3x},$$

bằng cách đặt $y = ux$.

Giải: Từ $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$, $y'' = u''x + 2u'$. Thay vào phương trình đã cho và biến đổi ta được phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

$$u'' - 6u' + 9u = 4e^{3x}. \ (*)$$

Phương trình thuần nhất $u'' - 6u' + 9u = 0$, có phương trình đặc trưng

$$k^2 - 6k + 9 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 3.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{u} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $u^* = Ax^2e^{3x}$ vì $\alpha = 3$ trùng với nghiệm kép của phương trình đặc trưng, $n = 0$. Thay vào phương trình (*), ta được $A = 2 \Rightarrow u^* = 2x^2e^{3x}$. Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

$$u = \overline{u} + u^* = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + 2x^2e^{3x}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = ux = e^{3x}(C_1x + C_2x^2 + 2x^3).$$

Bài 34. Giải phương trình vi phân $x^2y''+4xy'+(x^2+2)y=e^x$ bằng cách đặt $y=\dfrac{z}{x^2}$.

Giải: Từ $y=\dfrac{z}{x^2}\Rightarrow z=x^2y$, ta có

$$z'=2xy+x^2y',$$

$$z''=2y+4xy'+x^2y''.$$

Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$(x^2y''+4xy'+2y)+x^2y=e^x,$$

ta được phương trình vi phân tuyến tính

$$z''+z=e^x. \ (*)$$

Phương trình thuần nhất $z''+z=0$, có phương trình đặc trưng

$$k^2+1=0\Leftrightarrow k_{1,2}=\pm i.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$z=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $z^*=Ae^x$ vì $\alpha=1$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng, $n=0$. Thay vào phương trình (*), ta được $A=\dfrac{1}{2}\Rightarrow z^*=\dfrac{1}{2}e^x$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $z=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{e^x}{2}$.

Do $z=x^2y$ nên

$$y=\frac{z}{x^2}=\frac{C_1}{x^2}\cos x+\frac{C_2}{x^2}\sin x+\frac{e^x}{2x^2}.$$

Bài 35. Giải phương trình $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=e^{-x}$ bằng cách đặt $z=yx$.

Giải: Từ $z=yx\Rightarrow z'=y+xy', z''=2y'+xy''$. Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$(xy''+2y')-2(xy'+y)+xy=e^{-x},$$

ta được phương trình vi phân thuyến tính

$$z''-2z'+z=e^{-x}.$$

Xét phương trình thuần nhất $z''-2z'+z=0$, phương trình đặc trưng $k^2-2k+1=0$ có nghiệm kép $k=1$. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$z=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất có dạng $z^*=Ae^{-x}$ vì $\alpha=-1$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng, $n=0$. Thay vào phương trình (*), ta được $A=\frac{1}{4}\Rightarrow z^*=\frac{1}{4}e^{-x}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $z=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{4}e^{-x}$.

Do $z=yx$ nên ta được

$$y=\frac{z}{x}=C_1\frac{e^x}{x}+C_2e^x+\frac{1}{4x}e^{-x}.$$

Bài 36. Giải phương trình vi phân $y''+y'\tan x-y\cos^2 x=\sin x\cos^2 x$ bằng phép đổi biến $t=\sin x$.

Giải: Ta có

$$y'=y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\cos x,$$
$$y''=y''_{xx}=y''_{tt}t'_x\cos x-y'_t\sin x=y''_{tt}\cos^2 x-y'_t\sin x.$$

Thay y', y'' vào phương trình đã cho, ta được

$$y''_{tt}-y=t, (*)$$

là phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng, biến số t.

Phương trình đặc trưng $k^2-1=0\Leftrightarrow k=\pm1$, nên nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng (*) là $\overline{y}=C_1e^t+C_2e^{-t}$.

Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (*) có dạng $y^*=At+B$ (vì $\alpha=0$ không trùng với nghiệm của phương trình đặc trưng, $n=1$). Thay vào phương trình (*) và đồng nhất theo lũy thừa của t, ta được $A=-1, B=0\Rightarrow y^*=-t$.

Nghiệm tổng quát của (*) là $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-t$.

Do $t = \sin x$ nên nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x} - \sin x.$$

Bài 37. Tìm phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất nếu biết phương trình đó có hai nghiệm là $y_1 = x$ và $y_2 = e^x$.

Giải: Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai thuần nhất có dạng

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \; (*)$$

Theo giả thiết y_1 và y_2 là các nghiệm của phương trình (*) nên thay các nghiệm $y_1 = x$, $y_2 = e^x$ vào phương trình đó, ta được hệ phương trình với các ẩn hàm $p(x)$, $q(x)$ phải tìm

$$\begin{cases} p(x) + q(x)x = 0, \\ 1 + p(x) + q(x) = 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được $p(x) = -\dfrac{x}{x-1}$, $q(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $(x \neq 1)$.

Vậy phương trình cần tìm là $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0$.

Bài 38. Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 4y. \end{cases}$$

Giải: Hệ đã cho là hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một hệ số hằng. Theo công thức (4), mục 2.4.2, ta lập phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10.$$

+ Với $\lambda_1 = 1$ ta có hệ $\begin{cases} 6\alpha + 3\beta = 0 \\ 6\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$ (theo công thức (3), mục 2.4.2) hệ vô định. Ta cho $\alpha = 1$, thì $\beta = -2$, khi đó với $\lambda_1 = 1$ ta có các nghiệm riêng $x_1 = e^t, y_1 = -2e^t$.

+ Tương tự với $\lambda_2 = 10$ ta có các nghiệm riêng $x_2 = e^{10t}, y_2 = e^{10t}$.

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{10t}, \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{10t}. \end{cases}$$

Bài 39. Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

Giải: Hệ đã cho là hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một hệ số hằng. Theo công thức (4), mục 2.4.2, lập phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

+ Với $\lambda_1 = 1$ ta có các nghiệm riêng $x_1 = 2e^t, y_1 = 7e^{2t}, z_1 = 3e^{3t}$.

+ Với $\lambda_2 = 2$ ta có các nghiệm riêng $x_1 = e^t, y_1 = 3e^{2t}, z_1 = e^{3t}$.

+ Với $\lambda_3 = 3$ ta có các nghiệm riêng $x_1 = -2e^t, y_1 = -8e^{2t}, z_1 = -3e^{3t}$.

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}, \\ y = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t}, \\ z = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}. \end{cases}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.1. Giải các phương trình biến số phân ly sau:

1) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$; 2) $xyy' = 1 - x^2$;

3) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$; 4) $y'\tan x - y = a$;

5) $xy' + y = y^2$; 6) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$;

7) $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$; 8) $e^{-s}\left(1 + \dfrac{ds}{dt}\right) = 1$;

9) $y' = 10^{x+y}$; 10) $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$.

1.2. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau, thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho:

1) $y'\sin x = y\ln y$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$; 2) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; $y(0) = 1$;

3) $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx$; $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

4) $y - xy' = b(1 + x^2y')$; $y(1) = 1$.

1.3. Giải các phương trình đẳng cấp sau:

1) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$; 2) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

3) $xdy - ydx = ydy$; 4) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

5) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; 6) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

7) $y^2 + x^2y' = xyy'$; 8) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

9) $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$; 10) $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

1.4. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau, thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho:

1) $(xy'-y)\arctan\dfrac{y}{x}=x;\ y(1)=0$;

2) $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0;\ y(0)=1$;

3) $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2};\ y(1)=-1$;

4) $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2x\dfrac{dy}{dx}-y=0;\ y(0)=\sqrt{5}$.

1.5. Giải các phương trình vi phân tuyến tính sau:

1) $y'+2y=4x$;

2) $y'+2xy=xe^{-x^2}$;

3) $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$;

4) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;

5) $y'+y=\cos x$;

6) $2ydx+(y^2-6x)dy=0$;

7) $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$;

8) $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$.

1.6. Tìm nghiệm riêng của các phương trình vi phân sau, thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho:

1) $y'-y\tan x=\dfrac{1}{\cos x};\ y(0)=0$;

2) $xy'+y-e^x=0;\ y(a)=b$;

3) $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x;\ y(1)=0$;

4) $t(1+t^2)dx=(x+xt^2-t^2)dt;\ x(1)=-\dfrac{\pi}{4}$.

1.7. Giải các phương trình vi phân Bernoulli:

1) $y'+2xy=2x^3y^3$;

2) $y'+\dfrac{y}{x+1}+y^2=0$;

3) $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$; 4) $xy' + y = y^2 \ln x$;

5) $y' - y\tan x + y^2\cos x = 0$; 6) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

7) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$; 8) $x(y' - y) = (1 + x^2)e^x$.

1.8. Giải các phương trình vi phân toàn phần sau:

1) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$;

2) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$;

3) $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$;

4) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$;

5) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$;

6) $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

1.9. Tìm hàm số $h(x)$ sao cho phương trình $h(x)\left[\left(y + \ln x\right)dx - xdy\right] = 0$ là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(x)$ tìm được.

1.10. Tìm hàm số $h(x)$ sao cho phương trình

$$h(x)\left[2\cos\pi y dx - \pi\sin\pi y dy\right],$$

là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(x)$ tìm được.

1.11. Giải phương trình vi phân $2xy\ \ln y dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{1 + y^2}\right)dy = 0$ biết rằng phương trình có thừa số tích phân dạng $\alpha = \alpha\left(y\right)$.

1.12. Tìm hàm số $h(y)$ sao cho phương trình

$$h(y)\left[2dx + \left(1 + 2y^2 + 4xy\right)dy\right] = 0,$$

là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(x)$ tìm được.

1.13. Tìm hàm số $h(y)$ sao cho phương trình $h(y)\left[\left(y+xy^2\right)dx - xdy\right]=0$ là phương trình vi phân toàn phần. Giải phương trình đó với $h(y)$ tìm được.

1.14. Bằng cách đặt $y = u.x$ hãy giải phương trình sau

$$xyy' = y^2 + 2x^4\cos x^2,\ y(\sqrt{\pi}) = 0.$$

1.15. Giải các phương trình sau:

1) $y' = ax + by + c$;

2) $y' = \dfrac{y+x-2}{y-x-4}$;

3) $y' = \dfrac{y^2+xy-x^2}{y^2}$;

4) $y'(y^2 - x) = y$;

5) $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$;

6) $(2y+xy^3)dx + (x+x^2y^2)dy = 0$;

7) $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2+y^2)dy = 0$;

8) $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2-1}$;

9) $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$;

10) $y' = \dfrac{x}{\cos y} - \tan y$.

1.16. Cho phương trình $\dfrac{dx}{dt} + a(t)x = f(x)$ trong đó $a(t) \geq C > 0, f(t) \to 0$ khi $t \to +\infty$. Chứng minh rằng mọi nghiệm của phương trình trên đều dần tới 0 khi $t \to +\infty$.

1.17. Giải các phương trình sau:

1) $y'' = x + \sin x$;

2) $y'' = \arctan x$;

3) $y'' = \ln x$;

4) $xy'' = y'$;

5) $y'' = y' + x$;

6) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$;

7) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;

8) $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$;

9) $1 + (y')^2 = 2yy''$;

10) $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

1.18. Giải các phương trình sau:

1) $a^2y''-y=0$; 2) $y''+\dfrac{2}{1-y}(y')^2=0$;

3) $yy''+(y')^2=1$; 4) $2yy''-3(y')^2=4y^2$;

5) $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)(y')^2=0$; 6) $yy''-(y')^2=y^2y'$;

7) $yy''-yy'\ln y=(y')^2$; 8) $y''=y'\left(\dfrac{y'}{y}-2\sqrt{\dfrac{y'}{y}-4}\right)$;

9) $xy''-\dfrac{1}{4}(y'')^2-y'=0$; 10) $2xy'y''=(y')^2-1$.

1.19. Giải các phương trình sau bằng cách đặt

$$yy'=p,\ (y')^2=p,\ xy'=p,\ \frac{y'}{y}=p,\ ...$$

1) $xyy''+x(y')^2=3yy'$; 2) $xy''=y'(e^y-1)$;

3) $yy''+(y')^2=x$; 4) $y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{y}{x^2}=0$;

5) $x^2y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)^2=0$; 6) $yy''=y'(2\sqrt{yy'}-y')$.

1.20. Giải các phương trình sau:

1) $y''(x^2+1)=2xy',\ y(0)=1,\ y'(0)=3$;

2) $xy''+x(y')^2-y'=0,\ y(2)=2,\ y'(2)=1$;

3) $y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x^2}{y'},\ y(2)=0,\ y'(2)=4$;

4) $y''=e^{2y},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$;

5) $2(y')^2=y''(y-1),\ y(1)=2,\ y'(1)=-1$;

6) $y''=xy'+y+1,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$.

1.21. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$, biết một nghiệm riêng của nó là $y_1=x$.

1.22. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, biết một nghiệm riêng của nó là $y_1=x^{\alpha}\sin x$, α (cần xác định).

1.23. Phương trình $\left(2x-x^2\right)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$, có nghiệm $y=e^x$. Hãy tìm nghiệm của phương trình, thỏa mãn các điều kiện ban đầu $y(1)=0,\ y'(1)=1$.

1.24. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $\left(1-x^2\right)y''-xy'+9y=0$, khi nghiệm riêng của nó là đa thức bậc ba.

1.25. Tìm α để $y_1=e^{\alpha x}$ là nghiệm của phương trình vi phân $\left(x-1\right)y''-xy'+y=0$. Với α đó hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình.

1.26. Hãy tìm nghiệm của phương trình $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0$, thỏa mãn điều kiện ban đầu $y\left(0\right)=-2,\ y'\left(0\right)=-1$, bằng cách đặt $u=y\sqrt{1+x^2}$.

1.27. Giải phương trình vi phân $x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x)$, biết phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm riêng dạng $y_1=x^{\alpha}$, α là hằng số cần xác định.

1.28. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $x^2y''-3xy'+4y=x\ln x$, biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng có một nghiệm $y=x^2$.

1.29. Giải phương trình $x^2y''+7xy'+13y=100x\ln x$ bằng cách đặt $x=e^t$.

1.30. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $xy''+2y'+xy=x$ bằng cách đặt $y=\frac{u}{x}$.

1.31. Giải phương trình $x^2y''-\left(6x^2+2x\right)y'+\left(9x^2+6x+2\right)y=4x^3e^{3x}$ bằng cách đặt $y=ux$.

1.32. Tìm nghiệm tổng quát các phương trình vi phân sau:

1) $y''+y'-2y=0$; 2) $y''-4y'=0$;

3) $y''-9y=0$; 4) $3y''-2y'-8y=0$;

5) $y''+y=0$; 6) $y''+6y'+13y=0$;

7) $4y''-8y'+5y=0$; 8) $4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25x=0$.

1.33. Tìm nghiệm của các phương trình sau thỏa mãn điều kiện ban đầu:

1) $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=10$;

2) $y''+4y'+29y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=15$;

3) $4y''+4y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$;

4) $y''+y=0$, $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=1$.

1.34. Tìm nghiệm tổng quát các phương trình $y''-3y'+2y=f(x)$, nếu $f(x)$ bằng:

1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\sin x$;

4) $2x^3-30$; 5) $2e^x\cos\dfrac{x}{2}$; 6) $x-e^{-2x}+1$.

1.35. Tìm nghiệm tổng quát các phương trình $2y''+5y'=f(x)$, nếu $f(x)$ bằng:

1) $5x^2-2x-1$; 2) e^x; 3) $29\cos x$;

4) $\cos^2 x$; 5) $29x\sin x$; 6) $100xe^{-x}\cos x$.

1.36. Tìm nghiệm tổng quát các phương trình $y''-4y'+4y=f(x)$, nếu $f(x)$ bằng:

1) 1; 2) e^{-x}; 3) $3e^{2x}$;

4) $2(x+\sin 2x)$; 5) $\sin x\cos 2x$; 6) $8(x^2+e^{2x}+\sin 2x)$.

1.37. Tìm nghiệm tổng quát các phương trình $y''+y=f(x)$, nếu $f(x)$ bằng:

1) $2x^3-x+2$; 2) $-8\cos 3x$; 3) $\cos x$;

4) $\sin x-2e^{-x}$; 5) $\cos x\cos 2x$.

1.38. Tìm nghiệm tổng quát các phương trình sau:

1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$;

2) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{e^x+1}$;

3) $y'' + y = -\cot^2 x$.

1.39. Tìm nghiệm của các phương trình sau thỏa mãn điều kiện ban đầu:

1) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5,5$;

2) $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3,2$;

3) $y'' - y' = 2(1-x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

4) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

1.40. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x. \end{cases}$

ĐÁP SỐ

1.1. 1) $1 + y^2 = C(1 - x^2)$; 2) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$; 3) $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$;

4) $y = C\sin x - a$; 5) $Cx = \dfrac{y-1}{y}$; 6) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$;

7) $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$; 8) $e^t = C(1 - e^{-s})$;

9) $10^x + 10^{-y} = C$; 10) $\ln\left|\tan\dfrac{y}{4}\right| = C - 2\sin\dfrac{x}{2}$.

1.2. 1) $y = e^{\tan\frac{x}{2}}$; 2) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$; 3) $\cos x = \sqrt{2}\cos y$; 4) $y = \dfrac{b+x}{1+bx}$.

1.3. 1) $y - 2x = Cx^3(y+x)$;2) $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}$; 3) $\ln|y| + \dfrac{x}{y} = C$;

4) $x^2 + y^2 = Cy$; 5) $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$; 6) $x^2 = C^2 + 2Cy$; 7) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$;

8) $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$; 9) $(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$; 10) $y = xe^{1+Cx}$.

1.4. 1) $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}}$; 2) $y^3 = y^2 - x^2$; 3) $y = -x$; 4) $y^2 = 5 \pm 2\sqrt{5}x$.

1.5. 1) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$; 2) $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$; 3) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$;

4) $y = (x+C)(1+x^2)$; 5) $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x)$;

6) $y^2 - 2x = Cy^3$; 7) $x = Ce^{2y} + \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{4}$;

8) $y = e^x\left(\ln|x| + \dfrac{x^2}{2}\right) + Ce^x$.

1.6. 1) $y = \dfrac{x}{\cos x}$; 2) $y = \dfrac{e^x + ab - e^a}{x}$;

3) $y = \dfrac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$; 4) $x = -t\arctan t$.

1.7. 1) $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$; 2) $y = \dfrac{1}{(1+x)[\ln|1+x| + C]}$;

3) $x^2 = y^2(C - y^2)$; 4) $y(1 + \ln x + Cx) = 1$;

5) $y(x+C) = \dfrac{1}{\cos x}$; 6) $\sqrt{y} = \dfrac{C + \ln|\cos x|}{x} + \tan x$;

7) $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$; 8) $y = e^x\left(\ln|x| + \frac{x^2}{2}\right) + Ce^x$.

1.8. 1) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$; 2) $xe^y - y^2 = C$;

3) $x + \arctan\frac{y}{x} = C$; 4) $x^y = C$;

5) $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$; 6) $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$.

1.9. $h = \frac{1}{x^2}, -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} - \frac{y}{x} + 1 = C$.

1.10. $h(x) = e^{2x}, e^{2x}\cos\pi y = C$.

1.11. $\alpha(y) = \frac{1}{y}$, $x^2\ln y + \frac{1}{3}\sqrt{\left(1 + y^2\right)^3} = C$.

1.12. $h(y) = e^{y^2}, C = (2x + y)e^{y^2}$.

1.13. $h = \frac{1}{y^2}$, $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.

1.14. $u' = \frac{2x^2\cos x^2}{-u}, y^2 = 2x^2\sin x^2$.

1.15. 1) $abx + b^2y + a + bc = Ce^{bx}$; 2) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$;

3) $\frac{2x}{x - y} + \ln|x + y| + 3\ln|y - x| = C$; 4) $y^3 - 3xy = C$;

5) $x^2 - y^2 = Cy^3$; 6) $3x^2y + x^3y^3 = C$;

7) $y\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = Ce^{-x}$; 8) $3\sqrt{y} = C\sqrt[4]{x^2 - 1} + x^2 - 1$;

9) $xe^{\sin\frac{y}{x}} = C$; 10) $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$.

1.16. HD: Phương trình $\frac{dx}{dt}+a(t)x=f(x)$ có nghiệm tổng quát là

$$x(t)=\frac{x(0)+\int\limits_0^t f(s)e^{\int\limits_0^s a(x)dx}ds}{e^{\int\limits_0^t a(x)dx}}$$

Vì $f(t)\to 0$ khi $t\to+\infty$ nên: $\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon)>0\ \forall t>M\Rightarrow|f(t)|<\varepsilon$

Do đó $x(t)\to 0$ khi $t\to+\infty$.

1.17. 1) $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$;

2) $y=\frac{\arctan x}{2}(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$;

3) $y=\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{3}{2}\right]+C_1x+C_2$; 4) $y=C_1x^2+C_2$;

5) $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$; 6) $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$;

7) $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$;

8) $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$; 9) $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$;

10) $y=C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}$.

1.18. 1) $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$; 2) $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$;

3) $(x+C_2)^2-y^2=C_1$; 4) $y\cos^2(x+C_1)=C_2$;

5) $(x+C_2)\ln y=x+C_1$; 6) $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$;

7) $\frac{x+C_2}{2}=C_1\tan(C_1\ln y),\ C_1>0$; 8) $\ln|C_1y|=2\tan(2x+C_2)$;

9) $y = C_1x(x - C_1) + C_2,\ y = \dfrac{x^3}{3} + C$;

10) $9C_2y^2 = 4(1 + C_1x)^3,\ y = \pm x + C$.

1.19. 1) $y^2 = C_1x^4 + C_2$; 2) $y = \ln\left|\dfrac{C_1x^{C_1}}{C_2 - x^{C_1}}\right|$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2}$; 4) $y = C_1x + \dfrac{C_2}{x}$;

5) $y = C_1xe^{\frac{C_2}{x}}$; 6) $\ln|y + C_1| + \dfrac{C_1}{y + C_1} = x + C_2$.

1.20. 1) $y = x^3 + 3x + 1$; 2) $y = 2 + \ln\dfrac{x^2}{4}$; 3) $y = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x} - \dfrac{16}{5}$;

4) $y = -\ln|1 - x|$; 5) $y = \dfrac{x+1}{x}$; 6) $y = 2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$.

1.21. $y = C_1x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2x$.

1.22. $\alpha = -1$, $y = C_1\dfrac{\sin x}{x} + C_2\dfrac{\cos x}{x}$.

1.23. $y = x^2 - e^{x-1}$.

1.24. $y = C_1(4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1 - x^2}(4x^2 - 1)$.

1.25. $\alpha = 1$, $y_1 = e^x, y_2 = -x$, $y = C_1e^x + C_2x$.

1.26. $u'' = 0$, $u = C_1x + C_2$, $y = \dfrac{C_1x + C_2}{\sqrt{1 + x^2}}$, $y = -\dfrac{x+2}{\sqrt{1 + x^2}}$.

1.27. $\alpha = -1$, $y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{1+x}{x}\ln x - 1 + \dfrac{1}{2x^2}[(1 - x^2)\ln(1 + x) + \dfrac{x}{2}(x - 2)]$.

1.28. $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2\ln x$, $y = (C_1 + C_2\ln x)x^2 + x\ln x + 2x$.

1.29. $t = \ln x$, $y''_{tt} + 6y'_t + 13y = 100te^t$.

$y = x^{-3}[C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x)] + (5\ln x - 2)$.

1.30. $u''+u=x$, $y=\frac{1}{x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x+x\right)$.

1.31. $u''-6u'+9u=4.e^{3x}$, $y=u.x=e^{3x}\left(C_1x+C_2x^2+2x^3\right)$.

1.32. 1) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$; 2) $y=C_1e^{4x}+C_2$; 3) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$;

4) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$; 5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$;

6) $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

7) $y=e^{x}(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2})$; 8) $x=(C_1+C_2t)e^{2,5t}$.

1.33. 1) $y=4e^{x}+2e^{3x}$; 2) $y=3e^{-2x}\sin 5x$;

3) $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$; 4) $y=-\cos x-\sin x$

1.34. 1) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+y^*$, trong đó $y^*=\frac{5}{3}e^{-x}$;

2) $y^*=3xe^{2x}$; 3) $y^*=\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$;

4) $y^*=x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $y^*=-\frac{8}{5}e^{x}\left[\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right]$; 6) $y^*=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$.

1.35. 1) $y=C_1+C_2e^{-2,5x}+y^*$, trong đó $y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$;

2) $y^*=\frac{1}{7}e^{x}$; 3) $y^*=-2\cos x+5\sin x$;

4) $y^*=\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$;

5) $y^*=\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$;

6) $y^*=e^{-x}[(10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x]$;

1.36. 1) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+y^*$, trong đó $y^*=\frac{1}{4}$;

2) $y^*=\frac{1}{9}e^{-x}$; 3) $y^*=\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $y^*=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x$;

5) $y^*=\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$;

6) $y^*=2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$.

1.37. 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+y^*$, trong đó $y^*=2x^3-13x+2$;

2) $y^*=\cos 3x$; 3) $y^*=\frac{1}{2}x\sin x$; 4) $y^*=-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$;

5) $y^*=\frac{1}{4}\left(x\sin x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$.

1.38. 1) $y=(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\arctan x)e^x$;

2) $y=e^x(x+C_1)-(e^x+1)\ln(e^x+1)+C_2$;

3) $y=2+C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

1.39. 1) $y=(1+x)e^{-1,5}+2e^{-2.5x}$;

2) $y=e^x(0,16\cos 3x+0,28\sin 3x)+x^2+2,2x+0,84$;

3) $y=e^x+x^2$; 4) $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

1.40. 1) $\begin{cases}x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t),\\ y=e^{-6t}[(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t].\end{cases}$

2) $\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{5t},\\ y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ y=C_1e^t-3C_3e^{-t},\\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}.\end{cases}$

4) $$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t), \\ y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t], \\ z = C_1 e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t]. \end{cases}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1.Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh,
Toán học cao cấp Tập II, III.
NXB Giáo dục, 2003.

2.Nguyễn Đình Bình, Lê Trọng Vinh,
Toán học Giải tích Tập I, II.
NXB Bách khoa, 2006.

3.W. Ardis, J.E. Borzellino, L. Buchana, A.T. Mogill, P.Nelson,
Student's Solutions Manual,
Pearson Education, Inc, 2005.

4.G.N.Beeman,
Tuyển tập các bài toán theo giáo trình giải tích toán, (Bản tiếng Nga),
NXB Matxcơva, 1967.

5.P.E Đankô, A.G.Pôpôp, I.Ia.Côgiepnhicôva,
Bài tập toán cao cấp, Phần II (Bản dịch tiếng Việt),
NXB Mir, Matxcơva, 1983.

6.G.M.Fichtengôn,
Giáo trình phép tính vi phân và tích phân, Tập II, (Bản tiếng Nga),
NXB Matxcơva, 1962.

7.I. I. Liaskô, A.K.Bôiartruc, Ia.G.Gai A, Ph.Calaida,
Giải tích toán, Tập II, III, (Bản tiếng Nga),
NXB Kiep 1985.

8.L.C.Punchiagin,
Phương trình vi phân thường, (Bản tiếng Nga),
NXB Matxcơva, 1965.

CHUỖI
VÀ
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Tác giả: Nguyễn Đình Bình - Lê Trọng Vinh

Chịu trách nhiệm xuất bản: PGS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI

Biên tập và sửa bài: ThS. NGUYỄN HUY TIẾN
NGỌC DIỆP

Trình bày bìa: NGUYỄN XUÂN DŨNG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội

In 500 cuốn, khổ 16 × 24 cm, tại Xưởng In NXB Văn hoá Dân tộc
Quyết định xuất bản số: 82 – 2008/CXB/6–02/KHKT – 16/1/2008.
In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2008.

8935048980323

54,000 V

2 0 8 0 3 2

8 935048 980323

Giá: 54.000đ