Nguyễn Đình Đức và Đào Như Mai

SỨC BỀN VẬT LIỆU
VÀ KẾT CẤU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Nguyễn Đình Đức và Đào Như Mai

SỨC BỀN VẬT LIỆU VÀ KẾT CẤU

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

HÀ NỘI – 2012

Lời nói đầu

Sức bền vật liệu là môn học cơ sở quan trọng, cung cấp cho người học những kiến thức cơ bản nhất để giải các bài toán về độ bền, độ cứng, độ ổn định của hệ thanh và kết cấu. Chính vì vậy Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu được giảng dạy cho sinh viên tất cả các trường đại học kỹ thuật ở Việt Nam cũng như trên thế giới. Tuy nhiên, hiện nay có rất nhiều giáo trình sức bền vật liệu khác nhau, được biên soạn phục vụ phù hợp cho các đối tượng là người học trong các trường đại học khác nhau.

Giáo trình này được biên soạn cho sinh viên ngành Cơ học Kỹ thuật và ngành Công nghệ Cơ điện tử của trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội, với thời lượng giảng dạy từ 2 đến 3 tín chỉ. Giáo trình đề cập đến những nội dung căn bản nhất của môn học Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu, được biên soạn trên cơ sở các bài giảng về Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu trong khung chương trình đào tạo cho sinh viên Khoa Cơ học Kỹ thuật và Tự động hóa trong năm năm qua, đồng thời có tham khảo kinh nghiệm và nội dung giảng dạy môn học này đã được áp dụng ở một số trường đại học kỹ thuật trong và ngoài nước. Giáo trình là tài liệu học tập cho sinh viên có kiến thức cơ sở về toán cao cấp và về cơ học môi trường liên tục và cơ học vật rắn biến dạng.

Các tác giả chân thành cảm ơn GS. TS. Hoàng Xuân Lượng, GS. TS. Trần Ích Thịnh, PGS. TS. Vũ Đỗ Long, PGS. TS. Khúc Văn Phú, PGS. TS. Trần Minh Tú, TS. Lương Xuân Bính, TS Nguyễn Thị Việt Liên vì những đóng góp quý báu cả về nội dung và hình thức cho quyển sách này. Các tác giả bày tỏ sự cám ơn Trường Đại học Công nghệ, Khoa Cơ học kỹ thuật và Tự động hóa đã tạo điều kiện về mọi mặt để các tác giả hoàn thành quyển sách này. Quyển sách được viết ra có công không nhỏ của các em sinh viên đã góp ý cho các tác giả trong quá trình giảng dạy.

Vì giáo trình xuất bản lần đầu nên không tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi rất mong nhận được các ý kiến đóng góp của bạn đọc, đặc biệt là của các đồng nghiệp và các em sinh viên để giáo trình ngày càng hoàn thiện tốt hơn.

Mục lục

Danh mục các kí hiệu

A diện tích tiết diện

D đường kính hình tròn hoặc đường kính ngoài của tiết diện hình vành khăn

d đường kính trong tiết diện hình vành khăn

b bề rộng của tiết diện hình chữ nhật hoặc bề rộng cánh của tiết diện chữ I, U

h chiều cao của tiết diện hình chữ nhật hoặc của tiết diện chữ I, U

E mô đun đàn hồi Young

F ma trận độ mềm

f_{ij} hệ số ma trận độ mềm

I_z, I_y mô men quán tính đối với trục z và trục y tương ứng

I_ρ mô men quán tính cực đối với một trục

I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} mô men quán tính tích

i_z, i_y bán kính quán tính

$[S]$ ma trận độ cứng (trong chương 14 là $[K]$)

S_{ij} hệ số của ma trận độ cứng (trong chương 14 là K_{ij})

M_x mô men xoắn

M_z, M_y mô men uốn trong mặt phẳng yx và mặt phẳng xz tương ứng

N lực dọc trục

p vec tơ ứng suất tại một điểm

P_{th} lực tới hạn ổn định

q	lực ngang phân bố
Q	lực cắt
R	phản lực
W_u , W_z , W_y	mô men chống uốn
W_x	mô men chống xoắn
W	công lực ngoài
U	thế năng biến dạng
δ	biến phân
ε	biến dạng dài tỷ đối
γ	biến dạng trượt
φ	hệ số uốn dọc (hệ số giảm ứng suất)
λ	độ mảnh
ν	hệ số Poisson
ρ	mật độ khối lượng
σ	ứng suất pháp
σ_{ch}	ứng suất chảy
σ_{tl}	ứng suất tỉ lệ
σ_b	ứng suất bền
$[\sigma]$	ứng suất pháp cho phép
τ	ứng suất tiếp
$[\tau]$	ứng suất tiếp cho phép
{ }	ngoặc nhọn chỉ vec tơ (ma trận có một cột)
[ ]	ngoặc vuông chỉ ma trận chữ nhật hay ma trận vuông

Đơn vị đo theo SI

Độ dài	mét	m
	mili mét	mm
Diện tích	mét vuông	m^2
	mili mét vuông = 10^{-6} m^2	mm^2
Thể tích	mét khối	m^3
	mili mét khối = 10^{-9} m^3	mm^3
Tần số	hertz = 1 vòng/giây	Hz
Khối lượng	kilogram	kg
Khối lượng riêng	kilogram trên mét khối	kg/m^3
Lực	newton = lực tác động tới vật có khối lượng 1 kg gây ra gia tốc 1 m/s^2, vậy 1N=1kg m/s^2	N
Ứng suất	newton trên mét vuông	N/m^2
	newton trên mili mét vuông	N/mm^2
Nhiệt độ	độ Celsius	^oC

Thuật ngữ cho các thừa số

10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n

NHẬP MÔN

Giới thiệu

Khi tính toán thiết kế các cấu kiện công trình hay các chi tiết máy phải đảm bảo sao cho kết cấu có khả năng thực hiện các chức năng, nhiệm vụ của mình và không bị phá hủy trong suốt thời gian tồn tại. Đây chính là lí do vì sao môn học Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu là môn cơ sở trong các chương trình đạo tạo kỹ sư các ngành kỹ thuật.

Quyển sách này trình bày các nội dung cơ bản nhất của môn học Sức bền vật liệu và Cơ học kết cấu, thực chất gồm hai phần cơ bản:

- Phần *Sức bền vật liệu* nghiên cứu các phương pháp, các nguyên tắc chung để đánh giá khả năng chịu tải (tác động cơ học) của các cấu kiện công trình, các chi tiết máy. Sức bền vật liệu là môn khoa học thực nghiệm xây dựng trên một số kết quả thực nghiệm, các giả thiết cho phép đơn giản hóa nhưng giữ những mô tả bản chất. Trên cơ sở thực nghiệm, đưa ra nhưng chỉ tiêu để đánh giá độ bền, độ cứng và độ ổn định của các chi tiết nói riêng và cả kết cấu nói chung.
- Phần *Cơ học kết cấu* trình bày các phương pháp cơ bản phân tích kết cấu dạng khung dàn một cách tổng thể.

Mục đích của môn học

Tính toán và thiết kế các cấu kiện công trình, chi tiết máy sao cho đủ độ bền, đủ độ cứng và đủ độ ổn định. Thế nào là đủ độ bền, đủ độ cứng và ổn định?

- Đủ độ bền: kết cấu có khả năng chịu được tất cả các tổ hợp lực đặt lên công trình trong thời gian tồn tại (tuổi thọ). Ví dụ giàn khoan ngoài khơi không sụp đổ khi có gió bão ở cấp quy định theo tiêu chuẩn, quy phạm thiết kế.

- Đủ độ cứng: dưới tác động của lực, những thay đổi kích thước hình học của kết cấu không được vượt quá giới hạn cho phép. Ví dụ trong các quy phạm, tiêu chuẩn thiết kế có quy định về độ võng ở giữa dầm không vượt quá giá trị quy định, hay chuyển vị ngang của các công trình như tháp nước, cột điện không được vượt quá giá trị cho trước.
- Đủ ổn định: khả năng đảm bảo trạng thái cân bằng ban đầu, không mất đi hình dáng ban đầu.

Từ đây có ba bài toán cơ bản:

- Bài toán kiểm tra độ bền, độ cứng và độ ổn định của các chi tiết và các cấu kiện.
- Bài toán thiết kế có nhiệm vụ lựa chọn hình dạng và kích thước tiết diện phù hợp cho từng chi tiết và cấu kiện của kết cấu.
- Bài toán xác định tải trọng cho phép đặt lên kết cấu.

Đối tượng của môn học

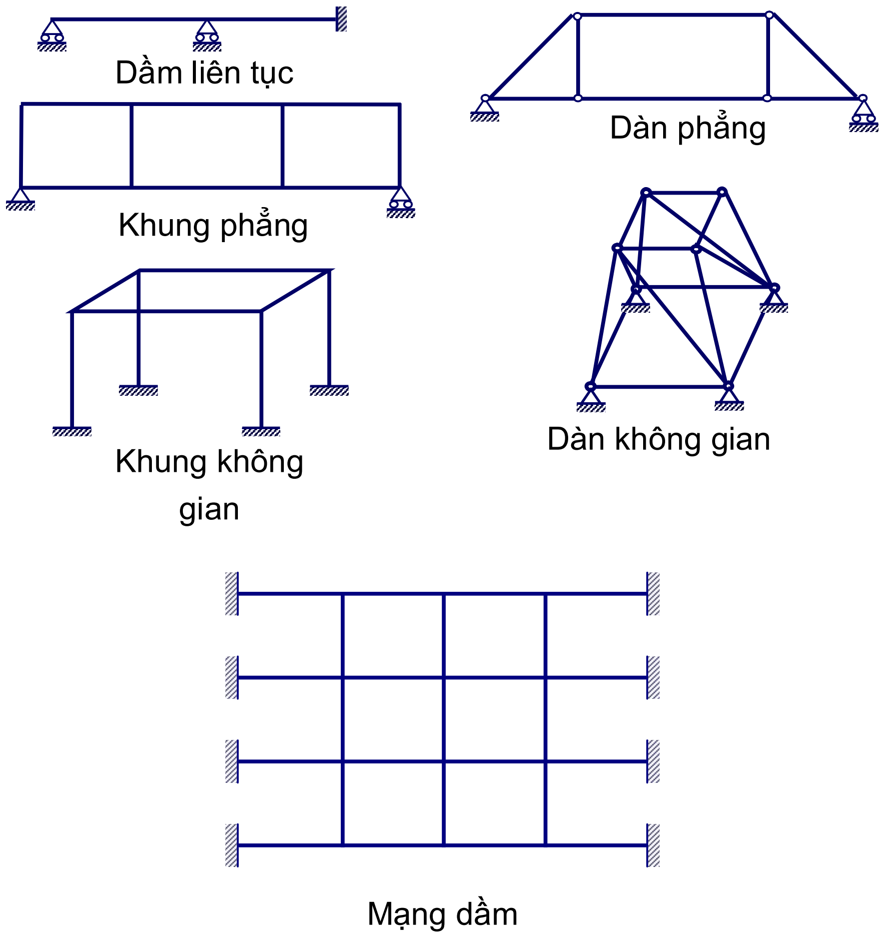
Đối tượng nghiên cứu của Sức bền vật liệu là các chi tiết công trình. Theo kích thước hình học các chi tiết này có thể phân làm ba loại:

- Thanh là các chi tiết có kích thước theo hai phương (mặt cắt ngang) nhỏ hơn rất nhiều so với kích thước còn lại (chiều dài) - Bài toán một chiều.
- Tấm và vỏ là các chi tiết có kích thước theo một phương (độ dày) nhỏ hơn rất nhiều so với hai kích thước còn lại như tấm sàn, tấm tường, vỏ bình chứa xăng, bể chứa dầu, mái vòm - Bài toán hai chiều.
- Khối là các chi tiết có các kích thước theo ba phương tương đương nhau, ví dụ như móng máy, nền đất, viên bi – Bài toán ba chiều .

Thanh thường gặp phổ biến hơn cả trong công trình, chính vì vậy thanh là đối tượng nghiên cứu chính của Sức bền vật liệu.

Thanh là vật thể hình học được tạo bởi một hình phẳng $\mathcal{A}$ có trọng tâm chuyển động dọc theo đường tựa ζ, trong quá trình chuyển động hình phẳng luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường tựa. Hình phẳng $\mathcal{A}$ được gọi là mặt cắt ngang hay tiết diện của thanh, đường tựa ζ được gọi là trục thanh.

Đối tượng nghiên cứu trong Cơ học kết cấu là hệ thanh. Hệ thanh là các kết cấu hợp thành từ các phần tử có kích thước đủ dài khi so sánh với mặt cắt ngang, đó là dầm, dàn phẳng, dàn không gian, khung phẳng, mạng dầm và khung không gian như trên hình 1.



Hình 1. Các dạng kết cấu

Dàn là hệ thanh liên kết khớp với nhau chỉ chịu ngoại lực tác dụng tại các nút. Nội lực trong các thanh chỉ có lực dọc trục. Nếu hệ thanh chỉ gồm các thanh nằm trong một mặt phẳng gọi là dàn phẳng.

Khung là hệ thanh liên kết cứng với nhau. Nội lực trong từng mặt cắt của thanh gồm có lực dọc trục, hai lực cắt, hai mô men uốn và mô men xoắn. Nếu hệ khung chỉ gồm các thanh nằm trong một mặt phẳng gọi là khung phẳng. Khi đó nội lực trong từng mặt cắt chỉ còn lực dọc trục, lực cắt và mô men uốn.

Mạng dầm là một hệ thanh nằm trong một mặt phẳng, nhưng chỉ chịu lực tác dụng vuông góc với mặt phẳng đó. Do vậy nội lực trong từng thanh chỉ còn lực cắt, mô men uốn và mô men xoắn.

Các giả thiết quan trọng

– Chuyển vị và góc xoay của kết cấu thay đổi tuyến tính đối với lực tác dụng có nghĩa chúng tỉ lệ với lực tác dụng.

– Biến dạng nhỏ, biến dạng tỉ đối $\varepsilon << 1$, có nghĩa chuyển vị nhỏ so với kích thước kết cấu suy ra điểm đặt của lực không thay đổi trong quá trình biến dạng.

Từ hai giả thiết trên có thể áp dụng nguyên lí cộng tác dụng, khi đó tác dụng cơ học của hệ lực bằng tổng tác dụng cơ học của từng lực trong hệ, không phụ thuộc vào thứ tự đặt lực. Các đáp ứng của kết cấu như ứng suất, biến dạng và chuyển vị do tổ hợp lực gây ra bằng tổng của các đại lượng tương ứng gây ra bởi từng lực riêng biệt.

– Vật liệu được giả thiết là liên tục, đồng nhất và đẳng hướng.
  + Tính liên tục đảm bảo hai điểm vật chất ở lân cận nhau sau biến dạng vẫn ở lân cận của nhau.
  + Tính đồng nhất nói lên cơ tính của mọi điểm như nhau.
  + Đẳng hướng có nghĩa các tính chất của vật liệu không phụ thuộc vào hướng.

– Vật liệu có tính đàn hồi, tuân thủ định luật Hooke. Có nghĩa trong khuôn khổ của tài liệu này chỉ xét các bài toán khi vật liệu làm việc trong miền đàn hồi.

Khái niệm siêu tĩnh

Hệ là siêu tĩnh khi các lực cần tìm của hệ không thể tính được chỉ từ phương trình cân bằng mà còn cần đến các điều kiện hình học.

Phân tích hệ siêu tĩnh dẫn đến giải hệ phương trình tuyến tính với số ẩn phụ thuộc vào phương pháp lựa chọn. Khi tính toán bằng máy tính bấm tay, có thể sử dụng các thuật toán lặp hay chỉnh dần để làm giảm số phép tính. Đối với hệ lớn và phức tạp, phải sử dụng máy tính và các chương trình phân tích kết cấu dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Tuy vậy các phương pháp tính bằng tay không thể bỏ qua.

Các nguyên lí cơ bản

Nguyên lí Saint-Venant được phát biểu như sau "...tại những miền đủ xa điểm đặt lực sự khác biệt giữa hiệu ứng của hai lực khác nhau nhưng tương đương về mặt tĩnh học sẽ rất nhỏ..."

Nguyên lí Saint-Venant cho phép thay các phân bố ứng suất phức tạp trên biên bằng phân bố đơn giản hơn, khi về mặt hình học biên đủ ngắn. Nói cách khác sự phân bố ứng suất và biến dạng của vật thể tại những miền xa nơi đặt lực sẽ không thay đổi nếu thay hệ lực đã cho bằng một hệ lực khác tương đương.

Có thể hiểu rằng, nếu trên một phần nào đó của vật có tác động của một hệ lực cân bằng thì ứng suất phát sinh sẽ tắt dần rất nhanh ở những điểm xa miền đặt lực. Tại những điểm của vật thể xa điểm đặt lực thì ứng suất phụ thuộc rất ít vào cách tác dụng của lực.

Nguyên lí cộng tác dụng được phát biểu: Một đại lượng do nhiều nguyên nhân gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do từng nguyên nhân gây ra riêng rẽ. Nói cụ thể, tác dụng cơ học của hệ lực bằng tổng tác dụng cơ học của từng lực trong hệ.

Do vậy các đại lượng như nội lực, biến dạng, chuyển vị của vật thể do một hệ ngoại lực gây ra bằng tổng các kết quả tương ứng do từng thành phần ngoại lực gây ra riêng rẽ.

Hệ tiên đề cơ bản của tĩnh học

- *Tiên đề về sự cân bằng của vật rắn*. Điều kiện cần và đủ để một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực này có cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều nhau – đây là tiêu chuẩn cân bằng của vật tự do dưới tác dụng của hệ lực đơn giản nhất.
- *Tiên đề thêm hoặc bớt một cặp lực cân bằng.* Tác dụng của một hệ lực không thay đổi nếu thêm (bớt) đi hai lực cân bằng. Tiên đề này cho quy định về một phép biến đổi tương đương cơ bản về lực.

Hệ quả (Định lí trượt lực): Tác dụng của lực không thay đổi khi trượt lực trên đường tác dụng của nó.

- *Tiên đề hình bình hành lực.* Hai lực tác dụng tại một điểm tương đương với một lực tác dụng tại cùng điểm đó và có vec tơ lực bằng vec tơ chéo của hình bình hành có hai cạnh là hai vec tơ lực của các lực đã cho.
- *Tiên đề tác dụng và phản tác dụng.* Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng cường độ, cùng đường tác dụng và hướng ngược chiều nhau.
- *Tiên đề hoá rắn.* Một vật rắn biến dạng đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hoá rắn nó vẫn ở trạng thái cân bằng.
- *Tiên đề thay thế liên kết.* Vật không tự do cân bằng có thể được xem là vật tự do cân bằng bằng cách giải phóng tất cả các liên kết và thay thế tác dụng các liên kết được giải phóng bằng các phản lực liên kết thích hợp.

Nội dung

Nội dung giáo trình gồm ba phần: nhập môn, các bài toán thanh, các phương pháp cơ bản tính toán hệ thanh và các phụ lục. Cụ thể gồm các chương như sau:

- Nhập môn
  + Chương 1. Các khái niệm cơ bản
  + Chương 2. Quan hệ ứng suất và biến dạng
  + Chương 3. Các lí thuyết bền
- Phần 1. Các bài toán thanh
  + Chương 4. Các đặc trưng hình học của hình phẳng
  + Chương 5. Thanh thẳng chịu kéo nén đúng tâm
  + Chương 6. Thanh thẳng chịu xoắn
  + Chương 7. Thanh thẳng chịu uốn
  + Chương 8. Thanh chịu lực phức tạp
  + Chương 9. Ổn định của thanh thẳng
- Phần 2. Các phương pháp cơ bản tính toán hệ thanh
  + Chương 10. Hệ siêu tĩnh
  + Chương 11. Phương pháp lực
  + Chương 12. Phương pháp chuyển vị

+ Chương 13. Phương pháp công ảo
+ Chương 14. Phương pháp phần tử hữu hạn – sơ lược

– Các phụ lục

Ở phần một sau các chương không có bài tập, vì các tài liệu bài tập sức bền vật liệu rất phong phú nên giành sự lựa chọn cho giảng viên. Tuy nhiên nội dung phần hai chủ yếu giới thiệu các phương pháp cơ bản nhất của cơ học kết cấu, do vậy sau các chương trình bày các bài tập có chọn lựa để tiện cho giảng viên và người học.

CHƯƠNG 1
Các khái niệm cơ bản

1.1 Lực tác dụng

Ngoại lực

Định nghĩa. Ngoại lực là những lực tác động của môi trường bên ngoài (sóng, gió...) hay của những vật thể khác tác dụng lên vật thể đang xét (lực bánh xe tác động lên đường ray, búa đập...).

Ngoại lực gồm:

- tải trọng tác động là lực chủ động
- và phản lực liên kết là lực thụ động phát sinh tại các liên kết do có tác dụng của tải trọng.

Tải trọng có thể phân làm hai loại theo cách thức tác dụng:

- lực tập trung là lực hay mô men tác động vào một điểm
- và lực phân bố là lực trải trên một thể tích, một diện tích hay một đường.

Tải trọng cũng có thể phân loại thành:

- tải trọng tĩnh (được coi là tĩnh khi nó tăng rất chậm từ không đến giá trị nào đó rồi giữ nguyên giá trị đó), khi đó có thể bỏ qua lực quán tính trong quá trình tăng lực
- và tải trọng động thay đổi theo thời gian, khi đó không thể bỏ qua thành phần quán tính.

Liên kết và phản lực liên kết

Vật thể chịu tác động của tải trọng sẽ truyền tác động sang các chi tiết tiếp xúc với chúng. Ngược lại, các chi tiết sẽ tác động lên vật thể đang xét những phản lực. Vật thể chịu liên kết làm cho chuyển động bị ngăn cản. Khi đó sẽ xuất hiện các phản lực, có phương ứng với phương của chuyển động bị ngăn cản.

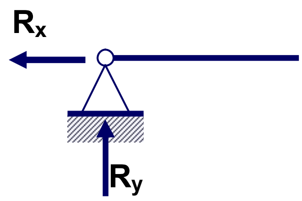
Trường hợp trong mặt phẳng

– Gối tựa di động (liên kết đơn) - chỉ ngăn cản chuyển động thẳng dọc theo liên kết. Phản lực là một lực R. Trên hình 1.1a là hai cách biểu diễn liên kết gối tựa di động.

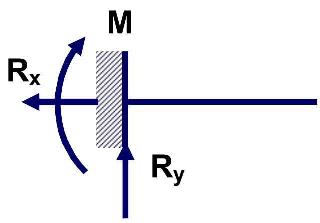
– Gối tựa cố định (liên kết khớp) – ngăn cản mọi chuyển động thẳng. Phản lực phân ra hai thành phần R_x và R_y theo phương ngang và phương đứng tương ứng (hình 1.1b).

– Liên kết ngàm: ngăn cản mọi chuyển động (cả quay và thẳng). Phản lực gồm một lực R chia làm hai thành phần R_x và R_y và một mô men chống xoay (hình 1.1c).

a. Gối tựa di động hay liên kết đơn



b. Gối tựa cố định hay liên kết khớp



c. Liên kết ngàm

Hình 1.1. Biểu diễn các liên kết thường gặp trong trường hợp phẳng

Trong phụ lục 1 cho bảng đặc điểm các phản lực liên kết thường gặp.

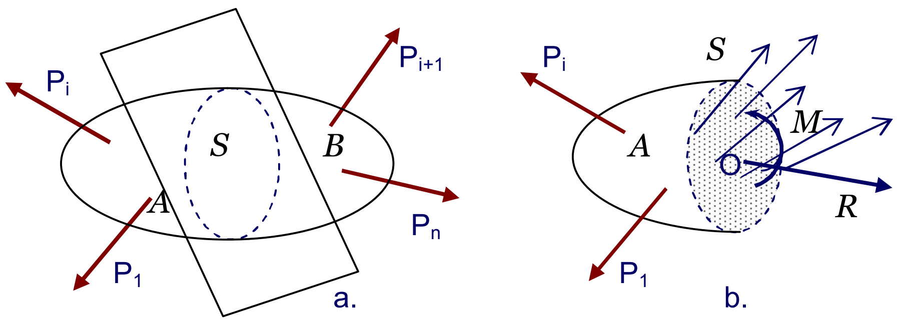
1.2 Nội lực

Giữa các phần tử vật chất luôn có những tương tác. Tại thời điểm ban đầu, lực tương tác đảm bảo sự không thay đổi hình dạng của vật thể. Dưới tác động của ngoại lực, vật biến dạng kéo theo sự thay đổi lực tương tác bên trong vật thể.

Công nhận giả thiết vật thể ở trạng thái tự nhiên có nghĩa là ở trạng thái cân bằng ban đầu khi chưa có tác động bên ngoài, nội lực trong hệ bằng không. có định nghĩa nội lực là các lực tương hỗ giữa các phần tử vật chất của vật thể xuất hiện khi vật rắn bị biến dạng dưới tác động của ngoại lực, đây là phần lực thêm vào trường lực đã có sẵn.

Phương pháp mặt cắt

Để xem xét, biểu diễn và xác định nội lực dùng phương pháp mặt cắt. Xét vật thể cân bằng dưới tác động của một hệ lực, tưởng tượng mặt S chia vật thể làm hai phần A và B (hình 1.2a). Xét sự cân bằng của một phần, ví dụ phần A. Ngoài ngoại lực đặt vào A phải đặt hệ lực tương tác của phần B đặt trên mặt cắt S, hệ lực tương tác này chính là nội lực trên mặt cắt đang xét (hình 1.2b).



Hình 1.2. Phương pháp mặt cắt

Nội lực tại mặt cắt ngang

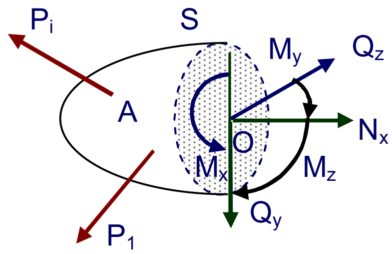
Hệ lực tương tác tại mặt cắt ngang S có thể thu gọn về trọng tâm O của nó, khi đó nhận được vec tơ chính R và vec tơ mô men chính M. Vec tơ lực R và vec tơ mô men M nói chung có phương chiều bất kì trong không gian. Chọn hệ tọa độ Đề các với trục x vuông góc với mặt cặt ngang S, trục y và z nằm trên mặt phẳng chứa S. Chiếu vec tơ lực R và vec tơ mô men M lên hệ tọa độ đã chọn sẽ được các thành phần nội lực tại mặt cắt ngang (hình 1.3):

– N_x là thành phần trên trục x, được gọi là lực dọc trục,

– Q_y, Q_z là các thành phần trên trục y và z được gọi là lực cắt,

– M_x là thành phần mô men quay quanh trục x, gọi là mô men xoắn,

– M_y, M_z là hai thành phần mô men quay quanh trục y và trục z (tác dụng trong mặt phẳng Oxz và Oxy), gọi là các mô men uốn.



Hình 1.3. Nội lực tại mặt cắt ngang

N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y và M_z là sáu thành phần nội lực tại mặt cắt ngang, được xác định từ điều kiện cân bằng của phần đang xét dưới dạng sáu phương trình cân bằng sau đây

$$N_x + \sum_i P_{ix} = 0;\ Q_y + \sum_i P_{iy} = 0;\ Q_z + \sum_i P_{iz} = 0$$

$$M_x + \sum_i m_x\left(\vec{P}_i\right) = 0;\ M_y + \sum_i m_y\left(\vec{P}_i\right) = 0;\ M_z + \sum_i m_z\left(\vec{P}_i\right) = 0$$

trong đó $\vec{P}_i$ là các lực tác dụng vào phần đang xét (ví dụ phần A),

P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} là hình chiếu của vec tơ lực $\vec{P}_i$ lên các trục x, trục y và trục z tương ứng,

$m_x(P_i)$, $m_y(P_i)$, $m_z(P_i)$ là mô men của lực $\vec{P}_i$ lấy đối với trục x, trục y, trục z tương ứng.

Nếu xét phần B cũng sẽ thu được sáu thành phần nội lực có cùng trị số nhưng ngược chiều với nội lực tương ứng của phần A.

Nội lực tại mặt cắt ngang của thanh trong bài toán phẳng

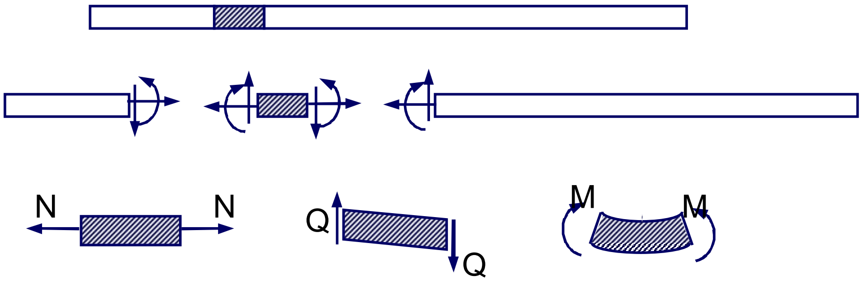
Thanh được đặc trưng bằng tiết diện (mặt cắt ngang) và trục. Xét thanh cân bằng trong mặt phẳng chứa trục và ngoại lực nằm trong mặt phẳng xz.

Áp dụng phương pháp mặt cắt, khi đó nội lực tại tiết diện thanh sẽ có 3 thành phần với quy ước dấu biểu diễn trên hình 1.4.

– Lực dọc trục N vuông góc với tiết diện, là dương khi đoạn đang xét chịu kéo,

– Lực cắt Q vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh, là dương khi đoạn đang xét có xu hướng quay theo chiều kim đồng hồ dưới tác động của lực cắt,

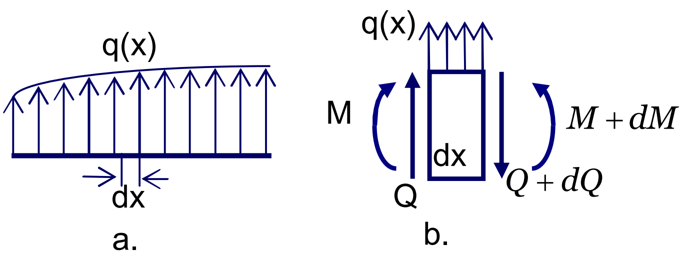
– Mô men uốn M gây uốn trong mặt phẳng xz là dương khi đoạn đang xét bị cong võng xuống dưới tác động của mô men.



Hình 1.4. Quy ước dấu của nội lực trong thanh

Quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng phân bố

Xét thanh chịu uốn dưới tác dụng của tải phân bố $q(x)$ như trên hình 1.5a



Hình 1.5. Phân tố của thanh chịu tải phân bố

Xét một đoạn phân tố dx, kí hiệu lực cắt và mô men uốn của mặt cắt bên bên trái là $Q_{tr} = Q$, $M_{tr} = M$, còn lực cắt và mô men uốn của mặt cắt bên phải là $Q_{ph} = Q + dQ$ và $M_{ph} = M + dM$ (hình 1.5b). Với quy ước trục y cùng phương với lực cắt và trục z là trục vuông góc hai trục x, y tạo thành hệ trục vuông góc thuận, viết phương trình cân bằng cho đoạn phân tố đó

– Tổng các lực cắt (hình chiếu các lực lên trục y)

$$\sum Q_y = 0 \rightarrow Q + qdx - \left(Q + dQ\right) = 0 \rightarrow \frac{dQ}{dx} = q\,. \tag{1.1}$$

– Tổng mô men của các lực đối với trục z

$$\sum M_z = 0 \rightarrow M + Qdx + q\frac{dx^2}{2} - (M + dM) = 0$$

$$\rightarrow \frac{dM}{dx} = Q\,,\ \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q\,. \tag{1.2}$$

Ta có nhận xét:

– Đạo hàm bậc nhất theo trục x của mô men uốn bằng lực cắt.

– Đạo hàm bậc hai theo trục x của mô men uốn bằng đạo hàm bậc nhất theo trục x của lực cắt và bằng cường độ lực phân bố.

Bằng cách làm tương tự sẽ có các quan hệ giữa nội lực và tải trọng phân bố trong trường hợp thanh chịu kéo dưới tác dụng của tải trọng phân bố dọc thanh $p(x)$ và trường hợp thanh chịu xoắn dưới tác dụng của mô men xoắn phân bố $m_x(x)$.

– Đạo hàm của lực dọc N bằng cường độ tải trọng phân bố dọc:

$$\frac{dN}{dx} = -p(x)\,. \tag{1.3}$$

– Đạo hàm của mô men xoắn M_x bằng cường độ mô men xoắn phân bố:

$$\frac{dM_x}{dx} = m_x(x)\,. \tag{1.4}$$

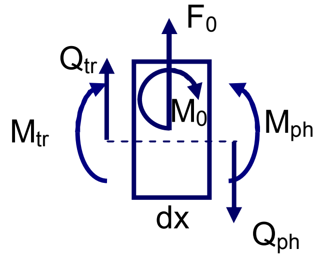
Quan hệ bước nhảy của biểu đồ nội lực và tải trọng tập trung.

Cho thanh chịu lực ngang tập trung F_0, mô men tập trung M_0. Xét phân tố dx chứa điểm có đặt tải tập trung (hình 1.6), viết phương trình cân bằng cho đoạn phân tố đó:

$$\sum Q_y = 0 \rightarrow \Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr} = F_0\,,$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \Delta M = M_{ph} - M_{tr} = M_0\,. \tag{1.5}$$

ở đây $Q_{ph}, Q_{tr}, M_{ph}, M_{tr}$ lần lượt là lực cắt và mô men uốn ở bên phải và bên trái của đoạn phân tố mà tại đó có điểm đặt lực cắt và mô men uốn tập trung.



Hình 1.6. Phân tố thanh có đặt tải tập trung

Nhận xét:

- Tại tiết diện đặt lực tập trung sẽ có bước nhảy.
- Trị số của bước nhảy bằng trị số của các lực tập trung.
- Bước nhảy của lực cắt dương khi lực hướng lên.
- Bước nhảy của mô men dương khi mô men quay theo chiều kim đồng hồ.

Quan hệ bước nhảy của biểu đồ với tải trọng dọc trục tập trung P_0 và mô men xoắn tập trung M_{x0}:

$$\Delta N = N_{ph} - N_{tr} = P_0, \tag{1.6}$$

$$\Delta M_x = M_{x,ph} - M_{x,tr} = M_{x0}, \tag{1.7}$$

ở đây N_{ph}, N_{tr} ($M_{x,ph}, M_{x,tr}$) lần lượt là lực dọc trục (mô men xoắn) ở bên phải và bên trái của đoạn phân tố mà tại đó có điểm đặt lực dọc trục (mô men xoắn) tập trung.

Biểu đồ nội lực

Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của nội lực trên các tiết diện dọc theo trục thanh. Từ đó, có thể tìm được tiết diện có nội lực lớn để bố trí vật liệu thích hợp. Để vẽ biểu đồ nội lực, cho mặt cắt biến thiên dọc trục x, viết biểu thức giải tích của các nội lực, vẽ đồ thị các hàm số này theo biến x. Cụ thể theo các bước như sau:

- Xác định phản lực liên kết từ điều kiện tĩnh học. Thay thế các liên kết bằng phản lực liên kết.

– Phân thanh thành từng đoạn sao cho không có bước nhảy nội lực trong đó, có nghĩa mặt cắt phân chia đoạn đặt tại các điểm có đặt lực tập trung.

– Thiết lập các biểu thức giải tích của các nội lực trong từng đoạn như là các hàm của biến x và vẽ đồ thị của các hàm này trên từng đoạn.

Ví dụ 1.1. Biểu đồ lực dọc N, lực cắt Q và mô men uốn M cho ví dụ trên hình 1.7a được vẽ trên các hình 1.7b, 1.7c và 1.7d.

Trước tiên xác định phản lực từ điều kiện cân bằng cho hệ lực phẳng bằng các phương trình:

$$P_2 - R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = P_2,$$

$$3bR_3 - 2bP_1 - 4bP_3 = 0 \Rightarrow R_3 = \frac{2P_1 + 4P_3}{3},$$

$$R_1 + R_3 = P_1 + P_3 \Rightarrow R_1 = \frac{P_1 - P_3}{3},$$

mà $P_1 = 3P, \quad P_3 = P_2 = P$ nên được các phản lực:

$$R_1 = 2P/3, \; R_2 = P, \; R_3 = 10P/3.$$

Thay các liên kết bằng phản lực, sau đó sang bước phân đoạn tại các mặt cắt có đặt lực tập trung. Như ở mục trên đã nhận xét tại các điểm đặt lực tập trung sẽ có bước nhảy của nội lực, như vậy cho từng đoạn có thể viết các phương trình biến thiên của từng thành phần nội lực.

Xét mặt cắt 1-1 trong đoạn từ bên trái đến điểm đặt lực P_1 và P_2. Đặt các nội lực N, Q, M vào mặt cắt cách đầu trái một đoạn $x\,(0 \le x \le 2b)$ và xét cân bằng của đoạn này sẽ nhận được hệ phương trình:

$$N - R_2 = 0; \quad Q + R_1 = 0; \quad M - R_1 x = 0.$$

Giải hệ phương trình này sẽ nhận được các nội lực:

$$N = P, \; Q = 2P/3, \; M = 2Px/3.$$

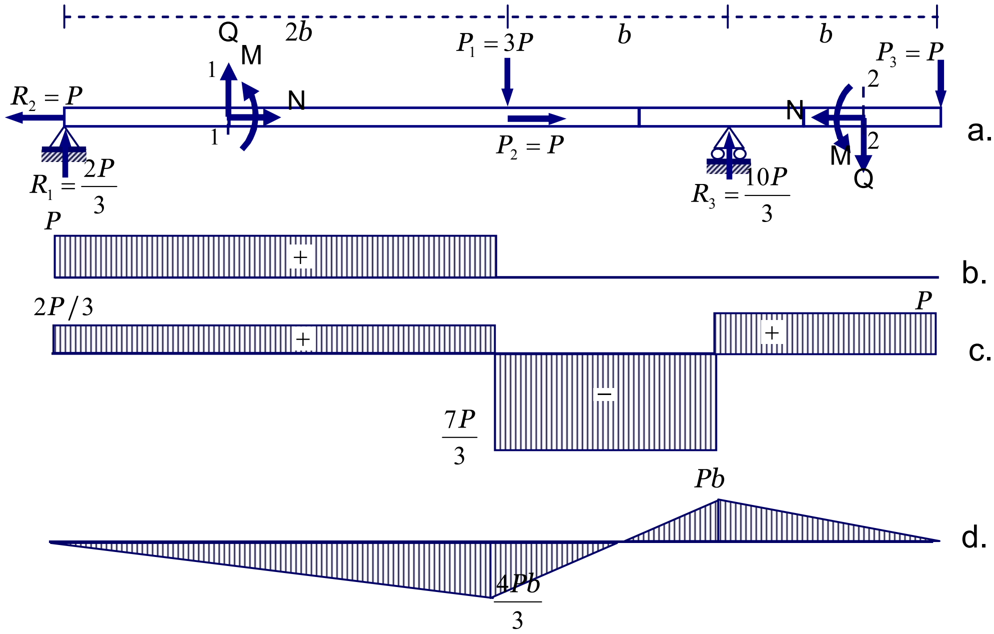
Tương tự xét mặt cắt 2-2 trong đoạn từ bên phải đến điểm có gối di động. Đặt các nội lực N, Q, M vào mặt cắt cách đầu phải một đoạn $x_1 \;\; (0 \le x_1 \le b)$ và xét cân bằng của đoạn này sẽ nhận được hệ phương trình:

$$N = 0; \quad Q - P_3 = 0; \quad M - P_3 x_1 = 0.$$

Giải hệ phương trình này nhận được các nội lực:

$$N = 0\,,\ Q = P\,,\ M = Px_1\,.$$

Đoạn ở giữa áp dụng trình tự tương tự sẽ nhận được biểu đồ lực dọc trục, lực cắt và mô men, biểu diễn trên các hình 1.7b, 1.7c. và 1.7d tương ứng.



Hình 1.7. Biểu đồ nội lực của dầm: a. Dầm chịu lực; b. Biểu đồ lực dọc N; c. Biểu đồ lực cắt Q; d. Biểu đồ mô men M

Nhận xét

– Biểu đồ lực dọc trục là hằng số trên đoạn thứ nhất có bước nhảy bằng P tại điểm đặt lực $P_2 = P$, trên hai đoạn còn lại lực dọc trục bằng không.

– Biểu đồ lực cắt là hằng số theo từng đoạn, có bước nhảy bằng $3P$ tại điểm đặt lực $P_1 = 3P$ và bằng $10P/3$ tại gối đỡ bên phải.

– Biểu đồ mô men là các đường bậc nhất, tại các điểm có đặt lực cắt mô men đổi hướng độ dốc.

Ví dụ 1.2. Vẽ biểu đồ nội lực của hệ khung trên hình 1.8a.

Tương tự như trong ví dụ 1.1 phản lực tại gối đỡ tìm được từ ba phương trình cân bằng và một phương trình mô men bằng không tại khớp nối:

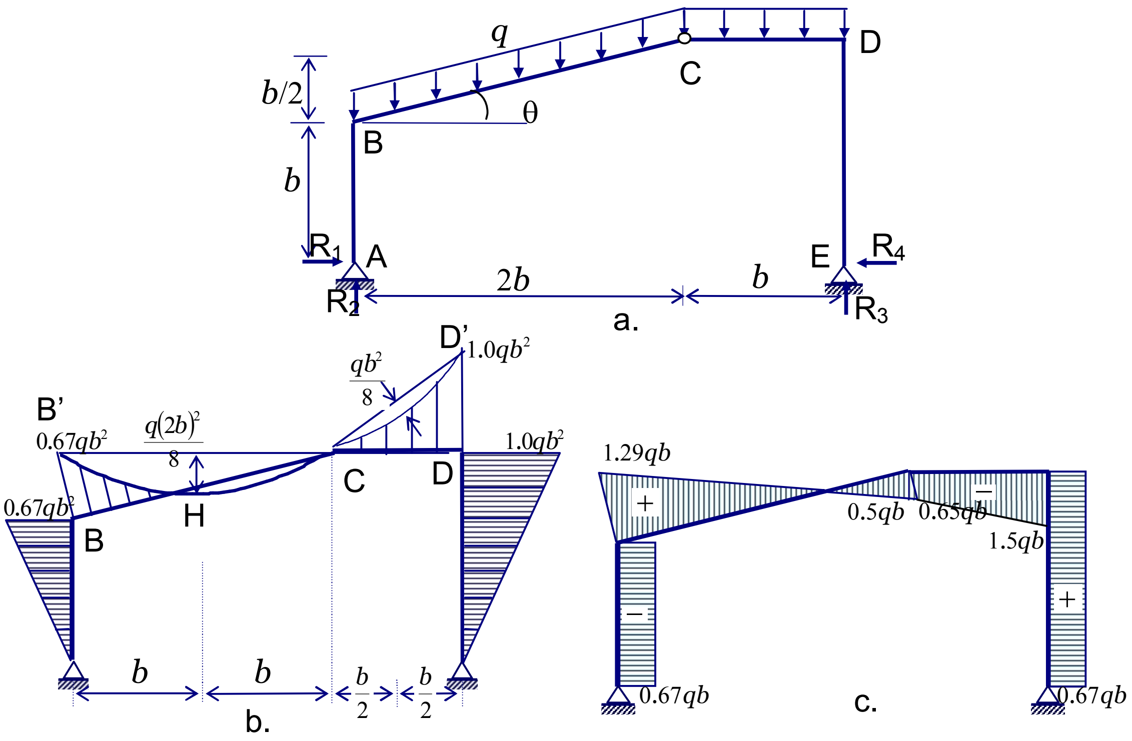
$$R_1 = R_4 = \frac{2qb}{3},\ R_2 = R_3 = \frac{3qb}{2}.$$

Lực cắt trên đoạn AB bằng phản lực R_1. Lực cắt trên đoạn ED bằng phản lực R_4. Trên đoạn BC, lực cắt tại mặt cắt bên phải điểm B và bên trái điểm C tính theo công thức:

$$Q_{Bph} = R_2 \cos\theta - R_1 \sin\theta, \qquad Q_{Ctr} = (R_2 - 2qb)\cos\theta - R_1 \sin\theta.$$

Trên đoạn CD, lực cắt lại mặt cắt bên trái điểm D bằng phản lực R_3,còn mặt cắt bên phải C tính theo công thức

$$Q_{Cph} = R_3 - qb$$



Hình 1.8. Biểu đồ nội lực cho hệ khung: a. Hệ khung phẳng;
b. Biểu đồ mô men M; c. Biểu đồ lực cắt Q

Từ quan hệ vi phân giữa mô men uốn và lực cắt (1.2), có nhận xét:

- Biểu đồ mô men trên đoạn AB và đoạn DE là đường bậc một theo công thức:

$M_{AB} = R_1 x, \quad 0 \le x \le b$ và $M_{DE} = R_4 x, \quad 0 \le x \le 1,5b$.

– Còn hai đoạn BC và CD chịu lực phân bố, lực cắt là đường bậc một và biểu đồ mô men là đường bậc hai. Mô men tại điểm B và điểm D tính được từ công thức trên:

$x = b \Rightarrow M_B = 0,67$ và $x = 1,5b \Rightarrow M_D = 1$,

mô men tại điểm C bằng 0. Dựng đường vuông góc BB' với BC có cao độ 0,67 nối B' với C bằng đường thẳng, tại giữa của đoạn B'C hạ xuống tới H một đoạn bằng:

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{q(2b)^2}{8} = \frac{qb}{2}.$$

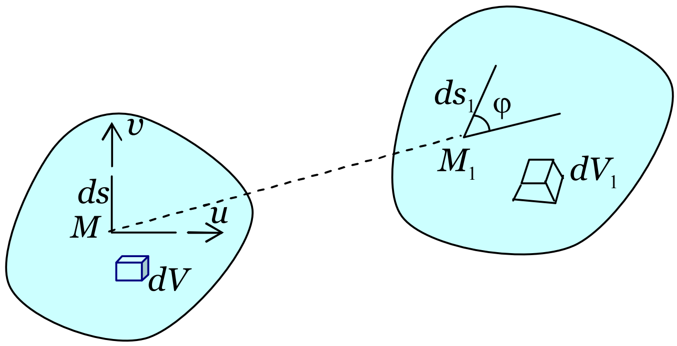
Nối bằng ba điểm B', H và C bằng đường cong, nhận được biểu đồ mô men của đoạn BC. Bằng cách tương tự, có được biểu đồ mô men của CD

1.3 Biến dạng và chuyển vị

Các khái niệm chung

Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của một điểm, hay góc quay của đoạn thẳng nối hai điểm dưới tác động của ngoại lực. Dưới tác dụng của các lực bên ngoài diểm M nào đó trong vật thể chuyển đến vị trí M_1 thì véc tơ $\overrightarrow{MM_1}$ biểu diễn chuyển vị của điểm M (hình 1.9).

Trong khuôn khổ của môn học, chỉ xét các chuyển vị làm thay đổi vị trí tương đối của các điểm vật chất trong vật thể, mà không xét đến các chuyển vị làm vật chuyển động như một vật rắn tuyệt đối.



Hình 1.9. Chuyển vị của một điểm

Chuyển vị của các điểm vật chất trong vật thể không như nhau, dẫn đến sự thay đổi của các yếu tố hình học như đoạn thẳng, góc giữa hai đoạn thẳng. Chính sự thay đổi này làm hình dáng và kích thước của vật thể thay đổi. Từ đây có định nghĩa: biến dạng là sự thay đổi hình dạng, kích thước của vật thể dưới tác dụng của tải trọng.

Biến dạng tại lân cận điểm là tập hợp hàm tọa độ xác định độ dãn của đoạn vật chất vô cùng nhỏ đi qua điểm cho trước và xác định thay đổi góc giữa hai đoạn vật chất vô cùng bé. Dưới đây là một số khái niệm:

– Biến dạng dài tuyệt đối Δds của một đoạn chiều dài vô cùng bé ds đi qua điểm đang xét theo phương ν là lượng thay đổi chiều dài của đoạn này

$$\Delta ds = ds_1 - ds$$

– Biến dạng dài tỷ đối ε_ν theo phương ν của đoạn ds là tỷ số $\Delta ds / ds$

$$\varepsilon_\nu = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{ds_1 - ds}{ds}$$

– Biến dạng góc γ_{uv} trong mặt phẳng Muv là lượng thay đổi của một góc vuông tạo bởi hai tia Mu và Mv đi qua điểm đang xét

$$\gamma_{uv} = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

– Biến dạng thể tích tỷ đối θ là lượng thay đổi của một đơn vị thể tích đi qua điểm đang xét

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV}$$

Các đại lượng $\varepsilon, \gamma, \theta$ đều là đại lượng không thứ nguyên.

Biến dạng của vật thể phụ thuộc vào vật liệu và độ lớn của tải trọng tác dụng. Biến dạng có thể có những tích chất như sau:

– Biến dạng đàn hồi là biến dạng sẽ mất đi hoàn toàn sau quá trình cất tải (loại bỏ nguyên nhân gây ra biến dạng). Vật liệu được gọi là đàn hồi tuyệt đối nếu chúng có khả năng phục hồi lại hoàn toàn kích thước và hình dáng ban đầu sau khi cất tải.

- Biến dạng dẻo (hay còn gọi là biến dạng dư) là biến dạng còn lại sau quá trình cất tải. Khi tải trọng tác động lên vật thể chưa vượt qua một giá trị cho phép thì chỉ xảy ra biến dạng đàn hồi. Nhưng khi tải trọng tác động vượt qua giá trị cho phép thì xuất hiện biến dạng dẻo trong vật thể, thậm chí vật thể có thể bị phá hủy.
- Biến dạng nhớt là biến dạng thay đổi theo thời gian sau khi đặt tải hay sau khi cất tải.

Trong khuôn khổ của môn học này, chỉ xét đến ứng xử của vật liệu khi biến dạng ở trong giai đoạn đàn hồi.

Chuyển vị và biến dạng của thanh

Xét chuyển vị của thanh là xét sự thay đổi vị trí của tiết diện trước và sau khi thanh bị biến dạng. Chuyển vị của thanh gồm chuyển động tịnh tiến của trọng tâm tiết diện và chuyển động quay của hình phẳng tiết diện quanh trọng tâm.

Biến dạng của thanh là sự thay đổi kích thước và hình dáng của tiết diện, sự thay đổi chiều dài, độ cong, độ xoắn của trục thanh.

Thông thường sức bền vật liệu quan tâm chủ yếu đến biến dạng của trục thanh. Theo biến dạng của trục thanh có thể phân thành các trường hợp sau:

- Thanh chịu kéo hoặc nén: trục thanh không bị cong, các tiết diện chỉ chuyển động tịnh tiến dọc trục thanh, do vậy trục thanh bị co lại hoặc giãn ra.
- Thanh chịu cắt: trục thanh không thay đổi độ cong nhưng bị gián đoạn, các tiết diện trượt so với nhau và không biến dạng.
- Thanh chịu xoắn: trục thanh không bị cong và cũng không thay đổi độ dài, các tiết diện không có chuyển vị tịnh tiến chỉ có chuyển vị quay quanh trọng tâm trong mặt phẳng của tiết diện.
- Thanh chịu uốn: trục thanh bị cong, nhưng độ dài trục thanh không đổi. Khi đó tồn tại cả chuyển vị tịnh tiến và chuyển vị quay của tiết diện.
- Thanh chịu lực phức tạp là tổ hợp của bốn trường hợp trên. Như đã nói ở trên, có thể dùng nguyên lí cộng tác dụng để xét biến dạng của tiết diện thanh.

Kết luận chương 1

Chương 1 trình bày các khái niệm chung như:

- Lực tác dụng: Đưa ra khái niệm ngoại lực, phân biệt lực tác động và phản lực liên kết, phân loại lực tập trung và lực phân bố, định nghĩa tải trọng tĩnh và tải trọng động.
- Nội lực: Đưa ra định nghĩa nội lực, khái niệm nội lực tại mặt cắt ngang, trình bày phương pháp mặt cắt xác định nội lực, quy ước dấu của nội lực tại mặt cắt của thanh và cách biểu diễn nội lực bằng biểu đồ.
- Quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng: Trình bày các quan hệ vi phân giữa tải trọng phân bố và nội lực cũng như bước nhảy trong biểu đồ nội lực khi có lực tập trung tác động.

CHƯƠNG 2
Quan hệ ứng suất và biến dạng

2.1 Trạng thái ứng suất

Vec tơ ứng suất

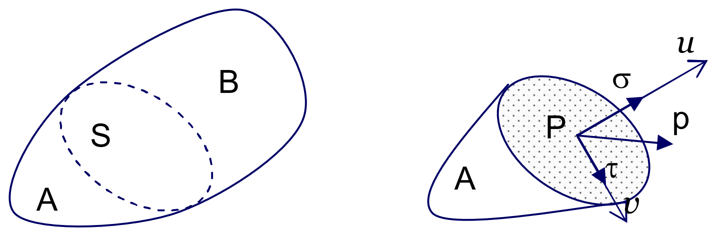
Dùng phương pháp tiết diện để nghiên cứu trạng thái ứng suất của vật thể biến dạng (hình 2.1a). Xét phân tố diện tích ΔS chứa điểm P có pháp tuyến ν ở bên trong vật thể. Giả thiết nội lực tác dụng lên diện tích ΔS đưa về lực tương đương Δp tại P và ngẫu lực mô men ΔM. Khi ΔS tiến tới 0 (vẫn chứa P) thì Δp tiến tới dp/dS còn $\Delta M/\Delta S$ tiến tới không. Đại lượng

$$p_\nu = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta S} = \frac{dp}{dS} \tag{2.1}$$

là vec tơ ứng suất đối với phần tử tiết diện qua điểm P có pháp tuyến ν. Vec tơ ứng suất biểu thị nội lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tiết diện đi qua một điểm nào đấy của vật thể biến dạng.

Vec tơ ứng suất có thể chiếu lên phương pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt cắt (hình 2.1b), khi đó có biểu diễn

$$p_\nu = \sigma_u + \sigma_v = \sigma + \tau. \tag{2.2}$$



Hình 2.1. Vec tơ ứng suất

Thứ nguyên của ứng suất là lực/chiều dài^2, đơn vị thường dùng là N/m^2 (Pa – Pascal), MN/m^2 (MPa – Mega Pascal).

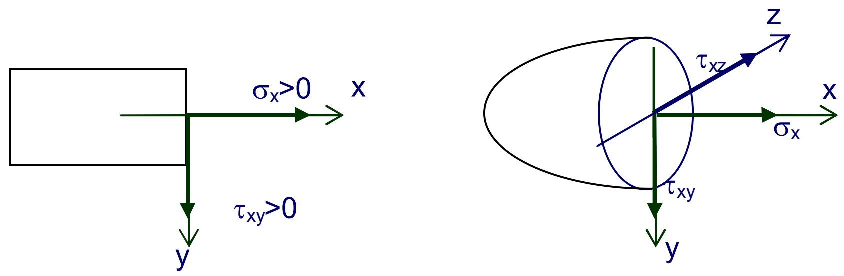
Thành phần theo phương pháp tuyến, kí hiệu là σ, được gọi là ứng suất pháp. Thành phần theo phương tiếp tuyến, kí hiệu là τ, được gọi là ứng suất tiếp. Khi đó, độ lớn của vec tơ ứng suất :

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Quy ước dấu của ứng suất như sau (hình 2.2):

– Ứng suất pháp được gọi là dương khi chiều của nó cùng chiều dương của pháp tuyến ngoài mặt cắt. Ứng suất pháp được kí hiệu cùng với một (hoặc hai) chỉ số, ví dụ σ_x (hoặc σ_{xx}) chỉ chiều của pháp tuyến.

– Ứng suất tiếp được gọi là dương khi pháp tuyến ngoài của mặt cắt quay 90° theo chiều kim đồng hồ sẽ trùng với chiều ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp được kí hiệu cùng với hai chỉ số, ví dụ τ_{xy}, τ_{xz}, chỉ số thứ nhất chỉ chiều của pháp tuyến, chỉ số thứ hai chỉ chiều song song với ứng suất tiếp.



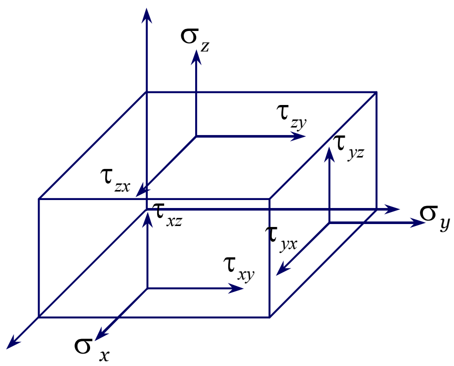
Hình 2.2. Quy ước dấu và chỉ số của các thành phần ứng suất

Tenxơ ứng suất

Để xét trạng thái ứng suất tại một điểm, xét một phân tố đủ nhỏ tại điểm đó và chiếu vec tơ ứng suất p_ν lên hệ tọa độ Đề các. Khi đó hình chiếu của p_ν lên các trục tọa độ, kí hiệu là X_ν, Y_ν, Z_ν, có thể biểu diễn qua vec tơ pháp tuyến $\nu(l,m,n)$ bằng sáu thành phần σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ và $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (hình 2.3):

$$\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_{xx} l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ Y_\nu &= \tau_{yx} l + \sigma_{yy} m + \tau_{yz} n, \\ Z_\nu &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_{zz} n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sáu thành phần ứng suất này khái quát hóa tình trạng chịu lực của một điểm. Bằng công thức (2.3) sáu thành phần ứng suất này có thể biểu diễn vec tơ ứng suất trên mặt cắt bất kì đi qua điểm đó, chúng biểu diễn trạng thái ứng suất tại một điểm (hình 2.3).



Hình 2.3. Thành phần ứng suất tại phân tố

Như vậy sáu thành phần ứng suất (ba ứng suất pháp và ba ứng suất tiếp) này xác định trong hệ tọa độ lựa chọn. Theo định nghĩa chúng chính là các thành phần của một ten xơ bậc hai đối xứng gọi là ten xơ ứng suất. Có thể nói, trạng thái ứng suất được biểu diễn bằng ten xơ ứng suất bậc hai đối xứng, được kí hiệu theo các cách sau đây:

$$\sigma_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \text{ ở đây } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{2.4}$$

Theo định nghĩa về ten xơ, có thể lựa chọn hệ tọa độ sao cho các thành phần ứng suất tiếp bằng không. Hệ tọa độ này xác định hướng chính của ứng suất, tìm từ hệ phương trình:

$$\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{(\alpha)}\right)\nu_i = 0. \tag{2.5}$$

Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_{(\alpha)} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{(\alpha)} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{(\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0, \text{ ở đây } \{\nu\} = \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}. \tag{2.5a}$$

Nói cách khác, tại một điểm bất kì có thể tìm được ba mặt vuông góc là các mặt chính, có pháp tuyến là các hướng chính.

Ứng suất pháp trên các mặt chính là ứng suất chính, kí hiệu là σ_1, σ_2, σ_3 và được quy ước $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ theo các giá trị đại số. Ứng suất chính được xác định từ phương trình:

$$\mathrm{Det}\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{(\alpha)}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{(\alpha)}^3 - J_1\sigma_{(\alpha)}^2 + J_2\sigma_{(\alpha)} - J_3 = 0\,, \tag{2.6}$$

trong đó J_1, J_2, J_3 là các bất biến của ten xơ ứng suất bậc hai có dạng:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_{tb}\,,$$

$$J_2 = \left\{\begin{vmatrix} \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \sigma_{zx} \\ \sigma_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right) = \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right),$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = Det\left|\sigma_{ij}\right| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\,. \tag{2.7}$$

Ở mặt phẳng tạo với các hướng chính một góc 45° có trạng thái ứng suất mà các ứng suất tiếp đạt cực trị. Chúng có giá trị tính qua các ứng suất chính như sau :

$$\tau_1 = \pm\left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right|, \quad \tau_2 = \pm\left|\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right|, \quad \tau_3 = \pm\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|. \tag{2.8}$$

Phân loại trạng thái ứng suất

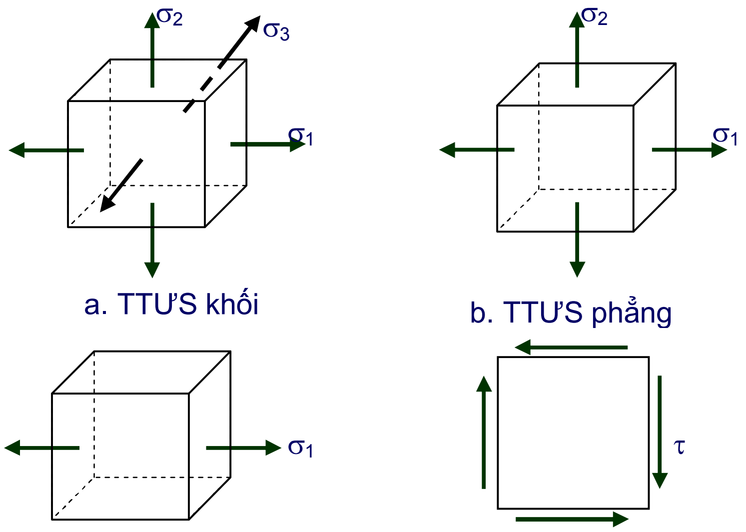
Phân loại trạng thái ứng suất dựa trên các trường hợp khác nhau của ứng suất chính:

– Trạng thái ứng suất khối khi cả ba ứng suất chính khác không: trên cả ba mặt chính đều có ứng suất pháp $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$ (hình 2.4a).

– Trạng thái ứng suất phẳng khi hai trong ba ứng suất chính khác không: trên một mặt chính có ứng suất pháp bằng không, hai mặt còn lại ứng suất pháp khác không $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$ (hình 2.4b).

– Trạng thái ứng suất đơn khi một trong ba ứng suất chính khác không: trên hai mặt chính có ứng suất pháp bằng không, mặt còn lại ứng suất pháp khác không $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ (hình 2.4c).

– Trạng thái ứng suất trượt thuần túy là trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt khi tìm được hai mặt vuông góc, trên hai mặt đó chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp (hình 2.4d).



a. TTƯS khối
b. TTƯS phẳng
c. TTƯS đơn
d. TTƯS trượt thuần túy

Hình 2.4. Các trạng thái ứng suất (TTƯS)

Trong các bài toán thanh sẽ gặp chủ yếu là trạng thái ứng suất phẳng, nên ở đây xem xét kỹ hơn trạng thái ứng suất này .

Trạng thái ứng suất phẳng

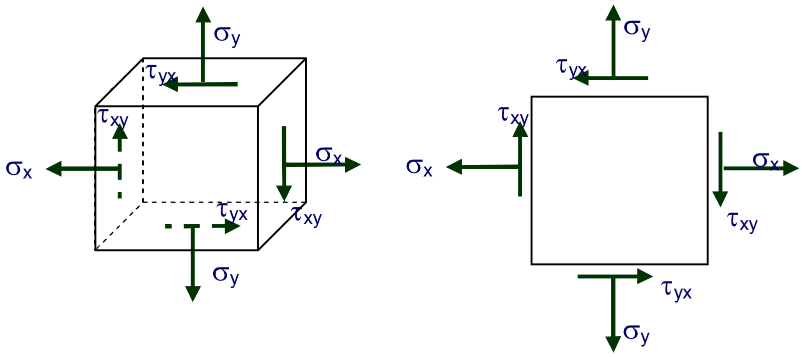
Trạng thái ứng suất phẳng như đã định nghĩa là trạng thái đảm bảo điều kiện ứng suất pháp tại mặt vuông góc với trục z bằng không,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \tag{2.9}$$

Chú ý: Trong thực tế trạng thái ứng suất phẳng như (2.9) rất khó thực hiện. Thay vào đó, thường xét trạng thái ứng suất phẳng suy rộng. Đó là trạng thái ứng suất của bản mỏng độ dày h chỉ chịu lực song song với mặt phẳng của bản, ở đó:

$\tau_{xz} = 0$; $\tau_{yz} = 0$; tại $z = \pm h/2$, $\sigma_{zz} = 0$ mọi nơi (một cách gần đúng).

Ứng suất trên các mặt vuông góc với trục x và trục y gồm có $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ và τ_{yx}. Ten xơ ứng suất là ten xơ đối xứng nên $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (hình 2.5).



Hình 2.5. Trạng thái ứng suất phẳng

Xét cân bằng của phần phân tố bị cắt bằng mặt cắt nghiêng một góc α. Kí hiệu u, v là pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt nghiêng (hình 2.6). Sử dụng quy ước dấu của ứng suất và hình chiếu của diện tích dA lên trục x và trục y:

$dA_x = dA\cos\alpha$, $dA_y = dA\sin\alpha$,

ta viết điều kiện cân bằng của phần phân tố chiếu lên các trục u và v:

$$\sum U = \sigma_u dA + (\tau_{xy}\sin\alpha - \sigma_x\cos\alpha)dA_x + (\tau_{yx}\cos\alpha - \sigma_y\sin\alpha)dA_y = 0$$

$$\sum V = \tau_{uv} dA - (\tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_x\sin\alpha)dA_x + (\tau_{yx}\sin\alpha + \sigma_y\cos\alpha)dA_y = 0. \quad (2.10)$$

Vì $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ từ điều kiện cân bằng (2.10) tìm được

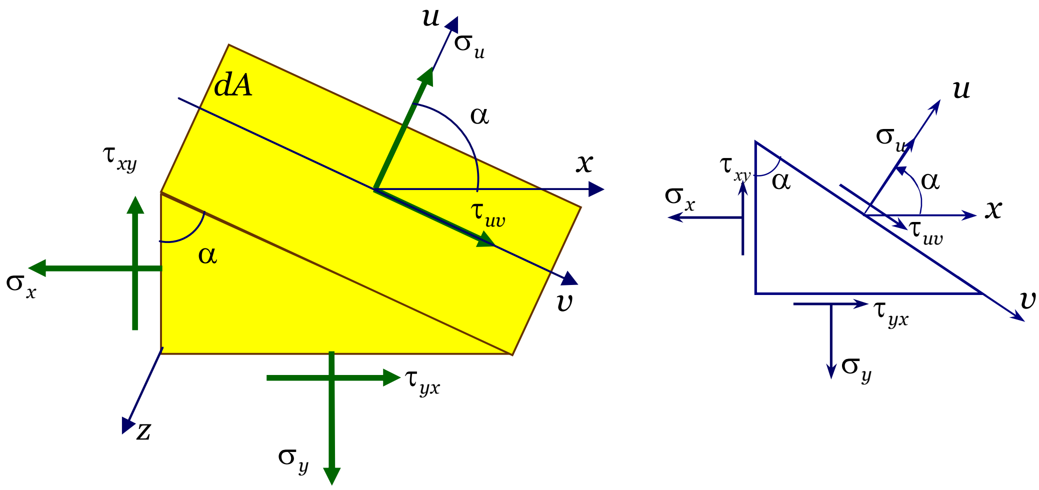
$$\sigma_u = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha - 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha. \quad (2.11)$$

Theo định nghĩa về mặt chính - nơi chỉ có ứng suất pháp còn ứng suất tiếp bằng không, sẽ tìm mặt cắt nghiêng mà ở đó $\tau_{uv} = 0$, từ (2.11) tìm được góc α:

$$tg2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.12)$$



Hình 2.6. Ứng suất tại mặt nghiêng

Thay góc α vừa tìm được vào (2.11) có được ứng suất chính:

$$\sigma_{\max(\min)} = \sigma_{1(2)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,. \tag{2.13}$$

Tìm mặt cắt nghiêng mà ứng suất tiếp đạt cực trị từ điều kiện:

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha = 0 \;\Rightarrow tg2\alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{tg2\alpha_{\max(\min)}}.$$

Điều này có nghĩa góc $2\alpha_0$ vuông góc với góc $2\alpha_{\max(\min)}$, vậy mặt cắt nghiêng mà ứng suất tiếp đạt cực trị tạo góc 45° với hướng chính và

$$\tau_{\max(\min)} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\left|\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}\right|.. \tag{2.14}$$

Các thành phần ứng suất trên mặt nghiêng bất kì có thể biểu diễn qua ứng suất chính:

$$\sigma_u = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha \;\text{ và }\; \tau_{uv} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha\,.$$

Từ các công thức (2.11) có:

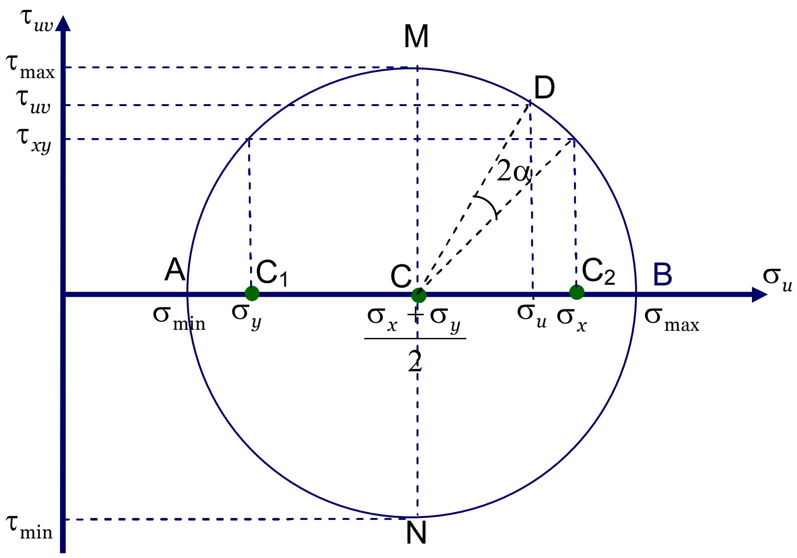
$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\,.$$

Đây là phương trình đường tròn trong hệ tọa độ σ_u, τ_{uv} có tâm C ở tọa độ $(0{,}5(\sigma_x+\sigma_y), 0)$ và bán kính $R=\sqrt{0{,}25(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2}$. Các điểm trên đường tròn này biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt nghiêng được gọi đường tròn Mohr.

Dựng đường tròn Mohr cho điểm có trạng thái ứng suất σ_x, σ_y, τ_{xy} như sau:

– Dựng hệ trục tọa độ (σ_u, τ_{uv}), trên trục σ_u lấy hai điểm C_1 và C_2 có tọa độ là σ_y, σ_x tương ứng, khi đó trung điểm C của đoạn C_1C_2 là tâm của đường tròn Mohr. Từ tâm C vẽ đường tròn có bán kính $R=\sqrt{0{,}25(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2}$.

– Điểm A, B là hai điểm đường tròn cắt trục σ_u biểu diễn trạng thái ứng suất tại mặt chính với các giá trị ứng suất pháp cực trị $\sigma_{max}, \sigma_{min}$ và $\tau_{uv}=0$ (hình 2.7).



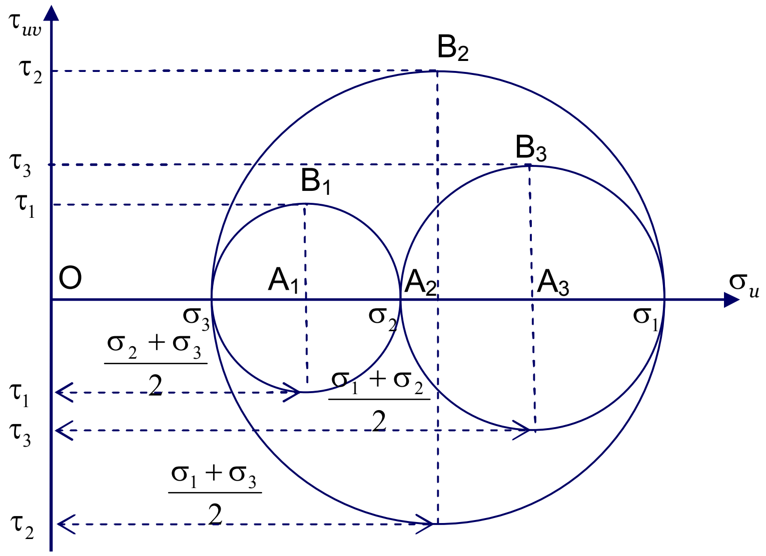
Hình 2.7. Đường tròn Morh của trạng thái ứng suất phẳng

– Điểm M, N là hai điểm đường tròn cắt đường thẳng đi qua tâm C song song với trục τ_{uv} biểu diễn trạng thái ứng suất tại mặt có các giá trị ứng suất tiếp cực trị $\tau_{max(min)}=\pm\frac{|\sigma_{max}-\sigma_{min}|}{2}$ và ứng suất pháp $\sigma_u=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}$ (hình 2.7).

– Điểm D là điểm biểu diễn trạng thái ứng suất trên mặt nghiêng góc α so với tọa độ ban đầu.

Đối với trạng thái ứng suất khối, với quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ dựng được 3 đường tròn Mohr (hình 2.8).

– Đường tròn nhỏ nhất đi qua hai điểm σ_3 và σ_2 có tâm tại điểm $A_1\left(0{,}5(\sigma_2+\sigma_3), 0\right)$, bán kính $0{,}5(\sigma_2-\sigma_3)$ biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ nhất.



Hình 2.8. Ba đường tròn Morh của trạng thái ứng suất khối

– Đường tròn đi qua hai điểm σ_2 và σ_1 có tâm tại điểm $A_2\left(0{,}5(\sigma_1+\sigma_2), 0\right)$, bán kính $0{,}5(\sigma_1-\sigma_2)$ biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ ba.

– Đường tròn lớn nhất đi qua hai điểm σ_3 và σ_1 có tâm tại điểm A_3 $\left(0{,}5(\sigma_1+\sigma_3), 0\right)$, bán kính $0{,}5(\sigma_1-\sigma_3)$ biểu diễn ứng suất pháp và ứng suất tiếp của các mặt phẳng song song với phương chính thứ hai. Đường tròn lớn nhất này là đường tròn giới hạn hay đường tròn chính.

Ba điểm B_1, B_2 và B_3 biểu diễn trạng thái ứng suất tại các mặt nghiêng song song lần lượt với các mặt chính thứ nhất, thứ hai và thứ ba và nghiêng 45° với hai mặt còn lại. Tại đó ứng suất tiếp đạt cực trị:

$$A_1B_1 = \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},\ A_2B_2 = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},\ A_3B_3 = \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

còn ứng suất pháp tại các mặt đó lần lượt bằng:

$$OA_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2},\ OA_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},\ OA_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Quan hệ giữa ứng suất và nội lực

Ứng suất của một điểm bất kì trên mặt cắt ngang của thanh chiếu lên thành các thành phần σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}. Khi đó có quan hệ giữa ứng suất và nội lực trên mặt cắt thanh như sau:

$$N = \int_A \sigma_x dA;\ Q_y = \int_A \tau_{xy} dA;\ Q_z = \int_A \tau_{xz} dA,$$

$$M_{xo} = \int_A \left(y\tau_{xz} - z\tau_{xy}\right) dA;\ M_y = \int_A z\sigma_x dA;\ M_z = \int_A y\sigma_x dA.$$

2.2 Trạng thái biến dạng

Ten xơ biến dạng

Với giả thiết biến dạng nhỏ, quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị (u, v, w) chính là hệ thức Cauchy

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \qquad (2.15)$$

Ý nghĩa vật lí của biến dạng:

- ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} là độ dãn dài tương đối của các sợi vật chất khi biến dạng theo các trục,
- $2\varepsilon_{xy}$, $2\varepsilon_{yz}$, $2\varepsilon_{zx}$ là cosin của các góc giữa hai phần tử đường sau biến dạng, độ biến dạng trượt.

Như vậy trạng thái biến dạng xác định bằng ten xơ biến dạng, cũng là ten xơ bậc hai đối xứng:

$$\varepsilon_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{x} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{y} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{z} \end{bmatrix}, \text{ ở đây } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \qquad (2.16)$$

Cũng có thể tìm được hướng chính là hướng chỉ có các thành phần tenxơ trên đường chéo khác không từ phương trình

$$\left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{(\alpha)}\right)\nu_i = 0. \qquad (2.17)$$

Biến dạng chính xác định từ phương trình:

$$\mathbf{Det}\left|\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{(\alpha)}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{(\alpha)}^3 - E_1\varepsilon_{(\alpha)}^2 + E_2\varepsilon_{(\alpha)} - E_3 = 0, \qquad (2.18)$$

trong đó

$$\mathrm{E}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta_e,$$

$$\mathrm{E}_2 = \left\{\begin{vmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) = \left(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1\right),$$

$$\mathrm{E}_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = Det\left|\varepsilon_{ij}\right| = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \qquad (2.19)$$

là các bất biến của ten xơ biến dạng.

Biến dạng trượt chính biểu diễn bằng:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \qquad (2.20)$$

Biến dạng góc được định nghĩa:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}, \ \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx}. \qquad (2.21)$$

2.3 Định luật Hooke

Khi vật liệu đồng nhất, đẳng hướng và biến dạng của vật thể là đàn hồi tuyến tính và có trị số nhỏ thì định luật Hooke biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)\right],$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy},\ \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{yz},\varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{zx},$$

$$\rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \tag{2.22}$$

trong đó E là mô đun đàn hồi, ν là hệ số Poisson và mô đun trượt G tính qua E và ν bằng công thức

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{2.23}$$

Ngược lại, có thể biểu diễn ứng suất qua biến dạng:

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\theta_e + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x,$$

$$\sigma_y = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\theta_e + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_y,$$

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\theta_e + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z,$$

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy},\ \tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} = G\gamma_{yz},\ \tau_{zx} = 2G\varepsilon_{zx} = G\gamma_{zx}. \tag{2.24}$$

Quan hệ (2.22) và (2.24) của định luật Hooke có thể viết dưới dạng ma trận:

$$\{\varepsilon\} = [e]\{\sigma\}, \tag{2.25}$$

trong đó $\{\varepsilon\}$ là véc tơ của sáu thành phần biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \tag{2.26}$$

và $\{\sigma\}$ là véc tơ của sáu thành phần ứng suất:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \tag{2.27}$$

còn [e] là ma trận vuông đối xứng có dạng

$$[e]=\frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Từ phương trình (2.25) cũng có thể biểu diễn của ứng suất qua biến dạng tức là dạng ma trận của phương trình (2.24):

$$\{\sigma\}=[d]\{\varepsilon\}, \tag{2.29}$$

trong đó ma trận [d] là nghịch đảo của ma trận [e] cũng là ma trận vuông đối xứng

$$[d]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Các ma trận [d] và [e] còn được gọi là ma trận hệ số đàn hồi độ cứng và độ mềm tương ứng.

Hệ thức giữa các hằng số đàn hồi

Ngoài môđun đàn hồi Young E, hệ số Poisson ν người dùng các hằng số đàn hồi khác như hệ số Lame λ, môđun nén thể tích K và mô đun trượt G.

Ở đây xem xét mô đun nén thể tích tính qua mô đun đàn hồi Young E và hệ số Poisson ν như thế nào

Mô đun nén thể tích K

Xét trường hợp nén đều mọi phía:

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-p; \quad \tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0.$$

Đặt vào phương trình (2.24) và lấy tổng ba phương trình đầu tiên sẽ được

$$\frac{E}{(1-2\nu)}\theta_e = -3p \Rightarrow p = -\frac{E}{3(1-2\nu)}\theta_e = -K\theta_e .$$

Vậy

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \tag{2.31}$$

Trong bảng 2.1 là các liên hệ giữa các hằng số đàn hồi khác nhau.

Bảng 2.1. Liên hệ giữa các hằng số đàn hồi

Hằng số đàn hồi	Đôi chính				
	λ, G	K, G	G, ν	E, ν	E,G
λ	λ	$K-\frac{2}{3}G$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
G=μ	G	G	G	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
K	$\lambda+\frac{2}{3}G$	K	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
E	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2G(1+\nu)$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	ν	ν	$\frac{E}{2G}-1$

Định luật Hooke với hai hằng số G và K

Với hai hằng số mô đun nén thể tích K và mô đun trượt G có các biểu diễn của định luật Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \left(1-\frac{2G}{3K}\right)\sigma\right],\ \varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left[\sigma_y - \left(1-\frac{2G}{3K}\right)\sigma\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G}\left[\sigma_z - \left(1-\frac{2G}{3K}\right)\sigma\right],\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\tau_{xy},\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\tau_{yz},\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G}\tau_{zx}. \tag{2.32}$$

$$\sigma_x = \left(K-\frac{2}{3}G\right)\theta_e + 2G\varepsilon_x,\ \sigma_y = \left(K-\frac{2}{3}G\right)\theta_e + 2G\varepsilon_y,$$

$$\sigma_z = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta_e + 2G\varepsilon_z\,,\ \ \tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy}\,,$$

$$\tau_{yz} = 2Ge_{yz} = G\gamma_{yz}\,,\ \ \tau_{zx} = 2Ge_{zx} = G\gamma_{zx}\,. \tag{2.33}$$

Ma trận độ mềm [e] biểu diễn qua hằng số K và G như sau:

$$[e] = \frac{1}{6KG}\begin{bmatrix} 2G & 2G-3K & 2G-3K & 0 & 0 & 0 \\ 2G-3K & 2G & 2G-3K & 0 & 0 & 0 \\ 2G-3K & 2G-3K & 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6K \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

và tương tự ma trận độ cứng [d] có dạng:

$$[d] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3K+4G & 3K-2G & 3K-2G & 0 & 0 & 0 \\ 3K-2G & 3K+4G & 3K-2G & 0 & 0 & 0 \\ 3K-2G & 3K-2G & 3K+4G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3G \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Kết luận chương 2

Trong chương 2 trình bày về trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng. Trạng thái ứng suất phẳng được trình bày kỹ hơn vì trong bài toán thanh chủ yếu gặp trạng thái ứng suất này. Giới thiệu cách biểu diễn trạng thái ứng suất phẳng bằng đường tròn Morh. Mở rộng cách biểu diễn bằng đường tròn Morh cho trạng thái ứng suất khối.

Quan hệ ứng suất và biến dạng cho vật liệu đồng nhất, đẳng hướng và ứng xử đàn hồi tuyến tính được trình bày trong mục 2.3. Định luật Hooke cho vật liệu ứng xử tuyến tính có thể biểu diễn dưới dạng ma trận. Giới thiệu ma trận độ mềm và độ cứng của vật liệu. Định luật Hooke không chỉ biểu diễn qua hai hằng số là mô đun đàn hồi Young E và hệ số Poisson ν,bmà còn có thể biểu diễn qua các hằng số khác như hệ số Lame λ, mô đun nén thể tích K và mô đun trượt G.

CHƯƠNG 3
Các lí thuyết bền

3.1 Thế năng biến dạng đàn hồi

Công thực hiện bởi hệ lực tác động lên kết cấu được lưu giữ trong kết cấu đàn hồi dưới dạng năng lượng biến dạng đảm bảo không có công nào bị thất thoát dưới dạng động năng gây ra dao động hay nhiệt năng làm tăng nhiệt độ. Nói cách khác, lực tác động từ từ để ứng suất không vượt qua ứng suất giới hạn của vật liệu. Khi từ từ cất tải thì nội năng sẽ được phục hồi làm cho kết cấu trở về hình dạng ban đầu. Như vậy, công ngoại lực W và nội năng U bằng nhau:

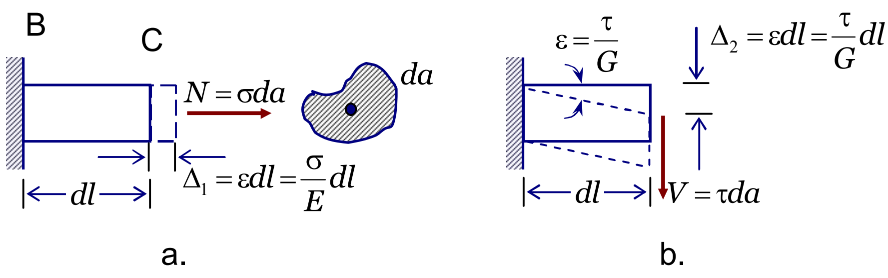
$$W = U \, . \tag{3.1}$$

Liên hệ này có thể dùng để tính chuyển vị hay lực, nhưng đầu tiên phải xem xét cách tính nội năng biến dạng (hay còn gọi là thế năng biến dạng đàn hồi).

Từ kết cấu đàn hồi xét một phân tử nhỏ dạng thanh với diện tích mặt cắt ngang là da và độ dài là dl. Có thể có ứng suất pháp (hình 3.1a) hay ứng suất tiếp (hình 3.1b) tác dụng trên bề mặt diện tích da. Giả thiết rằng đầu trái B của phần tử bị ngàm chặt còn đầu phải C tự do. Chuyển vị của C do hai loại ứng suất là :

$$\Delta_1 = \frac{\sigma}{E} dl \quad \Delta_2 = \frac{\tau}{G} dl \, ,$$

ở đây E hệ số đàn hồi khi kéo nén, G hệ số đàn hồi khi trượt.



Hình 3.1. Phần tử thanh

Nếu tác động từ từ lực σda và τda để gây nên các chuyển vị trên, thì năng lượng lưu trữ trong phần tử sẽ là:

$$dU_1 = \frac{1}{2}(\sigma da)\Delta_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}dlda\,,$$

$$dU_2 = \frac{1}{2}(\tau da)\Delta_2 = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}dlda\,.$$

Dùng ε ký hiệu chung cho biến dạng thì hai phương trình trên có dạng:

$$dU = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dv\,, \tag{3.2}$$

ở đây $dv = dl \cdot da$ là thể tích của phần tử đang xét, σ là ứng suất tổng quát, có thể là ứng suất pháp hay ứng suất tiếp.

Biến dạng ε trong phương trình (3.2) nếu do ứng suất pháp thì có giá trị $\varepsilon = \sigma/E$, nếu do ứng suất tiếp thì $\varepsilon = \tau/G$. G và E có liên hệ với nhau bằng:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

ở đây ν là hệ số Poisson, do vậy biến dạng do ứng suất tiếp có thể viết:

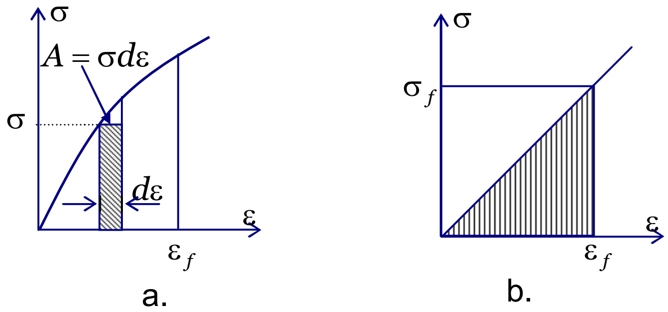
$$\varepsilon = \frac{2\tau(1+\nu)}{E}.$$

Gia số của năng lượng biến dạng trong một phần tử đàn hồi với thể tích là dv khi biến dạng thay đổi từ $\varepsilon = 0$ đến $\varepsilon = \varepsilon_f$ là:

$$dU = dv\int_0^{\varepsilon_f}\sigma d\varepsilon\,, \tag{3.3}$$

ở đây tích phân bên vế phải được gọi là mật độ năng lượng biến dạng và bằng phần diện tích bên dưới đường cong ứng suất biến dạng của vật liệu (Hình 3.2a). Nếu vật liệu tuân thủ định luật Hooke (hình 3.2b) mật độ năng lượng biến dạng bằng:

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_f\varepsilon_f\,.$$



Hình 3.2. Đường cong ứng suất biến dạng (a) và mật độ năng lượng (b)

Tổng năng lượng biến dạng trong kết cấu tuyến tính sẽ là :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{6}\int_v \sigma_m \varepsilon_m dv, \tag{3.4}$$

với m biểu diễn dạng ứng suất và dạng biến dạng tương ứng. Có nghĩa tích phân được lấy trên toàn bộ thể tích của kết cấu cho từng loại ứng suất riêng biệt.

Trong một số trường hợp dùng liên hệ giữa ứng suất và biến dạng. Quan hệ $\varepsilon = \sigma/E$ cho vật liệu tuyến tính chỉ áp dụng cho ứng suất pháp của mặt phẳng.

Dùng các ký hiệu {ε} là véc tơ của sáu thành phần biến dạng:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

và {σ} là véc tơ của sáu thành phần ứng suất:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T,$$

ta có biểu thức

$$U = \frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv \tag{3.5}$$

hay

$$U = \frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dv. \tag{3.5a}$$

Sử dụng quan hệ ứng suất biến dạng (2.25) và (2.29) thế vào (3.5) hay (3.5a) sẽ có:

$$U = \frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T [e]\{\sigma\} dv, \tag{3.6}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_v \{\varepsilon\}^T [d]\{\varepsilon\} dv. \tag{3.6a}$$

Dạng của ma trận [e] và [d] cho trong (2.28) và (2.30).

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng

Đối với trạng thái ứng suất đơn, thế năng biến dạng đàn hồi riêng có dạng:

$$U = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon \tag{3.7}$$

Còn đối với trạng thái ứng suất khối có các ứng suất chính là $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, thế năng biến dạng đàn hồi riêng biểu diễn bằng:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$$

Dùng định luật Hooke biểu diễn biến dạng chính qua ứng suất chính có wcj biểu diễn của thế năng biến dạng đàn hồi riêng qua các ứng suất chính:

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \tag{3.8}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và hình dáng

Xét trạng thái ứng suất khối $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ như tổng của hai trạng thái ứng suất:

– Một là trạng thái kéo nén đều theo 3 phương với các ứng suất chính là:

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \tag{3.9}$$

trạng thái này chỉ có biến dạng thể tích, không có biến dạng hình dáng.

– Hai là trạng thái với các ứng suất chính lần lượt là:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{tb},\ \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{tb},\ \sigma_2' = \sigma_3 - \sigma_{tb}. \tag{3.10}$$

Do $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$, nên trạng thái này chỉ có biến dạng hình dáng.

Như vậy:

$$U = U_{tt} + U_{hd}, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} U_{tt} &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 - 2\mu(\sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb})\right] \\ &= 3\frac{1-2\mu}{2E}\sigma_{tb}^2 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} U_{hd} &= U - U_{tt} \\ &= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] - \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 Đặc trưng cơ học của vật liệu

Vật liệu có thể phân thành hai loại theo biến dạng:

– Vật liệu dẻo là vật liệu bị phá hủy khi biến dạng lớn, như thép, đồng, nhôm và chất dẻo.

– Vật liệu giòn bị phá hủy khi biến dạng nhỏ, như gang, bê tông, đá.

Sự phân loại này chỉ là quy ước và mang tính tương đối. Để xác định đặc trưng cơ học của vật liệu, người tiến hành các thí nghiệm kéo, nén mẫu vật liệu trên máy chuyên dụng kéo và nén.

Trình tự thí nghiệm

– Tiến hành đo liên tục các đại lượng: lực kéo (nén) F và độ dãn dài ΔL của mẫu thí nghiệm.

– Với giả thiết ứng suất phấn bố đều trên toàn bộ diện tích tiết diện A, tính ứng suất $\sigma = F / A$, ở đây A là diện tích ban đầu của tiết diện.

– Tính biến dạng dọc tỷ đối (độ giãn dài tương đối) tương ứng $\varepsilon = \Delta L / L$, với L là chiều dài ban đầu của mẫu vật liệu.

– Độ thắt tỷ đối ψ được xác định bằng công thức $\psi = (F_0 - F)/F_0$, trong đó F_0 và F là diện tích tiết diện ban đầu và khi có biến dạng thắt (đứt).

– Sau đó vẽ đồ thị biểu diễn quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trên hệ trục $\sigma - \varepsilon$.

– Mô đun đàn hồi E của vật liệu được xác định theo công thức:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F \cdot L}{A \cdot \Delta L}. \tag{3.14}$$

Mẫu thí nghiệm

Mẫu thí nghiệm phải được chế tạo tuân thủ các tiêu chuẩn và quy phạm đo lường tiêu chuẩn. Thông thường mẫu thí nghiệm có các dạng sau đây:

– Mẫu chịu kéo có hình dáng là các thanh lăng trụ với hai kiểu tiết diện:
  + tiết diện tròn với chiều dài L bằng 10 lần đường kính $L = 10d$ (mẫu dài) hoặc chiều dài L bằng 5 lần đường kính $L = 5d$ (mẫu ngắn).
  + tiết diện chữ nhật với tỉ lệ cạnh ngắn trên cạnh dài trong khoảng $[0,2;1]$, chiều dài $L = 11,3\sqrt{A}$ cho mẫu dài và $L = 5,65\sqrt{A}$ cho mẫu ngắn.

– Mẫu chịu nén là các thanh hình trụ tròn với chiều cao h nhỏ hơn hoặc bằng ba lần đường kính để đảm bảo trục thanh luôn thẳng trong khi làm thí nghiệm. Mẫu nén bê tông thường có hình dạng là khối lập phương các cạnh 15cm, 20cm hoặc trụ tròn ngắn, đường kính 10cm.

Đồ thị thí nghiệm

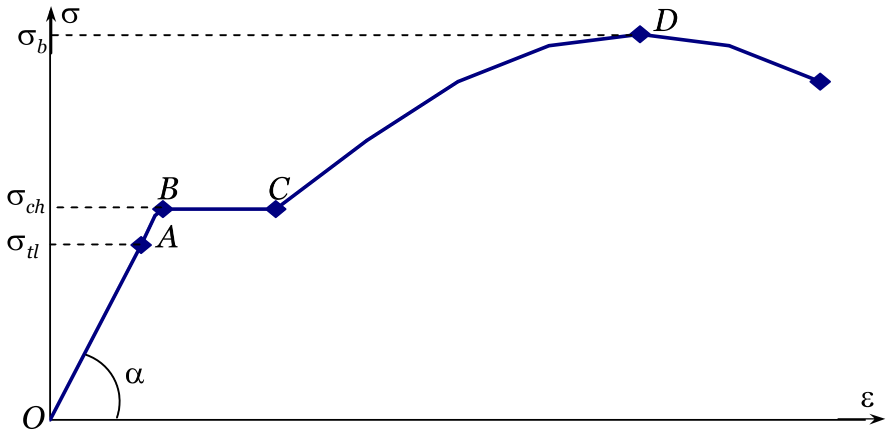
Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Đồ thị thí nghiệm kéo vật liệu dẻo (hình 3.3) gồm ba giai đoạn chính:

– Giai đoạn tỉ lệ là đoạn OA trên đồ thị. Khi đó vật liệu làm việc đàn hồi tuân thủ định luật Hooke với biến dạng nhỏ. σ_{tl} là ứng suất giới hạn tỉ lệ ứng với điểm A. Đoạn AB rất ngắn và trên điểm A vật liệu vẫn đàn hồi, đối với thép CT3 $\sigma_{tl} = 210MPa$.

– Giai đoạn chảy là đoạn nằm ngang BC trên đồ thị. Khi đó ứng suất không thay đổi nhưng mẫu vẫn biến dạng. σ_{ch} là ứng suất giới hạn chảy ứng với điểm B. Độ dài đoạn BC tùy thuộc vào vật liệu. $\sigma_{ch} = 240MPa$ đối với thép CT3.

– Giai đoạn tái bền là đoạn CD. Trong giai đoạn này ứng suất tăng làm biến dạng tăng. Đoạn này được gọi là tái bền vì khi cất tải, đường cong không quay về gốc O mà giảm theo tỉ lệ đến điểm có biến dạng dư. Sau đó lại chất tải tiếp thì đường cong ứng suất biến dạng sẽ có giới hạn tỉ lệ cao hơn. Chính vì tính chất này đoạn CD được gọi là đoạn tái bền. Đến điểm D mẫu thử đã hình thành chỗ thắt, ứng suất ứng với điểm D được gọi là ứng suất giới hạn bền σ_b và đối với thép CT3 $\sigma_b = 380MPa$.

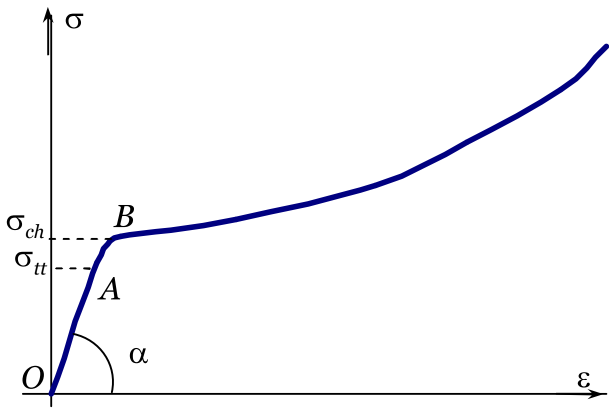


Hình 3.3. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

Như vậy, ba giới hạn σ_{tl}, σ_{ch} và σ_b là các đặc trưng cơ học của vật liệu và mô đun đàn hồi E chính là hệ số góc của đoạn OA: $E = tg\alpha$

Thí nghiệm nén vật liệu dẻo

Đồ thị quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm nén vật liệu dẻo thể hiện trên hình 3.4.



Hình 3.4. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm nén vật liệu dẻo

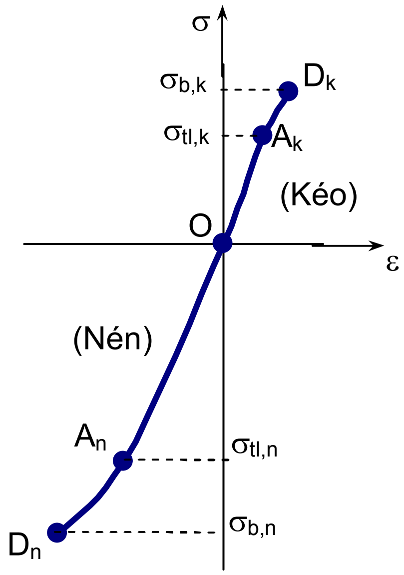
Có nhận xét

– Ứng suất giới hạn tỉ lệ σ_{tl} và giới hạn chảy σ_{ch} của vật liệu dẻo là như nhau trong cả trường hợp kéo và nén.

– Tuy nhiên sau giới hạn chảy, ứng suất nén tăng nhưng không làm cho mẫu vỡ, do vậy ứng suất phá hủy không thể xác định được

Thí nghiệm kéo và nén vật liệu giòn

Đồ thị quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm kéo và nén vật liệu giòn thể hiện trên hình 3.5.



Hình 3.5. Quan hệ ứng suất – biến dạng trong thí nghiệm kéo và nén vật liệu giòn

– Trên đồ thị đoạn OA_k là giai đoạn tỉ lệ trong thí nghiệm kéo, còn đoạn OA_n là giai đoạn tỉ lệ trong thí nghiệm nén của vật liệu giòn. Khi đó vật liệu làm việc đàn hồi tuân thủ định luật Hooke với biến dạng nhỏ. Ứng với điểm A_k và điểm A_n lần lượt là các ứng suất giới hạn tỉ lệ khi chịu kéo $\sigma_{tl,k}$ và khi chịu nén $\sigma_{tl,n}$.

– Đoạn A_kD_k và đoạn A_nD_n trên đồ thị là các giai đoạn khi vật liệu vẫn có ứng xử đàn hồi nhưng không còn tỉ lệ nữa. Điểm D_k và điểm D_n là các thời điểm mẫu bị phá hủy khi chịu kéo hay chịu nén. Ứng với các điểm này lần lượt là các ứng suất giới hạn bền khi chịu kéo $\sigma_{b,k}$ và khi chịu nén $\sigma_{b,n}$.

Nhận xét: Khác với vật liệu dẻo, đồ thị chỉ có một giai đoạn gần như thẳng và kết thúc khi mẫu bị phá hủy (bị kéo đứt hay nén vỡ).

Kết luận

Từ các đặc trưng cơ học của vật liệu có được giá trị ứng suất cho phép để kiểm tra điều kiện bền của kết cấu

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \tag{3.15}$$

ở đây σ_0 lấy bằng ứng suất chảy σ_{ch} khi vật liệu dẻo, còn khi vật liệu giòn σ_0 lấy bằng ứng suất bền do kéo $\sigma_{b,k}$ hoặc $\sigma_{b,n}$.

Còn $n > 1$ là hệ số an toàn theo ứng suất cho phép, do xét đến các yếu tố thực tế ảnh hưởng tới độ bền của kết cấu. Cả hai giá trị ứng suất cho phép [σ] và hệ số an toàn n được quy định trong các tiêu chuẩn và quy phạm tính toán thiết kế.

3.3 Điều kiện bền của vật liệu

Đối với trạng thái ứng suất đơn $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, điều kiện bền được viết dưới dạng :

$$\sigma \le [\sigma]. \tag{3.16}$$

Điều kiện bền cho trạng thái ứng suất khối có thể viết dưới dạng

$$\sigma_1 \le [\sigma_1]; \quad \sigma_2 \le [\sigma_2]; \quad \sigma_3 \le [\sigma_3]. \tag{3.17}$$

Tuy nhiên đây chỉ là suy diễn hình thức, khó áp dụng trong thực tế vì khó làm thí nghiệm để có được các giá trị $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $[\sigma_3]$.

Giả thiết tổng quát về điều kiện bền có thể viết dưới dạng

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \le C \tag{3.18}$$

trong đó σ_1, σ_2 và σ_3 là các ứng suất chính, C là đặc trưng cơ học của vật liệu.

Điều kiện bền tổng quát (3.18), tùy theo từng cách đánh giá và giả thiết có thể viết dưới dạng cụ thể và đơn giản hóa hơn. Từng thuyết bền cụ thể được xây dựng từ những giả thuyết về nguyên nhân gây phá hủy và từ lập luận nguyên nhân phá hủy không phụ thuộc vào dạng trạng thái ứng suất, nhờ đó có thể viết các điều kiện bền của trạng thái ứng suất phức tạp khi chỉ có kết quả thí nghiệm cho trạng thái ứng suất đơn.

Cho từng thuyết bền sẽ cố gắng đưa điều kiện bền (3.18) về dạng chung sau đây:

$$\sigma_{td} \le [\sigma], \tag{3.19}$$

vế phải là ứng suất cho phép [σ] có được từ kết quả thí nghiệm kéo nén, vế trái là ứng suất tương đương và là hàm của các ứng suất chính σ_1, σ_2 và σ_3. Trong phần này cũng như trong toàn bộ quyển sách chấp nhận qui ước $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$.

Thuyết bền ứng suất pháp cực đại – Thuyết bền thứ nhất

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của ứng suất pháp đạt tới một giới hạn xác định:

$$\sigma_1 \le [\sigma]_k; \quad |\sigma_3| \le [\sigma]_n. \tag{3.20}$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ nhất sẽ là:

$$\sigma_{tdI} = \sigma_1 \text{ khi } \sigma_1 > 0. \tag{3.21}$$

Nhận xét: thuyết bền này sơ sài và không phù hợp với thực nghiệm, thường chỉ áp dụng cho trường hợp trạng thái ứng suất đơn.

Thuyết bền biến dạng dài cực đại – Thuyết bền thứ hai

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số biến dạng dài lớn nhất đạt tới một giới hạn xác định.

Nếu gọi biến dạng dài giới hạn là $[\varepsilon]$, thì ở trạng thái ứng suất khối, theo định luật Hooke

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \le [\varepsilon].$$

Mặt khác ở trạng thái ứng suất đơn sẽ có:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

suy ra sẽ có giới hạn:

$$\varepsilon \leq \frac{[\sigma]}{E}.$$

Giới hạn không phụ thuộc vào trạng thái ứng suất nên có biểu diễn của giới hạn biến dạng dài qua ứng suất cho phép [σ]:

$$[\varepsilon] \leq \frac{[\sigma]}{E}.$$

Từ đây có điều kiện bền theo biến dạng dài biểu diễn dưới dạng:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \tag{3.22}$$

Như vậy, biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ hai:

$$\sigma_{tdII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \tag{3.23}$$

Các thực nghiệm chỉ ra rằng thuyết bền thứ hai tương đối phù hợp với vật liệu giòn.

Thuyết bền ứng suất tiếp cực đại - Thuyết bền thứ ba

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của ứng suất tiếp đạt tới một giới hạn xác định.

Nếu gọi ứng suất tiếp giới hạn là $[\tau]$, ở trạng thái ứng suất khối, ứng suất tiếp lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq [\tau].$$

Ở trạng thái ứng suất đơn, có ứng suất tiếp lớn nhất là $\tau_{\max} = \sigma / 2$,

và ứng suất tiếp lớn nhất sẽ có giới hạn là $[\sigma]/2$.

Giới hạn không phụ thuộc vào dạng ứng suất nên có thể biểu diễn của ứng suất tiếp giới hạn qua ứng suất cho phép [σ]:

$$[\tau] \leq \frac{[\sigma]}{2}.$$

Từ đây, có điều kiện bền theo ứng suất tiếp cực đại

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]. \tag{3.24}$$

Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ ba sẽ là:

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 . \tag{3.25}$$

Thuyết bền thứ ba khá phù hợp với vật liệu dẻo, ứng với điều kiện dẻo Tresca-Saint-Venant.

Thuyết bền thế năng biến dạng hình dáng cực đại – Thuyết bền thứ tư

Với giả thiết: Nguyên nhân gây ra sự phá hỏng của vật liệu ở trạng thái ứng suất khối là do trị số lớn nhất của thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng đạt tới một giới hạn xác định.

Nếu gọi thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng giới hạn là $[U]_{hd}$ thì ở trạng thái ứng suất khối:

$$U_{hd} = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) \le [U_{hd}].$$

Ở trạng thái ứng suất đơn, thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng có dạng:

$$U_{hd} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_1^2 .$$

và thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng sẽ có giới hạn $\frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2$.

Giới hạn không phụ thuộc vào trạng thái ứng suất nên có:

$$[U_{hd}] = \frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2 .$$

Từ đây có điều kiện bền theo thế năng biến dạng hình dáng cực đại

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \le [\sigma]. \tag{3.26}$$

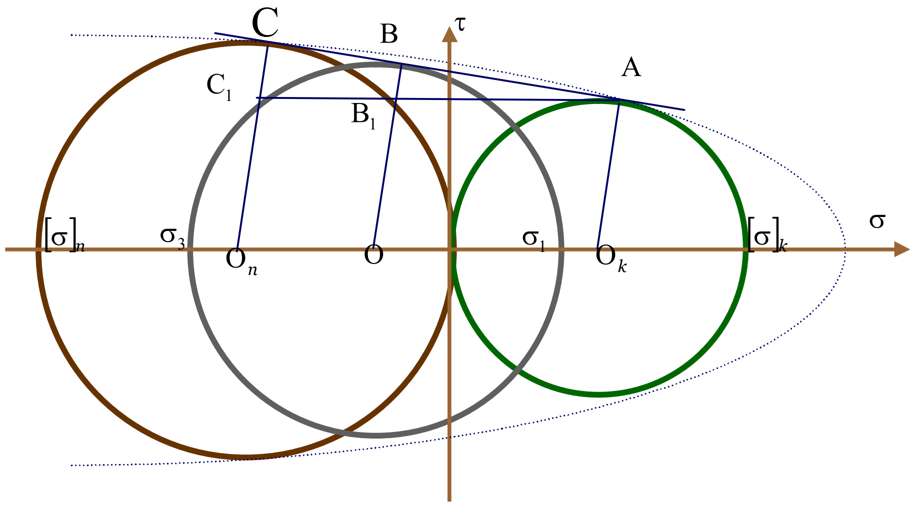
Biểu thức của ứng suất tương đương của thuyết bền thứ tư sẽ là :

$$\begin{aligned}\sigma_{tdIV} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Cũng như thuyết bền thứ ba, thuyết bền thứ tư tương đối phù hợp với vật liệu dẻo. Điều kiện bền thứ tư ứng với điều kiện dẻo của Mises.

Thuyết bền Mohr – Thuyết bền thứ năm

Thuyết bền Morh được xây dựng dựa trên các cơ sở thực nghiệm. Một loạt thí nghiệm phá hủy được tiến hành. Ứng với mỗi thí nghiệm kéo nén thu được một cặp giá trị giới hạn về kéo và nén $[\sigma]_k, [\sigma]_n$. Như vậy sẽ nhận được một họ các đường tròn Morh giới hạn (đường tròn to nhất trong ba đường tròn Morh của trạng thái ứng suất khối có bán kính $0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3)$) trên mặt phẳng (σ, τ) (hình 3.6). Dựng được đường bao các đường tròn Morh giới hạn chia mặt phẳng làm hai miền: trong và ngoài đường bao.



Hình 3.6. Đường bao họ các đường tròn Morh thực nghiệm

Với giả thiết đường bao tìm được là duy nhất, thuyết bền Morh phát biểu trạng thái ứng suất nào đó có đường tròn Morh giới hạn nằm trong đường bao là trạng thái đủ bền, vật liệu không bị phá hủy. Nếu ngược lại, đường tròn Morh giới hạn nằm ngoài đường bao thì trạng thái ứng suất đó không đủ bền và vật liệu bị phá hủy.

Một trong những khó khăn để áp dụng thuyết bền Morh là phải làm nhiều thí nghiệm. Để tránh khó khăn này, Morh đề xuất vẽ đường bao dựa trên đường tròn kéo $[\sigma]_k$ và nén $[\sigma]_n$, khi đó đường bao là đường thẳng (AC trên hình 3.6).

Giả sử xét trạng thái ứng suất nào đó và dựng đường tròn giới hạn, đường tròn này tiếp xúc với đường AC tại điểm B (hình 3.6). Khi đó từ các điều kiện hình học sẽ có:

$$\frac{CC_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{AB_1}.$$

Biểu diễn độ dài các đoạn thẳng qua các ứng suất sẽ nhận được:

$$\frac{0{,}5([\sigma]_n - [\sigma]_k)}{0{,}5([\sigma]_n + [\sigma]_k)} = \frac{0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k)}{0{,}5([\sigma]_k - \sigma_1 - \sigma_3)}.$$

Rút gọn biểu thức trên được :

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}\sigma_3 \le [\sigma]_k \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 - \alpha\sigma_3 \le [\sigma]_k.$$

Như vậy ứng suất tương đương của thuyết bền Mohr có dạng :

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \alpha\sigma_3, \tag{3.26}$$

trong đó $\alpha = [\sigma]_k / [\sigma]_n$

Kết luận chương 3

Chương 3 trình bày cách tính thế năng biến dạng đàn hồi. Đưa ra biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và hình dáng. Trình bày thí nghiệm kéo nén để xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu. Mục 3.3 là mục quan trọng nhất của chương này trình bày năm thuyết bền thường dùng.

Từ những giả thuyết về nguyên nhân gây phá hủy và từ lập luận nguyên nhân phá hủy không phụ thuộc vào dạng trạng thái ứng suất, đơn giản hóa điều kiện bền (3.18) về dạng chung (3.19) cho tất cả các thuyết bền dưới dạng

$$\sigma_{td} \le [\sigma].$$

Ứng với mỗi thuyết bền có biểu diễn tương ứng của ứng suất tương đương qua các ứng suất chính σ_1, σ_2 và σ_3.

PHẦN 1. CÁC BÀI TOÁN THANH

Nội dung của phần này xem xét các trường hợp chịu lực cơ bản của thanh. Đó là các trường hợp sau:

- Thanh chịu kéo hoặc nén,
- Thanh chịu xoắn, xem xét cả thanh chịu cắt,
- Thanh chịu uốn,
- Thanh chịu lực phức tạp.

Như đã nói trong phần nhập môn, cần xem xét ba bài toán cơ bản:

- Bài toán kiểm tra độ bền, độ cứng và độ ổn định của cấu kiện.
- Bài toán thiết kế - lựa chọn hình dạng và kích thước tiết diện phù hợp cho từng bộ phận kết cấu.
- Bài toán xác định tải trọng cho phép đặt lên kết cấu.

Trình tự giải các bài toán thanh có thể tóm gọn trong các bước sau đây:

Bước 1. Vẽ biểu đồ nội lực theo trình tự:

- Tìm phản lực tại các liên kết từ các phương trình tĩnh học.
- Dùng phương pháp mặt cắt từ điều kiện cân bằng sẽ có được biểu thức của nội lực.
- Vẽ biểu đồ nội lực.

Bước 2. Dựa trên biểu đồ nội lực tính ứng suất lớn nhất $\sigma_{\max}$.

Bước 3. Kiểm tra bền. Ở đây sẽ phụ thuộc vào loại bài toán:

- Bài toán kiểm tra: kiểm tra điều kiện $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ để kết luận thanh có đủ bền hay không.
- Bài toán thiết kế: từ điều kiện bền $\sigma_{\max} \le [\sigma]$ lựa chọn kính thước thanh sao cho thỏa mãn điều kiện bền này.

– Bài toán xác định tải trọng cho phép P_b: từ điều kiện $\sigma_{max} \leq [\sigma]$ tìm tải trọng cho phép tác động lên thanh vẫn đảm bảo bền.

Chú ý. Trong bước này σ_{max} được hiểu theo nghĩa ứng suất tương đương cực đại. Phụ thuộc vào thuyết bền lựa chọn sẽ có biểu thức tương ứng của ứng suất tương đương.

Bước 4. Có kích thước và nội lực, tính dịch chuyển của kết cấu để tìm chuyển dịch lớn nhất δ_{max}.

Bước 5. Kiểm tra độ cứng. Cũng như độ bền sẽ tùy thuộc vào dạng bài toán:

– Bài toán kiểm tra: kiểm tra điều kiện $\delta_{max} \leq [\delta]$ để kết luận thanh có đủ cứng không.
– Bài toán thiết kế: kiểm tra điều kiện $\delta_{max} \leq [\delta]$, khi điều kiện cứng không thỏa mãn sẽ lựa chọn lại kích thước sao cho đảm bảo điều kiện cứng này.
– Bài toán xác định tải trọng cho phép P_c: từ điều kiện $\delta_{max} \leq [\delta]$ tìm tải trọng cho phép tác động lên thanh vẫn đảm bảo cứng, tải trọng cho phép kết luận $P = \min(P_b, P_c)$.

Bước 6. Kiểm tra ổn định của thanh trong trường hợp chịu nén.

CHƯƠNG 4
Các đặc trưng hình học

Khả năng chịu lực của thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích của tiết diện mà còn phụ thuộc vào các đặc trưng hình học khác của tiết diện. Trong chương này đưa ra các công thức tính các đặc trưng hình học như mô men tĩnh, mô men quán tính của các tiết diện phẳng.

4.1 Mô men tĩnh và trọng tâm

Diện tích của hình phẳng được tính bằng tích phân:

$$A = \int_A dA . \tag{4.1}$$

Công thức tính mô men tĩnh đối với trục y và trục z có dạng:

$$S_y = \int_A z dA, \quad S_z = \int_A y dA , \tag{4.2}$$

thứ nguyên của mô men tĩnh là (chiều dài)^3, ví dụ (m^3).

Giá trị của mô men tĩnh phụ thuộc vào hệ trục tọa độ. Trục có mô men tĩnh bằng không được gọi là trục trung tâm. Trọng tâm của tiết diện là giao điểm của hai trục trung tâm.

Kẻ hai trục u và v vuông góc đi qua trọng tâm C và song song với trục y và z (hình 4.1), khi đó tọa độ y và z của phân tố dA biểu diễn qua tọa độ u và v và tọa độ trọng tâm C trong hệ tọa độ Oyz như sau:

$$y = y_C + u , \; z = z_C + v .$$

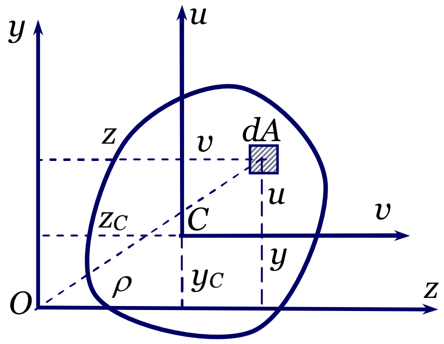
Thế vào (4.2) được công thức tính mô men tĩnh qua tọa độ trọng tâm C và diện tích của hình phẳng:

$$S_y = \int_A (z_C + v) dA = z_C \int_A dA + \int_A v dA = z_C A ,$$

$$S_z = \int_A (y_C + u) dA = y_C \int_A dA + \int_A u dA = y_C A . \tag{4.3}$$

Từ đây có công thức xác định tọa độ trọng tâm từ mô men tĩnh:

$$y_c = \frac{S_z}{A},\ z_c = \frac{S_y}{A}.$$



Hình 4.1. Tọa độ của phân tố

Từ biểu thức (4.3) có nhận xét:

– Các trục trung tâm của hình phẳng cắt nhau tại một điểm hay bất kì trục nào đi qua trọng tâm là trục trung tâm.

– Nếu hình phẳng có một trục đối xứng thì trọng tâm nằm trên trục đối xứng, khi có hai trục đối xứng vuông góc thì trọng tâm là giao điểm của hai trục đó.

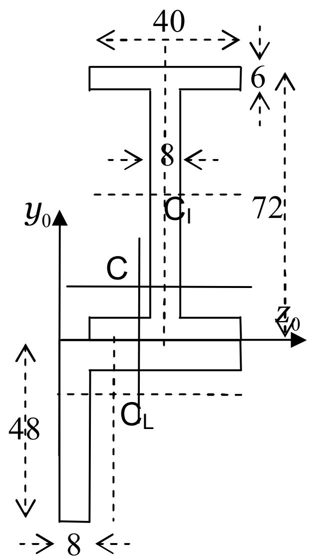
– Trọng tâm của hình ghép xác định bằng công thức (phần rỗng có diện tich âm):

$$y_c = \frac{\sum_i y_{c_i} A_i}{A}, \quad z_c = \frac{\sum_i z_{c_i} A_i}{A}, \tag{4.4}$$

trong đó y_{C_i}, z_{C_i} là tọa độ trọng tâm của hình thứ i, A_i là diện tích của hình thứ i.

Ví dụ. xác định trọng tâm của hình ghép từ hai hình: chữ I và thép góc với kích thước như trên hình 4.2.

Chọn hệ tọa độ y_0z_0 như trên hình vẽ, coi thép góc là hình ghép từ hình vuông cạnh 48cm trừ đi hình vuông cạnh 40cm, khi đó tọa độ trọng tâm và diện tích của các hình thành phần cho trong dòng 2 đến 4 của



Hình 4.2

bảng 4.1.

Dùng công thức (4.4) tính được trọng tâm của hình ghép viết ở dòng 5 của bảng 4.1.

Bảng 4.1

	Kích thước (cm)	z_{C_i} (cm)	y_{C_i} (cm)	A_i (cm^2)
Chữ I	72x40x8x6	28	36	960
Hình vuông 48x48	48x48	24	-24	2304
Hình vuông 40x40	40x40	28	-28	-1600
Hình ghép		22,4615	14,4615	1664

4.2 Các mô men quán tính

Công thức tính mô men quán tính trục của hình phẳng với trục Oy và Oz:

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA. \tag{4.5}$$

Mô men quán tính li tâm đối với hệ trục vuông góc Oyz:

$$I_{yz} = \int_A yz dA. \tag{4.6}$$

Mô men quán tính cực đối với gốc tọa độ

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = I_y + I_z. \tag{4.7}$$

trong đó ρ là khoảng cách từ phân tốc dA đến gốc tọa độ O (hình 4.1)

Từ các công thức trên có nhận xét sau:

– Mô men quán tính có thứ nguyên (chiều dài)^4, ví dụ m^4.

– Mô men quán tính cực là hằng số.

– Mô men quán tính trục luôn dương.

– Mô men quán tính li tâm I_{yz} dương, âm hoặc bằng không.

– Hệ trục có mô men quán tính li tâm I_{yz} bằng không là hệ trục chính.

- Hệ trục chứa trục đối xứng của hình phẳng là hệ trục quán tính chính.
- Hệ trục quán tính chính trung tâm là hệ trục quán tính chính có gốc tại trọng tâm, khi đó

$$S_y = 0\,,\ S_z = 0\,,\ I_{yz} = 0\,. \tag{4.8}$$

Mô men quán tính đối với trục quán tính chính trung tâm được gọi là mô men quán tính chính trung tâm (ngắn gọn là mô men quán tính chính)

- Mô men quán tính của hình ghép tính qua mô men quán tính của các hình thành phần

$$I_y = \sum_i I_{yi}\,,\ I_z = \sum_i I_{zi}\,,\ I_{yz} = \sum_i I_{yzi} \tag{4.9}$$

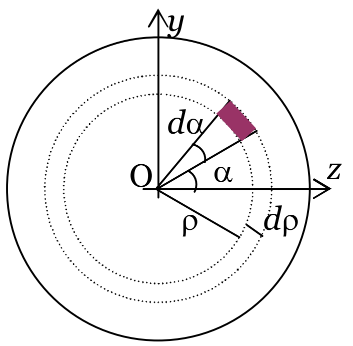
Chú ý. Phần rỗng được tính là có mô men quán tính âm.

Bán kính quán tính đối với trục Oy hay Oz

$$r_y = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}\,,\ r_z = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \tag{4.10}$$

Ví dụ. Tính các mô men quán tính của hình tròn đường kính D (hình 4.3).

Do tính chất đối xứng nên $I_z = I_y = I_\rho/2$. Chọn phân tố dA là hình được giới hạn bởi hai tia α và α+dα và hai đường tròn bán kính ρ và ρ+dρ (hình 4.3). Khi đó $dA = \rho d\rho d\alpha$



Hình 4.3

Lắp vào công thức tính mô men quán tính cực:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{D}{2}}\int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\alpha = \left.\left.\frac{\rho^4\alpha}{4}\right|_0^{\frac{D}{2}}\right|_0^{2\pi} = \frac{2\pi D^4}{4\cdot 2^4} = \frac{\pi D^4}{32}\,.$$

Từ đây có $I_y = I_z = \dfrac{\pi D^4}{64}$.

Có công thức tính mô men quán tính cho hình tròn, áp dụng công thức tính mô men quán tính cho hình ghép sẽ có công thức tính mô men quán tính của hình vành khăn với đường kính ngoài D và đường kính trong d:

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right),\ I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}\left(1-\alpha^4\right),$$

trong đó $\alpha = \frac{d}{D}$.

4.3 Công thức chuyển trục song song

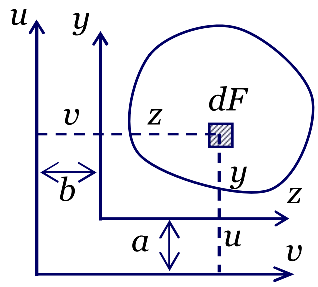
Xét hệ trục Ouv song song với hệ trục ban đầu Oyz (hình 4.4)

Khoảng cách giữa v và z là a, giữa u và y là b, vậy theo định nghĩa:

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (z+b)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b\int_A z dA + b^2 \int_A dA\,,$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a\int_A y dA + a^2 \int_A dA\,,$$

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (y+a)(z+b) dA = \int_A yz dA + a\int_A z dA + b\int_A y dA + ab\int_A dA\,.$$



Hình 4.4. Chuyển trục tọa độ song song

Từ đó rút ra liên hệ giữa mô men quán tính đối với hệ trục mới Ouv và mô men quán tính đối với hệ trục cũ Oyz

$$I_u = I_y + 2bS_y + b^2 A\,,$$

$$I_v = I_z + 2aS_z + a^2 A\,,$$

$$I_{uv} = I_{yz} + aS_y + bS_z + abA\,. \qquad (4.11)$$

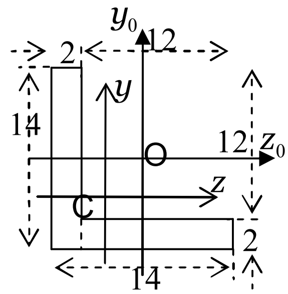
Nếu trục Oxy là trục trung tâm thì công thức (4.11) có dạng đơn giản hơn:

$$I_u = I_y + b^2 A,\ I_v = I_z + a^2 A,\ I_{uv} = I_{yz} + abA\,. \qquad (4.11a)$$

Ví dụ: Tính mô men quán tính chính trung tâm của tiết diện thép góc như trên hình 4.5

Thép góc được tạo thành từ hình vuông to có cạnh 14x14cm cắt bỏ đi một hình vuông nhỏ hơn ở góc trên bên phải có cạnh 12x12cm.

Chọn hệ trục ban đầu Oy_0z_0 như trên hình 4.5, tìm trọng tâm của hình ghép theo công thức (4.4) (bảng 4.2). Chú ý phần cắt bỏ có diện tích âm (cột 5, dòng 3). Trọng tâm của cả hình ghép trong cột 3 và 4 của dòng 4.



Hình 4.5

Tính mô men quán tính đối với trục trung tâm riêng của từng hình, sau đó chuyển trục sang hệ trục trung tâm của hình ghép Cyz.

Bảng 4.2

	a (cm)	z_C (cm)	y_C (cm)	A (cm^2)	I_z=I_y tính tại hệ trục riêng (cm^4)	Khoảng cách từ hệ trục riêng đến hệ Cyz (m)	I_z=I_y của hình ghép (cm^4)
Hình to	14	0	0	196	3201,33	2,77	4704,39
Hình bé	12	1	1	-144	-1728	3,77	-3773,82
Hình ghép		-2,77	-2,77	52			930,56

Sau đó áp dụng công thức (4.11a) để tính mô men quán tinh của từng hình và cộng với nhau.

$$I_Z = I_y = I_{yto} + \left(z_{Cghép} - z_{Cto}\right)^2 A_{to} + I_{ybé} + \left(z_{Cghép} - z_{Cbé}\right)^2 A_{bé}$$
$$= 3201{,}33 + 2{,}77^2 \times 196 + (-1728) + 3{,}77^2 \times (-144) = 930{,}56 cm^4$$

Ở đây cũng coi phần cắt bỏ có mô men quán tính âm (cột 6, dòng 3 bảng 4.2).

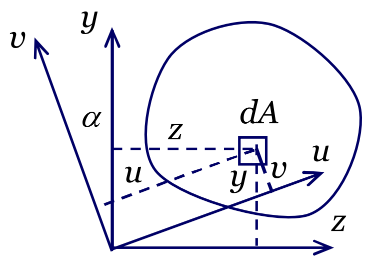
4.4 Công thức xoay trục

Xét hệ trục Ouv tạo được bằng cách quay Oyz một góc α (hình 4.6).

Khi đó, tọa độ ở hệ trục Ouv tính qua tọa độ ở hệ trục Oyz theo công thức

$u = y\sin\alpha + z\cos\alpha$,

$v = y\cos\alpha - z\sin\alpha$.



Hình 4.6. Xoay trục tọa độ đi một góc α

Theo định nghĩa mô men quán tính

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 dA$$
$$= \sin^2\alpha \int_A z^2 dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A yz dA + \cos^2\alpha \int_A y^2 dA,$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y\sin\alpha + z\cos\alpha)^2 dA$$
$$= \sin^2\alpha \int_A y^2 dA + 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A yz dA + \cos^2\alpha \int_A z^2 dA,$$

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (y\sin\alpha + z\cos\alpha)(y\cos\alpha - z\sin\alpha) dA$$
$$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\int_A yz dA + \sin\alpha\cos\alpha\left(\int_A y^2 dA - \int_A z^2 dA\right).$$

Từ đây công thức tính mô men quán tính khi xoay trục là:

$$I_u = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha\,,$$

$$I_v = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha\,,$$

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha\,. \tag{4.12}$$

Trục quán tính chính là trục có mô men quán tính li tâm bằng không. Từ điều kiện này tìm góc của trục quán tính chính với trục z:

$$I_{uv} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow tg2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\,. \tag{4.13}$$

Biết góc α, thay vào hai biểu thức đầu tiên của (4.12), tính được các mô men quán tính đối với trục quán tính chính (gọi là mô men quán tính chính). Các mô men quán tính chính nhận các giá trị cực trị:

$$I_{\max(\min)} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}\,. \qquad (4.14)$$

Đồng thời cũng tìm được bán kính quán tính chính:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}};\quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \qquad (4.15)$$

Kết luận chương 4

Chương 4 trình bày các công thức tính các đặc trưng hình học của hình phẳng như mô men tĩnh, các mô men quán tính.

Đưa ra các định nghĩa về hệ trục trung tâm, hệ trục chính, hệ trục quán tính chính trung tâm.

Trình bày các công thức tính mô men quán tính khi chuyển trục song song và khi xoay trục một góc α. Đồng thời cho quy tắc tính các đặc trưng hình học cho hình phẳng là hình ghép.

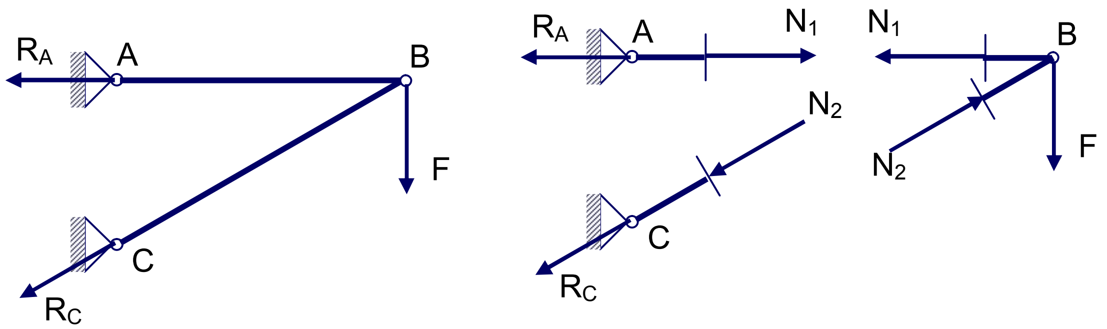
CHƯƠNG 5

Thanh thẳng chịu kéo, nén đúng tâm

5.1 Định nghĩa

Thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm khi trên mặt cắt của thanh chỉ tồn tại một thành phần nội lực là lực dọc theo trục thanh. Quy ước dấu của lực dọc trục như sau: dương khi thanh chịu kéo và âm khi thanh chịu nén.

Ví dụ. Xét hệ thanh dàn ABC chịu lực F tại điểm B (hình 5.1).



Hình 5.1. Nội lực dọc trục trong hệ dàn

Liên kết tại các nút và tại gối đỡ của hệ thanh dàn là liên kết khớp. Nội lực trong các thanh chỉ còn lực dọc trục thanh. Để tính các nội lực trong thanh dùng phương pháp mặt cắt: cắt thanh AB và BC thay thế liên kết bằng nội lực dọc thanh AB (N_1) và BC (N_2). Xét cân bằng lực tại điểm B cho hai phương trình hình chiếu lực lên trục X và Y:

$$\sum Y = 0 \rightarrow N_2 \sin\alpha + F = 0,$$
$$\sum X = 0 \rightarrow N_1 + N_2 \cos\alpha = 0.$$

Giải hệ phương trình này tìm được các nội lực:

$$N_2 = -\frac{F}{\sin\alpha}, \quad N_1 = -N_2 \cos\alpha = Fctg\alpha$$

Như vậy thanh AB chịu kéo, còn thanh BC chịu nén.

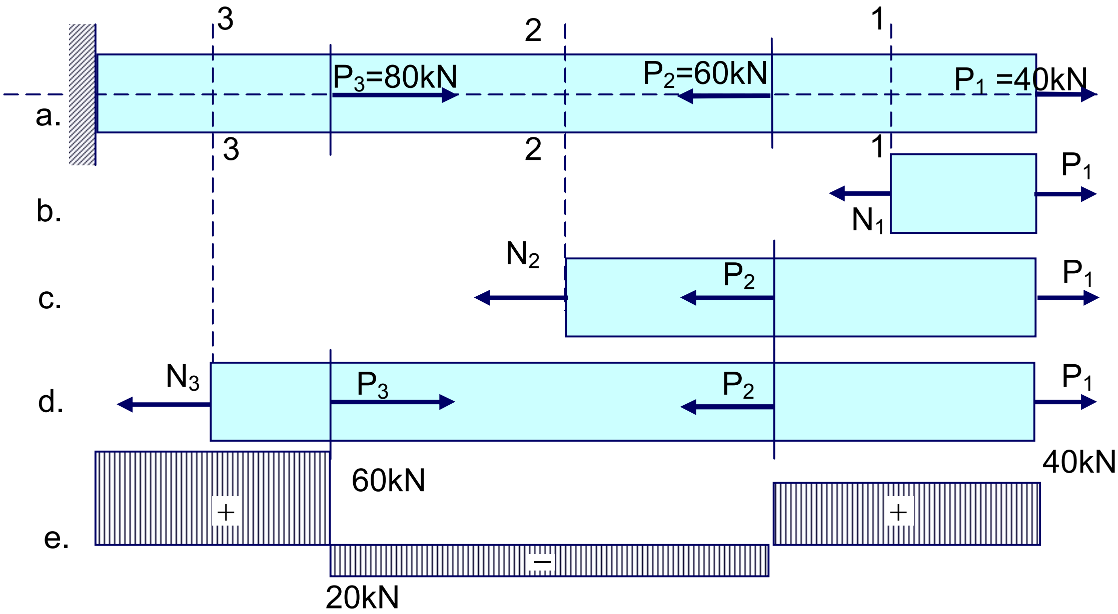
5.2 Biểu đồ lực dọc trục

Biểu đồ lực dọc trục biểu diễn sự biến thiên của lực dọc theo trục của thanh. Để vẽ biểu đồ lực dọc trục dùng phương pháp mặt cắt để xác định lực dọc trục tại từng mặt cắt. Giá trị lực dọc trục N ở một mặt cắt của thanh bằng tổng đại số những ngoại lực hướng dọc theo trục thanh (lực tập trung P hay lực phân bố q_x) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt. Công thức tổng quát để xác định lực dọc trục tại một mặt cắt ngang như sau:

$$N_x = \sum P_x + \sum \int q_x dx . \tag{5.1}$$

Giả định véc tơ N hướng ra phía ngoài của mặt cắt, xét điều kiện cân bằng tại mặt cắt của phần đang xét, chính là công thức (5.1) sẽ cho cả giá trị và dấu của nội lực dọc trục.

Ví dụ. Xét thanh thẳng chịu lực như trên hình 5.2a.



Hình 5.2. Ví dụ vẽ biểu đồ nội lực dọc trục N

Xét từ bên phải sang, vì đầu bên phải tự do không cần xác định phản lực.

Đoạn 1 từ đầu bên phải đến điểm đặt lực P_2 (hình 5.2b), xét cân bằng tại mặt cắt 1-1 với các lực bên phải, tính được N_1:

$$\sum X = 0 \rightarrow N_1 - P_1 = 0 \rightarrow N_1 = P_1 = 40kN .$$

Đoạn 2 từ điểm đặt lực P_2 đến điểm đặt lực P_3 (hình 5.2c), xét cân bằng tại mặt cắt 2-2 với các lực bên phải, tính được N_2:

$$N_2 - P_1 + P_2 = 0 \rightarrow N_2 = P_1 - P_2 = 40 - 60 = -20kN\,.$$

Tương tự xét đoạn 3 từ điểm đặt lực P_3 đến điểm ngàm (hình 5.2d), xét cân bằng tại mặt cắt 3-3 với các lực bên phải, tính được N_3:

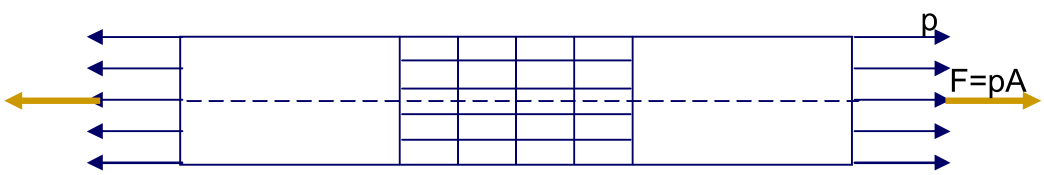
$$N_3 - P_3 + P_2 - P_1 = 0 \rightarrow N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 40 - 60 + 80 = 60kN\,.$$

Biểu đồ lực dọc N vẽ trên hình 5.2e.

5.3 Ứng suất trên mặt cắt ngang

Giả thiết về biến dạng của thanh

Xét thanh thẳng tiết diện không đổi. Kẻ các đường song song và các đường vuông góc với trục, đường vuông góc đặc trưng cho tiết diện, đường song song đặc trưng cho các lớp vật liệu. Cho thanh chịu kéo bởi hai hệ lực phân bố ở hai đầu có cùng cường độ p nhưng ngược chiều. Hợp lực $F = pA$ nằm trên trục thanh (hình 5.3).



Hình 5.3. Giả thiết về biến dạng dọc của thanh

Bằng thực nghiệm, có các nhận xét khi thanh chịu kéo, nén:

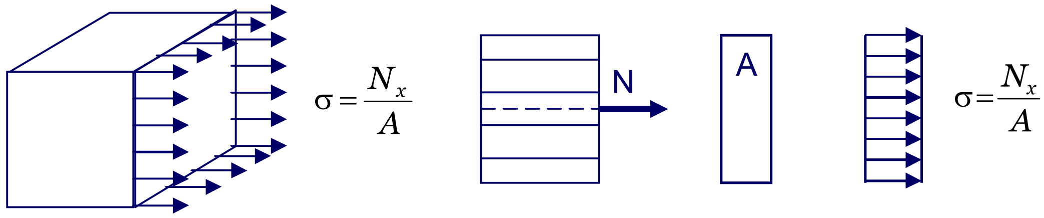
- Các tiết diện của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục.
- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tương tác với nhau - bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với trục thanh.
- Các thớ vật liệu dọc trục có biến dạng dài bằng nhau.

Biểu thức ứng suất

Từ giả thiết các tiết diện vẫn phẳng và vuông góc với trục, sẽ có ứng suất tiếp bằng không, chỉ còn ứng suất pháp. Từ giả thiết thứ hai chỉ còn ứng suất pháp theo phương của trục thanh. Theo định luật Hooke, ứng suất tỉ lệ với biến dạng dài $\sigma_x = E\varepsilon_x$. Từ giải thiết thứ ba biến dạng dài như nhau tại mọi thớ dọc, nên ứng suất cũng như nhau trên tiết diện (hình 5.4), có quan hệ ứng suất và nội lực:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x A, \qquad (5.2)$$

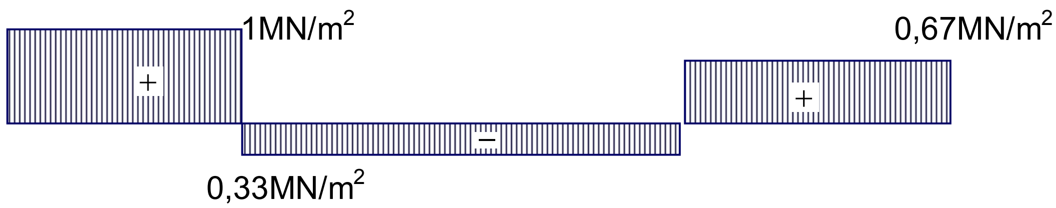
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}. \qquad (5.3)$$



Hình 5.4. Ứng suất dọc trục trường hợp khối và phẳng

Trong bài toán kéo, nén đúng tâm chỉ có ứng suất pháp theo phương dọc trục, do vậy có trạng thái ứng suất đơn là $\sigma_1 = \sigma_x$ và $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Ví dụ thanh chịu lực dọc trục trên hình 5.2a, giả thiết thanh có tiết diện không đổi với diện tich 20x30(cm), sẽ có biểu đồ ứng suất như trên hình 5.5.



Hình 5.5. Biểu đồ ứng suất của thanh chịu lực dọc trục trên hình 5.2a

5.4 Biến dạng của thanh

Biến dạng dài dọc trục

Theo định luật Hooke, biến dạng dài dọc trục của một đơn vị chiều dài thanh là:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_x}{EA} \qquad (5.4)$$

Biến dạng dài dọc trục của một đoạn dx của thanh là:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \Rightarrow \Delta dx = \varepsilon_x dx$$

Biến dạng dài dọc trục của thanh độ dài L, ký hiệu ΔL là:

$$\Delta L = \int_L \varepsilon_x dx = \int_L \frac{N_x}{EA} dx . \tag{5.5}$$

Khi biểu thức N_x / EA là hằng số trên toàn bộ độ dài thì:

$$\Delta L = \frac{N_x L}{EA} . \tag{5.6}$$

Còn khi biểu thức N_x / EA là hằng số trên từng đoạn chiều dài L_i thì:

$$\Delta L = \sum_i \left(\frac{N_x L}{EA} \right)_i . \tag{5.7}$$

Khi EA là hằng số trên toàn bộ độ dài thì:

$$\Delta L = \frac{\int_L N_x dx}{EA} = \frac{\Sigma_N}{EA} , \tag{5.8}$$

trong đó $\Sigma_N = \int_L N_x dx$ là diện tích của biểu đồ lực dọc.

Biến dạng ngang (theo phương ngang)

Trạng thái ứng suất trong bài toán kéo, nén thanh thẳng là trạng thái ứng suất đơn chỉ có thành phần σ_x, do vậy theo định luật Hooke:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \varepsilon_x . \tag{5.9}$$

Độ biến đổi diện tích mặt cắt ngang:

$$\frac{\Delta F}{F} = -2\nu\varepsilon . \tag{5.10}$$

Độ biến đổi thể tích của thanh tính theo công thức:

$$\Delta V = \frac{(1 - 2\nu)}{E} \sum \int N_x dx . \tag{5.11}$$

Độ biến đổi thể tích của thanh chịu kéo (nén) bởi lực P ở hai đầu thanh:

$$\Delta V = \frac{(1-2\nu)}{E} PL . \tag{5.12}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi

Từ công thức (3.8) trong chương 3 có thế năng biến dạng đàn hồi riêng của trạng thái ứng suất khối tổng quát:

$$U = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] .$$

Như đã nói ở trên trạng thái ứng suất của bài toán kéo, nén đúng tâm là trạng thái ứng suất đơn:

$$\sigma_1 = \sigma_x \text{ ; } \sigma_3 = \sigma_2 = 0 . \tag{5.13}$$

Thay (5.13) vào biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi (3.8), nhận được:

$$U = \frac{1}{2E}\sigma_x^2 . \tag{5.14}$$

Thay biểu thức của ứng suất pháp (5.3) vào (5.14) và lấy tích phân, nhận được công thức tổng quát tính thế năng đàn hồi tích lũy có dạng:

$$U = \sum \int \frac{N_x^2}{2EA} dx . \tag{5.15}$$

Dịch chuyển tại các tiết diện

Khi thanh chỉ chịu kéo, nén sẽ chỉ có dịch chuyển dọc trục. Từ quan hệ ứng suất biến dạng và hệ thức Cauchy có phương trình vi phân để tìm dịch chuyển

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{EA} .$$

Khi N_x / EA là hằng số trên toàn bộ độ dài thì dịch chuyển dọc trục u là hàm bậc nhất.

Dịch chuyển các điểm của hệ thanh liên kết khớp

Trình tự để tìm dịch chuyển đàn hồi các điểm của hệ thanh liên kết khớp như sau:

– Xét điều kiện cân bằng tĩnh học để tìm lực dọc trục tại từng thanh.

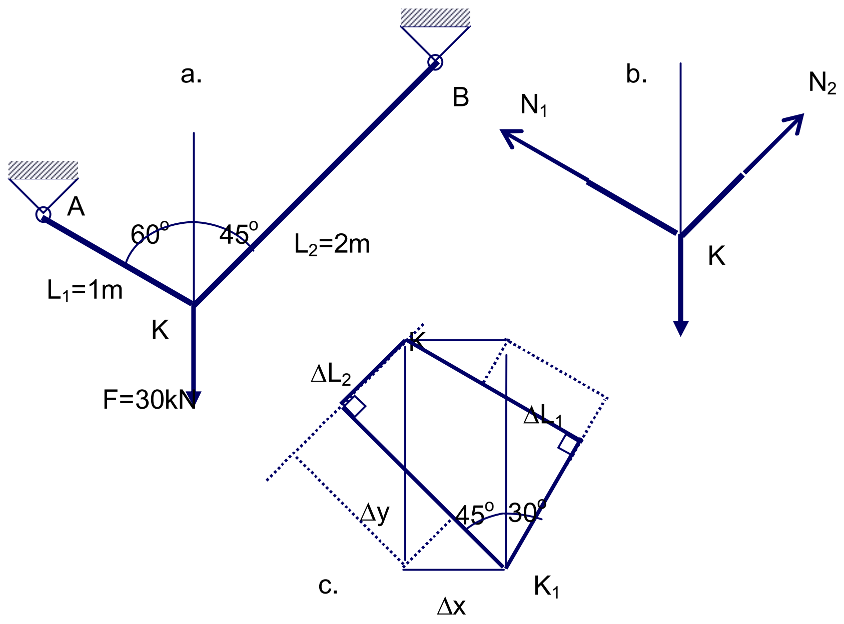
– Tính độ dãn tuyệt đối của từng thanh bằng định luật Hooke (5.5).

– Do các thanh không rời nhau khi biến dạng, bằng phương pháp đường giao nhau lập điều kiện chập dịch chuyển - quan hệ hình học giữa các thanh nối vào điểm đang xét.

– Xác định các dịch chuyển cần tìm từ quan hệ hình học đã lập ở bước trên.

Chú ý: Các thanh trong hệ không chỉ biến dạng dọc trục mà còn có thể quay quanh khớp nào đó. Như vậy mỗi điểm có thể dịch chuyển dọc trục thanh và dịch chuyển trên cung tròn có bán kính tương ứng. Có thể thay cung tròn bằng đường vuông góc với bán kính quay vì biến dạng rất nhỏ so với chiều dài.

Ví dụ: Tìm dịch chuyển của điểm K trên hệ thanh liên kết khớp cho trên hình 5.6a. Hai thanh có cùng mô đun đàn hồi E=2x10^8 kN/m^2 và diện tích mặt cắt A=5cm^2.



Hình 5.6. Ví dụ tìm dịch chuyển các điểm của hệ thanh liên kết khớp

Từ điều kiện cân bằng tĩnh học tại điểm K (hình 5.6b) tìm được các lực dọc trục N_1 và N_2:

$$\begin{cases} N_1 \sin 60^o - N_2 \sin 45^o = 0 \\ N_1 \cos 60^o + N_2 \cos 45^o - F = 0 \end{cases} \rightarrow N_1 = 21{,}961kN; N_2 = 26{,}897kN .$$

Tính độ dãn tuyệt đối của thanh AK (ΔL_1) và thanh BK (ΔL_2):

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} = 2{,}2 \cdot 10^{-4} m, \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} = 5{,}38 \cdot 10^{-4} m\,.$$

Kéo dài thanh AK một đoạn ΔL_1 và thanh BK một đoạn ΔL_2. Kẻ các đường vuông góc với AK và BK tại các điểm đã kéo dài ra. Giao điểm của hai đường vuông góc này sẽ là vị trí của điểm K sau biến dạng. Thiết lập điều kiện chập dịch chuyển (hình 5.6c) nhận được hệ phương trình với ẩn là dịch chuyển của điểm K theo phương x và y:

$$\begin{cases} \Delta L_1 = \Delta_x \cos 30^0 + \Delta_y \sin 30^0, \\ \Delta L_2 = -\Delta_x \cos 45^0 + \Delta_y \sin 45^0. \end{cases}$$

Thay các giá trị của ΔL_1 và ΔL_2 vào, nhận được hệ hai phương trình hai ẩn

$$\begin{cases} 2{,}2 \cdot 10^{-4} = 0{,}866\Delta_x + 0{,}5\Delta_y, \\ 5{,}38 \cdot 10^{-4} = -0{,}707\Delta_x + 0{,}707\Delta_y. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, xác định được chuyển dịch của điểm K.

$$\Delta_x = -0{,}118 mm; \quad \Delta_y = 0{,}643 mm\,.$$

Như vậy vị trí của điểm K được xác định.

5.5 Độ bền và độ cứng

Điều kiện bền của thanh chịu kéo, nén đúng tâm có dạng

$$|\sigma|_{\max} = \left|\frac{N}{A}\right|_{\max} \le [\sigma]_{k(n)}\,. \tag{5.16}$$

Từ điều kiện bền có các bài toán

– Bài toán kiểm tra bền – khi có được biểu đồ lực dọc trục kiểm tra điều kiện (5.16) xem thanh có đủ bền không.

– Bài toán thiết kế tìm kích thước tiết diện chịu kéo hay chịu nén tính từ công thức:

$$A = \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]}, \tag{5.17}$$

trong đó $|N|_{max}$ là giá trị tuyệt đối của lực dọc trên thanh, [σ] là ứng suất cho phép của vật liệu về kéo hoặc về nén.

– Bài toán xác định trị số an toàn của N tức là xác định tải trọng dọc trục N cho phép tác động lên thanh sao cho đảm bảo điều kiện bền:

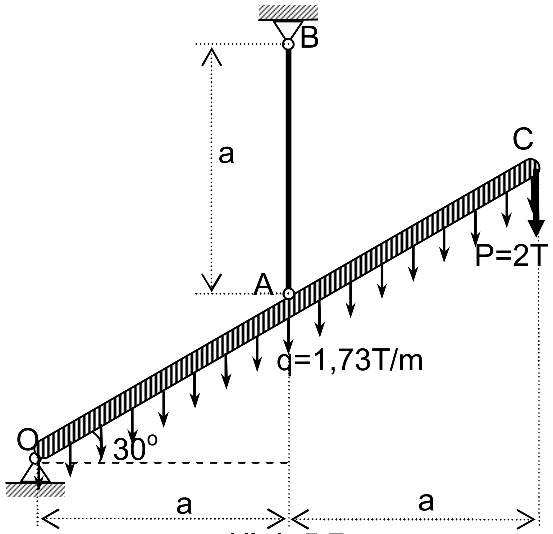
$$N_b \le A[\sigma]. \tag{5.18}$$

Ngoài kiểm tra bền còn phải kiểm tra độ cứng xem dịch chuyển của điểm nào đó không vượt quá giới hạn cho phép:

$$\delta_{max} \le [\delta]. \tag{5.19}$$

Trong bài toán thiết kế, khi điều kiện cứng không thỏa mãn, sẽ phải lựa chọn lại kích thước tiết diện sao cho điều kiện (5.19) thỏa mãn.

Ví dụ. Cho kết cấu chịu lực như trên hình vẽ 5.7. Thanh OAC cứng tuyệt đối. Cho $[\sigma] = 1600kG/cm^2$ và $[\delta_C] = 1{,}5mm$. Tìm diện tích tiết diện của thanh AB đảm bảo đủ bền và đủ cứng.



Hình 5.7

Cắt thanh AB, thay thế bằng nội lực N. Xét cân bằng của thanh OAC tìm được nội lực trong thanh AB:

$$Na - P\cdot 2a - q\frac{2a}{\cos 30^0}\cdot a = 0$$

$$\Rightarrow N = 2P + \frac{4a}{\sqrt{3}}q = 12T.$$

Tính diện tích tiết diện của thanh AB đảm bảo đủ bền, theo (5.16):

$$A = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{12000}{1600} = 7{,}5cm^2.$$

Tính độ dãn dài của thanh AB:

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} = \frac{12000\cdot 100}{7{,}5\cdot 2\cdot 10^6} = 0{,}08cm = 0{,}8mm.$$

Tính dịch chuyển tại điểm C và kiểm tra điều kiện cứng (5.19):

$$\delta_C = \frac{2\Delta L}{\cos 30^0} = \frac{4 \cdot 0,8}{\sqrt{3}} = 1,847mm > [\delta_C].$$

Như vậy dịch chuyển tại điểm C lớn hơn dịch chuyển cho phép. tính lại diện tích tiết diện sao cho thỏa mãn điều kiện cứng. Đặt:

$$\delta_C = [\delta_C],$$

tính được độ dãn dài của thanh AB sao cho thỏa mãn điều kiện trên:

$$\Delta L = \frac{\sqrt{3}}{4}[\delta_C] \approx 0,65mm = 0,065cm .$$

Từ đây tính được diện tích tiết diện tương ứng:

$$A = \frac{12000 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot 0,065} = \frac{6}{0,65} = \frac{2}{0,25} \approx 9,23cm^2 .$$

5.6 Bài toán siêu tĩnh

Như đã định nghĩa, hệ siêu tĩnh là hệ mà nếu chỉ dùng điệu kiện cân bằng tĩnh học thì không thể xác định được nội lực. Ngoài các điều kiện cân bằng tĩnh học còn phải sử dụng các điều kiện chập dịch chuyển. Quy trình giải bài toán như sau:

– Bước 1. Lập phương trình cân bằng tĩnh học, xác định bậc siêu tĩnh của hệ.

– Bước 2. Lập điều kiện chập dịch chuyển, tức là xác định quan hệ hình học giữa các biến dạng của từng thành phần của hệ. Số phương trình hình học cần thiết lập phải bằng với số bậc siêu tĩnh của hệ.

– Bước 3. Dùng định luật Hooke viết biến dạng qua nội lực, thế vào quan hệ hình học đã lập ở bước trên đưa đến hệ phương trình gồm phương trình cân bằng và quan hệ hình học với ẩn là nội lực.

– Bước 4. Giải hệ phương trình trên để tìm nội lực.

Trường hợp có kể đến tải nhiệt độ, khi tuân thủ quy trình trên, trong bước 2 và bước 3 độ dãn dài được tính không chỉ do tác động của nội lực nà còn do giãn nở nhiệt:

$$\Delta l_T = l\alpha\Delta T ,$$

trong đó l là chiều dài thanh, α là hệ số dãn nở nhiệt trung bình của vật liệu và ΔT là chênh lệch nhiệt độ.

Hệ siêu tĩnh chịu lực dọc trục, ngoài xác định nội lực còn có các bài toán:

- Tính ứng suất lắp ghép: trong thực tế chiều dài của các thanh khi chế tạo có sai khác so với thiết kế, nên trong các điều kiện chập dịch chuyển có tính đến sai lệch này và tính được ứng suất lắp ghép sinh ra do sự sai lệch này.
- Xác định tải trọng tối đa theo ứng suất cho phép: chọn ứng suất lớn nhất bằng với ứng suất cho phép, từ đó tính ra tải trọng cho phép lớn nhất.
- Tính toán theo năng lực chịu tải: cho tất cả các ứng suất bằng ứng suất cho phép. Từ phương trình cân bằng tĩnh học tính ra tải trọng cực đại cho phép theo năng lực chịu tải. Đây chính là điều kiện chảy dẻo lí tưởng.

Ví dụ. Xét thanh với các sơ đồ chịu lực dọc trục như trên hình 5.8. Lấy E=2.10^{6}kG/cm^2 và hệ số dãn nở nhiệt $\alpha = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$.

Ở đây xét ba trường hợp:

- Thanh chịu lực dọc trục chịu ngàm hai đầu, số phản lực cần tìm là hai.
- Thanh chịu lực dọc trục, nhưng có sai lệch ở đầu dưới, như vậy cần tìm phản lực ở đầu trên và ứng suất lắp ghép ở đầu dưới.
- Thanh chịu tải nhiệt chịu ngàm hai đầu, cần tìm phản lực tại hai đầu như trường hợp thứ nhất.

Nhận thấy rằng đây là các bài toán siêu tĩnh vì chỉ có một phương trình cân bằng đối với lực dọc trục:

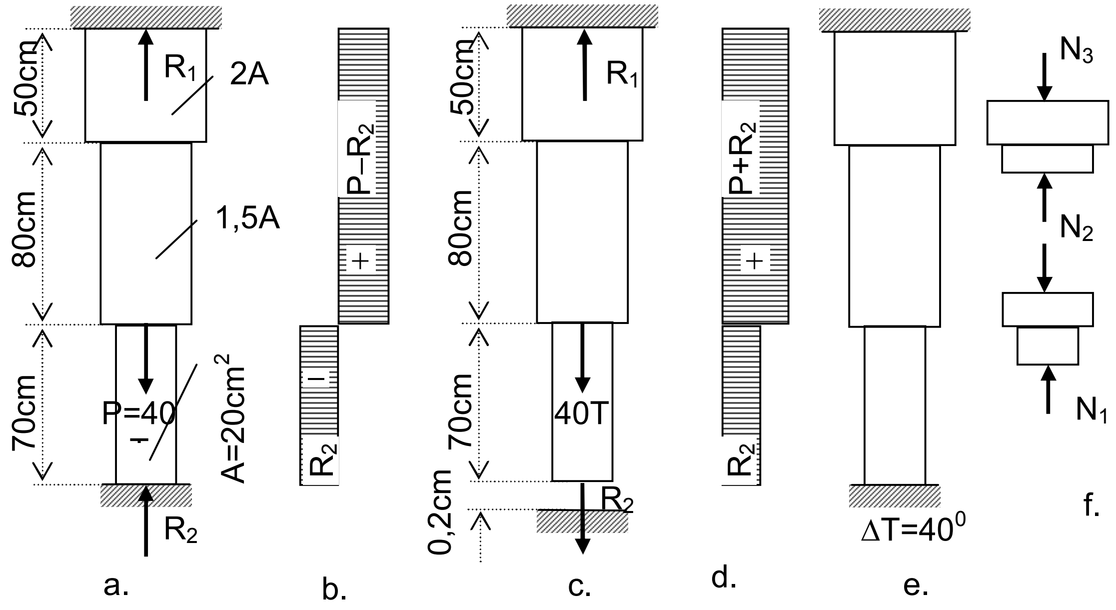
$$\sum F_x = 0.$$

Sẽ xét thêm điều kiện chập dịch chuyển, cụ thể cho từng trường hợp:

- Trường hợp trên hình 5.8a. Giải phóng liên kết ngàm hai đầu và thay bằng hai phản lực R_1 và R_2 có phương trình cân bằng:

$$R_1 - 40 + R_2 = 0.$$

Biểu đồ nội lực dọc trục với chiều phản lực quy ước có dạng như hình 5.8b.



Hình 5.8

Điều kiện chập dịch chuyển sẽ là tổng độ dãn dài của thanh bằng không:

$\Delta L = 0$.

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, tính tổng độ dãn dài dựa trên biểu độ lực dọc trục 5.8b:

$$\Delta L = \frac{50(P - R_2)}{E \cdot 2A} + \frac{80(P - R_2)}{E \cdot 1{,}5A} - \frac{70R_2}{E \cdot A} = 0,$$

từ đây

$R_2 = 21{,}124T$.

Từ phương trình cân bằng tìm được:

$R_1 = 40 - R_2 = 18{,}876T$.

– Trường hợp trên hình 5.8c., giải phóng liên kết ngàm thay bằng phản lực R_1 và đặt ở đầu dưới lực lắp ghép R_2 có phương trình cân bằng

$R_1 - 40 - R_2 = 0$.

Biểu đồ nội lực dọc trục với chiều phản lực quy ước có dạng như trên hình 5.8d.

Điều kiện chập dịch chuyển sẽ là tổng độ dãn dài của thanh bằng độ sai lệch:

$$\Delta L = \delta .$$

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, tính tổng độ dãn dài dựa trên biểu độ lực dọc trục 5.8d:

$$\Delta L = \frac{50(R_2 + P)}{E \cdot 2A} + \frac{80(R_2 + P)}{E \cdot 1{,}5A} + \frac{70R_2}{E \cdot A} = \delta = 0{,}2 \ ,$$

từ đây

$$R_2 = 32{,}81T .$$

Từ phương trình cân bằng tìm được:

$$R_1 = 40 + R_2 = 72{,}81T .$$

– Trường hợp trên hình 5.8e, do tác động của nhiệt độ các thanh đều dãn nở, như vậy xuất hiện nội lực gây nén dọc trục, có phương trình cân bằng (hình 5.8f):

$$N_1 = N_2 = N_3 = N .$$

Điều kiện chập dịch chuyển sẽ là tổng độ dãn dài của thanh bằng không:

$$\Delta L = 0 .$$

Thanh gồm ba đoạn có tiết diện khác nhau, tính tổng độ dãn dài gồm cả dãn nở nhiệt:

$$\Delta L = l_1\alpha\Delta T - \frac{Nl_1}{E2A} + l_2\alpha\Delta T - \frac{Nl_2}{E1{,}5A} + l_3\alpha\Delta T - \frac{Nl_3}{EA} = 0 ,$$

từ đây

$$N \approx 24{,}27T .$$

Kết luận chương 5

Chương 5 trình bày bài toán thanh chịu kéo, nén đúng tâm. Với các giả thiết về biến dạng, bài toán kéo, nén có trạng thái ứng suất đơn.

Trong hệ thanh dàn không gian chịu kéo, nén, dịch chuyển tại các nút liên kết khớp có thể tìm được bằng phương pháp đường giao nhau và lập được các quan hệ hình học.

Với các điều kiện bền và điệu kiện cứng trong bài toán kéo, nén đúng tâm cho phép giải quyết ba bài toán cơ bản: kiểm tra bền của thanh chịu kéo, nén; thiết kế kích thước tiết diện ngang của thanh chịu kéo, nén và bài toán tìm tải trọng cho phép.

Bài toán siêu tĩnh khi chỉ chịu kéo, nén cũng được xem xét. Trong trường hợp này, ngoài phương trình cân bằng cần thiết lập các điều kiện chập dịch chuyển.

CHƯƠNG 6
Thanh thẳng tiết diện tròn chịu xoắn

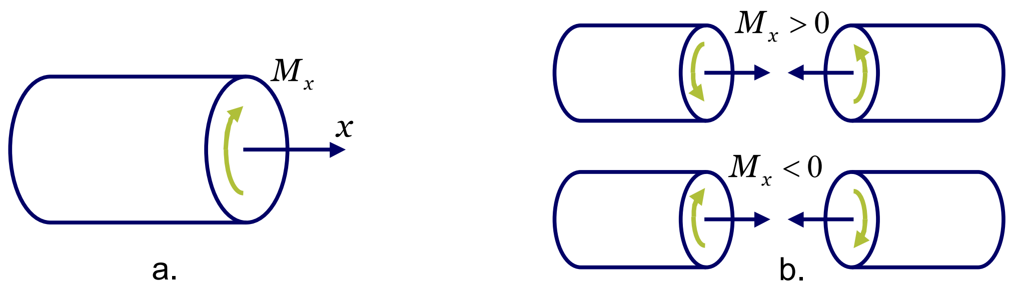
6.1 Định nghĩa

Thanh chịu xoắn thuần túy nếu nội lực trên mặt cắt của thanh chỉ có một thành phần là mô men nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh, được gọi là mô men xoắn (hình 6.1a).

Ngoại lực gây xoắn thường là những mô men, những ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh.

Quy ước dấu của mô men xoắn như sau: nếu nhìn vào mặt cắt đang xét mô men quay ngược chiều kim đồng hồ là mô men dương và ngược lại (hình 6.1b). Lưu ý đây là quy ước nên có thể có những tài liệu sẽ quy ước khác với tài liệu này.

Ở đây chỉ xét xoắn thanh tiết diện hình tròn. Xoắn thanh tiết diện hình chữ nhật sẽ trình bày trong mục 6.7 với lời giải của Saint-Venant.



Hình 6.1. a. Mô men xoắn, b. Quy ước dấu

6.2 Biểu đồ mô men xoắn

Mô men xoắn M_x cũng được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Cắt một mặt cắt, sau đó xét cân bằng mô men trên trục thanh của phần đang xét sẽ có độ lớn của mô men xoắn nội lực tại mặt cắt bằng tổng đại số tất cả các mô men ngoại lực (mô men tập trung M và mô men phân bố dọc theo trục thanh có cường độ m) tác dụng về một phía của mặt cắt. Công thức tổng quát:

$$M_x = -\sum M - \sum \int_l m_x dx . \tag{6.1}$$

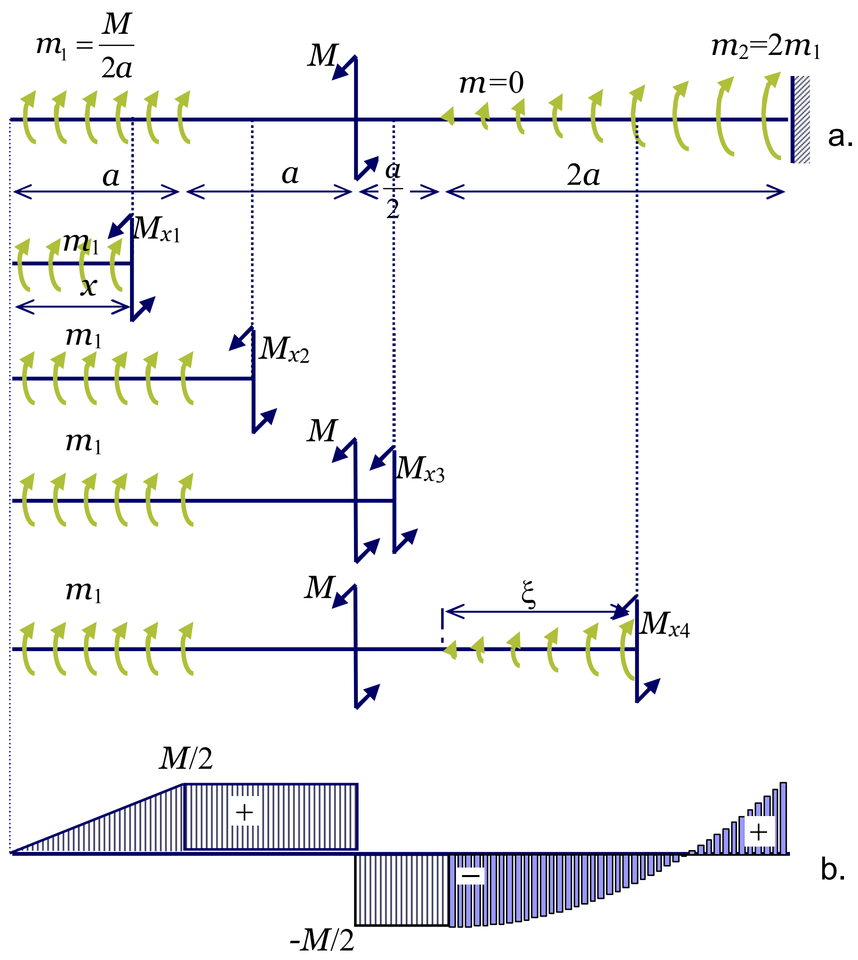
Quan hệ bước nhảy của mô men xoắn và mô men ngoại lực tập trung:

$$M_{x,ph} - M_{x,tr} = M . \tag{6.2}$$

Quan hệ vi phân giữa mô men xoắn và mô men xoắn ngoại lực phân bố dọc trục:

$$\frac{dM_x}{dx} = m_x . \tag{6.3}$$

Ví dụ. Thanh chịu lực như trên hình 6.2a. Vẽ biểu đồ mô men xoắn.



Hình 6.2. Ví dụ vẽ biểu đồ mô men xoắn

– Xét mặt cắt với đoạn bên trái trong khoảng $0 < x < a$:

$$M_{x1} - m_1 x = 0 \Rightarrow M_{x1} = \frac{M}{2a} x \ ,$$

suy ra tại $x = 0$, $M_{x1} = 0$ và tại $x = a$, $M_{\substack{x1 \\ x=a}} = \frac{M}{2}$.

– Xét mặt cắt trong khoảng $a < x < 2a$:

$$M_{x2} - m_1 a = 0 \Rightarrow M_{x2} = \frac{M}{2}.$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $2a < x < 2{,}5a$:

$$M_{x3} - m_1 a + M = 0 \Rightarrow M_{x3} = -\frac{M}{2}.$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $2{,}5a < x < 4{,}5a$:

$$M_{x4} - m_1 a + M - \int_0^{\xi} \frac{2m_1}{2a} \xi d\xi = 0 \Rightarrow M_{x4} = -\frac{M}{2} + \frac{M\xi^2}{4a^2} \quad \xi = [0{,}2a].$$

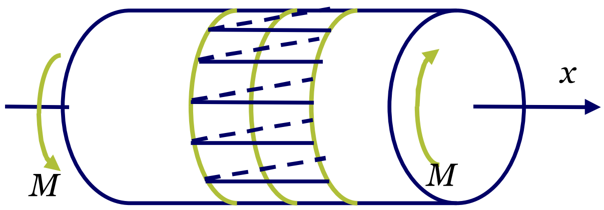
suy ra tại $\xi = 0$: $M_{x4} = -\frac{M}{2}$; $\xi = 2a$: $M_{\substack{x4 \\ x=a}} = \frac{M}{2}$ và $M_{x4} = 0$ khi $\xi = a\sqrt{2} = 1{,}42a$.

Biểu đồ mô men xoắn có dạng như trên hình 6.2b.

6.3 Ứng suất tiếp

Giả thiết về biến dạng

Xét thanh tiết diện tròn chịu xoắn. Kẻ các đường sinh và các đường tròn chu tuyến (hình 6.3).



Hình 6.3. Giả thiết về biến dạng khi thanh chịu xoắn

Cho thanh chịu mô men xoắn M ở hai đầu, với biến dạng nhỏ đàn hồi sẽ có nhận xét:

– Chiều dài thanh và khoảng cách giữa các đường tròn hầu như không đổi. Các góc vuông thay đổi.

– Các đường tròn vẫn phẳng, bán kính không thay đổi. Mặt phẳng chứa các đường tròn xoay quanh trục, góc xoay của các vòng tròn khác nhau.

Chấp nhận các giả thiết sau:

– Thanh không có biến dạng dọc trục.

– Tiết diện thanh vẫn phẳng, chỉ xoay đi một góc φ, gọi là góc xoắn và là hàm của tọa độ x (lưu ý tiết diện không là hình tròn thì giả thiết này không phù hợp).

– Bán kính tiết diện vẫn thẳng và có chiều dài không thay đổi.

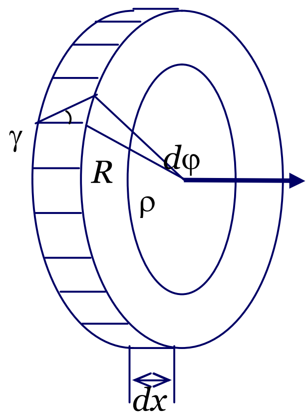
– Các lớp vật liệu dọc trục không tác dụng tương hỗ (bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt song song với trục).

Theo các giả thiết trên, tại tiết diện chỉ tồn tại ứng suất tiếp, còn các ứng suất pháp bằng không.

Công thức ứng suất tiếp trên tiết diện

Khảo sát biến dạng của một phân tố thanh có chiều dài dx.

Tiết diện bên trái tại tọa độ x có góc xoay là φ. Tiết diện bên phải tại tọa độ $x + dx$ có góc xoay là $\varphi + d\varphi$. Bán kính của tiết diện bên phải cũng xoay đi một góc là $d\varphi$ (hình 6.4).



Hình 6.4. Biến dạng của phân tố thanh chịu xoắn

Xét phân tố trụ tròn bán kính ρ, góc xoay của bán kính ρ cũng là $d\varphi$ (hình 6.5a).

Biến dạng góc vuông ở mặt bên của phân tố con. (hình 6.5b):

$$\gamma = \frac{AB}{dx} = \rho\frac{d\varphi}{dx} = \rho\theta. \qquad (6.4)$$

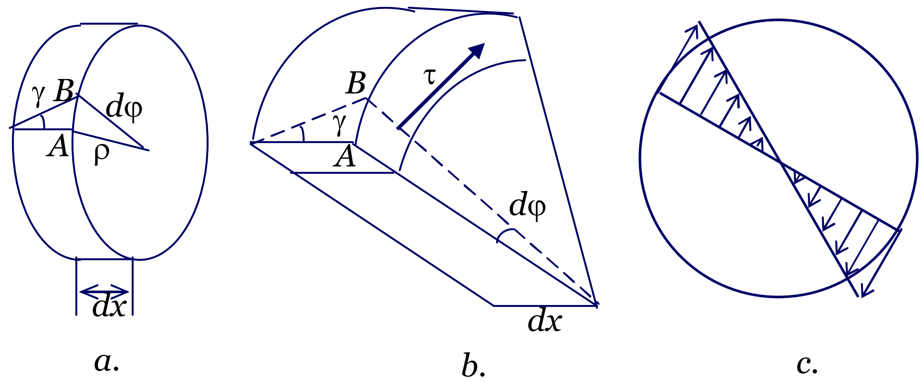
Trị số θ là góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}. \qquad (6.5)$$

Theo định luật Hooke, ứng suất tiếp quan hệ với góc xoắn tương đối bằng

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta, \qquad (6.6)$$

trong đó G mô đun đàn hồi trượt.



Hình 6.5. Phân tố trụ tròn và biểu đồ ứng suất tiếp

Theo định nghĩa:

$$M_x = \int_A \tau\rho dA = \int_A G\theta\rho^2 dA. \qquad (6.7)$$

Tích Gθ=const, vậy:

$$G\theta = \frac{M_x}{\int_A \rho^2 dA} = \frac{M_x}{I_\rho}, \qquad (6.8)$$

trong đó $I_\rho = \int_A \rho^2 dA$ là mô men quán tính cực của mặt cắt. Như vậy ứng suất tiếp biểu diễn qua mô men xoắn bằng công thức:

$$\tau = \frac{M_x}{I_\rho}\rho . \tag{6.9}$$

Từ biểu đồ ứng suất tiếp (hình 6.5c) có:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{I_\rho} R = \frac{M_x}{W_\rho} \tag{6.10}$$

trong đó $W_x = \dfrac{I_\rho}{R}$ là mô men chống xoắn của tiết diện hình tròn.

Đối với tiết diện tròn bán kính R :

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}, \; W_x = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}, \tag{6.11}$$

trong đó $D = 2R$ là đường kính.

Đối với tiết diện hình vành khăn bán kính ngoài R và bán kính trong r:

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right),$$

$$W_x = \frac{\pi R^3}{2}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right), \tag{6.12}$$

trong đó $\alpha = r/R = d/D$, $d = 2r$.

6.4 Biến dạng và dịch chuyển

Biến dạng khi xoắn

Từ công thức (6.6) và (6.9), góc xoay tương đối của hai tiết diện cách nhau một đơn vị chiều dài bằng:

$$\theta = \frac{M_x}{GI_\rho}. \tag{6.13}$$

Từ (6.5) và (6.13) tính được góc xoay tương đối giữa hai tiết diện cách nhau dx chiều dài:

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_x}{GI_\rho} dx , \qquad (6.14)$$

Tích phân (6.14) nhận được góc xoay tương đối giữa hai tiết diện ở hai đầu thanh độ dài L gọi là góc xoắn:

$$\varphi = \int_L \theta dx = \int_L \frac{M_x}{GI_\rho} dx . \qquad (6.15)$$

Khi $\frac{M_x}{GI_\rho} = const$ trên cả chiều dài sẽ có:

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_\rho} . \qquad (6.16)$$

Khi $\frac{M_x}{GI_\rho} = const$ trên từng đoạn chiều dài L_i:

$$\varphi = \sum_i \frac{M_x L_i}{GI_\rho} . \qquad (6.17)$$

Người gọi GI_ρ là độ cứng chống xoắn của tiết diện thanh hình tròn.

Dịch chuyển

Góc xoắn φ xác định từ quan hệ vi phân (6.14) ;

$$d\varphi = \theta dx = \frac{M_x}{GI_\rho} dx ,$$

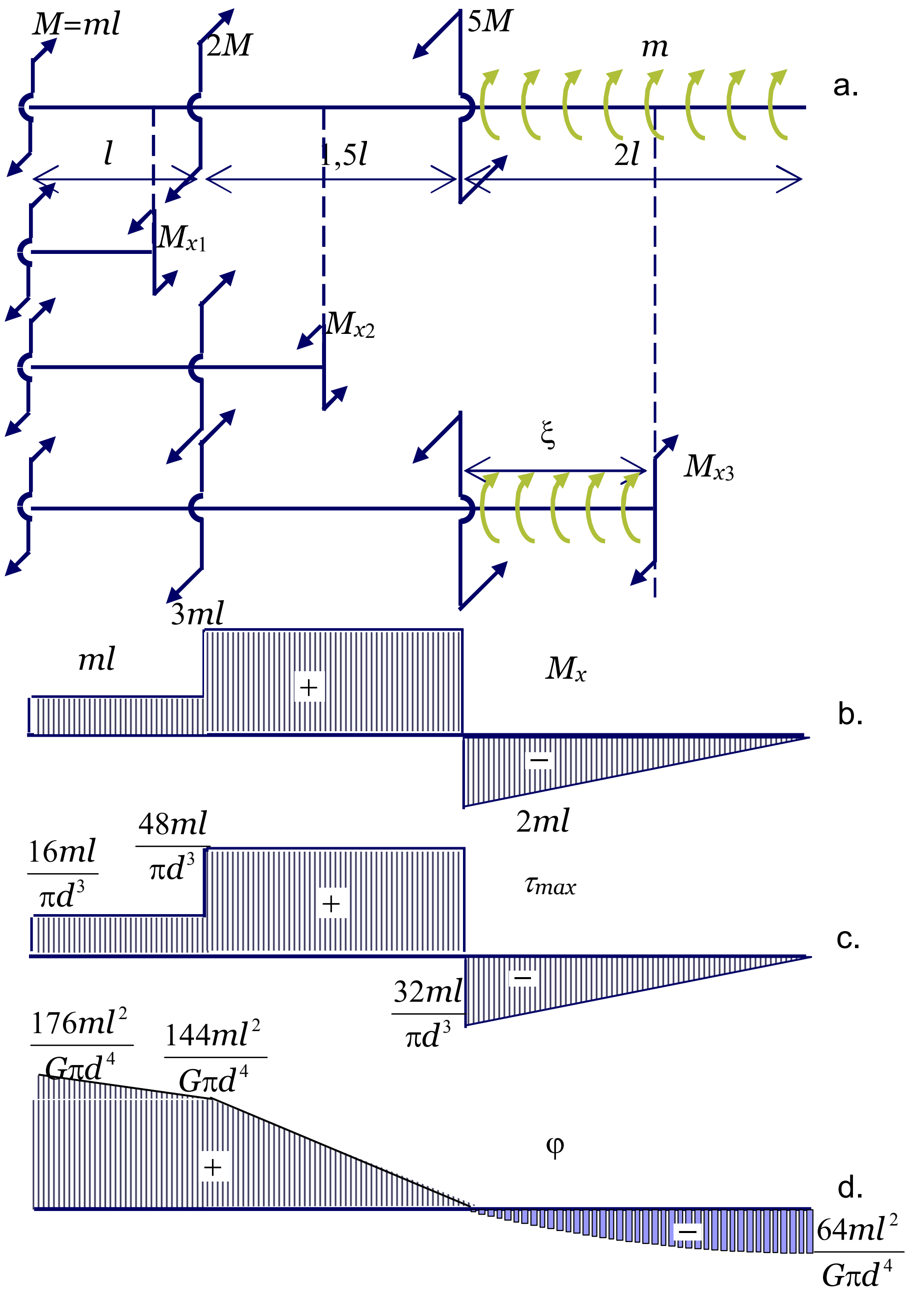
$$\varphi = \int_L \frac{M_x}{GI_\rho} dx + C , \qquad (6.18)$$

trong đó C là hằng số tích phân xác định từ điều kiện liên kết.

Ví dụ. Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp ở mép ngoài tiết diện τ_{max} và góc xoắn φ cho thanh tròn đường kính d chịu lực như trên hình 6.6a.

– Xét mặt cắt từ bên trái trong khoảng $0 < x < l$:

$$M_{x1} = M = ml ; \; \tau_{max1} = \frac{M_{x1}}{W_x} = \frac{16ml}{\pi d^3} .$$



Hình 6.6. Ví dụ tính góc xoắn và ứng suất tiếp

– Xét mặt cắt trong khoảng $l < x < 2{,}5l$:

$$M_{x2} = M + 2M = 3ml\,;\ \tau_{\max 2} = \frac{M_{x2}}{W_x} = \frac{48ml}{\pi d^3}.$$

– Xét mặt cắt trong khoảng $2{,}5l < x < 4{,}5l$:

$$M_{x3} = M + 2M - 5M + m\xi = m(\xi - 2l) \quad \xi = [0,2l],$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x3}}{W_x} = \frac{16m(\xi - 2l)}{\pi d^3} \quad \xi = [0,2l],$$

tại $\xi = 0$: $M_{x3} = -2ml$; $\tau_{\max 3} = \frac{M_{x3}}{W_x} = -\frac{32ml}{\pi d^3}$; $\xi = 2l$: $M_{x3} = 0$, $\tau_{\max 3} = \frac{M_{x3}}{W_x} = 0$.

Biểu đồ $\tau_{\max}$ thể hiện trên hình 6.6c. Hai đoạn đầu có $\frac{M_x}{GI_\rho} = const$ trên từng đoạn. Góc xoắn giữa tiết diện đầu và cuối đoạn thứ nhất là:

$$\varphi_I = \frac{M_{x1}L_1}{GI_\rho} = \frac{ml^2}{GI_\rho} = \frac{32ml^2}{G\pi d^4}.$$

Góc xoắn giữa hai tiết diện đầu và cuối đoạn hai là:

$$\varphi_{II} = \frac{M_{x2}L_2}{GI_\rho} = \frac{4{,}5ml^2}{GI_\rho} = \frac{144ml^2}{G\pi d^4}.$$

Góc xoắn giữa hai tiết diện đầu và cuối đoạn ba là:

$$\varphi_{III} = \frac{m}{GI_\rho}\int_0^{2l}(\xi - 2l)d\xi = \frac{m}{GI_\rho}\left(\frac{\xi^2}{2} - 2l\xi\right)\Bigg|_0^{2l},$$

tại $\xi = 0$: $\varphi_{III} = 0$; tại $\xi = 2l$: $\varphi_{III} = \frac{M_{x1}L_1}{GI_\rho} = -\frac{2ml^2}{GI_\rho} = -\frac{64ml^2}{G\pi d^4}$.

Như vậy biểu đồ góc xoắn φ như trên hình 6.6d.

Thế năng biến dạng đàn hồi

Từ công thức (3.8) trong chương 3, thế năng biến dạng đàn hồi riêng của trạng thái ứng suất khối tổng quát có dạng:

$$U = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Trong bài toán xoắn thuần túy thanh tiết diện tròn chỉ có ứng suất tiếp τ trên mặt cắt vuông góc với trục thanh, như vậy ứng suất chính của trạng thái ứng suất đang xét có dạng:

$$\sigma_1 = \tau \,;\ \sigma_3 = -\tau \,;\ \sigma_2 = 0 \,. \tag{6.19}$$

Thay (6.19) vào biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi (3.8) nhận được:

$$U = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 \,. \tag{6.20}$$

Thay biểu thức của ứng suất tiếp (6.9) vào (6.20) và lưu ý đến mô đun trượt $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ nhận được:

$$U = \frac{1}{2G}\frac{M_x^2}{I_\rho^2}\rho^2 \,. \tag{6.21}$$

Công thức tổng quát tính thế năng đàn hồi tích lũy sẽ có dạng:

$$U = \sum \int \frac{M_x^2}{2GI_\rho} dx \,. \tag{6.22}$$

6.5 Độ bền và độ cứng

Điều kiện bền

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\tau]. \tag{6.23}$$

– Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}. \tag{6.24}$$

– Theo thuyết bền thế năng biến dạng đàn hồi hình dáng cực đại:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}. \tag{6.25}$$

Như đã nói trong phần nhập môn, có ba bài toán cơ bản:

– Bài toán kiểm tra: kiểm tra điều kiện bền (6.23) xem có thỏa mãn không.

– Bài toán thiết kế: lựa chọn kích thước tiết diện từ điều kiện bền:

$$W_x \ge \frac{\max|M_x|}{[\tau]} \,. \tag{6.26}$$

– Bài toán xác định tải trọng cho phép M_b: từ điều kiện (6.23) tính tải trọng cho phép tác động lên thanh sao cho đủ bền.

Điều kiện cứng

$$\varphi_{\max} = \frac{\max|M_x|l_\varphi}{GI_\rho} \le [\varphi]. \tag{6.27}$$

Tương tự đối với từng bài toán:

– Bài toán kiểm tra: kiểm tra điều kiện cứng (6.27) xem có thỏa mãn không.

– Bài toán thiết kế: tính góc xoắn φ dựa trên kích thước tiết diện đã chọn từ điều kiện bền (6.23). Kiểm tra điều kiện cứng (6.27), nếu thỏa mãn không cần chọn lại kích thước. Nếu điều kiện (6.27) không thỏa mãn thì lựa chọn lại kích thước theo tiêu chuẩn:

$$I_\rho \ge \frac{\max|M_x|l_\varphi}{G[\varphi]}, \tag{6.28}$$

trong đó l_φ là độ dài đoạn thanh đã biết góc xoắn cho phép.

– Bài toán xác định tải trọng cho phép M_c : từ điều kiện (6.27) tính tải trọng cho phép tác động lên thanh sao cho đủ cứng. Tải trọng cho phép M sẽ là $\min(M_b, M_c)$.

Ví dụ. Thanh tiết diện hình vành khăn chịu xoắn như trên hình 6.7. Ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 500kG/cm^2$. Góc xoắn cho phép $[\varphi] = 2^o/1m$. Tìm D và d.

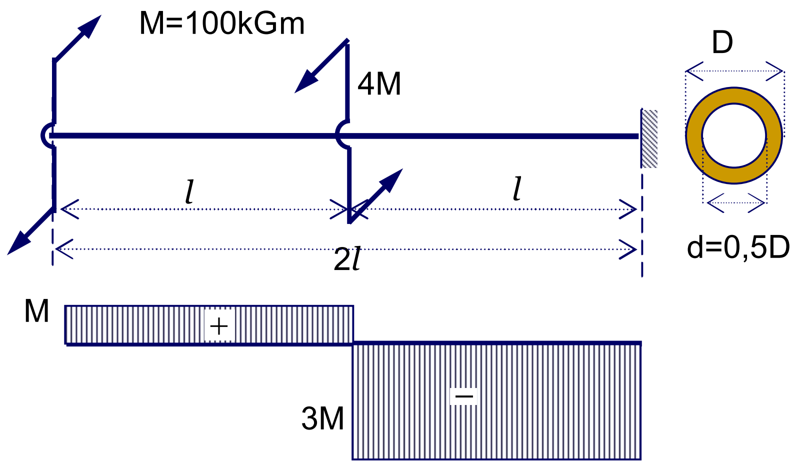
– Bước 1. Vẽ biểu đồ mô men xoắn (hình 6.7).

– Bước 2. Tìm $\tau_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{3M}{\frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \frac{d^3}{D^3}\right)} = \frac{300 \cdot 16}{\pi D^3(1 - 0{,}5^3)}.$$

– Bước 3. Từ điều kiện bền (6.26) xác định đường kính ngoài D. Theo thông số ban đầu, tỉ lệ giữa đường kính trong và đường kính ngoài là 0,5:

$$\mathrm{W}_{\max} = \frac{M_{\max}}{[\tau]} \to D = \sqrt[3]{\frac{M}{[\tau]\pi(1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{480000}{500\pi(1-0{,}5^4)}} = 6{,}88cm .$$



Hình 6.7

– Bước 4. Kiểm tra điều kiện về độ cứng (6.27).

Từ kích thước tìm được tính mô men quán tính:

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) = 206{,}4cm^4 .$$

Mặt khác tính biểu thức bên phải bất đẳng thức (6.28) với $l_\varphi = 1m = 100cm$, $[\varphi] = \frac{2\cdot\pi}{180}$:

$$\frac{M_{\max} l_\varphi}{G[\varphi]} = \frac{30000\cdot 100\cdot 180}{800000\cdot 2\cdot \pi} = 107{,}43cm^4 .$$

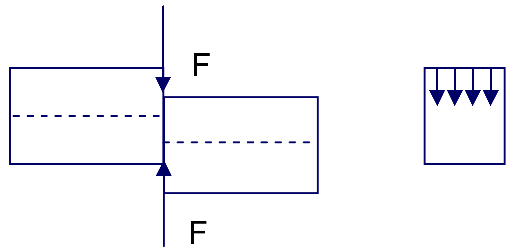
Điều kiện cứng thỏa mãn $I_\rho > \frac{M_{\max} l_\rho}{G[\varphi]}$, suy ra chọn kính thước đã tính được ở bước 3:

$$D = 6{,}88cm; \quad d = 3{,}44cm .$$

6.6 Thanh chịu cắt

Biến dạng cắt hay biến dạng trượt là một trường hợp chịu lực của thanh mà trên tiết diện cũng chỉ có các ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp này có phương, chiều của lực cắt F và phân bố đều trên diện tích A của mặt cắt (hình 6.8). Công thức tính ứng suất tiếp khi thanh chịu cắt:

$$\tau = \frac{F}{A}. \tag{6.29}$$



Hình 6.8. Thanh chịu cắt

Điều kiện bền khi cắt:

$$\tau = \frac{F}{A} \le [\tau].$$

Điều kiện bền này dùng để kiểm tra các liên kết: đinh tán, bu lông, mối hàn.

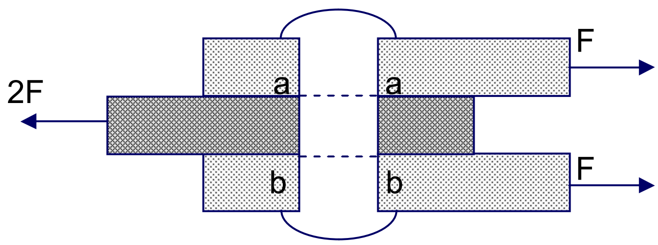
Ví dụ: Xét đinh tán có đường kính d liên kết ba tấm phẳng (hình 6.9).

Liên kết của đinh tán ở hai mặt cắt a-a và b-b, tại đó đinh tán chịu lực cắt F trên diện tích:

$$A = 2\pi d^2 / 4.$$

Khi đinh tán có n mặt cắt thì:

$$A = n\pi d^2 / 4. \tag{6.30}$$



Hình 6.9. Đinh tán bu lông – kiểm tra biến dạng trượt

Một dạng phá hủy khác của đinh tán do sự ép trên bề mặt tiếp xúc (hình 6.10). Sự phân bố ứng suất trên bề mặt tiếp xúc rất phức tạp. Đánh giá gần đúng thông qua trị số trung bình:

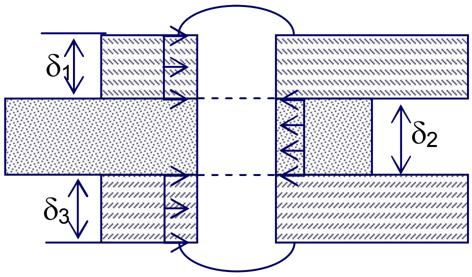
$$\sigma_{em} = \frac{F}{A_{em}} \le [\sigma]_{em}\ , \tag{6.31}$$

trong đó:

F - tổng lực kéo về một phía,

A_{em}- diện tích ép mặt quy ước,

σ_{em}- ứng suất ép mặt quy ước.



Hình 6.10. Kiểm tra ứng suất ép tại các mặt tiếp xúc

Diện tích ép mặt quy ước được tính như sau:

– Giữa đinh tán và vách lỗ của tấm thứ hai, diện tích ép mặt quy ước bằng:

$A_{em} = d \cdot \delta_2$.

– Giữa đinh tán và vách lỗ của tấm thứ nhất và tấm thứ ba có diện tích ép mặt quy ước bằng:

$A_{em} = d(\delta_1 + \delta_3)$.

Tổng quát hóa, diện tích ép mặt quy ước được tính bằng:

$$A_{em} = \sum d\delta_i = d\sum \delta_i \,, \tag{6.33}$$

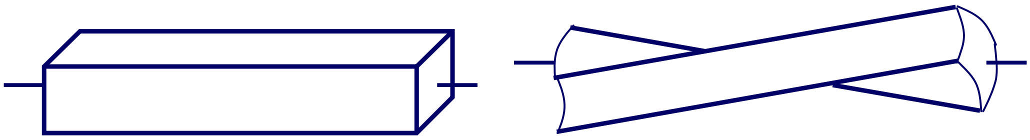
trong đó:

d: đường kính lỗ đinh,

δ_i: bề dày tấm i, chỉ số i tính theo số tấm chịu lực về một phía. Cần lấy trị số A_{em} của cả hai phía và chọn trị số nhỏ hơn thay vào (6.31) để kiểm tra ứng suất bền.

6.7 Xoắn thanh tiết diện chữ nhật

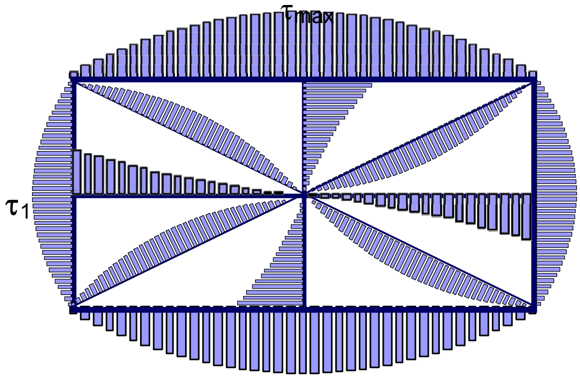
Khi thanh tiết diện hình chữ nhật chịu xoắn, thì mặt phẳng vuông góc với trục của thanh sẽ bị biến dạng vênh khỏi mặt phẳng ban đầu (hình 6.11)



Hình 6.11. Thanh chịu xoắn hình chữ nhất

Lúc này giả thiết về tiết diện phẳng không thỏa mãn, bài toán xoắn thanh tiết diện hình chữ nhật đã được Saint-Venant giải dùng phương pháp nửa ngược. Theo Saint-Venant, biểu đồ phân bố ứng suất tiếp của tiết diện hình chữ nhật khi thanh chịu xoắn có dạng như trên hình 6.12. Từ biểu đồ này có các nhận xét sau:

– tại trung tâm, ứng suất tiếp bằng không $\tau = 0$,



Hình 6.12. Biểu đồ phân bố ứng suất trên tiết diện chữ nhật chịu xoắn

– tại trung điểm cạnh dài, ứng suất tiếp có giá trị lớn nhất:

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_x}, \tag{6.33}$$

– tại trung điểm cạnh ngắn, ứng suất tiếp tính qua ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_1 = \beta\tau_{max}, \tag{6.34}$$

– góc xoắn trên một đơn vị dài:

$$\theta = \frac{M_x}{GJ}. \tag{6.35}$$

Ở đây W_x là mô men chống xoắn của tiết diện chữ nhật tính bằng công thức:

$$W_x = \alpha h b^2 \tag{6.36}$$

và J là hằng số xoắn hay còn gọi là ''mô men quán tính'' xoắn của tiết diện chữ nhật tính bằng công thức:

$$J = \gamma h b^3 . \tag{6.37}$$

Các giá trị α, β và γ phụ thuộc vào tỉ lệ giữa hai cạnh h và b của hình chữ nhật cho trong bảng 6.1.

Bảng 6.1. Các hệ số α, β, γ theo tỉ số các cạnh h/b

h/b	1,0	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	0,339
β	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,742
γ	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	,0313	0,333

Khi tỉ số $\dfrac{h}{b} \geq 10$ có thể lấy $\alpha = \gamma = \dfrac{1}{3} = 0{,}333$.

Các số liệu về hằng số xoắn cho một số tiết diện khác với hình tròn có thể xem trong phụ lục 3.

6.8 Bài toán siêu tĩnh

Cũng như bài toán thanh chịu kéo hay nén đúng tâm, trong hệ siêu tĩnh chịu xoắn cũng phải tìm những điều kiện chập dịch chuyển (quan hệ hình học giữa các dịch chuyển) để bổ sung vào các phương trình cân bằng tĩnh học. Trong bài toán xoắn, để lập các điều kiện chập sẽ xem xét các điều kiện liên kết, có các dạng sau:

- Thanh có hai đầu ngàm chặt: điều kiện chập dịch chuyển là tổng đại số các góc xoắn trên tất cả các đoạn thanh phải bằng không.
- Thanh có một đầu liên kết đàn hồi thì góc xoay của đầu đàn hồi không bằng không mà tỉ lệ với độ lớn mô men phản lực.
- Thanh có hai đầu liên kết đàn hồi thì góc xoắn toàn phần bằng hiệu góc xoay của hai mặt cắt ở hai đầu.

– Khi trong hệ có một số thanh chịu xoắn, một số thanh chịu kéo (hay nén) thì dịch chuyển sẽ là góc xoắn đối với thanh chịu xoắn và là dịch chuyển dọc đối với thanh chịu kéo (hay nén).

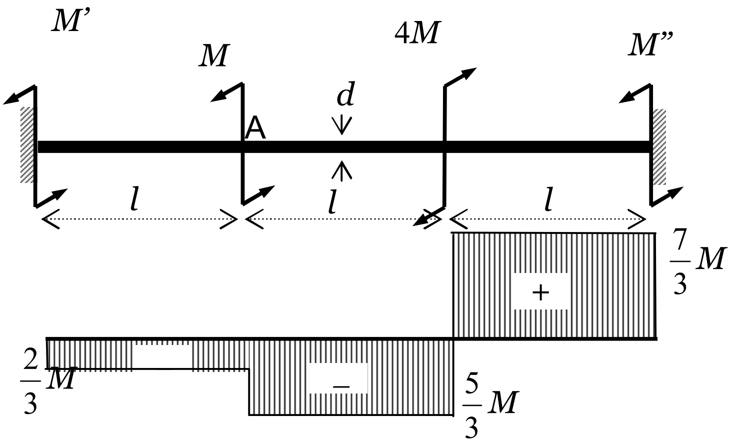
Ví dụ. Cho kết cấu như trên hình 6.13, biết l, M, d, G. Tìm τ_{max} và φ_A.

Thanh chỉ chịu mô men xoắn, nên có thể thay thế ngàm bằng các mô men phản lực M' và M''. Từ điều kiện cân bằng sẽ có:

$$M' + M'' + M - 4M = 0\,.$$

Điều kiện chập dịch chuyển chính là tổng đại số góc xoắn của thanh bằng không:

$$\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} = 0\,.$$



Hình 6.13

Tính góc xoắn tương đối cho từng đoạn:

$$\varphi_I = -\frac{M'l}{I_\rho G}\,,\ \varphi_{II} = \frac{-(M'+M)l}{I_\rho G}\,,\ \varphi_{III} = \frac{(4M - M' - M)l}{I_\rho G}\,.$$

Thế vào điều kiện tổng đại số các góc xoắn bằng không:

$$\frac{l}{I_\rho G}\left(-M' - M' - M - M' - M + 4M\right) = 0 \Rightarrow M' = \frac{2}{3}M\,.$$

Từ điều kiện cân bằng tìm được M'':

$$M' + M'' + M - 4M = 0 \Rightarrow M'' = \frac{7M}{3}\,.$$

Như vậy cả hai phản lực đều có chiều như trên hình vẽ. Ứng suất tiếp lớn nhất ở đoạn thứ 3:

$$\tau_{\max} = \frac{7M}{3W_\rho} = \frac{112M}{3\pi d^3}.$$

Góc xoắn tương đối tại điểm A:

$$\varphi_A = \frac{2Ml}{3GI_\rho} = \frac{2Ml}{3\pi G}.$$

Kết luận chương 6

Chương 6 trình bày chủ yếu bài toán xoắn thanh tiết diện tròn. Với các giả thiết về biến dạng của thanh tiết diện tròn chịu xoắn có công thức tính ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp đạt cực đại ở mép ngoài của tiết diện.

Giới thiệu lời giải của bài toán Saint-Venant cho thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn. Ứng suất tiếp lớn nhất ở điểm giữa của cạnh dài. Đưa ra bảng các hệ số phụ thuộc vào tỉ lệ giữa hai cạnh để tính toán cho thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn.

Bài toán thanh chịu cắt và ứng dụng trong kiểm tra bền cho các mối nối cũng được xem xét trong chương này.

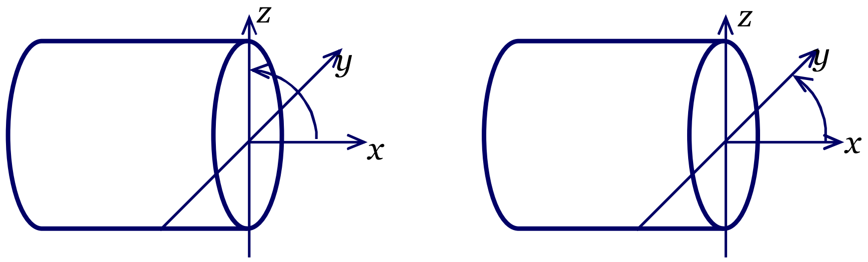
Bài toán siêu tĩnh trong trường hợp thanh chịu xoắn được trình bày ngắn gọn. Hướng dẫn cách lập các điều kiện chập chuyển vị trong trường hợp thanh chịu xoắn.

CHƯƠNG 7
Thanh thẳng chịu uốn phẳng

7.1 Định nghĩa

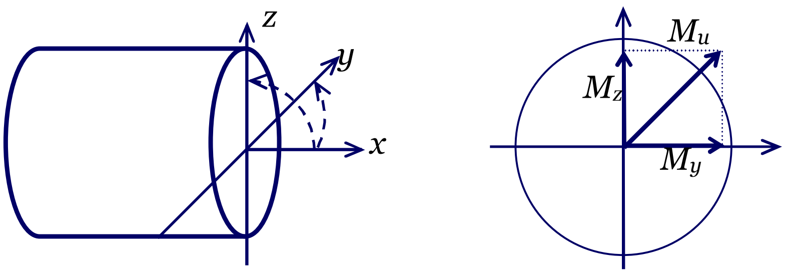
Thanh chịu uốn khi trục thanh thay đổi độ cong. Mặt phẳng uốn là mặt phẳng chứa trục thanh và mô men uốn. Mặt phẳng quán tính chính trung tâm là mặt chứa trục thanh Ox và trục quán tính chính trung tâm y hoặc z.

Nếu mặt phẳng uốn trùng với mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì có trường hợp thanh chịu uốn phẳng (hình 7.1).



Hình 7.1. Uốn phẳng

Nếu mặt phẳng uốn không trùng với mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì có trường hợp thanh chịu uốn không gian (hình 7.2).



Hình 7.2. Uốn không gian

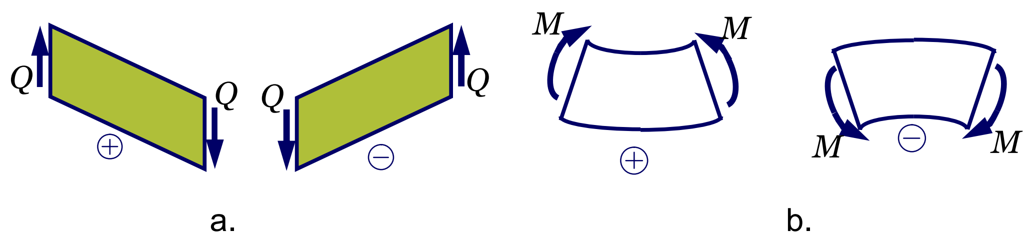
Luôn luôn có thể phân tích mô men uốn $M_u = M_y + M_z$ thành hai mô men uốn trong hai mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Như vậy uốn không gian là tổ hợp của uốn phẳng, nên trước hết cần nghiên cứu uốn phẳng. Trường hợp thanh chịu uốn chịu tác dụng của cả lực cắt gọi là uốn ngang. Trường hợp thanh chịu uốn không chịu tác dụng của lực cắt gọi là uốn thuần túy.

7.2 Biểu đồ lực cắt và mô men uốn

Tương tự như lực dọc trục trong thanh chịu kéo, nén, mô men xoắn trong thanh chịu xoắn, lực cắt và mô men uốn trong bài toán uốn thanh cũng được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Lực cắt Q_y tại mặt cắt nào đó bằng tổng hình chiếu lên trục y của tất cả ngoại lực (lực tập trung và lực phân bố) tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt. Còn mô men uốn M_z tại mặt cắt đó bằng tổng đại số các mô men của tất cả những ngoại lực tác dụng vào phần thanh ở về một bên của mặt cắt.

Quy tắc dấu của lực cắt và mô men uốn cho trên hình 7.3, như đã nêu trong chương 1.

- Lực cắt Q vuông góc với tiếp tuyến của trục thanh, là dương khi đoạn đang xét có xu hướng quay theo chiều kim đồng hồ dưới tác động của lực cắt.
- Mô men uốn M gây uốn trong mặt phẳng là dương khi đoạn đang xét bị cong võng xuống (hứng nước) dưới tác động của mô men.



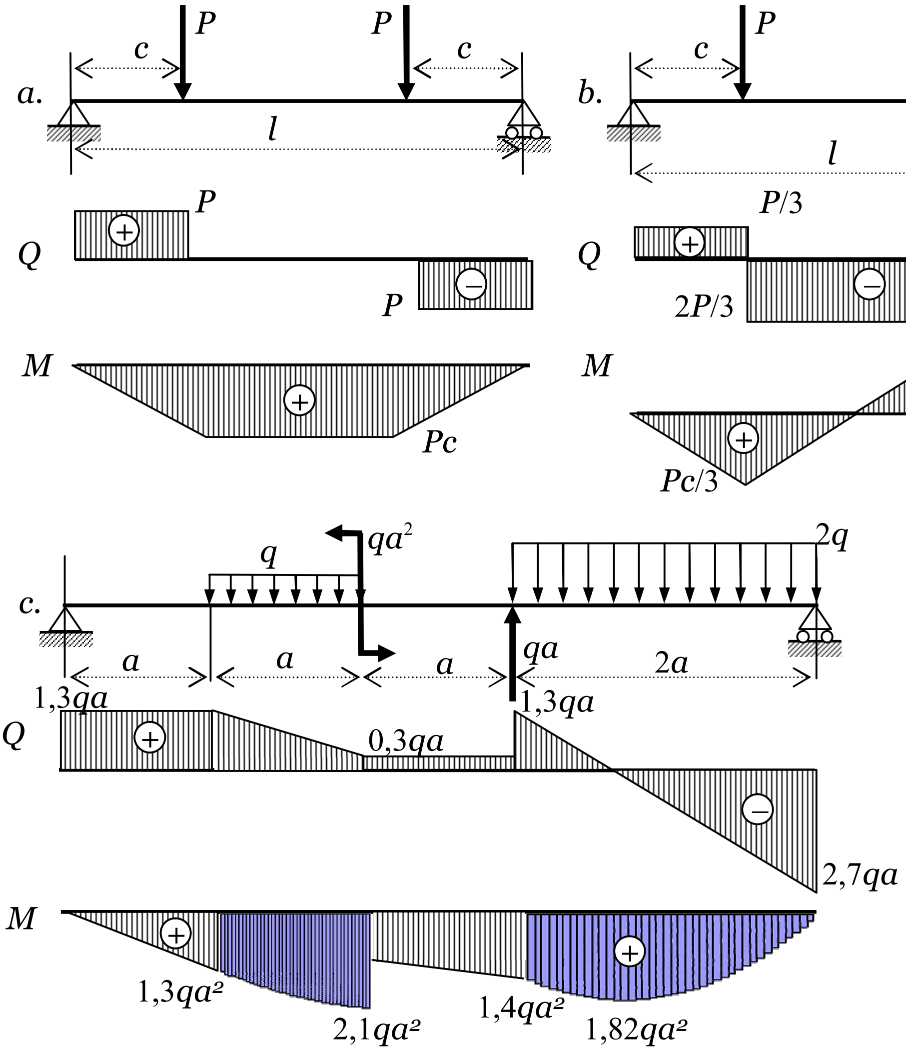
Hình 7.3. Quy ước dấu. a. Lực cắt và b. mô men uốn

Khi vẽ biểu đồ nội lực nên vẽ biểu đồ lực cắt Q trước, biểu đồ mô men uốn M sau. Khi thanh không chịu ngẫu lực uốn phân bố có thể sử dụng quan hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng (1.2):

$$Q = \frac{dM}{dx}; \quad q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2},$$

trong đó q là mật độ tải trọng phân bố. Từ quan hệ vi phân này có những nhận xét sau về biểu đồ nội lực Q và M:

– Đối với dầm có tải trọng đối xứng và liên kết đối xứng (hình 7.4a), biểu đồ lực cắt Q sẽ phản đối xứng, còn biểu đồ mô men M đối xứng. Ngược lại (hình 7.4b) khi dầm chịu tải phản đối xứng thì biểu đồ Q đối xứng, còn biểu đồ M phản đối xứng.



Hình 7.4. Các ví dụ vẽ biểu đồ lực cắt và mô men uốn

– Tại vị trí có đặt lực tập trung, trên biểu đồ Q có bước nhảy mà độ lớn bằng giá trị của lực tập trung. Tương tự, tại ví trí đặt ngẫu lực uốn, biểu đồ mô men uốn M cũng có bước nhảy với độ lớn bằng giá trị của ngẫu lực.

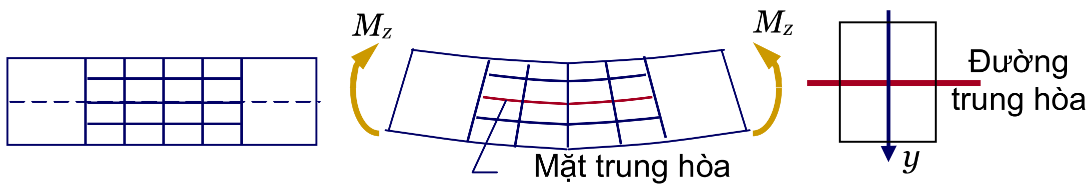
- Tang của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ mô men uốn M với trục thanh sẽ bằng lực cắt Q và cường độ của tải phân bố bằng tang của góc giữa tiếp tuyến của biểu đồ lực cắt Q với trục thanh.
- Nếu trên một đoạn dầm tải trọng phân bố biến đổi theo hàm đại số, thì trên đoạn đó biểu đồ lực cắt biến đổi theo hàm cao hơn một bậc và mô men uốn biến đổi theo hàm cao hơn một bậc so với hàm của lực cắt. Biểu đồ mô men của ví dụ trên hình 7.4c cho thấy đoạn có lực phân bố đều, biểu đồ lực cắt là hàm bậc nhất, còn biểu đồ mô men là hàm bậc hai.
- Tại vị trí mà lực cắt có giá trị bằng không thì mô men uốn có giá trị cực trị. Trong đoạn ngoài cùng bên phải của thanh trong ví dụ 7.4c, biểu đồ lực cắt bằng không tại điểm cách gối 1,35a. Tại điểm này biểu đồ mô men đạt cực trị.
- Tại vị trí lực cắt có bước nhảy đổi dấu thì biểu đồ mô men uốn thay đổi độ dốc, như biểu đồ mô men của trường hợp b trên hình 7.4. Nếu lực cắt có bước nhảy nhưng không đổi dấu thì biểu đồ mô men uốn bị gãy. Ví dụ trên hình 7.4c, tại điểm đặt lực tập trung qa biểu đồ lực cắt có bước nhảy nhưng không đổi dấu, do vậy biểu đồ mô men bị gãy khúc ở đó.
- Nếu xét mặt cắt từ phải sang trái thì $Q = -\dfrac{dM}{dx}$.

7.3 Ứng suất trong bài toán uốn phẳng

Uốn thuần túy

Các giả thiết

Xét thanh thẳng chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm (hình 7.5)



Hình 7.5. Các giả thiết thanh uốn thuần túy

Quan sát biến dạng có nhận xét sau:

- Những đường kẻ vuông góc với trục thanh vẫn thẳng.
- Các đường kẻ song song với trục bị cong, các đường phía trên co lại, các đường phía dưới dãn ra nhưng vẫn cách đều.
- Các góc vuông vẫn bảo toàn.

Trên cơ sở đó, giả thiết:

- Trước và sau biến dạng, tiết diện thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục.
- Các lớp vật liệu dọc trục thanh không tác dụng tương hỗ lên nhau, có thể bỏ qua ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với trục thanh $\sigma_z \approx \sigma_y \approx 0$.
- Tồn tại lớp vật liệu song song với trục thanh có chiều dài không đổi gọi là lớp trung hòa. Giao tuyến của lớp trung hòa với tiết diện là một đường thẳng gọi là đường trung hòa.

Hai giả thiết đầu giống trong bài toán thanh chịu kéo và thanh chịu xoắn. Giả thiết thứ ba là giả thiết về sự chấp nhận biến dạng nhỏ.

Công thức tính ứng suất

Xét phân tố có chiều dài dx (hình 7.6):

- $d\varphi$ là góc giữa hai tiết diện,
- ρ là bán kính cong của lớp trung hòa,
- z là đường trung hòa trên tiết diện.

Biến dạng tỉ đối theo phương x:

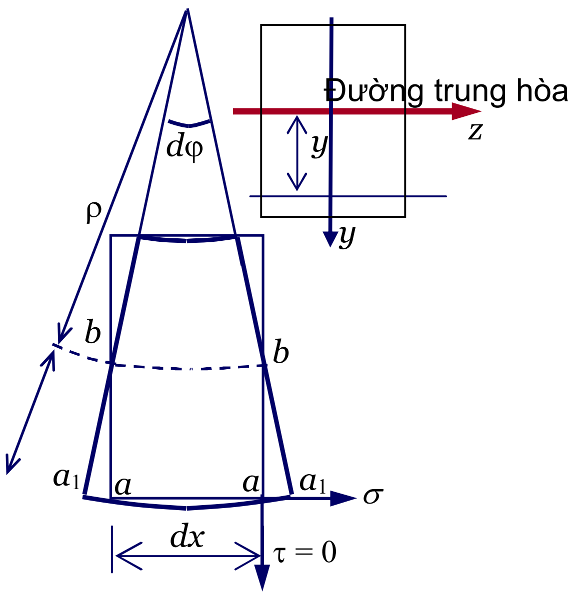
$$\varepsilon_x = \frac{a_1a_1 - aa}{aa} = \frac{a_1a_1 - bb}{bb} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Các góc vuông không đổi nên ứng suất tiếp trên tiết diện đang xét bằng không, vì $\sigma_z \approx \sigma_y \approx 0$ nên ứng suất pháp chỉ còn σ_x:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{Ey}{\rho}. \qquad (7.1)$$

Khi chịu uốn trong mặt phẳng xy chỉ tồn tại mô men uốn M_z, còn lực dọc N và mô men uốn M_y bằng không:

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0; \quad M_y = \int_A z\sigma_x dA = 0; \quad M_z = \int_A y\sigma_x dA.$$



Hình 7.6. Phân tố chịu uốn

Thay biểu thức của σ_x chú ý $E/\rho = const$ trên tiết diện, sẽ có:

$$\int_A ydA = 0; \quad \int_A zydA = 0.$$

Mô men tĩnh đối với trục trung hòa và mô men quán tính ly tâm đối với hệ trục yz của tiết diện bằng không. Suy ra trục trung hòa z là trục đi qua trọng tâm vuông góc với mặt phẳng uốn, hệ trục yz là hệ trục quán tính chính.

Khi xác định vị trí của trục trung hòa, sẽ tìm được biểu thức của bán kính cong:

$$M_z = \int_A y\sigma dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}. \tag{7.2}$$

Biểu thức để tính ứng suất pháp sẽ là:

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} y. \qquad (7.3)$$

Dấu của mô men: mô men dương làm căng phía dưới của thanh, mô men âm làm căng phía trên của thanh.

Biểu đồ, trị số lớn nhất của ứng suất pháp

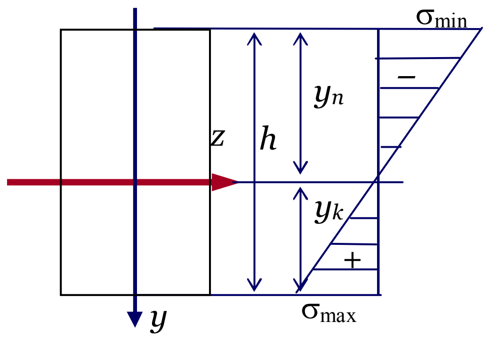
Ứng suất pháp tỉ lệ với khoảng cách đến trục trung hòa. Biểu đồ là đường bậc nhất bằng không tại trục trung hòa và có trị số lớn nhất tại hai mép của tiết diện.

Ký hiệu y_k và y_n - tọa độ của mép tiết diện chịu kéo và chịu nén (hình 7.7). Khi đó:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{M_z}{I_z} y_{\substack{k \\ n}} = \pm \frac{|M_z|}{W_{\substack{z,k \\ z,n}}}, \qquad (7.4)$$

trong đó:

$$W_{z,k} = \frac{I_z}{y_k}; \quad W_{z,n} = \frac{I_z}{y_n} \text{ là các mô men chống uốn.} \qquad (7.5)$$



Hình 7.7. Biểu đồ ứng suất pháp

Nếu tiết diện đối xứng qua trục z và có chiều cao là h thì:

$$W_{z,k} = W_{z,n} = W_z = \frac{I_z}{h/2} \qquad (7.6)$$

và

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\frac{|M_z|}{W_z}. \tag{7.7}$$

Đối với tiết diện hình chữ nhật bxh:

$$I_z = \frac{bh^3}{12},\ W_z = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}. \tag{7.8}$$

Đối với tiết diện hình tròn đặc bán kính R, đường kính $D = 2R$:

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64},\ W_z = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}. \tag{7.9}$$

Đối với tiết diện hình vành khăn đường kính ngoài là D, đường kính trong d:

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4),\quad \alpha = \frac{d}{D},\ W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4). \tag{7.10}$$

Ví dụ. Cho thanh chịu uốn như trên hình 7.8. Tính kích thước của mặt cắt hình tròn, hình vành khăn, hình vuông, hình chữ nhật và thép hình chữ I. Tính ứng suất tại điểm A của mặt cắt chữ I tại vị trí đặt mô men tập trung. Cho $[\sigma] = 1600kG/cm^2$.

Tính phản lực hai đầu $R_1 = R_2 = 0{,}4T$ có giá trị bằng nhau nhưng ngược hướng nhau.

Vẽ biểu đồ mô men uốn như trên hình 7.8. Tìm được

$|M|_{\max} = 2{,}4\cdot 10^3\cdot 10^2 kGcm$.

Tìm kích thước từ điều kiện bền với $W = \dfrac{M}{[\sigma]} = \dfrac{240000}{1600} = 150cm^3$.

– Đối với hình tròn có công thức tính mô men chống uốn:

$$W = \frac{\pi D^3}{32} = 150 \Rightarrow D = \sqrt[3]{32\cdot 150/\pi} = 11{,}518cm,\quad A = 104{,}188cm^2.$$

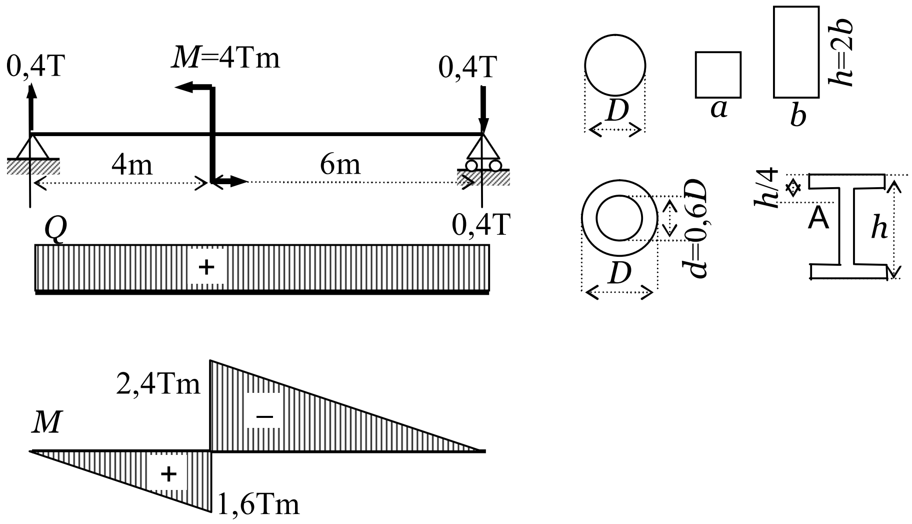
– Đối với hình vuông có công thức tính mô men chống uốn:

$$W = \frac{a^3}{6} = 150 \Rightarrow a = \sqrt[3]{6\cdot 150} = 9{,}655cm,\quad A = a^2 = 93{,}217cm^2.$$

– Đối với hình chữ nhật $h = 2b$ có công thức tính mô men chống uốn:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} = 150$$

$$\Rightarrow b = \sqrt[3]{3 \cdot 150 / 2} = 6{,}082cm, \quad h = 12{,}164cm, \quad A = 73{,}986cm^2.$$



Hình 7.8

– Đối với hình vành khăn với $\alpha = d / D = 0{,}6$ có công thức tính mô men chống uốn:

$$W = \frac{\pi D^3}{32}\left(1 - \alpha^4\right) = 150$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 150}{\pi\left(1 - 0{,}6^4\right)}} = 12{,}063cm, \quad d = 7{,}238cm, \quad A = 73{,}145cm^2.$$

– Đối với tiết diện chữ I, chọn thép hình số hiệu 18a từ bảng PL4.3 của phụ lục 4 theo TCVN 1655-75:

$$W = 159cm^3, \quad h = 180mm, \quad b = 100mm, \quad d = 5{,}1mm, \quad t = 8{,}3mm, \quad A = 25{,}4cm^2,$$

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{240000}{159} = 1509{,}43kG / cm^2.$$

Nếu lấy diện tích hình tròn là 1 thì tỉ lệ giữa các diện tích như sau :

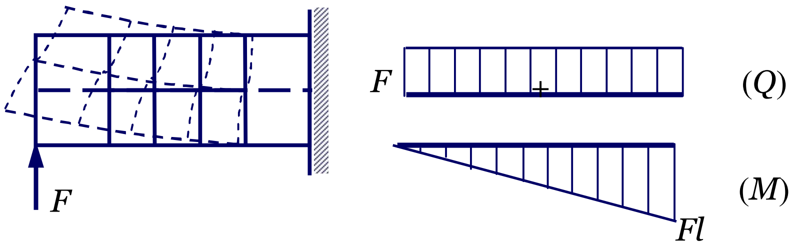
$A_{\text{tròn}} : A_{\text{vuông}} : A_{\text{chữ nhật}} : A_{\text{vành khăn}} : A_{\text{I}} = 1 : 0{,}89 : 0{,}71 : 0{,}70 : 0{,}24$

Với cùng một mô men chống uốn, thì tiết diện chữ I có diện tích chỉ bằng khoảng 1/4 so với tiết diện hình tròn. Có thể kết luận là thép hình chữ I có khả năng chống uốn tốt nhất.

Uốn ngang phẳng

Các giả thiết

Xét thanh thẳng chịu uốn ngang phẳng, có lực cắt Q_y, mô men uốn M_z (hình 7.9). Quan sát biến dạng thấy rằng đường kẻ vuông góc với trục không thẳng và các góc vuông cũng bị thay đổi.



Hình 7.9. Giả thiết trong bài toán uốn phẳng

Giả thiết tiết diện phẳng không còn đúng, tồn tại cả ứng suất tiếp và ứng suất pháp. Biến dạng trượt do ứng suất tiếp gây ra không thay đổi chiều dài theo phương ngang trục và phương dọc trục nên ứng suất pháp vẫn được tính theo công thức:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y ,$$

trong đó y là khoảng cách đến trục trung hòa z.

Để tính ứng suất tiếp do lực cắt gây ra, xét một phân tố thanh chiều dài dx. Giả thiết chiều rộng nhỏ hơn chiều cao (tiết diện hẹp), có thể chấp nhận:

– Ứng suất tiếp phân bố đều trên tiết diện theo bề rộng.

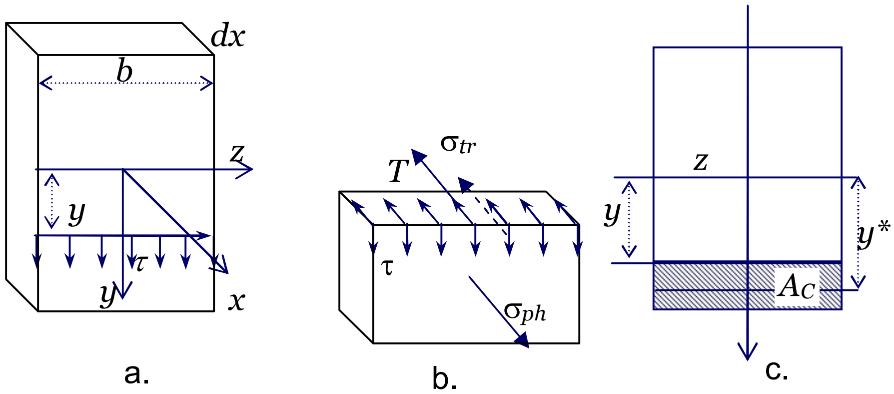
– Ứng suất tiếp chỉ có thành phần thẳng đứng theo phương lực cắt.

Hai giả thiết này chỉ đúng khi xét tiết diện hình chữ nhật hẹp. Xét cân bằng của phân tố trên hình 7.10b. Lực tác động lên phân tố gồm có:

– Ứng suất pháp tại mặt bên trái $\sigma_{tr} = \frac{M_z}{I_z} y^*$, y^* là khoảng cách đến trục trung hòa

– Ứng suất pháp tại mặt bên phải $\sigma_{ph} = \frac{M_z + dM_z}{I_z} y^*$.

– Ứng suất tiếp τ phân bố trên bề mặt có diện tích là bdx.



Hình 7.10. Ứng suất tiếp do lực cắt

Chiếu theo phương x tất cả các lực trên phân tố, sẽ nhận được phương trình cân bằng:

$$\int_{A_c} \sigma_{ph} dA - \int_{A_c} \sigma_{tr} dA - \tau \cdot bdx = \int_{A_c} (\sigma_{ph} - \sigma_{tr}) dA - \tau \cdot bdx = 0 .$$

Thay biểu thức của ứng suất tại hai mặt cắt trái và phải nhận được:

$$\sigma_{ph} - \sigma_{tr} = \frac{M_z + dM_z}{I_z} y^* - \frac{M_z}{I_z} y^* = \frac{dM_z}{I_z} y^* .$$

Như vậy công thức tính ứng suất tiếp là:

$$\tau = \frac{1}{bdx} \int_{A_C} \frac{dM_z}{I_z} y^* dA = \frac{dM_z}{dx} \frac{1}{bI_z} \int_{A_C} y^* dA = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_Z^C}{bI_z} .$$

Từ quan hệ vi phân giữa mô men và lực cắt sẽ có công thức tính ứng suất tiếp do lực cắt gây ra tại khoảng cách y^* so với trục trung hòa:

$$\tau = \frac{Q_y S_Z^C}{b \cdot I_z}$$ - công thức D. J. Juravski, (7.11)

trong đó:

Q_y là lực cắt tác dụng lên thanh,

b là bề rộng thực của tiết diện tại đểm tính phân bố ứng suất tiếp,

$S_Z^C = \int_{A_C} y^* dA = A_C \overline{y}_C$ là mô men tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng thực b đi qua điểm tính ứng suất tiếp. Có thể tính mô men tĩnh S_Z^C theo công thức (4.3), có nghĩa nhân diện tích của phần tiết diện đang xét với trọng tâm của nó.

Chú ý, vẫn có thể sử dụng công thức (7.11) cho các tiết diện không hẹp.

Đối với tiết diện hình chữ nhật có kích thước hxb

Mô men quán tính đối với trục z có dạng:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Mô men quán tính tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng của điểm cách trục trung hòa một đoạn *y:*

$$S_z^C = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

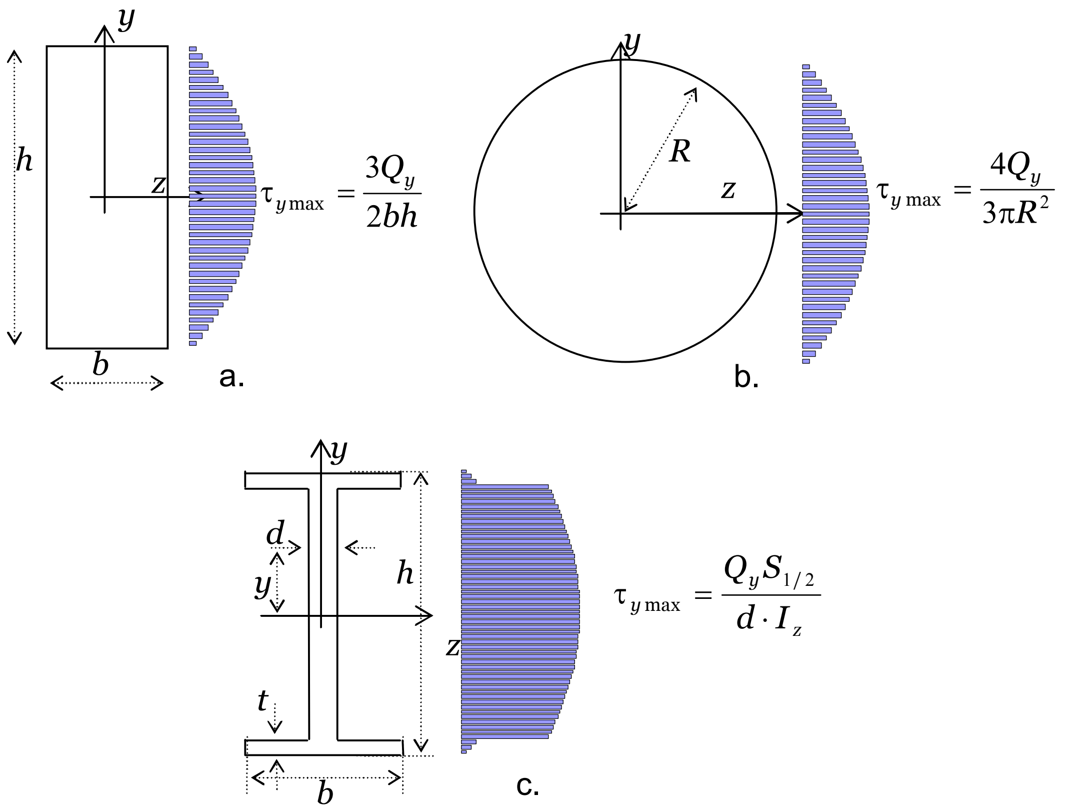
Công thức ứng suất tiếp cho điểm nằm cách trục trung hòa một đoạn y (hình 7.11a):

$$\tau_y = \frac{12Q_y}{bh^3 b}\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \quad (7.12)$$

Tại trục trung hòa khi $y = 0$ ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất (hình 7.11a):

$$\tau_{y\max} = \frac{3Q_y}{2bh}; \quad (7.13)$$

Tại mép ngoài của tiết diện khi $y = \pm h/2$ (hình 7.11a): $\tau_y = 0$.



Hình 7.11. Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện hình chữ nhật, hình tròn và hình chữ I.

Đối với tiết diện hình tròn bán kính R

Mô men quán tính đối với trục z có dạng:

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Bề rộng thực của tiết diện tại điểm tính phân bố ứng suất tiếp:

$$b = 2\sqrt{R^2 - y^2}.$$

Mô men quán tính tĩnh của phần tiết diện giới hạn bởi bề rộng của điểm cách trục trung hòa một đoạn y:

$$S_z^C = \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{3/2}.$$

Công thức ứng suất tiếp cho điểm nằm cách trục trung hòa một đoạn y (hình 7.11b):

$$\tau_y = \frac{4Q_y}{\pi R^4 2\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{3/2} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4}\left(R^2 - y^2\right). \tag{7.14}$$

Tại trục trung hòa khi $y = 0$ ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất (hình 7.11b):

$$\tau_{y\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2}. \tag{7.15}$$

Tại mép ngoài của tiết diện khi $y = R$ (hình 7.11b) $\tau_y = 0$.

Đối với tiết diện hình chữ I

Coi tiết diện là hình ghép của hai hình chữ nhật hẹp ngang gọi là bản cánh và một hình chữ nhật hẹp thẳng gọi là bản bụng. Kí hiệu $S_{1/2}$ là mô men tĩnh của một nửa diện tích (thường được cho trong các bảng đặc trưng hình học của thép hình).

Đối với các điểm trên bản bụng cách trục z một đoạn y có mô men tĩnh bằng $S_{1/2}$ trừ đi mô men tĩnh của diện tích $d \cdot y$

$$S_z^C = S_{1/2} - \frac{d \cdot y^2}{2}, \; \tau_y = \frac{Q_y}{d \cdot I_z}\left(S_{1/2} - \frac{d \cdot y^2}{2}\right)$$

Ứng suất tiếp cực đại đạt được tại $y = 0$:

$$\tau_{y\max} = \frac{Q_y \cdot S_{1/2}}{d \cdot I_z}$$

Tại điểm trên bản bụng giáp với bản cánh $y = h/2 - t$, bề rộng thực của tiết diện là d và

$$S_z^C = S_{1/2} - \frac{d}{2}\cdot\left(\frac{h}{2} - t\right)^2, \text{ nên } \tau_y = \frac{Q_y}{d \cdot I_z}\left(S_{1/2} - \frac{d}{2}\cdot\left(\frac{h}{2} - t\right)^2\right).$$

Tại điểm trên bản cánh giáp với bản bụng có $y = h/2 - t$, mo men tĩnh vẫn như trường hợp trên, nhưng bề rộng thực của tiết diện là b nên

$$\tau_y = \frac{Q_y}{b \cdot I_z}\left(S_{1/2} - \frac{d}{2}\cdot\left(\frac{h}{2} - t\right)^2\right).$$

Biểu đồ ứng suất tiếp của tiết diện hình chữ I xem trên hình 7.11c. Ở điểm $y = h/2 - t$ có bước nhảy trên biểu đồ ứng suất.

Đối với tiết diện dạng thành mỏng

Ứng suất tiếp hướng theo tiếp tuyến với đường trung bình và phân bố đều trên bề dày. Công thức tính ứng suất tiếp là:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S}{l \cdot I_z}, \tag{7.16}$$

trong đó l là bề dày của mặt cắt, S là mô men tĩnh đối với đường trung hòa của phần mặt cắt ở về một phía của đường vẽ vuông góc với đường trung bình tại điểm đang xét.

Ví dụ. Có thể tính ứng suất tiếp cực trị tại mặt cắt bên phải của điểm đặt mô men tập trung trong ví dụ trên hình 7.8 cho các loại tiết diện khác nhau. Trong trường hợp này lực cắt không đổi trên toàn bộ độ dài thanh $Q = 0{,}4T$.

– Đối với tiết diện hình tròn:

$$\tau_{y\max} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} = \frac{4\cdot 400}{3\cdot\pi\cdot 11{,}518^2} \approx 1{,}28 kG/cm^2.$$

– Đối với tiết diện hình vuông:

$$\tau_{y\max} = \frac{3Q_y}{2a^2} = \frac{3\cdot 400}{2\cdot 9{,}655^2} \approx 6{,}436 kG/cm^2.$$

– Đối với tiết diện hình chữ nhật;

$$\tau_{y\max} = \frac{3Q_y}{2bh} = \frac{3Q_y}{4b^2} = \frac{3\cdot 400}{4\cdot 6{,}082^2} \approx 8{,}11 kG/cm^2.$$

– Đối với tiết diện chữ I số hiệu 18a xem trong phụ lục 4 sẽ có các tham số:

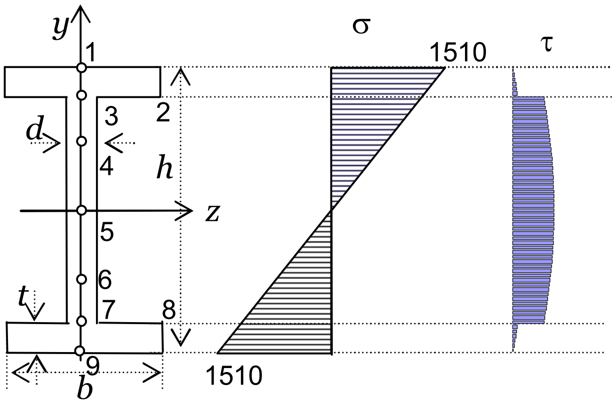
$W_z = 159cm^3$, $I_z = 1430cm^4$, $S_{1/2} = 89{,}8cm^3$,

$h = 18cm, b = 10cm, d = 0{,}51cm, t = 0{,}83cm, A = 25{,}4cm^2$.

Ứng suất tiếp cực đại có giá trị:

$$\tau_{y\max} = \frac{Q_y S_{1/2}}{dI_z} = \frac{400 \cdot 89{,}8}{0{,}51 \cdot 1430} = 49{,}25 kG/cm^2.$$

Tính các ứng suất cho tiết diện chữ I số hiệu 18a với các thông số ở trên tại các điểm 1-9 đã chỉ ra trên hình 7.12. Kết quả tính biểu diễn trong bảng 7.1.



Hình 7.12

Bảng 7.1

	y cm	σ kG/cm^2 (7.3)	τ kG/cm^2 (7.11)	σ_1 kG/cm^2 (2.13)	σ_3 kG/cm^2 (2.13)	$\tau_{\max/\min}$ kG/cm^2 (2.14)
1	9	1510,49	0	1510,49	0	±755,5
2	8,17	1371,19	2,04	1371,19	-0,003	±685,6
3	8,17	1371,19	39,92	1372,35	-1,16	±686,76
4	4,5	755,24	46,42	758,09	-2,84	±380,46
5	0	0	49,25	49,25	-49,25	±49,25
6	-4,5	-755,24	46,42	2,84	-758,09	±380,46
7	-8,17	-1371,19	39,92	1,16	-1372,35	±686,76
8	-8,17	-1371,19	2,04	0,003	-1371,19	±685,6
9	-9	-1510,49	0	0	-1510,49	±755,5

Thế năng biến dạng đàn hồi của dầm chịu uốn

Biểu thức tổng quát thế năng biến dạng đàn hồi riêng (3.8) có dạng:

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right].$$

Trạng thái ứng suất phẳng của dầm chịu uốn ngang phẳng gồm hai thành phần:

$$\sigma=\frac{M_z}{I_z}y\ ,\ \ \tau=\frac{Q_y S_Z^C}{bI_z}\,.$$

Tính ứng suất chính theo công thức (2.13):

$$\sigma_1=\frac{\sigma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}\ ,$$

$$\sigma_3=\frac{\sigma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+\tau^2}\ . \tag{7.17}$$

Thay vào biểu thức (3.8), nhận được:

$$U=\frac{1}{2E}\left[\sigma^2+2(1+\mu)\tau^2\right]=\frac{\sigma^2}{2E}+\frac{\tau^2}{2G}\,. \tag{7.18}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tổng quát nhận được bằng tích phân thế năng biến dạng đàn hồi riêng u trên toàn bộ thể tích:

$$U=\int_V u dV=\int_V\left(\frac{\sigma^2}{2E}+\frac{\tau}{2G}\right)dV=\int_l dx\int_A\left(\frac{\sigma^2}{2E}+\frac{\tau^2}{2G}\right)dA$$

$$=\int_l dx\int_A\frac{M_z^2}{2EI_z^2}y^2 dA+\int_l dx\int_A\frac{Q_y^2}{2GI_z^2}\frac{S_z^{C\,2}}{b^2}dA,$$

$$U=\int_l\frac{M_z^2}{2EI_z}dx+\int_l\frac{kQ_y^2}{2GA}dx\ , \tag{7.19}$$

trong đó $k=\frac{A}{I_z^2}\int_A\frac{S_z^{C\,2}}{b^2}dA$.

7.4 Biến dạng và dịch chuyển của thanh chịu uốn

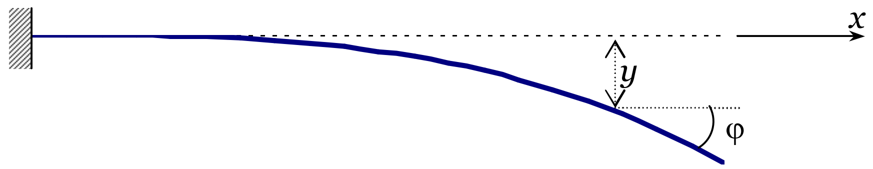
Biến dạng của thanh chịu uốn (gọi là dầm) là sự thay đổi độ cong của trục thanh. Đường cong trục thanh chịu uốn là đường đàn hồi. Khi bỏ quả ảnh hưởng của lực cắt, độ cong của đường đàn hồi được xác định bằng công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}.$$

Dịch chuyển, độ võng và góc xoay

- Dịch chuyển gồm dịch chuyển thẳng của trọng tâm và sự quay của tiết diện.
- Dịch chuyển thẳng vuông góc với trục gọi là độ võng $y = y(x)$, chiều của độ võng dương khi nó trùng với chiều dương của trục y (hình 7.13).
- Dịch chuyển xoay hay góc xoay $\varphi \approx tg\varphi = \dfrac{dy}{dx} = y'$, chiều của góc xoay dương khi nó quay quanh trục trung hòa z ngược chiều kim đồng hồ (hình 7.13).

Lưu ý: Chỉ xét biến dạng nhỏ và chuyển vị nhỏ nên độ võng y nhỏ hơn độ dài l của dầm nhiều lần và góc xoay rất nhỏ nên $y' = tg\varphi \approx \varphi$.



Hình 7.13

Phương trình vi phân độ võng

Phương trình vi phân của độ cong của đường cong phẳng được viết dưới dạng:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Dấu $\pm$ lấy tùy thuộc hệ tọa độ sao cho bán kính độ võng ρ luôn dương. Kết hợp với (7.3) sẽ có phương trình vi phân của độ võng:

$$\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}} = \pm\frac{M_z}{EI_z}.$$

Theo quy ước dấu của mô men uốn, mô men uốn dương làm trục dầm võng xuống và mô men uốn âm làm trục dầm lồi lên. Như vậy dấu của mô men uốn và độ võng luôn trái nhau nên khi xét biến dạng nhỏ, bỏ qua các thành phần bậc cao sẽ có phương trình vi phân độ võng:

$$y'' = -\frac{M_z}{EI_z}, \tag{7.20}$$

trong đó EI_z là độ cứng chống uốn của tiết diện (uốn trong mặt phẳng xy).

Phương pháp tích phân không xác định

Từ phương trình vi phân độ võng (7.20), tích phân một lần được góc xoay:

$$\varphi = y' = -\int\frac{M_z}{EI_z}dx + C_1, \tag{7.21}$$

tích phân lần thứ hai được độ võng:

$$y = -\int\left[\int\frac{M_z}{EI_z}dx\right]dx + C_1x + C_2, \tag{7.22}$$

trong đó hằng số tích phân C_1 và C_2 xác định từ điều kiện liên kết ở hai đầu dầm. Sau đây là một số điều kiện liên kết thường gặp:

– Dầm gối tựa đơn giản có điều kiện độ võng ở hai đầu bằng không:

  $y_{x=0} = 0$ và $y_{x=l} = 0$.

– Dầm công xôn một đầu ngàm và một đầu tự do, có điều kiện độ võng và góc xoay của đầu ngàm bằng 0:

  $y_{x=0} = 0$ và $\varphi_{x=0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$.

Phương pháp tải trọng giả tạo

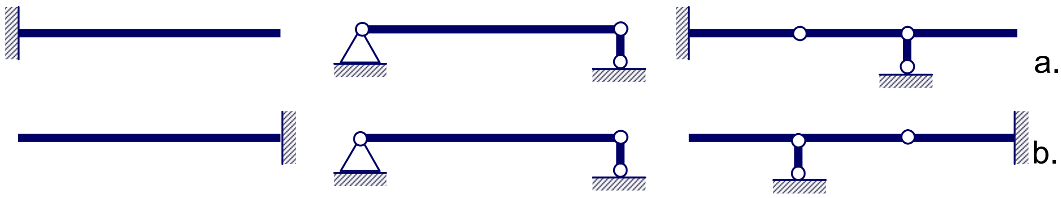
Có hai liên hệ cùng dạng:

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dQ}{dx}=q, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{M}{EI}. \tag{7.23}$$

Như vậy có thể tìm độ võng và góc xoay từ biểu đồ mô men và lực cắt vẽ bằng phương pháp mặt cắt cho dầm giả tạo chịu tải trọng phân bố có cường độ là $q_{gt}=-M/EI$. Khi đó có mối quan hệ:

$$y=M_{gt};\quad \varphi=Q_{gt};\quad -\frac{M}{EI}=q_{gt}. \tag{7.24}$$

Lập sơ đồ dầm giả tạo ứng với các dầm thực như trên hình (7.14).



Hình 7.14. Sơ đồ dầm giả tạo (b) ứng với dầm thực (a)

Điều kiện liên kết ở dầm giả tạo được lập sao cho nội lực tại dầm giả tạo ứng với chuyển vị của dầm thực. Ví dụ trường hợp dầm công xôn ở đầu ngàm độ võng và góc xoay bằng không ứng với mô men và lực cắt của dầm giả tạo bằng không, như vậy có điều kiện liên kết tự do. Ngược lại ở đầu dầm tự do mô men và lực cắt bằng không ứng với chuyển vị và góc xoay của dầm giả tạo bằng không, do vậy có điều kiện liên kết ngàm. Trường hợp liên kết gối tựa độ võng bằng không ứng với mô men bằng không tại dầm giả tạo có nghĩa là vẫn có điều kiện gối tựa. Khi điều kiện liên kết là khớp nối có điều kiện mô men bằng không. Như vậy độ võng tại dầm giả tạo bằng không, có nghĩa ứng với gối tựa di động và ngược lại gối tựa di động ở giữa dầm thực ứng với khớp nối trong dầm giả tạo.

Sau đó xác định nội lực M_{gt} và Q_{gt} trên dầm giả tạo chịu tải phân bố $q_{gt}=-M/EI$ để tìm độ võng và góc xoay của dầm thực.

Phương pháp thông số ban đầu

Bằng khai triển theo Taylor hàm độ võng $y(x)$ và chú ý đến các mối liên hệ vi phân (7.20) và (1.2) có thể thiết lập phương trình xác định độ võng y_x và góc xoay φ_x ở mặt cắt cách gốc tọa độ một khoảng x.

Trường hợp độ cứng EI của dầm không đổi trên toàn bộ độ dài, chọn gốc tọa độ là trọng tâm của mặt cắt ở đầu bên trái của dầm và trục x hướng từ trái sang phải , các phương trình độ võng y_x và góc xoay φ_x có dạng:

$$\begin{aligned} EIy_x &= EIy_0 + EI\varphi_0 \frac{x}{1!} + \sum M \frac{(x-a_M)^2}{2!} + \sum Q \frac{(x-a_Q)^3}{3!} \\ &+ \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^4}{4!} + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^5}{5!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^5}{5!} \cdots \end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned} EI\,\varphi_x &= EI\varphi_0 + \sum M \frac{(x-a_M)}{1!} + \sum Q \frac{(x-a_Q)^2}{2!} \\ &+ \sum q_{a_q} \frac{(x-a_q)^3}{3!} - \sum q_{b_q} \frac{(x-b_q)^3}{3!} + \sum q'_{a_q} \frac{(x-a_q)^4}{4!} - \sum q'_{b_q} \frac{(x-b_q)^5}{4!} \cdots \end{aligned} \tag{7.26}$$

trong đó E là mô đun đàn hồi Young,

I là mô men quán tính tiết diện đối với trục trung hòa z,

M là mô men của ngẫu lực ngoại lực,

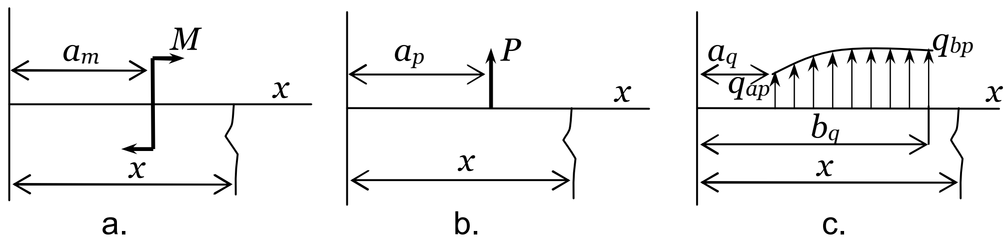
a_M là khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt cắt đặt ngẫu lực M (hình 7.15a),

Q là lực cắt tập trung (gồm cả phản lực),

a_Q là khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt cắt đặt lực Q (hình 7.15b),

q_{aq} , q'_{aq} là giá trị của lực phân bố q_y và đạo hàm của nó theo x tại $x = a_q$, (là mặt cắt bắt đầu có lực phân bố tác dụng) (hình 7.15c),

q_{bq} , q'_{bq} là giá trị của lực phân bố q_y và đạo hàm của nó theo x tại $x = b_q$ (là mặt cắt kết thúc đoạn lực phân bố) (hình 7.15c),



Hình 7.15. Quy ước chiều dương của M, P và q
trong các công thức (7.25) và (7.26)

độ võng y_0 và góc xoay φ_0 là thông số ban đầu của mắt cắt ngang ở gốc tọa độ.

Lưu ý. Nếu chọn gốc tọa độ là trọng tâm của mặt cắt ở đầu bên phải của dầm và trục x hướng từ phải sang trái, thì ứng với chiều của M, P và q cho trên hình 7.15 các số hạng phản ánh ảnh hưởng của mô men ngoại lực trong (7.25) và (7.26) sẽ lấy dấu âm và chiều của quay của mặt cắt dầm tính theo (7.26).

Ví dụ. Cho q=4kN/m, P=4kN, E=2.10^{8}kN/m^2, [σ]=160.10^{3}kN/m^2.

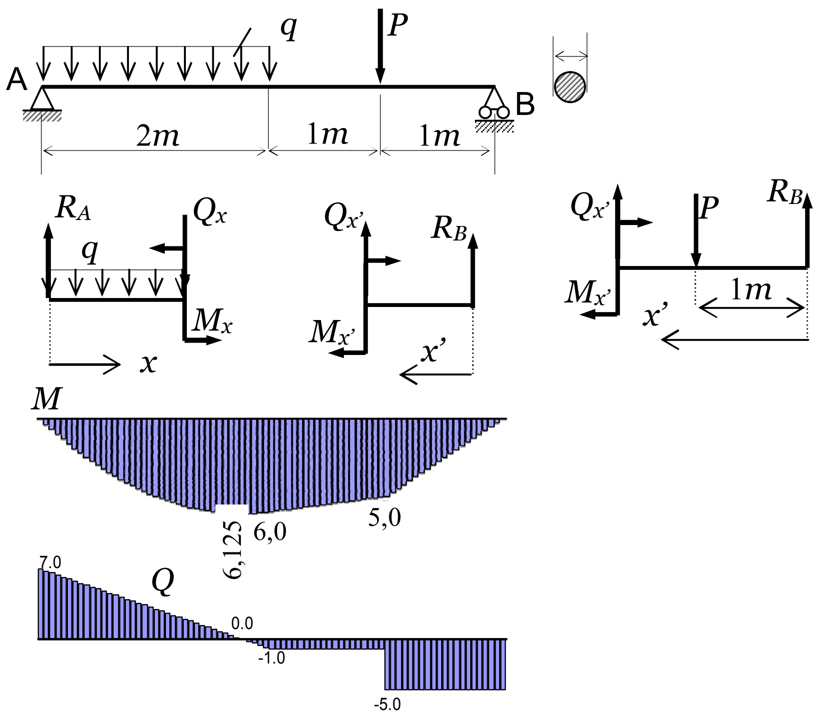
Chọn kích thước mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện về độ bền ứng suất pháp và tính dịch chuyển tại điểm giữa dầm.

Giải

– Xác định phản lực tại hai gối R_A và R_B từ các phương trình cân bằng (hình 7.16):

$$\sum M_A = 4R_B - 3P - q\frac{2^2}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3P}{4} + \frac{q}{2} = 3 + 2 = 5kN\ ,$$

$$\sum F = R_A + R_B - P - 2q = 0 \Rightarrow R_A = 2q + P - R_B = 8 + 4 - 5 = 7kN\ .$$



Hình 7.16

– Vẽ biểu đồ Q và M

+ Xét đoạn bên trái $2 \geq x \geq 0$: Cân bằng nội lực trong đoạn đang xét có :

$Q_x + qx - R_A = 0 \Rightarrow Q_x = R_A - qx = 7 - 4x$,

$M_x - R_A x + q\dfrac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow M_x = R_A x - q\dfrac{x^2}{2} = 7x - 2x^2$,

$x = 0 \Rightarrow Q_x = 7kN; \quad M_{x=0} = 0; \; x = 2 \Rightarrow Q_x = -1kN; \quad M_{x=2} = 6kNm$,

$Q_x = 0 \quad khi \quad x = 7/4 = 1{,}75m, \quad M_{x=1,75} = 6{,}125kNm$.

+ Xét đoạn bên phải $2 \geq x' \geq 0$ sẽ chia làm 2 đoạn:

Đoạn $1 \geq x' \geq 0$: Cân bằng nội lực trong đoạn đang xét :

$Q_{x'} + R_B = 0 \Rightarrow Q_{x'} = -R_B = -5kN$,

$M_{x'} - R_B x' = 0 \Rightarrow M_{x'} = R_B x' = 5x'$,

$x' = 0 \Rightarrow M_{x'=0} = 0; \quad x' = 1 \Rightarrow M_{x'=1} = 5kNm$.

Đoạn $2 \geq x' \geq 1$:

$Q_{x'} + R_B - P = 0 \Rightarrow Q_{x'} = P - R_B = 4 - 5 = -1kN$,

$M_{x'} - R_B x' + P(x' - 1) = 0 \Rightarrow M_{x'} = (R_B - P)x' + P = x' + 4$,

$x' = 1 \Rightarrow M_{x'} = 5kNm; \quad x' = 2 \Rightarrow M_{x'} = 6kNm$.

Biểu đồ M và Q. Mô men cực đại tại điểm lực cắt bằng không $x = 1{,}75$; $M_{\max} = 6{,}125kNm$.

– Tìm kích thước của mặt cắt ngang từ điều kiện bền theo ứng suất pháp:

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow \frac{\pi D^3}{32} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6{,}125}{\pi \cdot 160 \cdot 10^3}} = 0{,}073057m .$$

– Tính độ võng $y(x)$ tại điểm giữa dầm.

Chọn A là điểm gốc tọa độ và với điều kiện gối tựa tại A sẽ có:

$y_0 = y_A = 0$, nhưng $\varphi_0 = \varphi_A \neq 0$, khi đó biểu thức của độ võng tại mặt cắt cách gốc tọa độ một đoạn x theo công thức (7.25) cho sơ đồ lực như trên hình 7.16 có dạng:

$$EIy(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{EI\varphi_A x + R_A \frac{x^3}{6} - q\frac{x^4}{24}}_{2\geq x\geq 0} + q\frac{(x-2)^4}{24}}_{3\geq x>2} - P\frac{(x-3)^3}{6}}_{4\geq x>3}.$$

Khi tính độ võng cho mặt cắt nằm trong khoảng [0,2], ngoại lực gồm :

+ Phản lực R_A tác dụng tại điểm A, tại gốc tọa độ có nghĩa $a_{R_A} = 0$, chiều của R_A như quy ước trong 7.15b, do vậy sẽ có số hạng $R_A \frac{x^3}{6}$.
+ Lực phân bố q, bắt đầu tại điểm A có nghĩa $a_q = 0$ và kết thúc tại mặt cắt cách gốc tọa độ một đoạn là 2m có nghĩa $b_q = 2$, chiều của q ngược lại với quy ước trên hình 7.15c, do vậy sẽ có số hạng $-q\frac{x^4}{24}$ và khi mặt cắt nằm trong đoạn x>2m nên có thêm số hạng $q\frac{(x-2)^4}{24}$.
+ Lực P tác dụng tại điểm cách gốc tọa độ một đoạn 3m có nghĩa $a_P = 3$, chiều của P ngược lại với quy ước trong 7.15b, do vậy khi mặt cắt nằm trong đoạn x>3m thì có thêm số hạng $-P\frac{(x-3)^3}{6}$.

Tìm giá trị của φ_A từ điều kiện độ võng ở B bằng không $y(4) = 0$:

$$EIy(4) = EI\varphi_A 4 + R_A \frac{4^3}{6} - q\frac{4^4}{24} + q\frac{2^4}{24} - P\frac{1^3}{6} = 0$$

$$\Rightarrow EI\varphi_A = \left[4\frac{1}{6} + \frac{4\cdot 2^4}{24}\left(2^4 - 1\right) - 7\frac{4^3}{6}\right]\frac{1}{4} = \frac{1 + 4\cdot 15 - 7\cdot 16}{6} = -\frac{51}{6} = -8{,}5.$$

Thay các giá trị của R_A, P, q và φ_A sẽ nhận được phương trình xác định độ võng trên dầm:

$$EIy(x) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{-\frac{51}{6}x + 7\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6}}_{2\geq x\geq 0} + \frac{(x-2)^4}{6}}_{3\geq x>2} - 4\frac{(x-3)^3}{6}}_{4\geq x>3}.$$

Tính độ võng ở giữa dầm khi $x = 2$:

$$EIy(2) = \frac{1}{6}\left(-51\cdot 2 + 7\cdot 2^3 - 2^4\right) = \frac{-51+7\cdot 4-8}{3} = -\frac{31}{3} = 10,33kNm^3,$$

$$y(2) = \frac{-31}{3EI} = \frac{-31}{3\cdot 279,6715} = -0,036948m.$$

7.5 Độ bền và độ cứng

Điều kiện bền khi uốn thuần túy

Khi uốn thuần túy, trạng thái ứng suất là trạng thái đơn, nên từ (7.4) đối với mặt cắt không đối xứng sẽ có:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{I_z}y_k \leq [\sigma]_k;\ |\sigma_{\min}| = \frac{|M_z|}{I_z}y_n \leq [\sigma]_n, \tag{7.27}$$

trong đó y_k và y_n là khoảng cách từ đường trung hòa đến thớ bị kéo và thớ bị nén xa nhất.

Kiểm tra cho các mặt cắt có trị số mô men dương và mô men âm lớn nhất.

Khi tiết diện đối xứng qua trục z thì:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \pm\frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]_{n}^{k}. \tag{7.28}$$

Đối với vật liệu dẻo khi $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$ thì kiểm tra:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{|M_z|}{W_z} \leq [\sigma]. \tag{7.29}$$

Trong bài toán thiết kế từ điều kiện bền, lựa chọn kích thước thích hợp cho tiết diện ngang theo công thức:

$$W = \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]}, \tag{7.30}$$

ở đây $W = I/|y_{\max}|$ là mô men chống uốn của tiết diện ngang đối với đường trung hòa.

Dạng tiết diện hợp lý

Dạng tiết diện hợp lý là dạng tận dụng hết khả năng làm việc của vật liệu. Xét dạng hợp lý từ hai khía cạnh:

– Khi hai mép cùng đồng thời phá hỏng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_k = [\sigma]_k \,;\; \sigma_{\min} = \frac{M_z}{I_z} y_n = [\sigma]_n, \tag{7.31}$$

$$\frac{|y_k|}{|y_n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \frac{W_{zk}}{W_{zn}} = \alpha \le 1. \tag{7.32}$$

Khi đó nhận được điều kiện hợp lý:

Vật liệu giòn $\alpha < 1 \to y_k < y_n$: tiết diện không đối xứng qua trục z,

Vật liệu dẻo $\alpha = 1 \to y_k = y_n$: tiết diện đối xứng qua trục z.

– Xem xét điều kiện tiết kiệm. Như đã thấy, độ bền chống uốn phụ thuộc vào mô men chống uốn W_z (tăng mô men chống uốn W_z để giảm ứng suất pháp). Trong khi đó, trọng lượng của thanh lại tỉ lệ với diện tích nên đánh giá mức độ tiết kiệm bằng tỉ số $\xi = W / A^{3/2}$ được gọi là mô men chống uốn riêng. Ví dụ hình hộp chữ nhật, hình ống, chữ U và chữ I là những dạng hợp lý. Cùng diện tích nhưng thép chữ I có mô men chống uốn lớn hơn tám lần tiết diện hình vuông.

Ứng suất chính và kiểm tra độ bền tổng thể của dầm

Trong bài toán uốn ngang phẳng, kiểm tra độ bền cho các trạng thái sau:

– Trạng thái ứng suất đơn như bài toán uốn thuần túy:

$$\left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| = \frac{|M_z|}{I_z} \left|y_{\substack{k\\ n}}\right|_{\max} \le [\sigma]_{\substack{k\\ n}}, \quad \left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| = \frac{|M_z|}{\mathrm{W}_z} \le [\sigma]_{\substack{k\\ n}}.$$

– Trạng thái ứng suất trượt thuần túy:

$$|\tau_0| = \frac{Q_y S_x^{(l/2)}}{I_z b} \le [\tau]. \quad (7.33)$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$.

Theo thuyết bền thế năng biến dạng hình dáng cực đại $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$.

– Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt với:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y \text{ , } \tau = \frac{Q_y S_x^C}{I_z b}.$$

Từ công thức (2.13) tính ứng suất chính cho ở dạng công thức (7.17):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ , } \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ , } \tau_{\substack{max\\min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Điều kiện bền theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma].$$

Điều kiện bền theo thế năng biến dạng hình dáng cực đại:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma].$$

Ví dụ. Với trường hợp ví dụ trên hình 7.15, kiểm tra điều kiện về độ cứng $\left[\frac{y_{l/2}}{l}\right] = \frac{1}{400}$.

– Tính mô men quán tính:

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi \cdot 32 \cdot 6{,}125}{64 \cdot \pi \cdot 160 \cdot 10^3} \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6{,}125}{\pi \cdot 160 \cdot 10^3}} = \frac{6{,}125 \cdot 0{,}073057}{32 \cdot 10^4} = 1{,}398 \cdot 10^{-6} m^4$$

$$\Rightarrow EI = 279{,}6715 kNm^2.$$

– Kiểm tra điều kiện về độ cứng:

$$\frac{|y_{l/2}|}{l} = \frac{0{,}036948}{4} = 0{,}009237 > \frac{1}{400} = 0{,}0025 .$$

Điều kiện độ cứng không thỏa mãn

– Sẽ tính lại kích thước từ điều kiện độ cứng:

+ Từ điều kiện độ cứng, tính độ võng:

$$|y_{l/2}| = \frac{l}{400} = \frac{4}{400} = 0{,}01 .$$

+ Bên cạnh đó từ sơ đồ đặt lực sẽ có:

$$x = 2 \rightarrow EI|y| = \frac{31}{3} \Rightarrow I = \frac{31}{3E[y_{l/2}]} ,$$

suy ra $D = \sqrt[4]{\dfrac{31 \cdot 64}{3\pi E[y_{l/2}]}} = \sqrt[4]{\dfrac{31 \cdot 64}{3\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0{,}01}} \approx 0{,}1013m = 10{,}13cm$.

Kết luận chương 7

Chương 7 xem xét bài toán uốn thanh thuần túy và uốn ngang.

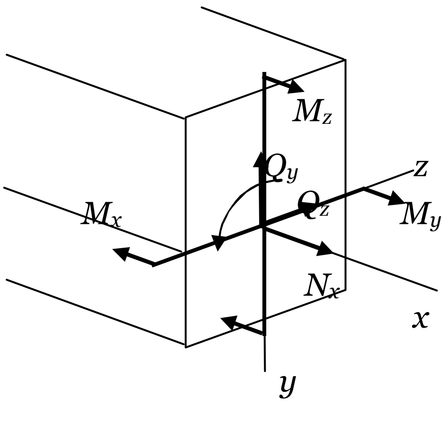
Bài toán siêu tĩnh cho dầm chịu uốn sẽ được xem xét kĩ trong phần 2. Các phương pháp cơ bản tính toán hệ thanh, chương 10.

CHƯƠNG 8
Thanh chịu lực phức tạp

8.1 Giới thiệu chung

Chương 5 đến chương 7 đã xem xét các bài toán thanh chịu lực đơn giản: thanh chịu kéo (hoặc nén), thanh chịu xoắn, thanh chịu cắt, thanh chịu uốn. Trong những bài toán này, trên tiết diện thanh chỉ tồn tại một thành phần nội lực độc lập: lực dọc trục, mô men xoắn, mô men uốn đi với lực cắt. Ngoại lực cũng chỉ có từng loại riêng biệt: lực tác dụng dọc trục thanh F_x, ngẫu ngoại lực M_x nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh, lực ngang F_y và ngẫu lực mô men M_z (uốn trong mặt phẳng xy) hay lực ngang F_z và ngẫu lực mô men M_y (uốn trong mặt phẳng xz).

Chương 8 xem xét các trường hợp chịu lực phức tạp. Tổng quát nhất là khi trên tiết diện thanh có đầy đủ sáu thành phần nội lực (hình 8.1).



Hình 8.1. Thanh chịu lực tổng quát

Đó là lực dọc N_x (N), mô men xoắn M_x, lực cắt Q_y và mô men uốn M_z (uốn trong mặt phẳng xy), lực cắt Q_z và mô men uốn M_y (uốn trong mặt phẳng xz).

8.2 Trường hợp tổng quát

Sẽ tính ứng suất và biến dạng trên tiết diện khi chịu lực tổng quát theo nguyên lý cộng tác dụng từ lời giải của các bài toán chịu lực đơn giản.

Công thức tính ứng suất pháp

Từ các bài toán thanh chịu lực đơn giản cho thấy ứng suất pháp chỉ do lực dọc và các mô men uốn gây ra:

$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_y),$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z\,. \tag{8.1}$$

Đường trung hòa

Định nghĩa. Đường trung hòa của tiết diện là quỹ tích của những điểm có ứng suất pháp bằng không.

Từ định nghĩa trên và công thức tính ứng suất pháp (8.1) có phương trình của đường trung hòa:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0\,. \tag{8.2}$$

Phương trình 8.2 là phương trình đường thẳng trên tiết diện đang xét. Ở đây N, M_z, M_y là các nội lực gồm lực dọc trục, các mô men uốn quanh các trục chính z, y tương ứng của tiết diện. Các đặc trưng hình học của tiết diện gồm diện tích A và các mô men quán tính đối với các trục chính z, y tương ứng của tiết diện I_z, I_y.

Tính chất của đường trung hòa

– Khi lực dọc trục bằng không, đường trung hòa đi qua gốc tọa độ.

– Ứng suất pháp tại một điểm P trên tiết diện tỉ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm đó đến đường trung hòa:

$$\sigma_P = Kd\,, \tag{8.3}$$

trong đó

$$K = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2}}. \tag{8.4}$$

– Những điểm có ứng suất pháp như nhau là những điểm nằm trên đường song song với trục trung hòa. Tại điểm cách xa đường trung hòa nhất, ứng suất pháp đạt cực đại.

Biểu đồ ứng suất pháp

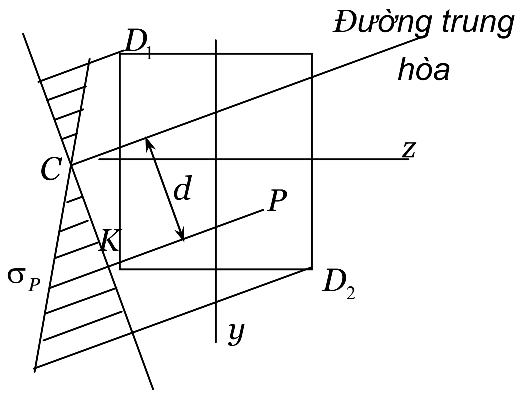
Từ tính chất của đường trung hòa có biểu đồ ứng suất pháp trên tiết diện như trên hình 8.2 bằng các bước sau:

– Kẻ đường vuông góc với trục trung hòa gọi là đường chuẩn tại điểm C.

– Từ điểm P thuộc tiết diện kẻ đường song song với đường trung hòa và cắt đường chuẩn tại K.

– Tính ứng suất pháp σ_P tại P theo công thức (8.1).

– Từ K đặt tung độ bằng σ_P và nối với điểm C. Biểu đồ ứng suất pháp giới hạn bằng hai đường song song với đường trung hòa và tiếp xúc với chu vi tiết diện tại hai điểm cách xa đường trung hòa nhất (hình 8.2).



Hình 8.2. Biểu đồ ứng suất pháp

Biểu thức của ứng suất pháp cực trị:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D. \tag{8.5}$$

Đặt y_D và z_D tại các điểm D_1 và D_2 – là những điểm nằm trên hai mép của tiết diện cách xa đường trung hòa nhất.

Đối với tiết diện hình chữ nhật và chữ I:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_z|}{W_z} \pm \frac{|M_y|}{W_y}. \tag{8.6}$$

Đối với tiết diện hình tròn:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{N}{A} \pm \frac{|M_u|}{W_u} = \frac{N}{A} \pm \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_z}, \tag{8.7}$$

trong đó $M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ - mô men uốn tổng hợp, đối với hình tròn mô men chống uốn đối với trục bất kì đi qua tâm đều có giá trị như nhau và bằng $W_u = \pi d^3/32$.

Điều kiện bền theo ứng suất pháp

Nếu chỉ kể đến ứng suất pháp, có điều kiện bền:

$$\left|\sigma_{\substack{\max\\ \min}}\right| \le [\sigma]_n^k. \tag{8.8}$$

Trường hợp tổng quát:

$$\left|\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y_D + \frac{M_y}{I_y} z_D\right| \le [\sigma]_n^k. \tag{8.9}$$

Đối với tiết diện hình chữ nhật và chữ I:

$$\left|\frac{N}{A} \pm \frac{|M_z|}{W_z} \pm \frac{|M_y|}{W_y}\right| \le [\sigma]_n^k. \tag{8.10}$$

Đối với tiết diện hình tròn:

$$\left|\frac{N}{A} \pm \frac{\left|\sqrt{M_z^2 + M_y^2}\right|}{W_z}\right| \le [\sigma]_n^k. \tag{8.11}$$

Ứng suất tiếp.

Ứng suất tiếp chỉ do mô men xoắn và các lực cắt gây ra:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(M_x) + \vec{\tau}(Q_y) + \vec{\tau}(Q_z). \tag{8.12}$$

Các thành phần ứng suất tiếp do lực cắt có phương, chiều trùng với lực cắt gồm:

$$\vec{\tau}(Q_y) = \frac{\vec{Q}_y S_z^C}{I_z b}, \tag{8.13}$$

$$\vec{\tau}(Q_z) = \frac{\vec{Q}_z S_y^C}{I_y h}. \tag{8.14}$$

Còn ứng suất tiếp do mô men xoắn có phương, chiều phụ thuộc vào dạng tiết diện. Đối với tiết diện tròn, ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính tiết diện, chiều theo chiều mô men xoắn:

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho. \tag{8.15}$$

Độ võng

Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, tìm độ võng f do mô men uốn gây ra:

$$\vec{f} = \vec{f}_z + \vec{f}_y, \text{ hay } f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}, \tag{8.16}$$

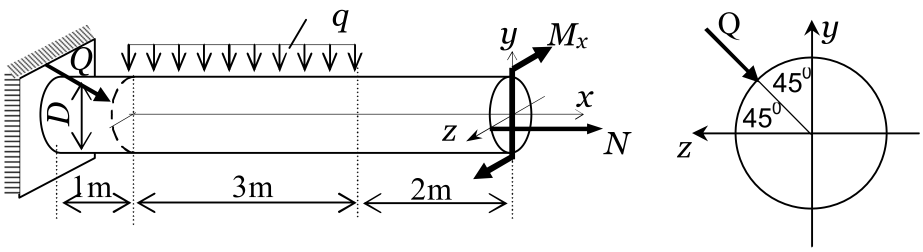
trong đó f_z, f_y là độ võng do mô men uốn M_z, M_y gây ra.

Các dịch chuyển thành phần tìm từ phương trình vi phân độ võng:

$$f_z'' = -\frac{M_z}{EI_z} \text{ và } f_y'' = -\frac{M_y}{EI_y}.$$

Ví dụ. Cho $D = 0{,}1m$, $Q = 2\sqrt{2}$ kN; $N = 6{,}28\,kN$; $q_y = 1\,kN/m$, $M_x = 3{,}14\,kNm$; $E = 2\cdot 10^8\,kN/m^2$, $[\sigma] = 160\cdot 10^3\,kN/m^2$. Kiểm tra độ bền thanh tại mặt cắt ngàm (hình 8.3) theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại (bỏ qua ứng suất tiếp do lực cắt).

– Đề kiểm tra bền, tính ứng suất tương đương tại điểm ngàm.



Hình 8.3.

– Ứng suất pháp σ gồm các thành phần do lực dọc trục, lực cắt và lực phân bố gây ra.

+ Từ lực dọc trục N đặt lệch tâm với điểm đặt ($y_N = 0, z_N = D/2$) có công thức tính ứng suất cho tiết diện hình tròn:

$$\sigma_{\max N} = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{\sqrt{y_N^2 + z_N^2}}{W/F}\right) = \frac{4N}{\pi D^2}\left(1 + \frac{8\sqrt{(D/2)^2}}{D}\right) = 4000kN/m^2.$$

+ Từ các lực cắt và lực phân bố tính được mô men uốn M_y và M_z ở đầu A:

$$M_z = 1 \cdot Q \cdot \cos 45^0 + q \cdot 3 \cdot 2{,}5 = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2 + 1 \cdot 3 \cdot 2{,}5 = 9{,}5kN,$$

$$M_y = Q \cdot \sin 45^0 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2 = 2kNm.$$

Ứng suất pháp do mô men uốn M_y và M_z cho tiết diện hình tròn bằng:

$$\sigma_{\max M} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} = \frac{32\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{\pi D^3} = \frac{32\sqrt{9{,}5^2 + 2^2}}{3{,}14 \cdot 0{,}1^3} = 98887{,}6kN/m^2.$$

Vậy ứng suất pháp lớn nhất của tiết diện tại đầu A là :

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max N} + \sigma_{\max M} = 4000 + 98887{,}6 = 102887{,}6kN/m^2.$$

– Bỏ qua ứng suất tiếp do lực cắt, ứng suất tiếp do mo men xoắn M_x gây ra là:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{16M_x}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 3{,}14}{3{,}14 \cdot 0{,}1^3} = 16000kN/m^2.$$

– Tính ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{102887{,}6^2 + 4 \cdot 16000^2} = 107748{,}8 kN/m^2.$$

Kết cấu đủ bền vì $\sigma_{td} = 107748{,}8 kN/m^2 < [\sigma] = 160 \cdot 10^3 kN/m^2$.

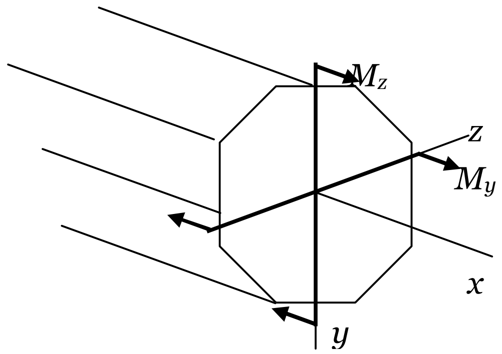
8.3 Các trường hợp chịu lực phức tạp

Uốn xiên

Như đã trình bày trong chương 7 khi thanh chịu uốn không trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì có trường hợp uốn xiên. Mô men uốn luôn có thể tách làm hai thành phần mô men trong hai mặt phẳng quán tính chính trung tâm M_y và M_z (hình 8.4).

Nếu bỏ qua lực cắt nội lực trong tiết diện sẽ gồm các mô men uốn M_z và M_y. Biểu thức ứng suất pháp có dạng:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z. \tag{8.17}$$



Hình 8.4. Thanh chịu uốn xiên

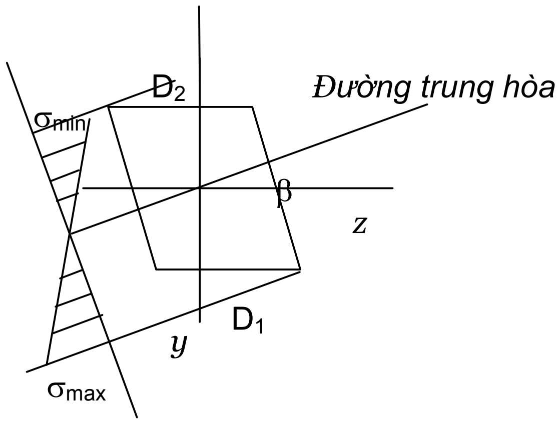
Nếu tiết diện tròn:

$$\sigma = \frac{\left|\sqrt{M_z^2 + M_y^2}\right|}{W_z}. \tag{8.18}$$

Phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{I_z}{I_y}\frac{M_y}{M_z} z = -z tg\beta,$$

trong đó $tg\beta = \frac{I_z}{I_y}\frac{M_y}{M_z}$.



Hình 8.5. Biểu đồ ứng suất pháp khi uốn xiên

Kiểm tra bền theo công thức (8.10):

$$\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]^k, \ -\frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]_n. \qquad (8.19)$$

Thiết kế kích thước theo phương pháp thử sao cho thỏa mãn điều kiện:

$$W_z \ge \frac{M_z + cM_y}{[\sigma]},$$

trong đó $c = \frac{W_z}{W_y}$.

Độ võng tính theo công thức (8.16):

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}$$

và $\varphi = \sqrt{\varphi_z^2 + \varphi_y^2}$,

trong đó $f_z, f_y, \varphi_z, \varphi_y$ là độ võng và góc xoay do mô men uốn M_z, M_y gây ra.

Kéo (nén) và uốn đồng thời

Biểu thức ứng suất pháp có dạng:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{M_z}{Ni_z^2} y + \frac{M_y}{Ni_y^2} z\right), \tag{8.20}$$

trong đó i_z, i_y bán kính quán tính chính.

Phương trình đường trung hòa:

$$1 + \frac{M_z}{Ni_z^2} y + \frac{M_y}{Ni_y^2} z = 0\,. \tag{8.21}$$

Ứng suất pháp cực đại tính theo (8.5-8.7). Kiểm tra bền theo ứng suất pháp theo các công thức (8.9-8.11). Kích thước mặt cắt ngang tính theo ứng suất pháp bằng phương pháp thử dần. Các bước tính như sau:

– Bước 1. Chọn kích thước ứng với mô men uốn lớn nhất. Ví dụ nếu M_z lớn nhất thì chọn $W_z = M_z / [\sigma]$, sau đó lựa chọn mặt cắt với các thông số hình học cụ thể.

– Bước 2. Tính ứng suất với các thông số hình học theo công thức (8.5-8.7).

– Bước 3. Kiểm tra ứng suất đã tính theo các công thức (8.9-8.11). Nếu thỏa mãn thì dừng, nếu không thì quay lại bước 1 và lựa chọn lại cho đến khi điều kiện bền theo ứng suất pháp thỏa mãn.

Kéo (nén) lệch tâm

Khi thanh chịu kéo (nén) lệch tâm tại điểm G (y_G, z_G) (hình 8.6), có thể chuyển lực về tâm tiết diện và nhận được:

– Lực dọc $N = P$,

– Các mô men uốn $M_y = Pz_G$ và $M_z = Py_G$.

Vậy kéo (nén) lệch tâm tương đương với trường hợp kéo (nén) đúng tâm và uốn đồng thời. Khi đó ứng suất pháp có dạng:

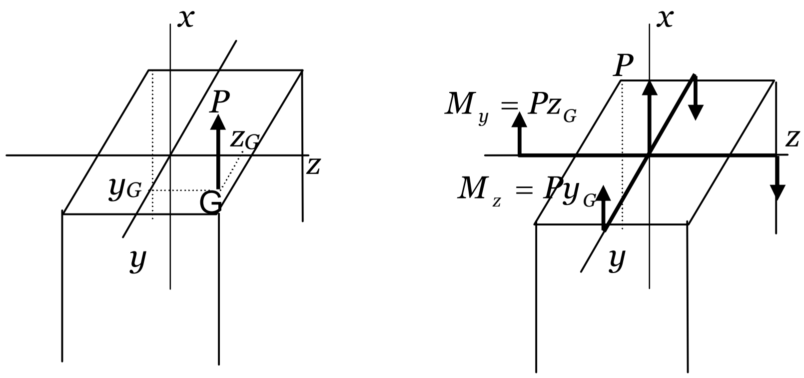
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{y_G y}{i_z^2} + \frac{z_G z}{i_y^2}\right). \tag{8.22}$$

Phương trình đường trung hòa:

$$1 + \frac{y_G y}{i_z^2} + \frac{z_G z}{i_y^2} = 0 \,,$$

hay

$$\frac{y}{-i_z^2 / y_G} + \frac{z}{-i_y^2 / z_G} = 1 \,. \tag{8.23}$$



Hình 8.6. Thanh kéo lệch tâm

Khi kéo (nén) lệch tâm, đường trung hòa có các tính chất sau:

– Đường trung hòa phụ thuộc vào vị trí đặt tải và không phụ thuộc vào tải trọng.

– Khi điểm đặt lực trên trục x thì đường trung hòa song song với trục y và ngược lại.

– Khi điểm đặt lực di chuyển trên đường thẳng n không đi qua trọng tâm thì đường trung hòa quay quanh một điểm có tọa độ:

$$y_0 = -\frac{i_z^2}{y_{n0}} \,,\; z_0 = -\frac{i_y^2}{z_{n0}} \,, \tag{8.24}$$

trong đó y_{n0}, z_{n0} là tọa độ giao điểm của n với trục y và trục z.

Lõi tiết diện

Từ (8.24) nhận thấy đường trung hòa chỉ phụ thuộc vào vị trí đặt lực, nên có thể xẩy ra hai trường hợp:

- Đường trung hòa cắt qua tiết diện, ứng suất pháp trên tiết diện có cả giá trị dương và âm.
- Đường trung hòa nằm ngoài hoặc chỉ tiếp xúc với chu vi của tiết diện, khi đó ứng suất pháp của mọi điểm trên tiết diện cùng dấu.

Định nghĩa: Lõi tiết diện là miền chứa trọng tâm tiết diện và giới hạn bởi một chu tuyến kín để khi đặt lực vào bên trong lõi thì đường trung hòa nằm ngoài tiết diện, khi vị trí đặt lực trên chu tuyến thì đường trung hòa tiếp tuyến với chu vi tiết diện – điều này có nghĩa ứng suất pháp tại mọi điểm của tiết diện chỉ có cùng một dấu.

Các vật liệu như bê tông, gạch đá chịu kéo rất kém, nên khi thiết kế các cấu kiện chịu nén lệch tâm cần chọn điểm đặt lực sao cho trên tiết diện chỉ có ứng suất nén. Có nghĩa là chọn điểm đặt lực sao cho đường trung hòa không cắt qua tiết diện. Do vậy điểm đặt lực phải nằm trong miền của lõi tiết diện.

Kéo (nén) và xoắn đồng thời

Khi thanh chịu mô men xoắn M_x và lực kéo (nén) dọc trục N đồng thời sẽ có ứng suất pháp:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

và ứng suất tiếp:

$$\tau = \frac{M_x}{W_X},$$

trong đó W_x là mô men chống xoắn của mặt cắt.

Đối với tiết diện tròn

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho \text{ và } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}.$$

Ứng suất chính theo công thức (2.13):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ và } \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Kiểm tra bền theo các thuyết bền,

Đối với vật liệu dẻo dùng thuyết bền thứ ba và thứ tư:

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma], \tag{8.25}$$

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{8.26}$$

Đối với vật liệu kéo, nén khác nhau dùng thuyết bền Mohr:

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sigma + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]_k. \tag{8.27}$$

Uốn và xoắn đồng thời

Cộng thêm vào trạng thái uốn xiên ứng suất tiếp khi chịu xoắn.

Tiết diện hình tròn

Ứng suất do uốn xiên có dạng:

$$\sigma = \frac{M_u}{I_z}\rho \text{ và } \sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_z},$$

trong đó $M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$.

Ứng suất do xoắn biểu diễn bằng:

$$\tau = \frac{M_x}{I_p}\rho \text{ và } \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{M_x}{2W_z}$$

tại mọi điểm trên chu vi tiết diện.

Ứng suất chính trong trạng thái ứng suất này theo công thức (2.13) có dạng:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \text{ và } \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Kiểm tra bền theo các thuyết bền,

Đối với vật liệu dẻo dùng thuyết bền thứ ba và thứ tư:

$$\sigma_{tdIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \le [\sigma], \tag{8.28}$$

$$\sigma_{tdIV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{0.75M_x^2 + M_z^2 + M_y^2}}{W_z} \le [\sigma]. \quad (8.29)$$

Đối với vật liệu kéo, nén khác nhau dùng thuyết bền Mohr:

$$\sigma_{tdV} = \sigma_1 - \nu\sigma_3 = \frac{1-\nu}{2}\sqrt{M_y^2 + M_z^2} + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \le [\sigma]_k. \quad (8.30)$$

Tiết diện hình chữ nhật

Ứng suất tiếp đạt cực đại tại trung điểm cạnh dài (giả thiết cạnh dài là cạnh song song với trục z):

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{2W_{xo}}.$$

Khi đó ứng suất pháp có giá trị:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z}.$$

Tại trung điểm cạnh ngắn:

$\tau = \gamma\tau_{\max}$ và $\sigma = \dfrac{M_y}{W_y}$.

Điều kiện bền theo ứng suất pháp của uốn xiên cần được kiểm tra:

$$\frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]^k, \quad -\frac{|M_z|}{W_z} - \frac{|M_y|}{W_y} \le [\sigma]_n.$$

Kết luận chương 8

Chương 8 trình bày bài toán thanh chịu lực phức tạp. Xem xét trường hợp tổng quát đưa ra các công thức tính ứng suất và dịch chuyển.

Xem xét các trường hợp chịu lực phức tạp kết hợp của hai hay nhiều hơn các trường hợp thanh chịu lực cơ bản như: uốn xiên; kéo và uốn; kéo (nén) lệch tâm; xoắn và uốn.

CHƯƠNG 9

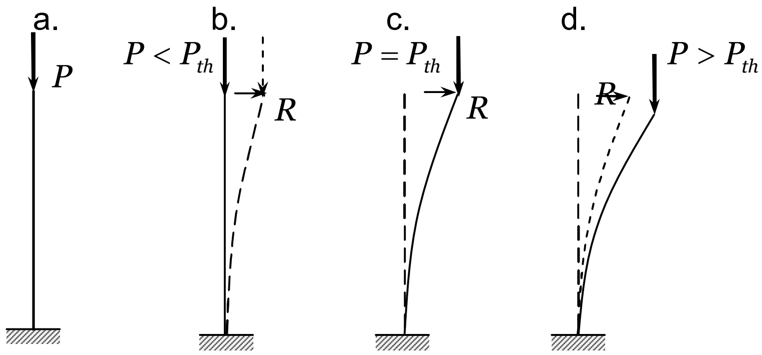
Ổn định của thanh thẳng

9.1 Giới thiệu chung

Như đã nói trong phần nhập môn, mục đích của môn học là đánh giá độ bền, độ cứng và độ ổn định của công trình. Các chương 5 đến chương 8 đề cập đến việc đánh giá trạng thái ứng suất, biến dạng và dịch chuyển của thanh, sau đó đánh giá độ cứng, độ bền của thanh trong các trường hợp chịu lực khác nhau. Chương 9 này quan tâm đến vấn đề ổn định của kết cấu. Cụ thể là ổn định của thanh thẳng chịu nén – bị uốn dọc và nén và uốn đồng thời.

Như đã định nghĩa: Độ ổn định là khả năng duy trì, bảo toàn được dạng cân bằng ban đầu trước các tác dụng của các nhiễu động.

Xét một thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực P (hình 9.1a).



Hình 9.1. Thanh chịu nén dọc trục

Nhiễu động được mô hình hóa bằng lực ngang R. Cho giá trị của lực nén tăng dần bắt đầu từ không. Tác động vào thanh một lực ngang đủ nhỏ để thanh dời khỏi vị trí thẳng (vị trí cân bằng ban đầu), thanh sẽ cong đi. Dạng cong của thanh là dạng cân bằng nhiễu động. Khi bỏ lực ngang sẽ xảy ra các trường hợp sau:

– Khi lực nén dọc trục nhỏ, nhỏ hơn một giá trị tới hạn nào đó $P < P_{th}$, thanh sẽ trở lại vị trí thẳng ban đầu. Trạng thái cân bằng này của thanh là ổn định (hình 9.1b).

– Khi lực nén dọc trục lớn, lớn hơn một giá trị tới hạn $P > P_{th}$, thanh không trở lại vị trí thẳng ban đầu mà còn tiếp tục cong thêm. Trạng thái cân bằng này của thanh là không ổn định hay còn gọi là mất ổn định. Do thanh cong sẽ xuất hiện hiện tượng uốn trong thanh, dẫn đến ứng suất và biến dạng tăng và thanh có thể sẽ bị phá hủy (hình 9.1d).

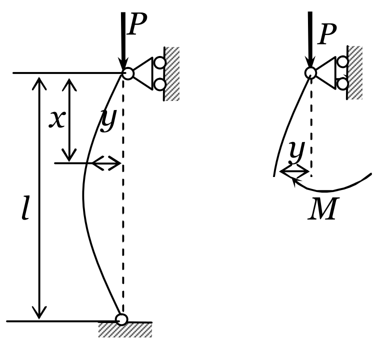
– Khi lực nén dọc trục đạt giá trị tới hạn $P = P_{th}$, thanh không thẳng trở lại và cũng không cong thêm. Trạng thái này được gọi là trạng thái cân bằng tới hạn (hình 9.1c).

Tương tự khi thanh chịu uốn cũng mất ổn định khi lực ngang Q vượt quá giá trị tới hạn $Q > Q_{th}$. Khi đó thanh không chỉ chịu uốn mà còn chịu xoắn.

9.2 Lực tới hạn và ứng suất tới hạn

Thanh liên kết khớp

Xét thanh liên kết khớp hai đầu, chịu lực nén P đúng tâm (hình 9.2).



Hình 9.2. Bài toán Euler

Giả thiết $P = P_{th}$ làm thanh cong đi. Tiết diện có tọa độ x khi bị uốn có độ võng là y. Kí hiệu độ cứng chống uốn là EI, mô men uốn tại mặt cắt là M. Khi đó có phương trình vi phân độ võng:

$$y'' = -\frac{M}{EI}. \tag{9.1}$$

Mô men uốn tính qua lực nén dọc trục và độ võng:

$$M = Py. \tag{9.2}$$

Thế (9.2) vào (9.1) nhận được phương trình vi phân:

$$y'' + \alpha^2 y = 0\ , \tag{9.3}$$

trong đó:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}. \tag{9.4}$$

Nghiệm của (9.3) có dạng :

$$y = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x,$$

C_1 và C_2 tìm từ điều kiện biên:

– tại $x = 0$, $y = 0$ suy ra $C_1 = 0$,

– tại $x = l$, $y = 0$ suy ra $C_2 \sin\alpha l = 0$.

Vì độ võng khác không nên $C_2 \neq 0$, như vậy

$$\sin\alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = k\pi$$

$$\alpha = \frac{k\pi}{l},\ \text{với}\ k = 1,2,3... \tag{9.5}$$

Thay (9.5) vào (9.4), tính được:

$$P = \frac{k^2\pi^2 EI}{l^2},\ \text{với}\ k = 1,2,3...$$

Đây là điều kiện để độ võng khác không, tức là điều kiện mất ổn định của thanh. Giá trị của P với k nhỏ nhất k=1 là giá trị tải trọng tới hạn:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \tag{9.6}$$

Đây là công thức Euler xác định tải trọng tới hạn cho trường hợp liên kết là khớp hai đầu. Ở đây chọn mô men quán tính nhỏ nhất của tiết diện. P_{th} khi xét uốn quanh trục quán tính chính có mô men quán tính nhỏ nhất cũng là nhỏ nhất.

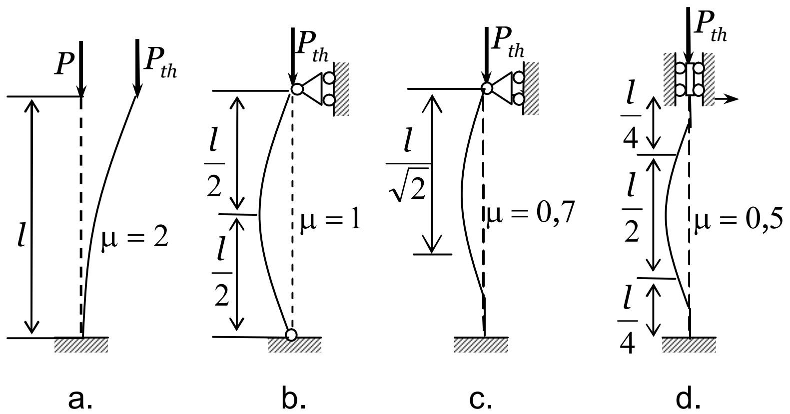
Các dạng liên kết khác sẽ được xem xét trong mục sau.

Thanh thẳng có các liên kết khác

Tương tự như cách làm cho thanh có liên kết khớp ở trên, xét các điều kiện liên kết khác để tìm tải trọng tới hạn. Công thức Euler (9.6) có thể viết tổng quát hơn như sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l_{td}^2}, \tag{9.7}$$

trong đó $l_{td} = \mu l$ là chiều dài tương đương của thanh, l chiều dài thực. Giá trị μ ứng với từng loại liên kết và cách đặt tải cho trên hình 9.3.



Hình 9.3. Giá trị μ ứng với từng loại liên kết

Ứng suất tới hạn và độ mảnh

Tính ứng suất tới hạn theo công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\mu^2 l^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{9.8}$$

trong đó

$$\lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{l_{td}}{i} \tag{9.9}$$

là độ mảnh của thanh, $i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện.

Tải trọng tới hạn Euler được tìm từ phương trình vi phân đường đàn hồi, do vậy chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi tuyến tính, ứng suất tới hạn phải nhỏ hơn ứng suất giới hạn tỉ lệ:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{tl} .$$

Từ đây rút ra được quan hệ $\lambda \ge \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$. Đặt:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} , \qquad (9.10)$$

sẽ có điều kiện để áp dụng công thức Euler:

$$\lambda \ge \lambda_0 . \qquad (9.11)$$

Với thép CT3: E=2,1.10^5 MN/m^2(MPa), $\sigma_{tl} = 210 MPa$:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}{210}} = 10\pi\sqrt{100} \approx 100 .$$

Với gỗ $\lambda_0 \approx 75$; với gang $\lambda_0 \approx 80$. Giá trị của λ càng lớn, thanh càng dễ mất ổn định, vì thế λ được gọi là độ mảnh của thanh. Những thanh có λ lớn được gọi là thanh có độ mảnh lớn, còn những thanh có $\lambda<\lambda_0$ được gọi là thanh có độ mảnh vừa và bé.

9.3 Tính ổn định cho thanh chịu nén

Như vậy khi tính toán thanh chịu nén, ngoài kiểm tra điều kiện bền cần kiểm tra điều kiện ổn định cho lực dọc trục:

$$N \le \frac{P_{th}}{n_{od}} = [P]_{od} , \qquad (9.12)$$

hoặc kiểm tra cho ứng suất pháp:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma]_{od} = \frac{\sigma_{th}}{n_{od}} , \qquad (9.13)$$

trong đó

A là diện tích nguyên của tiết diện, tức là diện tích của tiết diện ở nơi không bị giản yếu,

n_{od} là hệ số an toàn về ổn định,

$[P]_{od}$ là tải trọng giới hạn về ổn định,

$[\sigma]_{od}$ là ứng suất giới hạn về ổn định.

Để tiện cho việc kiểm tra ổn định người đưa thêm đại lượng φ:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]_n}, \tag{9.14}$$

ở đây $[\sigma]_n = \frac{\sigma_{ch}}{n}$ là ứng suất giới hạn về nén, σ_{ch} là ứng suất giới hạn chảy và n là hệ số an toàn về nén. Khi đó (9.12) được viết lại thành:

$$\frac{N}{\varphi A} \le [\sigma]_n. \tag{9.15}$$

Trong công thức (9.14) đại lượng φ được gọi là hệ số giảm ứng suất cho phép về nén hay hệ số uốn dọc. Đại lượng φ thực chất là hàm phụ thuộc vào độ mảnh λ:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{od}}{[\sigma]_n} = \frac{\frac{\sigma_{th}}{n_{od}}}{\frac{\sigma_{ch}}{n}} = \frac{\sigma_{th} n}{\sigma_{ch} n_{od}} = \varphi(\lambda) \tag{9.16}$$

và giá trị φ được lập thành bảng cho các vật liệu cho trước trong phụ lục 5.

Để kiểm tra ổn định có thể sử dụng hai phương pháp:

Phương pháp thứ nhất: cho trước n_{od}. Phương pháp này ít được dùng vì nó thiếu chính xác, do phải định trước n_{od} khi chưa biết độ mảnh λ. Người có thể sử dụng trên thực tế khi vật liệu mới chưa có bảng $\varphi(\lambda)$ hay thanh có độ mảnh vượt ra ngoài bảng $\varphi(\lambda)$.

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

Tính toán ổn định có ba bài toán cơ bản:

– Xác định tải trọng cho phép.

– Kiểm tra ổn định thanh.

– Thiết kế chọn lựa mặt cắt ngang có xét đến điều kiện ổn định.

Xác định tải trọng cho phép

Phương pháp thứ nhất: Khi cho trước n_{od} xác định tải trọng cho phép theo ba bước sau:

– Xác định độ mảnh theo (9.9): $\lambda = \frac{\mu l}{i}$.

– Xác định tải trọng tới hạn Euler theo (9.7): $P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_{td}^2}$.

– Tính tải trọng ổn định cho phép theo (9.12): $[P]_{od} = \frac{P_{th}}{n_{od}}$.

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

– Xác định độ mảnh theo (9.9): $\lambda = \frac{\mu l}{i}$.

– Xác định hệ số uốn dọc φ dựa trên độ mảnh λ theo bảng $\varphi(\lambda)$.

– Tính tải trọng cho phép: $P = [\sigma]\varphi A$.

Kiểm tra ổn định của thanh

Tiến hành theo hai phương pháp trên, tương tự như xác định tải trọng cho phép.

Bài toán thiết kế

Phương pháp thứ nhất rất ít dùng do thiếu chính xác.

Phương pháp thứ hai: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

– Cho hệ số uốn dọc ban đầu $\varphi = 0{,}6 \div 0{,}8$.

– Tính ứng suất giới hạn ổn định: $[\sigma]_{od} = \varphi \cdot [\sigma]_n$.

– Tính diện tích tiết diện theo $A = \frac{P}{[\sigma]_{od}} = \frac{P}{[\sigma]_n \varphi}$, chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu thép hình từ các bảng đặc trưng thép hình phụ lục 4.

– Tìm I, i và λ.

– Tìm giá trị mới φ_1 từ bảng $\varphi(\lambda)$. Nếu φ_1 khác nhiều so với φ thì lặp lại quy trình với hệ số uốn dọc mới $\varphi_2 = 0{,}5(\varphi + \varphi_1)$ cho đến khi sai khác không quá 5%.

Phương pháp hỗn hợp: Sử dụng bảng hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$.

– Chọn hệ số n_{od} tương ứng với vật liệu (thép $n_{od} \approx 2$, gang $n_{od} \approx 5$ và gỗ $n_{od} \approx 3$).

– Tìm $I_{\min}$ từ công thức (9.6).

– Chọn kích thước mặt cắt hay số hiệu mặt cắt (thép hình), tính A, i, λ.

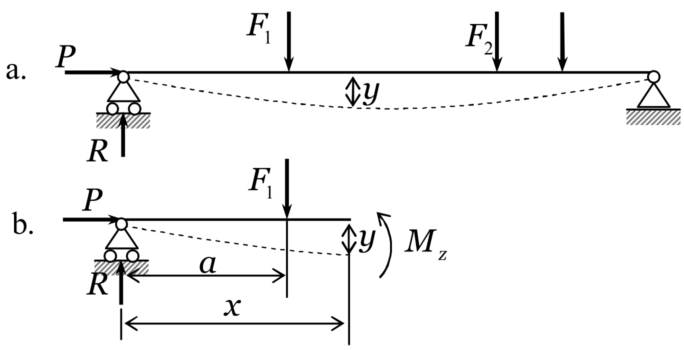
– Xác định φ từ bảng $\varphi(\lambda)$ và tính $[\sigma]_{od} = \varphi \cdot [\sigma]_n$

– Kiểm tra điều kiện ổn định (9.14). Nếu không thỏa mãn, thay đổi φ (theo phương pháp thứ hai) hay thay đổi kích thước mặt cắt.

9.4 Uốn ngang và uốn dọc đồng thời

Phương trình vi phân của đường đàn hồi

Xét thanh chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc trong mặt phẳng xy (hình 9.4a).



Hình 9.4. Thanh chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời

Bằng phương pháp mặt cắt (hình 9.4b) xác định mô men uốn tại mặt cắt có tọa độ x:

$$M_z = Py + [Rx - F_1(x-a)].$$

Số hạng Py là uốn dọc do tải trọng dọc P gây ra, phụ thuộc vào độ võng. Các số hạng trong dấu ngoặc vuông được xác định như trong bài toán uốn ngang bình thường, kí hiệu là $\overline{M}_z$. Khi đó viết lại:

$$M_z = Py + \overline{M}_z. \tag{9.17}$$

Thay vào phương trình vi phân độ võng:

$$y'' = -\frac{M_z}{EI_z}$$

nhận được:

$$y'' + k^2 y = -\frac{\overline{M}_z}{EI_z}, \tag{9.18}$$

trong đó

$$k^2 = \frac{P}{EI_z}. \tag{9.19}$$

Nghiệm của (9.18) có dạng:

$$y = y^* + \overline{y}.$$

y^* là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

$\overline{y}$ là nghiệm riêng phụ thuộc vào biểu thức cụ thể của mô men uốn ngang $\overline{M}$, tức là phụ thuộc vào dạng tải trọng tác dụng.

Biểu thức gần đúng của độ võng

Thanh có liên kết khớp ở hai đầu

Giả thiết tải trọng ngang hướng về một phía và đối xứng qua mặt cắt giữa dầm. Khi đó độ võng cực trị f sẽ ở vị trí giữa dầm. Chọn hàm độ võng thỏa mãn các giả thiết trên có dạng:

$$y = f\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{9.20}$$

Độ võng $\bar{y}$ cũng viết dưới dạng tương tự:

$$\bar{y} = \bar{f}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{9.21}$$

Độ võng $\bar{f}$ do tải trọng ngang ở chính giữa dầm hoàn toàn có thể tìm được bằng các phương pháp quen thuộc khi giải bài toán thanh chịu uốn. $\bar{y}$ vẫn thỏa mãn phương trình vi phân của đường đàn hồi:

$$\bar{y}'' = -\frac{\overline{M}_z}{EI_z}.$$

Thế vào phương trình (9.17) nhận được:

$$y'' + k^2 y = -\bar{y}''. \tag{9.22}$$

Thay thế (9.20), (9.21) vào (9.22), nhận được biểu thức:

$$f = \frac{\bar{f}}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}},\; P_{th} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}. \tag{9.23}$$

Thay thế (9.23) vào (9.20):

$$y = \frac{\bar{y}}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}}. \tag{9.24}$$

Có thể dùng (9.24) cho các dạng liên kết khác nhưng chú ý biểu thức của lực tới hạn lúc đó tính như sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}.$$

Biểu thức gần đúng của mô men uốn

Thế biểu thức (9.24) của độ võng y vào biểu thức mô men uốn (9.17):

$$M_z = Py + \overline{M}_z = \overline{M}_z + P\frac{\overline{y}}{1-\dfrac{P}{P_{th}}}. \quad (9.25)$$

Sử dụng phép gần đúng sau đây:

Từ phương trình vi phân đường đàn hồi sẽ có:

$$\frac{M_z}{\overline{M}_z} = \frac{y''}{\overline{y}''}.$$

Thay thế biểu thức của độ võng y (9.20) và $\overline{y}$ (9.21) vào quan hệ trên:

$$\frac{M_z}{\overline{M}_z} = \frac{f}{\overline{f}} = \frac{1}{1-\dfrac{P}{P_{th}}}.$$

Nhận được biểu thức gần đúng của mô men uốn:

$$M_z = \frac{\overline{M}_z}{1-\dfrac{P}{P_{th}}}. \quad (9.26)$$

Ứng suất và điều kiện bền

Thanh chịu tải trọng dọc trục và tải trọng ngang có biểu thức của ứng suất pháp :

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M_z}{I_z}y.$$

Sử dụng công thức gần đúng của mô men uốn có ứng suất pháp cực đại:

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{A} + \frac{|M_z|}{W_z} \approx -\frac{P}{A} + \frac{|\overline{M}_z|}{W_z\left(1-\dfrac{P}{P_{th}}\right)}. \quad (9.27)$$

Có thể nhận thấy ứng suất tăng không tỉ lệ với tải trọng, mà tăng nhanh hơn. Như thế hệ số an toàn nhỏ hơn hệ số n, do vậy không cần kiểm tra theo ứng suất cho phép mà kiểm tra theo tải trọng cho phép. Điều kiện bền cho uốn ngang và uốn dọc đồng thời có dạng:

$$-\frac{nP}{A}+\frac{\left|n\overline{M}_z\right|}{W_z\left(1-\frac{nP}{P_{th}}\right)}\le\sigma_y\,. \tag{9.28}$$

Chú ý cần kiểm tra ổn định của thanh:

$$\frac{P}{\varphi A}\le[\sigma]_n\,, \tag{9.14}$$

trong đó φ là hệ số uốn dọc tra từ bảng $\varphi(\lambda)$ cho từng loại vật liệu như hàm của độ mảnh λ.

Kết luận chương 9

Chương 9 trình bày ổn định của thanh thẳng. Đưa ra định nghĩa về trạng thái ổn định, lực tới hạn theo Euler và ứng suất tới hạn.

Xem xét ổn định của thanh chịu nén đúng tâm sử dụng tham số hệ số uốn dọc $\varphi(\lambda)$ là hàm của độ mảnh λ của thanh. Hệ số uốn dọc chính là tỉ lệ giữa ứng suất cho phép về ổn định và ứng suất cho phép về nén, do vậy còn gọi $\varphi(\lambda)$ là hệ số suy giảm ứng suất cho phép về nén.

Bài toán ổn định của thanh chịu nén và uốn ngang cũng được xem xét trong chương 9 này.

PHẦN 2. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TÍNH TOÁN HỆ THANH

Mục đích của phần hai là nghiên cứu các phương pháp phân tích kết cấu dạng khung, dàn. Như đã nói ở phần nhập môn, đối tượng của phần này là các kết cấu hợp thành từ các phần tử có kích thước đủ dài khi so sánh với mặt cắt ngang, đó là dầm, dàn phẳng, dàn không gian, khung phẳng, khung ngang và khung không gian như trên hình 1.

Lưu ý khi phân tích hệ thanh, vẫn chấp nhận các giả thiết:

- Chuyển vị và góc xoay của kết cấu thay đổi tuyến tính đối với lực tác dụng, có nghĩa chúng tỷ lệ với lực tác dụng;
- Biến dạng nhỏ, biến dạng tỉ đối $\varepsilon << 1$, có nghĩa chuyển vị nhỏ so với kích thước kết cấu, suy ra điểm đặt của lực không thay đổi trong quá trình biến dạng.

Từ hai giả thiết trên, có nguyên lý cộng tác dụng: Dưới tác động của tổ hợp lực có thể cộng dồn ứng suất, biến dạng và chuyển vị gây ra bởi từng lực riêng biệt;

- Ứng xử của vật liệu là đàn hồi, tuân thủ định luật Hooke.

Các hệ thanh sẽ khảo sát chủ yếu là các hệ siêu tĩnh. Phân tích hệ siêu tĩnh dẫn đến giải hệ phương trình tuyến tính với số ẩn phụ thuộc vào phương pháp lựa chọn. Khi tính toán bằng máy tính bấm tay có thể sử dụng các thuật toán lặp hay chỉnh dần để làm giảm số phép tính. Trong khuôn khổ của giáo trình này, các phương pháp lực, phương pháp chuyển vị và phương pháp công ảo được trình bày lần lượt trong các chương 11, 12 và 13.

Đối với hệ lớn và phức tạp sử dụng máy tính, áp dụng các chương trình phân tích kết cấu dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Vì vậy phương pháp phần tử hữu hạn cũng được giới thiệu trong giáo trình, ở chương 14.

CHƯƠNG 10
Hệ siêu tĩnh

10.1 Siêu tĩnh

Xét vật thể tự do chịu lực trong không gian. Khái niệm lực bao gồm lực tập trung và cặp ngẫu lực (hay mô men).

Vật thể ở trạng thái cân bằng khi tổng các lực tác dụng thỏa mãn phương trình cân bằng tĩnh học:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \qquad (10.1)$$

Trong không gian trực giao ba chiều có sáu phương trình cân bằng. Khi xét trong mặt phẳng còn lại ba phương trình:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0. \qquad (10.2)$$

Khi kết cấu ở trạng thái cân bằng thì các thành phần tạo thành cũng ở trạng thái cân bằng. Có nghĩa tại mỗi phần tử, nút hay một phần của kết cấu cũng ở trạng thái cân bằng.

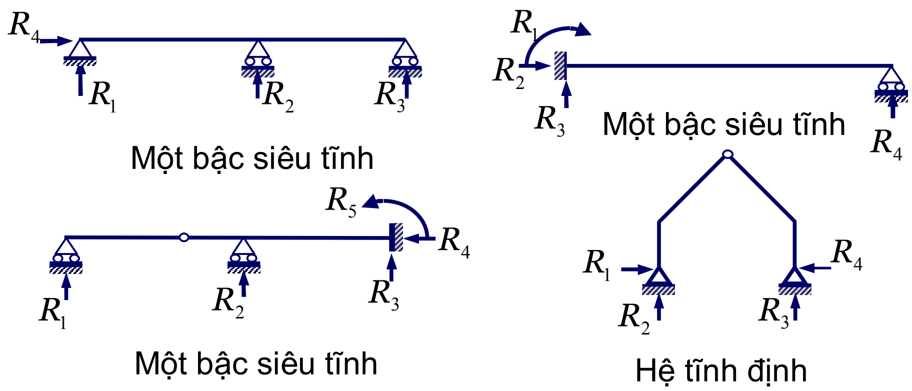
Phân tích kết cấu là xác định phản lực tại các gối đỡ và ứng suất do nội lực gây ra. Khi số phương trình cân bằng đủ để xác định các lực cần tìm thì kết cấu (hệ) được gọi là *tĩnh định.* Khi số lực cần tìm lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học thì kết cấu (hệ) được gọi là *siêu tĩnh*. Phần lớn các kết cấu trong thực tế là hệ siêu tĩnh.

Như vậy, bậc siêu tĩnh của hệ bằng số phản lực liên kết và số nội lực trừ đi số phương trình cân bằng.

Phân loại hệ siêu tĩnh

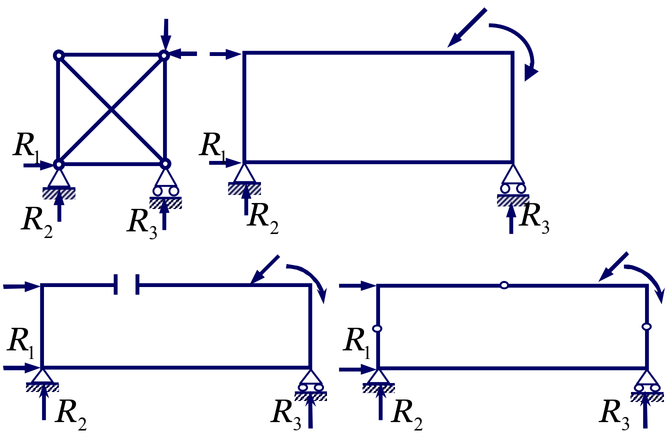
Hệ có thể là siêu tĩnh ngoại, siêu tĩnh nội hoặc cả hai.

– Siêu tĩnh ngoại là khi số phản lực cần xác định lớn hơn số phương trình cân bằng. Bậc siêu tĩnh ngoại bằng số phản lực trừ đi số phương trình cân bằng (hình 10.1).



Hình 10.1. Các ví dụ về bậc siêu tĩnh ngoại

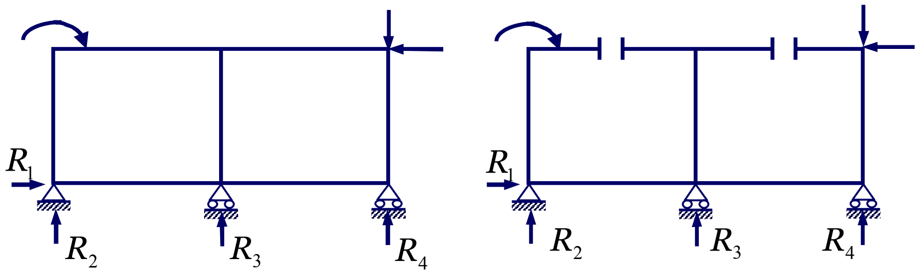
– Siêu tĩnh nội là khi số phương trình cân bằng vẫn đủ để xác định phản lực, nhưng nội lực không thể tìm được nếu chỉ sử dụng phương trình cân bằng (hình 10.2). Giải phóng nội lực bằng cách cắt thanh hay đặt khớp nối có thể đưa hệ về hệ tĩnh định. Bậc siêu tĩnh nội bằng số nội lực cần giải phóng.



Hình 10.2. Các ví dụ về bậc siêu tĩnh nội

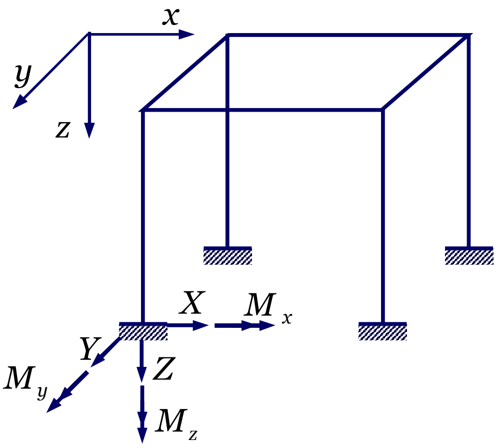
– Siêu tĩnh cả ngoại và nội. Xét ví dụ về hệ khung phẳng trên hình 10.3. Hệ có bốn phản lực, như vậy có một bậc siêu tĩnh ngoại. Nhưng để xác định nội lực cần giải phóng nội lực tại hai mặt cắt, suy ra có sáu bậc siêu tĩnh nội. Tổng cộng có bảy bậc siêu tĩnh.

Tương tự, xét hệ khung không gian trên hình 10.4. Tại mỗi ngàm có sáu thành phần phản lực, như vậy tổng cộng có 24 phản lực. Có sáu phương trình cân bằng, vậy bậc siêu tĩnh ngoại là 18. Để xác định nội lực cần giải phóng một mặt cắt, vậy có sáu bậc siêu tĩnh nội. Tổng cộng 24 bậc siêu tĩnh.

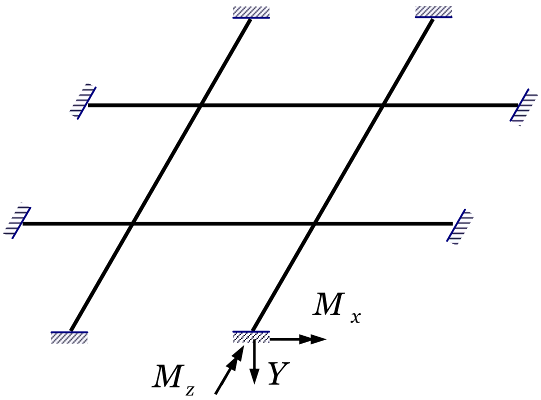


Hình 10.3. Kết cấu siêu tĩnh cả nội và ngoại

Xét hệ mạng dầm trên hình 10.5. Do chỉ chịu lực vuông góc với mặt phẳng xz nên các thành phần phản lực X, Z, M_y tại gối đỡ và các nội lực X, Z, M_y tại các phần tử sẽ triệt tiêu. Như vậy, tổng cộng có 24 phản lực và ba phương trình cân bằng, suy ra hệ có 21 bậc siêu tĩnh ngoại. Để tìm nội lực, cần phải giải phóng nội lực ở một trong bốn thanh, như vậy có ba bậc siêu tĩnh nội. Hệ có tổng cộng 24 bậc siêu tĩnh. Trường hợp các thanh của hệ lưới không chịu xoắn, có nghĩa là liên kết các thanh là liên kết khớp, các mô men xoắn sẽ bị triệt tiêu nên hệ sẽ chỉ còn 12 bậc siêu tĩnh.



Hình 10.4. Hệ khung không gian



Hình 10.5. Hệ lưới ngang

Xác định bậc siêu tĩnh

– Xét dàn phẳng có r phản lực, m phần tử và j nút khớp:

  + Lực cần tìm gồm m nội lực tại từng thanh, r phản lực, tổng cộng là $m+r$.

  + Tại mỗi nút có hai phương trình cân bằng:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0;$$

vậy tổng là $2j$ phương trình.

+ Vậy số bậc siêu tĩnh là:

$$i = (m + r) - 2j \,. \tag{10.3}$$

– Với dàn không gian có r phản lực, m phần tử và j nút khớp:

+ Tại mỗi nút có ba phương trình cân bằng:

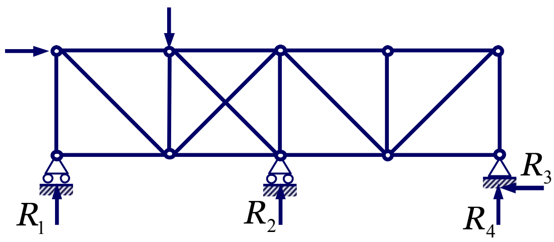
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0,$$

+ Vậy số bậc siêu tĩnh là:

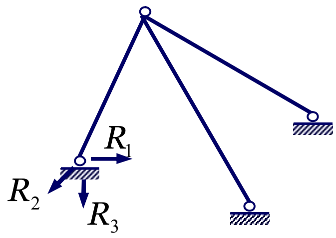
$$i = (m + r) - 3j \,. \tag{10.4}$$

Ví dụ, tìm bậc siêu tĩnh cho các kết cấu trên hình 10.6

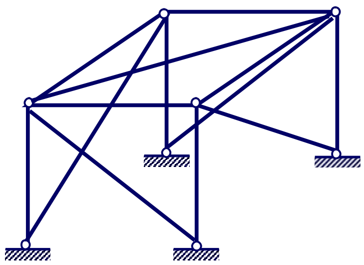
+ Dàn phẳng a: r=4, m=18, j=10, vậy i=2,
+ Dàn không gian b: m=3, r=9, j=4, vậy i=0 - dàn tĩnh định,
+ Dàn c: m=13, r=12, j=8, vậy i=1.



a. r=4, m=18, j=10 $\Rightarrow$ i=2



b. m=3, r=9, j=4 $\Rightarrow$ i=0



c. m=13, r=12, j=8 $\Rightarrow$ i=1

Hình 10.6. Tính bậc siêu tĩnh cho hệ dàn

– Xét khung phẳng có m phần tử, r phản lực và j nút liên kết cứng:

+ Có thể tìm được nội lực trong thanh (hình 10.7a) nếu biết ba trong sáu lực đầu phần tử, vậy có ba nội lực cần tìm ở mỗi thanh.

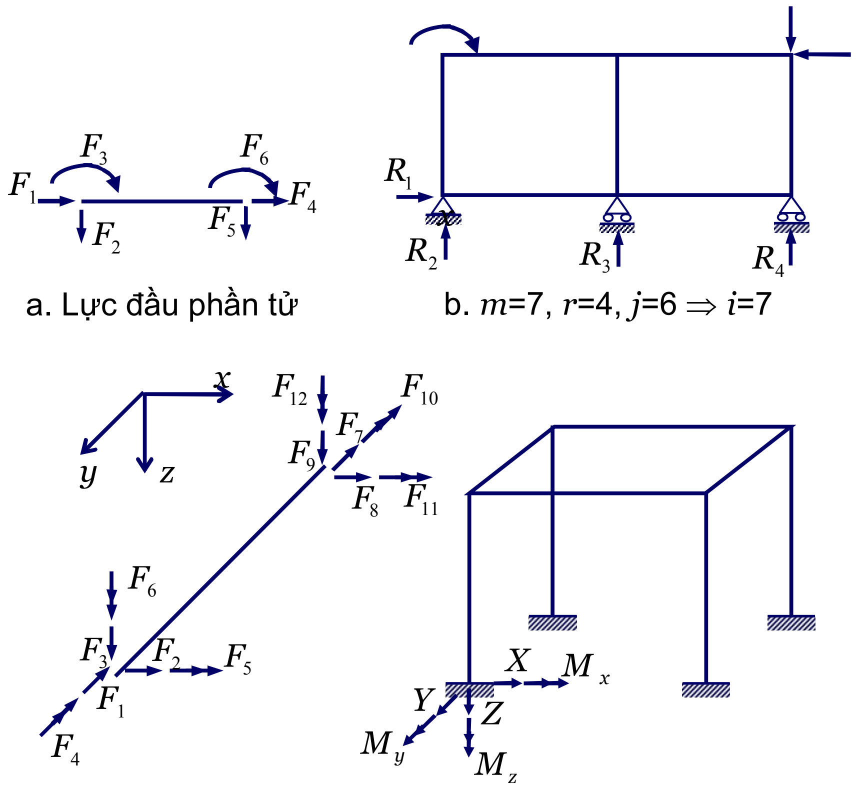
+ Tổng số lực cần tìm là $3m+r$.

+ Tại mỗi nút có ba phương trình cân bằng, gồm hai phương trình lực và một phương trình mô men:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z = 0 .$$

+ Như vậy số bậc siêu tĩnh là:

$$i = (3m + r) - 3j . \tag{10.5}$$



a. Lực đầu phần tử — b. m=7, r=4, j=6 ⇒ i=7

c. Lực đầu phần tử — d. m=8, r=24, j=8⇒i=24

Hình 10.7 Tính bậc siêu tĩnh cho khung phẳng và khung không gian

– Khung không gian với m phần tử, j nút, r phản lực:

+ Có thể tìm được nội lực trong thanh (hình 10.7c) nếu biết sáu trong 12 lực đầu phần tử, vậy có sáu nội lực cần tìm ở mỗi thanh.

+ Tổng số lực cần tìm là $6m+r$.

+ Tại mỗi nút có sáu phương trình cân bằng, gồm ba phương trình lực và ba phương trình mô men (10.1).

+ Số bậc siêu tĩnh là:

$$i=(6m+r)-6j\,. \tag{10.6}$$

Ví dụ:

+ Khung phẳng (hình 10.7b) có bảy thanh m=7, bốn phản lực r=4, sáu nút j=6, vậy có bậc siêu tĩnh là: $i=(3\times7+4)-3\times6=7$.
+ Khung không gian (hình 10.7d) có tám thanh m=8; có bốn nút bị ngàm chặt nên số phản lực r=24, có tổng cộng tám nút j=8; như vậy bậc siêu tĩnh $i=(6\times8+24)-6\times8=24$.

10.2 Bậc tự do

Các phương pháp chung giải bài toán siêu tĩnh

Mục đích của phân tích kết cấu là tìm ngoại lực (các thành phần phản lực) và nội lực thỏa mãn điều kiện cân bằng, điều kiện liên kết. Biến dạng do các lực này gây ra đảm bảo tính tương thích, tính liên tục và các điều kiện tại các gối đỡ.

Như đã biết, để phân tích hệ siêu tĩnh, ngoài phương trình cân bằng cần phải đưa thêm các liên hệ hình học giữa biến dạng - gọi là điều kiện hình học (hay điều kiện tương thích). Các liên hệ này đảm bảo tính tương thích của chuyển vị với hình học của kết cấu.

Có hai cách tiếp cận để phân tích kết cấu:

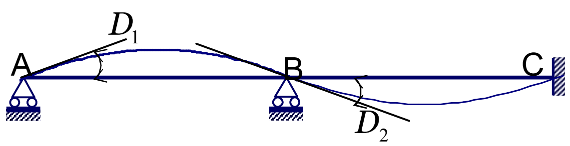
- Phương pháp lực (phương pháp độ mềm): giải phóng một số liên kết để kết cấu thành tĩnh định. Sẽ xuất hiện sự không tương thích về chuyển vị. Sự không tương thích sẽ được điều chỉnh bằng cách đặt thêm các lực.
- Phương pháp chuyển vị (phương pháp độ cứng): thêm các ràng buộc hạn chế chuyển vị, xác định các phản lực tại ràng buộc đó, sau đó cho các phản lực đó bằng không để xác định chuyển vị tại các điểm bị hạn chế.

Phương pháp lực: Chọn ẩn là các lực cần để đảm bảo tính tương thích về hình học, thường dẫn đến giải hệ phương trình với số ẩn bằng số lực cần xác định.

Phương pháp chuyển vị: Chọn ẩn là chuyển vị tại các nút, số lực ràng buộc thêm vào bằng số chuyển vị tại nút. Như vậy các chuyển vị cần tìm chính là sự không xác định động học, được gọi là bậc tự do.

Xác định bậc tự do của hệ

Như vậy, chuyển vị tại các nút là các ẩn trong phương pháp chuyển vị. Ví dụ trên hình 10.8, tại ngàm C không có chuyển vị, tại gối đỡ A, B không có chuyển vị thẳng nhưng có góc xoay. Vậy số chuyển vị chưa biết là 2, gồm D_1 và D_2.



Hình 10.8. Ví dụ về bậc tự do

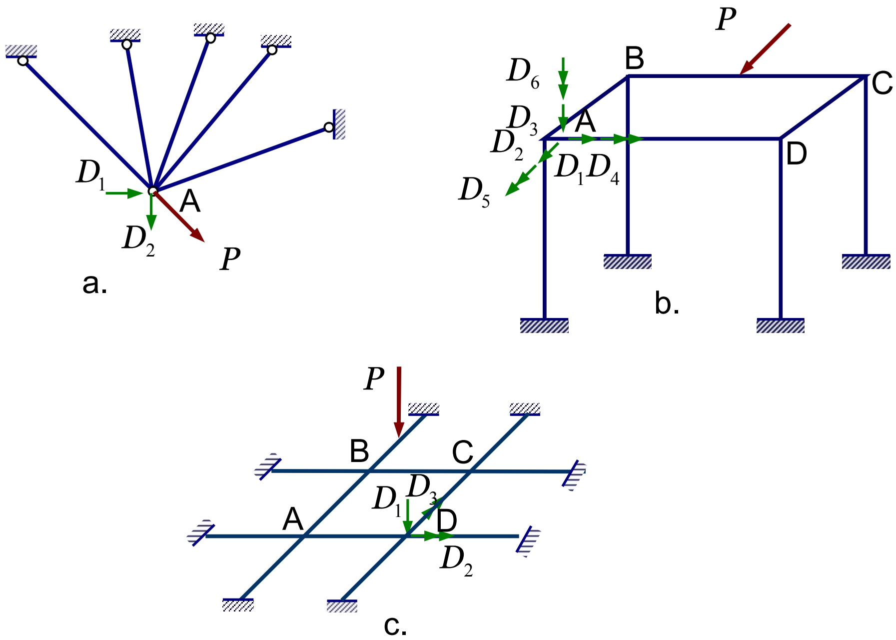
Chuyển vị nút độc lập là các chuyển vị thay đổi độc lập, không phụ thuộc vào sự thay đổi của các chuyển vị khác. Số các chuyển vị nút độc lập là số bậc tự do (bậc không xác định động học) của hệ.

Chú ý phân biệt giữa bậc siêu tĩnh và bậc tự do. Hệ trên hình 10.6b, bậc siêu tĩnh là 0 nhưng bậc tự do là 3. Còn hệ trên hình 10.6c, bậc siêu tĩnh là 1, bậc tự do là 12.

Trên hình 10.9 là các ví dụ về xác định bậc tự do của hệ. Hệ dàn phẳng (hình 10.9a) có 2 bậc tự do là chuyển vị ngang và chuyển vị dọc của nút A. Hệ khung không gian (hình 10.9b), mỗi nút tự do của khung có thể thực hiện 3 chuyển vị thẳng và 3 chuyển vị xoay, tổng số 6 bậc tự do; hệ có bốn nút A, B, C và D, do vậy có 24 bậc tự do. Trong hệ lưới ngang (hình 10.9c), mỗi nút tự do của lưới thực hiện 1 chuyển vị thẳng đứng và 2 chuyển vị xoay, tổng số là 3 bậc tự do; hệ có bốn nút A, B, C và D nên hệ có 12 bậc tự do.

10.3 Đường ảnh hưởng

Người thiết kế quan tâm đến nội lực dưới tác động của tải cố định và hoạt tải. Ví dụ, tải cố định là tải trọng bản thân, còn hoạt tải có thể là máy móc đặt trên sàn, tải của bánh xe tác động lên cầu. Khi phân tích hoạt tải thường được biểu diễn như tải phân bố hay tổ hợp các tải tập trung.



Hình 10.9. Ví dụ bậc tự do của một số kết cấu

Khi thiết kế, cũng cần quan tâm đến giá trị cực đại của nội lực tại mặt cắt khác nhau. Do vậy, hoạt tải có thể được đặt tại đúng vị trí làm cho nội lực đạt cực đại. Để xác định vị trí của tải di động gây ra nội lực cực đại, người ta dùng đường ảnh hưởng.

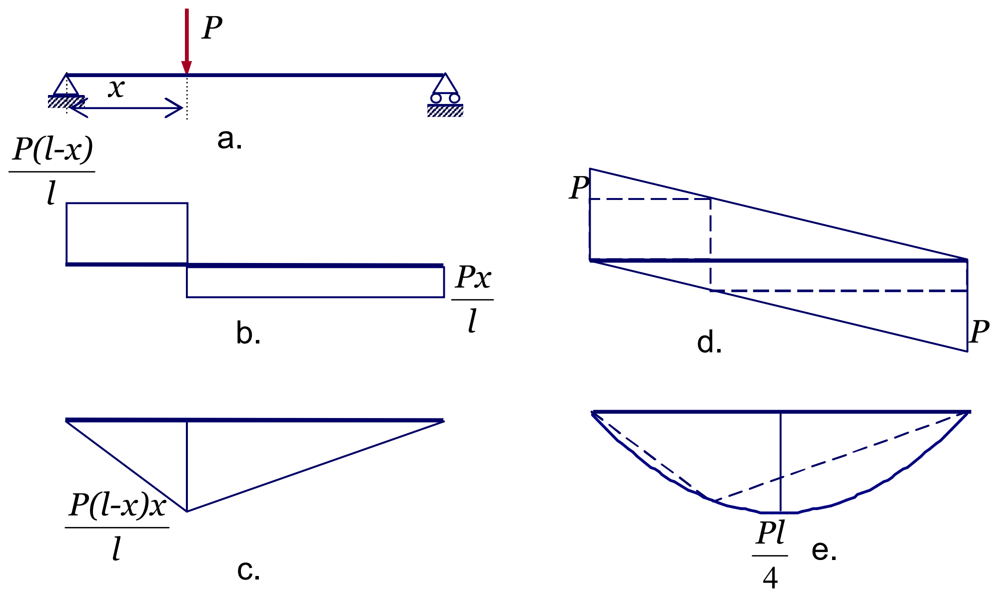
Trước tiên, xét ảnh hưởng của tải di động lên dầm đơn giản.

Ảnh hưởng của lực tập trung

Xét ảnh hưởng của một lực tập trung chuyển động dọc trên dầm đơn giản như trên hình 10.10a. Biểu đồ lực cắt và mô men của dầm khi có lực tập trung tác dụng ở mặt cắt n nào đó trên dầm được biểu diễn trên hình 10.10b và 10.10c. Công thức tính lực cắt và mô men cực đại khi lực tập trung đặt tại mặt cắt n có dạng:

$$Q_{n\max+} = P\frac{l\text{-}x}{l};\quad Q_{n\max-} = -P\frac{x}{l};\quad M_{n\max+} = P\frac{x(l\text{-}x)}{l}. \tag{10.7}$$

Đường bao của lực cắt cực đại biểu diễn trên hình 10.10d là các đường thẳng. Đường bao của mô men cực đại biểu diễn trên hình 10.10e là đường parabol bậc hai. Chúng được gọi là biểu đồ lực cắt cực đại và biểu đồ mô men cực đại. Khi thiết kế, chúng cho biết nội lực cực đại mà mặt cắt phải chịu.



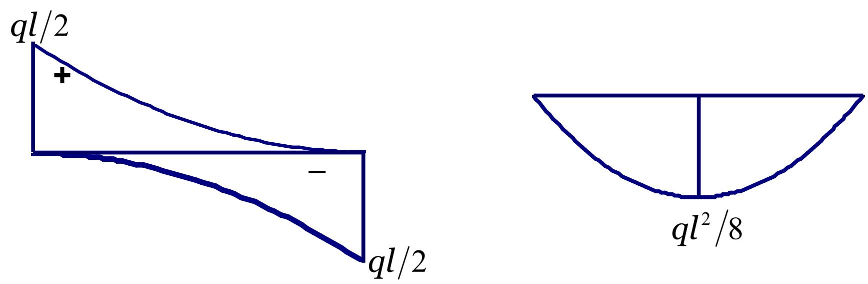
Hình 10.10

Ảnh hưởng của lực phân bố đều

Dầm chịu lực phân bố đều đặt trên toàn bộ hoặc một phần của độ dài. Mô men cực đại xuất hiện khi lực phân bố trên toàn bộ độ dài của dầm. Còn lực cắt dương (âm) đạt cực đại khi lực phân bố nằm trên toàn bộ phần bên phải (bên trái) của mặt cắt. Công thức tính lực cắt và mô men cực đại tại mặt cắt bất kỳ có dạng:

$$Q_{n\max+} = q\frac{(l\text{-}x)^2}{2l};\quad Q_{n\max-} = -q\frac{x^2}{2l};\quad M_{n\max+} = q\frac{x(l\text{-}x)}{2}. \tag{10.8}$$

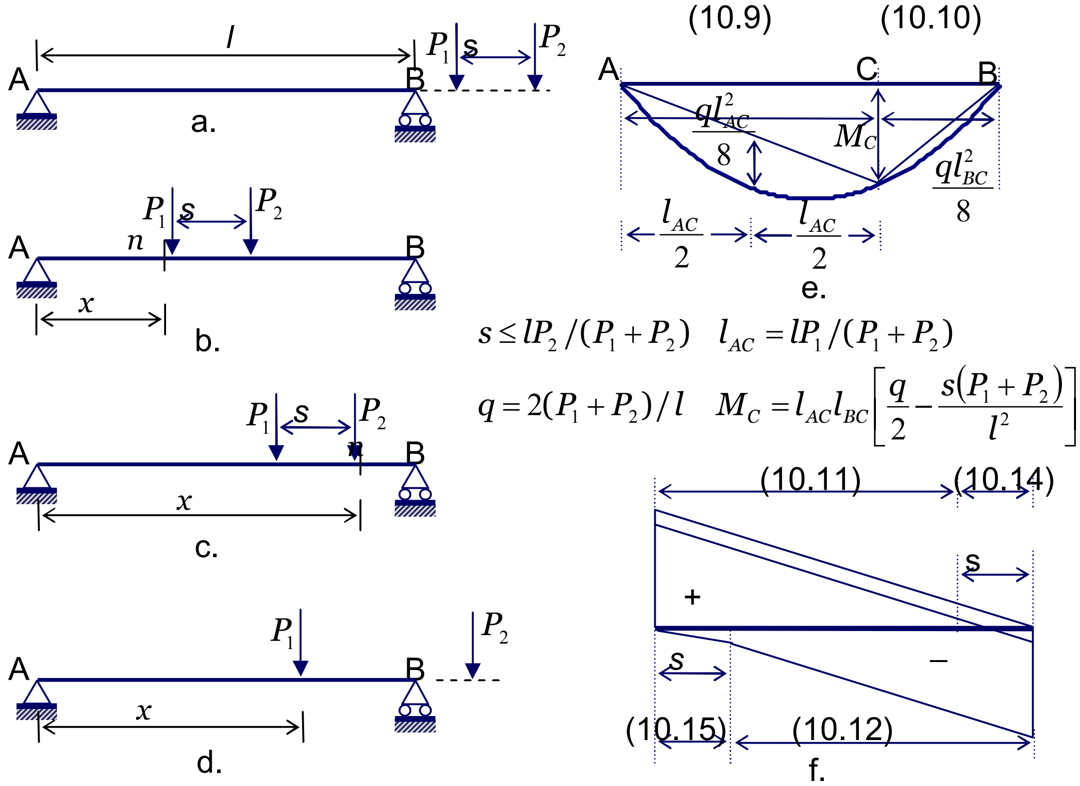
Biểu đồ lực cắt cực đại và mô men cực đại biểu diễn trên hình 10.11 đều là các parabol bậc hai.



Hình 10.11

Ảnh hưởng của hai lực tập trung

Hai lực tập trung $P_1 \geq P_2$, cách nhau một đoạn s, chuyển động dọc theo dầm gối tựa đơn giản (hình 10.12a), có độ dài l.



Hình 10.12

Tại mặt cắt n bất kì, khi P_1 hoặc P_2 tác dụng trực tiếp vào mặt cắt như trên hình 10.12b và 10.12c, thì mô men đạt cực đại và lực cắt đạt giá trị cực đại dương và âm được biểu diễn bằng các công thức:

$$M_{n\max+} = \frac{x(l-x)}{l}\left(P_1 + P_2\frac{l-x-s}{l-x}\right) \quad \text{khi} \quad 0 \le x \le l-s, \qquad (10.9)$$

$$M_{n\max+} = \frac{x(l-x)}{l}\left(P_2 + P_1\frac{l-x-s}{l-x}\right) \quad \text{khi} \quad s \le x \le l, \qquad (10.10)$$

$$Q_{n\max+} = P_1\frac{l-x}{l} + P_2\frac{l-x-s}{l} \quad \text{khi} \quad 0 \le x \le l-s, \qquad (10.11)$$

$$Q_{n\max-} = P_1\frac{s-x}{l} - P_2\frac{x}{l} \quad \text{khi} \quad s \le x \le l. \qquad (10.12)$$

trong đó s là khoảng cách giữa hai lực và l là độ dài của dầm.

Khi trên dầm chỉ có lực P_1 như trên hình 10.12d hoặc chỉ có P_2 thì mô men cực đại và lực cắt đạt giá trị dương và giá trị âm cực đại biểu diễn qua biểu thức:

$$M_{n\max+} = P_1 \frac{x(l\text{-}x)}{l} \quad khi\ (l-s) \le x \le l\,, \tag{10.13}$$

$$Q_{n\max+} = P_1 \frac{l\text{-}x}{l}; \quad khi\ (l-s) \le x \le l\,, \tag{10.14}$$

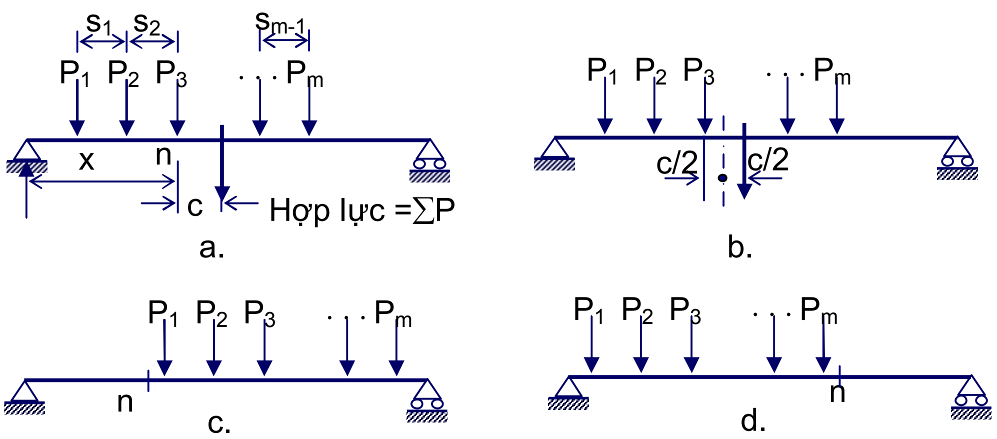
$$Q_{n\max-} = -P_2 \frac{x}{l}; \quad khi\ 0 \le x \le s\,. \tag{10.15}$$

Biểu đồ mô men cực đại biểu diễn bằng công thức (10.13) chỉ khi $s > lP_2/(P_1+P_2)$. Trên hình 10.12e biểu diễn biểu đồ mô men cực đại cho trường hợp $s \le lP_2/(P_1+P_2)$.

Hình 10.12f biểu diễn biểu đồ lực cắt cực đại.

Ảnh hưởng của nhiều lực tập trung

Xét tại mặt cắt n (hình 10.13a), mô men sẽ đạt cực đại khi một trong các lực tập trung di động đặt vào mặt cắt đó.



Hình 10.13

Thử tính cho từng lực sẽ tìm được lực nào gây ra mô men cực đại M_{nmax+}. Còn lực cắt dương sẽ đạt cực đại khi tất cả các lực nằm ở bên phải của n (hình

10.13c). Tương tự, lực cắt âm sẽ đạt cực đại khi tất cả các lực nằm ở bên trái của n (hình 10.13d).

Xét vị trí mà ở đó mô men đạt cực đại tuyệt đối trong biểu đồ mô men cực đại. Vị trí đó thường ở gần vị trí của hợp lực. Giả thiết mô men cực đại tuyệt đối đạt được do lực P_3, cần xác định vị trí x sao cho mô men uốn M_n đạt cực đại:

$$M_n = R_A x - P_1(s_1 + s_2) - P_2 s_2 , \quad (10.16)$$

$$R_A = \frac{l - x - c}{l} \sum P . \quad (10.17)$$

Giá tri cực đại đạt được khi $\frac{\partial M_n}{\partial x} = 0$ nên:

$$\frac{dM_n}{dx} = \frac{\sum P}{l}(l - 2x - c) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2} - \frac{c}{2} . \quad (10.18)$$

Đường ảnh hưởng đối với dầm đơn giản và dàn

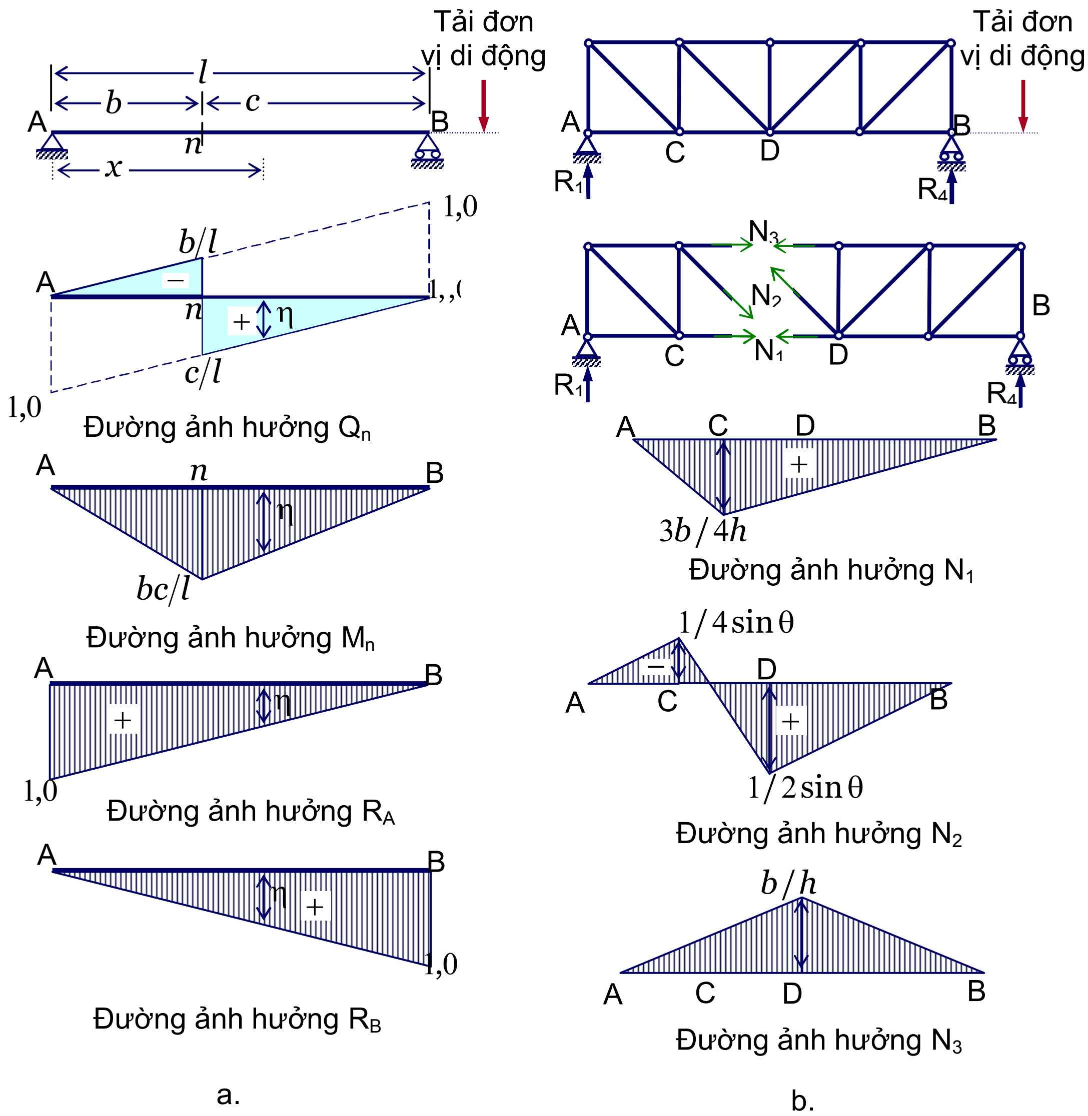
Các mục trên đã xét tới ảnh hưởng của tải di động đối với dầm đơn giản. Đường ảnh hưởng được xây dựng để biểu diễn giá trị của một phản ứng nào đó tại một mặt cắt nhất định khi lực đơn vị di động trên dầm. Phần này sẽ xem xét đường ảnh hưởng của lực cắt, mô men uốn trên dầm và các lực dọc trục trong hệ dàn gối tựa đơn giản. Hình 10.14a biểu diễn các đường ảnh hưởng của lực cắt Q_n, mô men M_n, phản lực gối tựa R_A và R_B tại mặt cắt n.

Tung độ η tại mặt cắt x bất kỳ bằng giá trị của Q_n và M_n khi lực đơn vị đặt đúng ở tọa độ x này. Tung độ dương vẽ xuống dưới. có thể xây dựng đường ảnh hưởng cho dầm đơn giản từ bài toán tĩnh học đơn giản sau: khi lực đơn vị đặt ở tọa độ x thì phản lực:

$$R_A = \frac{l - x}{l} ,$$

vậy tung độ của các đường ảnh hưởng của R_A và R_B là:

$$\eta_{R_A} = \frac{l - x}{l} , \ \eta_{R_B} = \frac{x}{l} .$$



Hình 10.14

Lực cắt tại n, $Q_n = R_A$ khi lực đơn vị nằm ở vị trí bất kỳ trong đoạn bên phải từ n đến B. Tương tự, $Q_n = -R_B$ khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên trái từ A đến n. Đối với mô men, khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên phải từ B đến n thì $M_n = R_A b$. Tương tự, khi lực đơn vị nằm trong đoạn bên trái từ A đến n thì $M_n = R_B c$ (hình 10.14a).

Đối với dàn, xây dựng đường ảnh hưởng cho nội lực của từng thanh. Dựng các đường ảnh hưởng của lực dọc trục từ đường ảnh hưởng của phản lực tại gối đỡ. Khi lực nằm trong đoạn B và D:

$$N_1 = R_A \frac{b}{h},\ N_2 = \frac{R_A}{\sin\theta},\ N_3 = -R_A \frac{2b}{h}.$$

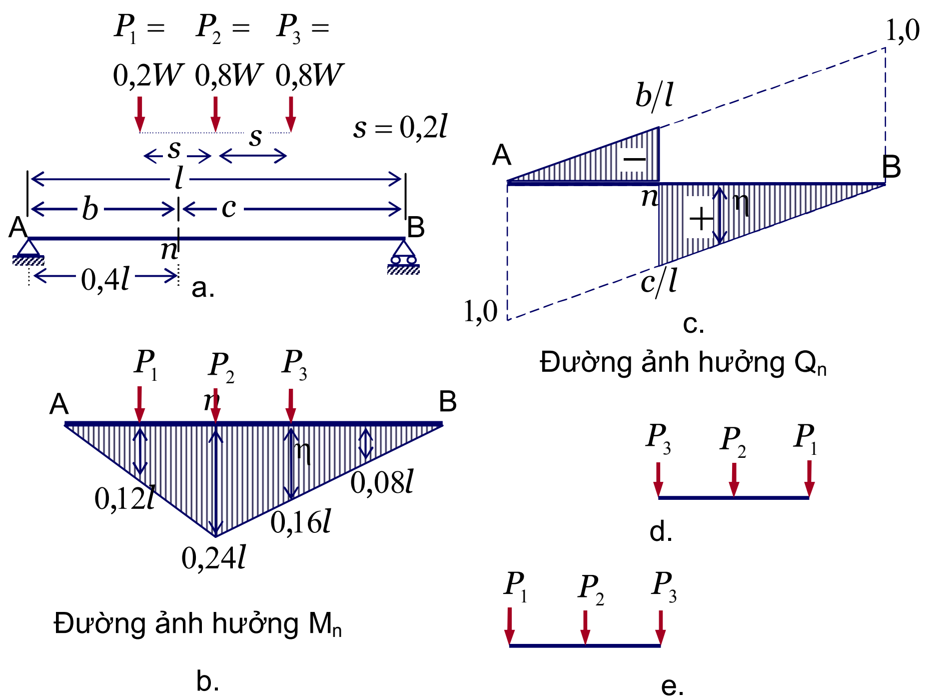
Còn khi lực nằm trong khoảng giữa C và A:

$$N_1 = R_A \frac{3b}{h},\ N_2 = -\frac{R_A}{\sin\theta},\ N_3 = -R_A \frac{2b}{h}.$$

Đường ảnh hưởng của ba lực dọc trục được biểu diễn trên hình 10.14 b.

Ví dụ

Tìm mô men lớn nhất và lực cắt lớn nhất tại mặt cắt $x = 0{,}4l$ cho trường hợp ba tải di động như trên hình 10.15a .



Hình 10.15

Đường ảnh hưởng cho mô men M_n biểu diễn trên hình 10.15b. Mô men M_n do tải trọng đặt vào vị trí nào đó được tính bằng:

$$M_n = \sum_{i=1}^{3} P_i \eta_i\ .$$

trong đó, η_i là tung độ của đường ảnh hưởng tại điểm đặt lực P_i. Giá trị cực đại của M_n tìm được bằng phép thử. Ba phép thử đầu, cho lực di chuyển theo đúng trình tự, lần lượt lực P_1, P_2 và P_3 đặt vào n và được:

$$M_{n1} = Wl(0{,}24 \times 0{,}2 + 0{,}16 \times 0{,}8 + 0{,}08 \times 0{,}8) = 0{,}24Wl,$$

$$M_{n2} = Wl(0{,}12 \times 0{,}2 + 0{,}24 \times 0{,}8 + 0{,}16 \times 0{,}8) = 0{,}344Wl,$$

$$M_{n3} = Wl(0 \times 0{,}2 + 0{,}12 \times 0{,}8 + 0{,}24 \times 0{,}8) = 0{,}288Wl.$$

Phép thử thứ tư, tiến hành cho lực di chuyển theo trình tự ngược lại, với P_3 đặt tại mặt cắt n, hai lực còn lại ở phía bên phải như trên hình 10.15d, nhận được:

$$M_{n4} = Wl(0{,}24 \times 0{,}8 + 0{,}16 \times 0{,}8 + 0{,}08 \times 0{,}2) = 0{,}336Wl.$$

Phép thử thứ năm, cho lực P_3 đặt tại mặt cắt n, hai lực còn lại P_1 và P_2 đặt ở phía bên trái như trên hình 10.15e, nhận được:

$$M_{n5} = Wl(0{,}16 \times 0{,}8 + 0{,}24 \times 0{,}8) = 0{,}32Wl.$$

Như vậy, với phép thử thứ hai, khi lực P_2 đặt vào điểm n như trên hình 10.15b thì mô men đạt cực đại.

Đường ảnh hưởng của lực cắt biểu diễn trên hình 10.15c, lực cắt đạt cực đại dương ở trường hợp đặt tải như trên hình 10.15d và đạt cực đại âm ở trường hợp tải như trên hình 10.15e:

$$Q_{\max+} = W(0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}2) = 0{,}84W,$$

$$Q_{\max-} = W(0 \times 0{,}2 - 0{,}2 \times 0{,}8 - 0{,}4 \times 0{,}2) = -0{,}48W.$$

Kết luận chương 10

Phần lớn các kết cấu trong thực tế là siêu tĩnh, cần phải xác định bậc siêu tĩnh của kết cấu khi sử dụng phương pháp độ mềm. Bậc siêu tĩnh phân ra làm các loại sau: siêu tĩnh nội, siêu tĩnh ngoại và hỗn hợp. Những kết cấu đơn giản, có thể xác định bậc siêu tĩnh dựa vào hình vẽ. Đối với kết cấu phức tạp, có thể dựa vào công thức (10.4), (10.6), (10.7) và (10.8) để xác định bậc siêu tĩnh của hệ dàn phẳng, dàn không gian (khớp nối tại nút), khung phẳng và khung không gian (nối cứng ở nút).

Có hai phương pháp phân tích kết cấu. Phương pháp thứ nhất là phương pháp lực hay còn gọi là phương pháp độ mềm. Phương pháp này giải phóng các liên kết để kết cấu trở thành tĩnh định, sau đó tính tổng chuyển vị và sự sai lệch về chuyển vị sẽ được hiệu chỉnh bằng cách đặt các lực dư vào đúng hướng của các liên kết đã giải phóng. Từ đó thu được các phương trình tương thích, lời giải của chúng là các lực cần tìm.

Trong phương pháp chuyển vị (phương pháp độ cứng), cần đưa vào các ràng buộc tại các nút. Sau đó tính những lực ràng buộc hạn chế các chuyển vị này. Tiếp theo, cho phép chuyển vị tại các hướng có lực ràng buộc sao cho lực ràng buộc triệt tiêu. Cuối cùng sẽ thu được một hệ các phương trình cân bằng, lời giải của hệ là các chuyển vị cần tìm. Nội lực trong kết cấu cũng được xác định bằng phép tổ hợp các tác động của các chuyển vị vừa tính được và của các chuyển vị do ngoại lực trên kết cấu đã bị hạn chế dịch chuyển.

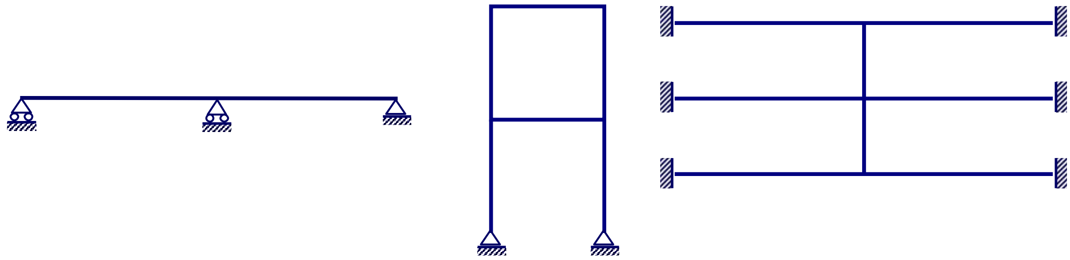
Số các ràng buộc trong phương pháp độ cứng bằng với số chuyển vị nút độc lập của kết cấu. Số chuyển vị nút độc lập này được gọi là bậc không xác định động học hay đơn giản hơn là bậc tự do của kết cấu. Cần phân biệt rõ bậc siêu tĩnh và bậc tự do. Chuyển vị ở đây phải hiểu là cả chuyển vị thẳng và chuyển vị góc xoay.

Bài tập chương 10

10.1 Với các kết cấu dưới đây:

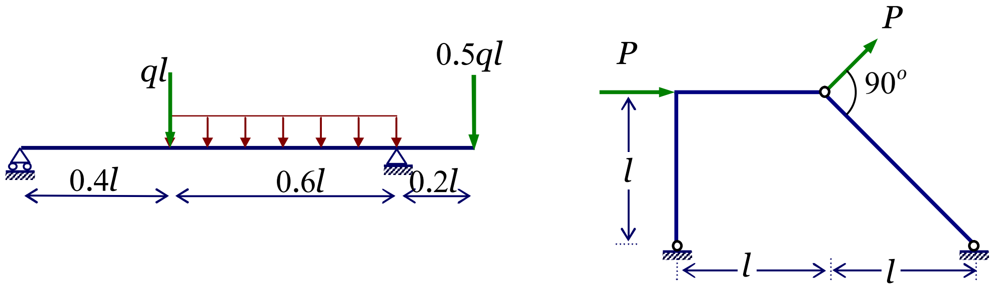
– Xác định bậc siêu tĩnh và đưa ra các giải phóng liên kết thích hợp để kết cấu trở thành tĩnh định.

– Xác định bậc tự do và chỉ ra các chuyển vị.



Hình 10.16

10.2 Vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mô men cho các dầm và khung dưới đây:



Hình 10.17

10.3 Xác định mô men uốn cực đại và vị trí của nó trên dầm đơn giản có khẩu độ l khi chịu các trường hợp tải trọng di động sau:

a) Hai lực $P_1 = P_2 = W$, khoảng cách giữa hai lực là $s = 0,2l$;

b) Hai lực $P_1 = P_2 = W$, khoảng cách giữa hai lực là $s = 0,55l$;

c) Ba lực $P_1 = P_2 = W$, $P_3 = 0,5W$, khoảng cách giữa các lực là $s = 0,2l$;

d) Ba lực $P_1 = 0,2W$, $P_2 = P_3 = 0,8W$, khoảng cách giữa các lực là $s = 0,2l$.

CHƯƠNG 11
Phương pháp lực

11.1 Mô tả phương pháp

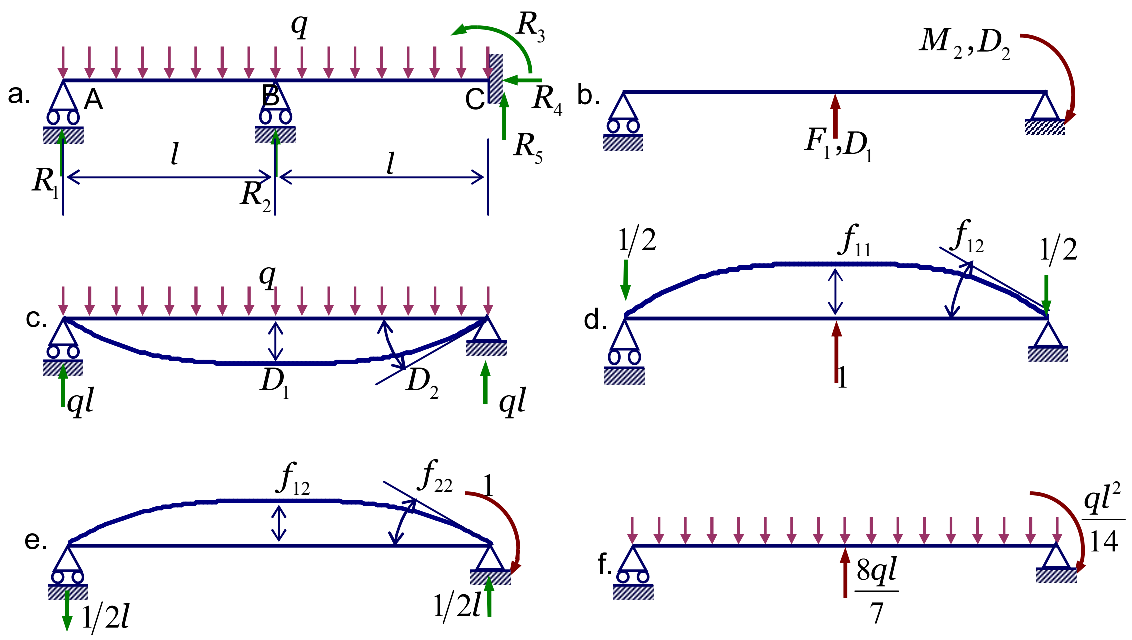
1. Đầu tiên, xác định bậc siêu tĩnh. Đưa hệ siêu tĩnh về hệ tĩnh định bằng cách giải phóng một số liên kết, có nghĩa thay các phản lực hay nội lực bằng các lực dư (phải đảm bảo kết cấu không biến hình). Số liên kết cần giải phóng bằng số bậc siêu tĩnh. Nói chung, những lực cần giải phóng (được gọi là lực dư) cần lựa chọn sao cho hệ kết cấu đã giải phóng thành hệ tĩnh định dễ phân tích nhất. *Chú ý việc lựa chọn này không duy nhất.*
2. Khi giải phóng các liên kết sẽ dẫn đến sự không tương thích về chuyển vị. Do vậy, bước thứ hai phải xác định những sai lệch về chuyển vị ở hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết). Tính sai lệch về chuyển vị chính ở tọa độ ứng với lực dư đã chọn. Những sai lệch này có thể do ngoại lực, do lún của gối đỡ hay do biến dạng nhiệt.
3. Bước thứ ba, cho hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết) chịu lực dư đơn vị, sau đó xác định chuyển vị. Những chuyển vị này có cùng vị trí và hướng như chuyển vị xác định ở bước thứ hai.
4. Các lực dư ở những tọa độ đã chọn phải có giá trị sao cho những sai lệch về chuyển vị bị triệt tiêu. Như vậy, thu được các phương trình tổng hợp các chuyển vị do từng lực dư riêng biệt (xác định ở bước thứ ba) cộng với chuyển vị tương ứng của hệ tĩnh định (xác định ở bước thứ hai).
5. Từ đây tìm lực trên kết cấu siêu tĩnh ban đầu, chúng là tổng các lực dư và lực trên hệ tĩnh định (đã giải phóng liên kết).

Quy trình này được trình bày qua ví dụ dưới đây.

Ví dụ 11.1. Xét ví dụ trên hình 11.1a. Dầm ABC được ngàm cứng ở đầu C, tựa trên hai gối di động tại A và B, chịu tải phân bố đều q trên toàn dầm. Độ cứng uốn của dầm là hằng số và bằng EI .

Hệ này có hai bậc siêu tĩnh, như vậy cần giải phóng hai lực dư. Có một số lựa chọn: bỏ phản lực thẳng đứng ở A và B hoặc bỏ mô men ở C và thêm khớp nối ở B (được xem xét sau, ở hình 11.2). Dưới đây chọn phương án giải phóng phản lực thẳng đứng ở B và mô men uốn tại C, đưa hệ về dầm đơn giản như trên hình 11.1.b. Vị trí và hướng của các lực dư, cũng như của các chuyển vị, được gọi là các tọa độ.

Hướng của lực dư F_1, F_2... có thể tùy chọn. Sau đó hướng của chuyển vị phải tương ứng với lực dư. Để thuận tiện dùng ký hiệu chỉ số dưới 1, 2, ...n.



Hình 11.1. Ví dụ mô tả phương pháp lực

Trong ví dụ này, lực dư và chuyển vị tương ứng là F_1, M_2 và D_1, D_2 (hình 11.1b).

Trên sơ đồ hệ tĩnh định này, xác định chuyển vị D_1 và D_2 dưới tác động của lực phân bố đều (hình 11.1c). Chúng chính là sai lệch về chuyển vị, vì trên thực tế (hình 11.1a), các chuyển vị này phải bằng không. Sử dụng phụ lục 6, tính được giá trị của chuyển vị D_1 và D_2:

$$D_1 = -\frac{5ql^4}{24EI}; D_2 = -\frac{8ql^3}{24EI} \dots \qquad (11.1)$$

Sau đó tìm chuyển vị gây ra do tác động của các lực dư đơn vị (như trên hình 11.1d và 11.1e). Cũng sử dụng phụ lục 6, nhận được:

$$f_{11} = \frac{l^3}{6EI}, \; f_{12} = \frac{l^2}{4EI}, \; f_{21} = \frac{l^2}{4EI}, \; f_{22} = \frac{2l}{3EI}. \tag{11.2}$$

Tổng quát, f_{ij} là chuyển vị tại tọa độ thứ i do lực đơn vị tại tọa độ thứ j gây ra.

Điều kiện *hình học* trong bài toán này chính là điều kiện chuyển vị thẳng đứng tại điểm B (D_1) và chuyển vị xoay tại điểm C (D_2) bị triệt tiêu.

Chuyển vị tổng cộng tại các tọa độ đã chọn là tổ hợp các tác động của ngoại lực và các lực dư trên hệ tĩnh định đã được giải phóng. Như vậy, điều kiện hình học được viết:

$$\left.\begin{aligned} D_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = 0 \\ D_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{11.3}$$

Thế các biểu thức (11.1) của D_1, D_2 và (11.2) của $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ vào (11.3) có thể tìm được lực dư F_1 và F_2.

11.2 Ma trận độ mềm

Phương trình (11.3) có thể viết dưới dạng ma trận:

$$[f]\{F\} = \{-D\} \tag{11.4}$$

trong đó:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}; \; [f] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}; \; \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}.$$

Véc tơ $\{D\}$ phụ thuộc vào ngoại lực. Ma trận $[f]$ là các chuyển vị do lực dư đơn vị gây ra, do vậy ma trận $[f]$ chỉ phụ thuộc vào đặc trưng kết cấu và được gọi là ma trận độ mềm, các phần tử của ma trận này được gọi là hệ số ảnh hưởng mềm.

Các thành phần của véc tơ lực dư $\{F\}$ xác định từ phương trình sau:

$$\{F\} = [f]^{-1}\{-D\}. \tag{11.5}$$

Trong ví dụ ở hình 11.1:

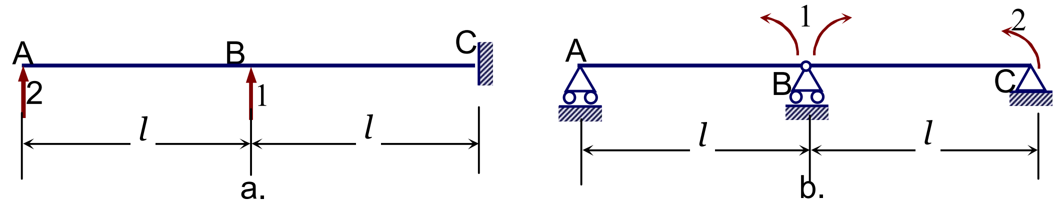
$$\{D\} = \frac{ql^3}{24EI}\begin{Bmatrix} -5l \\ -8 \end{Bmatrix};\quad [f] = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{6EI} & \frac{l^2}{4EI} \\ \frac{l^2}{4EI} & \frac{2l}{3EI} \end{bmatrix};\quad [f]^{-1} = \frac{12EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 8 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix}.$$

Giải phương trình (11.5) thu được các lực dư:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [f]^{-1}\{-D\} = \frac{12EI}{7l^3}\frac{ql^3}{24EI}\begin{bmatrix} 8 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 5l \\ 8 \end{Bmatrix} = \frac{ql}{14}\begin{Bmatrix} 16 \\ l \end{Bmatrix}.$$

Kết quả nhận được hệ lực tác động lên hệ tĩnh định như trên hình 11.1f. Sau đó, bằng phương pháp thông thường có thể tìm được nội lực và phản lực trong thanh.

Chú ý, ma trận độ mềm phụ thuộc vào hệ lực dư đã chọn. Cũng với ví dụ 11.1 này, có thể chọn hệ lực dư khác (hình 11.2).



Hình 11.2. Hệ lực dư khác nhau cho cùng một kết cấu siêu tĩnh

Áp dụng trình tự tính toán như đã trình bày ở trên cho hai hệ lực dư này, véc tơ chuyển vị, ma trận độ mềm và lực dư ứng với từng trường hợp như sau:

(a) $\{D\} = -\frac{ql^4}{24EI}\begin{Bmatrix} 48 \\ 17 \end{Bmatrix}; [f] = \frac{l^3}{6EI}\begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}; [f]^{-1} = \frac{6EI}{7l^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}; F = \frac{ql}{28}\begin{Bmatrix} 11 \\ 32 \end{Bmatrix}.$

(b) $\{D\} = \frac{ql^3}{24EI}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}; [f] = \frac{l}{6EI}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; [f]^{-1} = \frac{6EI}{7l}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; F = -\frac{ql^2}{28}\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}.$

Đáp ứng của kết cấu (phản lực và nội lực) xác định bằng tổ hợp ảnh hưởng của ngoại lực và lực dư:

$$A_i = A_{si} + \left(A_{ui1}F_1 + A_{ui2}F_2 + \cdots + A_{uin}F_n\right), \tag{11.6}$$

trong đó:

A_i là đáp ứng bất kỳ (có thể là phản lực tại gối đỡ, lực cắt, lực dọc trục, mô men xoắn và mô men uốn) tại mặt cắt nào đó của kết cấu thực.

A_{si} cũng là đáp ứng trên nhưng tính cho kết cấu đã giải phóng liên kết dưới tác động của ngoại lực.

A_{ui1}, A_{ui2},..., A_{uin} là đáp ứng tương ứng do lực đơn vị tác động tại các tọa độ 1,2, ...,n với kết cấu đã giải phóng liên kết.

F_1, F_2, ..., F_n là các lực dư tác động vào kết cấu đã giải phóng.

Biểu thức (11.6) dạng ma trận :

$$\{A\}_{m\times 1} = \{A_s\}_{m\times 1} + [A_u]_{m\times n}\{F\}_{n\times 1}, \tag{11.7}$$

trong đó:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{Bmatrix}, \{A_s\} = \begin{Bmatrix} A_{s1} \\ A_{s2} \\ \cdots \\ A_{sn} \end{Bmatrix}, \quad [A_u] = \begin{bmatrix} A_{u11} & A_{u12} & A_{u1n} \\ A_{u21} & A_{u22} & A_{u2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{um1} & A_{um2} & A_{umn} \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_n \end{Bmatrix}.$$

Chú ý, đơn vị của các thành phần của ma trận độ mềm không nhất thiết đồng nhất vì chúng có thể đại diện cho chuyển vị thẳng hay góc xoay.

Trong ví dụ 11.1, đáp ứng cần tìm chính là phản lực tại gối A và C. Từ hình 11.1c,d và e có được các véc tơ $\{A\}, \{A_s\}$ và ma trận $[A_u]$ cho phản lực gối đỡ như sau:

$$\{A\} \equiv \{R\} = \begin{Bmatrix} R_A \\ R_C \end{Bmatrix},$$

$$\{A_s\} \equiv \{R_s\} = \begin{Bmatrix} R_{As} \\ R_{Cs} \end{Bmatrix}, \quad R_{As} = R_{Cs} = ql \Rightarrow \{A_s\} = \begin{Bmatrix} ql \\ ql \end{Bmatrix},$$

$$[A_u] \equiv [R_u] = \begin{bmatrix} R_{Au1} & R_{Au2} \\ R_{Cu1} & R_{Cu2} \end{bmatrix},$$

$$R_{Au1} = R_{Cu1} = -\frac{1}{2}; \; R_{Au2} = R_{Cu2} = -\frac{1}{2l} \Rightarrow [A_u] = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1/l \\ 1 & -1/l \end{bmatrix}.$$

Sử dụng (11.7) tính được:

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_A \\ R_C \end{Bmatrix} = \{R_s\} + [R_u]\{F\} = \begin{Bmatrix} ql \\ ql \end{Bmatrix} - \frac{ql}{28}\begin{bmatrix} 1 & 1/l \\ 1 & -1/l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 16 \\ l \end{Bmatrix} = \frac{ql}{28}\begin{Bmatrix} 11 \\ 13 \end{Bmatrix}.$$

$$R_A = \frac{11ql}{28}; R_C = \frac{13ql}{28}.$$

11.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác nhau

Khi có p trường hợp tải khác nhau tác động lên kết cấu có thể sử dụng phương trình (11.3) để tìm lực dư mà không cần tính lại ma trận độ mềm, tổ hợp thành phương trình ma trận:

$$[F]_{n\times p} = [f]^{-1}_{n\times n}[-D]_{n\times p}. \tag{11.8}$$

Mỗi cột của [F] và [D] ứng với mỗi trường hợp tải. Đáp ứng của hệ (phản lực và nội lực) có thể tìm được từ phương trình ma trận tương đương với phương trình (11.7):

$$[A]_{m\times p} = [A_s]_{m\times p} + [A_u]_{m\times n}[F]_{n\times p}. \tag{11.9}$$

Ảnh hưởng của chuyển vị tại nút: tác động của môi trường

Phương pháp lực có thể dùng để giải các kết cấu chịu những ảnh hưởng khác ngoài lực tác động. Ví dụ như sự di chuyển của gối đỡ (do gối đỡ bị lún, hay do sự thay đổi nhiệt không đều của gối đỡ) gây ra nội lực.

Nếu kết cấu bị hạn chế chuyển vị cũng gây ra nội lực. Ví dụ như khi nhiệt độ thay đổi trong dầm không đồng đều.

Co ngót của bê tông cũng gây ra nội lực trong kết cấu như hiệu ứng thay đổi nhiệt. Hiệu ứng của bê tông dư ứng lực cũng gây ra nội lực.

Ảnh hưởng của chuyển vị tại tọa độ

Khi gối đỡ dịch chuyển theo những tọa độ lực dư đã chọn thì hệ phương trình (11.3) sẽ thay đổi. Khi đó điều kiện hình học có dạng:

$$\left.\begin{aligned} D_1 + f_{11}F_1 + f_{12}F_2 = \Delta_1 \\ D_2 + f_{21}F_1 + f_{22}F_2 = \Delta_2 \end{aligned}\right\}, \tag{11.10}$$

trong đó Δ_i là dịch chuyển của gối đỡ theo chiều của tọa độ thứ i.

Để tìm lực dư, có phương trình ở dạng ma trận:

$$\{F\} = [f]^{-1}\{\Delta - D\}, \tag{11.11}$$

với:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}.$$

Khi đó phương trình (11.8) sẽ thành:

$$[F]_{n\times p} = [f]_{n\times n}^{-1}[\Delta - D]_{n\times p}. \tag{11.12}$$

11.4 Năm bước giải của phương pháp lực

Bước 1. Chọn liên kết cần giải phóng và xác định các tọa độ. Đồng thời xác định $[A]_{m\times n}$ của các đáp ứng cần tìm và quy ước dấu nếu cần.

Bước 2. Xác định $[D]_{n\times p}$, $[\Delta]_{n\times p}$ và $[A_s]_{m\times p}$ do ngoại lực tác động lên hệ tĩnh định (hệ kết cấu đã giải phóng liên kết).

Bước 3. Thiết lập ma trận $[f]_{n\times m}$ và $[A_u]_{m\times p}$ do các lực dư đơn vị tác động lên hệ tĩnh định.

Bước 4. Tìm lực dư $[F]_{n\times p}$ từ phương trình hình học:

$$[f]_{n\times n}[F]_{n\times p} = [\Delta - D]_{n\times p}.$$

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ tổ hợp:

$$[A]_{m\times p} = [A_s]_{m\times p} + [A_u]_{m\times n}[F]_{n\times p}.$$

trong đó:

n, p, m tương ứng là số lực dư, số trường hợp tải, số đáp ứng (phản lực hay nội lực);

$[A]$ là đáp ứng cần xác định (lời giải cần tìm của bài toán);

$[A_s]$ là đáp ứng do ngoại lực tác động lên kết cấu đã giải phóng liên kết;

$[A_u]$ là đáp ứng do lực dư đơn vị tác động riêng biệt tại các tọa độ lên kết cấu đã giải phóng liên kết;

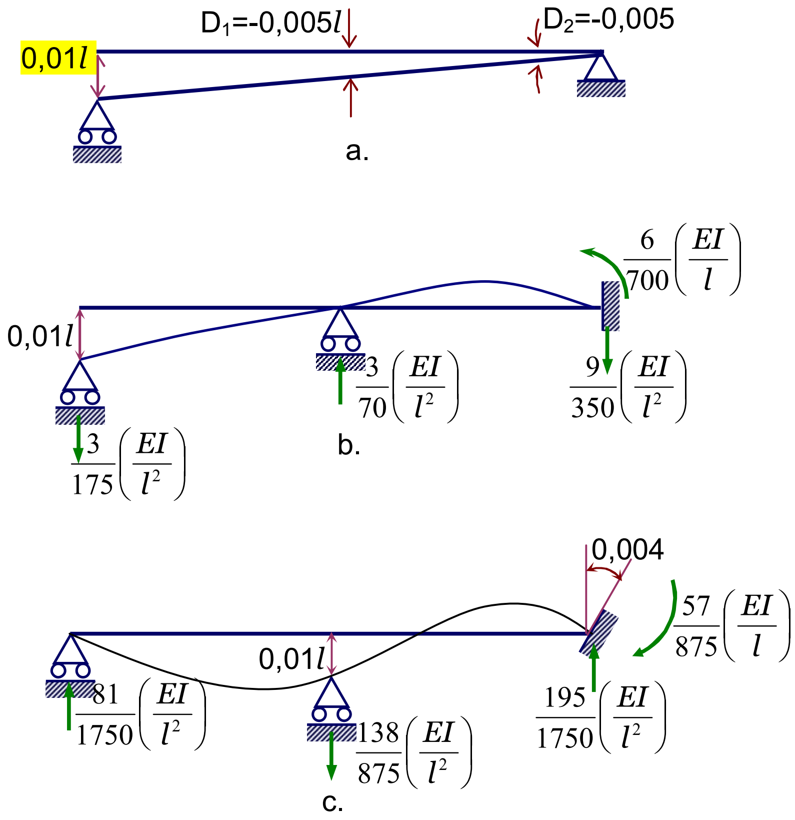
$[D]$ là chuyển vị do lực tác động gây ra tại các tọa độ. Chuyển vị này cần được triệt tiêu bằng các lực dư;

$[\Delta]$ là chuyển vị cho trước tại các gối đỡ;

$[f]$ là ma trận độ mềm.

Sau bước 3, các ma trận cần thiết để giải bài toán đã được xác định. Hai bước còn lại đơn thuần là các phép tính đại số.

Ví dụ 11.2. Xét ví dụ ở hình 11.1 cho 2 trường hợp gối đỡ di chuyển: (a) Điểm A lún xuống một đoạn là $l/100$ (hình 11.3b); (b) Điểm B lún xuống một đoạn là $l/100$ và điểm C xoay theo chiều kim đồng hồ một góc là 0,004 rad (hình 11.3c).



Hình 11.3. Ví dụ tính toán với chuyển vị cho trước

Lời giải: Trường hợp (a) với hệ tọa độ như hình 11.1b, sự lún của gối A không ứng với tọa độ lực dư nên Δ=0, sai lệch về chuyển vị (hình 11.3a) được xác định:

$$\{D\}=\begin{Bmatrix}-0,005l\\-0,005\end{Bmatrix},\quad \{\Delta\}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}.$$

Trường hợp (b), chuyển vị cho trước này không gây ra sai lệch D=0 và trùng với tọa độ lực dư nên:

$$\{\Delta\}=\begin{Bmatrix}-0,01l\\0,004\end{Bmatrix},\quad \{D\}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\Rightarrow\ [\Delta-D]=\begin{Bmatrix}0,005l & -0,01l\\0,005 & 0,004\end{Bmatrix}.$$

Thế vào phương trình (11.12) có:

$$[F]=\frac{12EI}{7l^3}\begin{bmatrix}8 & -3l\\-3l & 2l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,005l & -0,01l\\0,005 & 0,004\end{bmatrix}=\frac{12EI}{7l^3}\begin{bmatrix}0,025l & -0,092l\\-0,005l^2 & 0,038l^2\end{bmatrix}.$$

Để tính phản lực tại gối đỡ, sử dụng ma trận $[R_u]$ đã tính ở ví dụ 11.1 vì vẫn giữ nguyên hệ tọa độ đã chọn. Còn ma trận $[R_s]=0$, nên:

$$[R]=\begin{bmatrix}R_{Aa} & R_{Ab}\\R_{Ca} & R_{Cb}\end{bmatrix}=[R_u][F]=-\frac{1}{2}\frac{12EI}{7l^2}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{l}\\1 & -\frac{1}{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,025 & -0,092\\-0,005l & 0,038l\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{12EI}{7l^2}\begin{bmatrix}0,01 & -0,027\\0,015 & 0,065\end{bmatrix}.$$

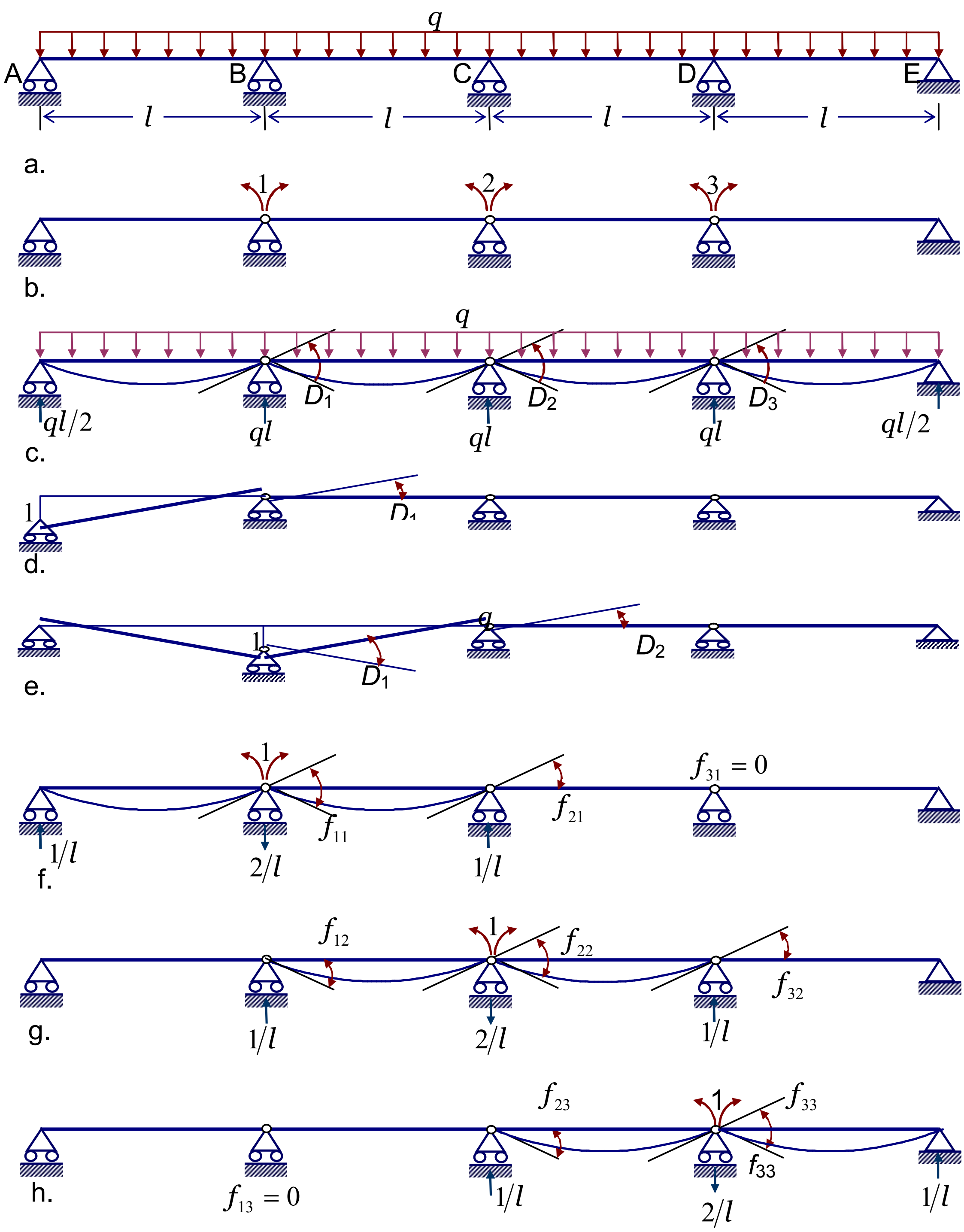
$$R_{A(a)}=-\frac{3}{175}\frac{EI}{l^2};R_{A(b)}=\frac{81}{1750}\frac{EI}{l^2};R_{C(a)}=-\frac{9}{350}\frac{EI}{l^2};R_{C(b)}=\frac{195}{1750}\frac{EI}{l^2}.$$

Ví dụ 11.3. Phân tích dầm liên tục, độ cứng không đổi EI (hình 11.4) với các trường hợp tải:

(a) Tải phân bố đều q (hình 11.4a);

(b) Gối A lún một đơn vị (hình 11.4d);

(c) Gối B lún một đơn vị (hình 11.4e).



Hình 11.4. Giải phóng liên kết cho hệ dầm liên tục bằng các khớp

Để đưa kết cấu thành tĩnh định có thể giải phóng liên kết bằng cách đưa vào các khớp ở các gối đỡ ở giữa. Bằng cách này giải phóng hai mô men bằng nhau về độ lớn nhưng ngược hướng tác động tại hai phía của gối đỡ, đưa kết cấu về một loạt các dầm đơn giản. Những mô men uốn đó được gọi là mô men liên kết.

Sự sai lệch về chuyển vị là các góc xoay tại các điểm nối của các dầm liền kề - góc giữa các đường tiếp tuyến của hai dầm liền kề (hình 11.4b).

Bước 1. Thực hiện trên hình 11.4b. Phản lực gối đỡ có: R_A, R_B, R_C, R_D, R_E.

Bước 2. Sử dụng phương trình 11.12 để tìm sai lệch chuyển vị cho cả 3 trường hợp:

– Trường hợp (a): tải phân bố (hình 11.4c), sử dụng phụ lục 6 tính được:

$$\{D\}_{THa} = \frac{ql^3}{12EI}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix},\quad \{\Delta\}_{THa} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \text{ và } \{R_S\}_{THa} = \begin{Bmatrix}\frac{ql}{2}\\ql\\ql\\ql\\\frac{ql}{2}\end{Bmatrix}$$

– Trường hợp gối A lún xuống một đơn vị (hình 11.4d) và trường hợp gối B lún xuống 1 đơn vị (hình 11.4e) đều không ứng với tọa độ của lực dư đã chọn nên véc tơ Δ bằng không, tính được chuyển vị sai lệch như sau:

$$\{D\}_{THb} = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}; \{D\}_{THc} = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix}-2\\1\\0\end{Bmatrix}; \{\Delta\}_{THb} = \{\Delta\}_{THc} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}; \{R_s\}_{THb} = \{R_s\}_{THc} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}.$$

Vậy ma trận $[\Delta - D]$ và ma trận $[A_s]$ có dạng:

$$[\Delta - D] = -\begin{bmatrix}\frac{ql^3}{12EI} & \frac{1}{l} & -\frac{2}{l}\\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & \frac{1}{l}\\ \frac{ql^3}{12EI} & 0 & 0\end{bmatrix},\ [A_s] = \begin{bmatrix}ql/2 & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql/2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Bước 3. Thiết lập ma trận $[f]$ và ma trận $[A_u]$. Đặt từng cặp lực dư là cặp mô men có độ lớn bằng 1 và ngược hướng vào các điểm B, C, D tương ứng; sử dụng phụ lục 6 để tính các thành phần của ma trận độ mềm (hình 11.4f, 11.4g và 11.4h):

$$[f]=\frac{l}{6EI}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow [f]^{-1}=\frac{3EI}{28l}\begin{bmatrix}15 & -4 & 1\\ -4 & 16 & -4\\ 1 & -4 & 15\end{bmatrix}.$$

Cũng trên hình 11.4f, 11.4g và 11.4h, thiết lập ma trận $[A_u]$:

$$[A_u]=\begin{bmatrix}1/l & 0 & 0\\ -2/l & 1/l & 0\\ 1/l & -2/l & 1/l\\ 0 & 1/l & -2/l\\ 0 & 0 & 1/l\end{bmatrix}.$$

Bước 4. Từ phương trình (11.12), tính được các mô men uốn tại các gối B, C, D. Mỗi cột trong ma trận $[F]$ ứng với từng trường hợp tải đã nêu trong ví dụ:

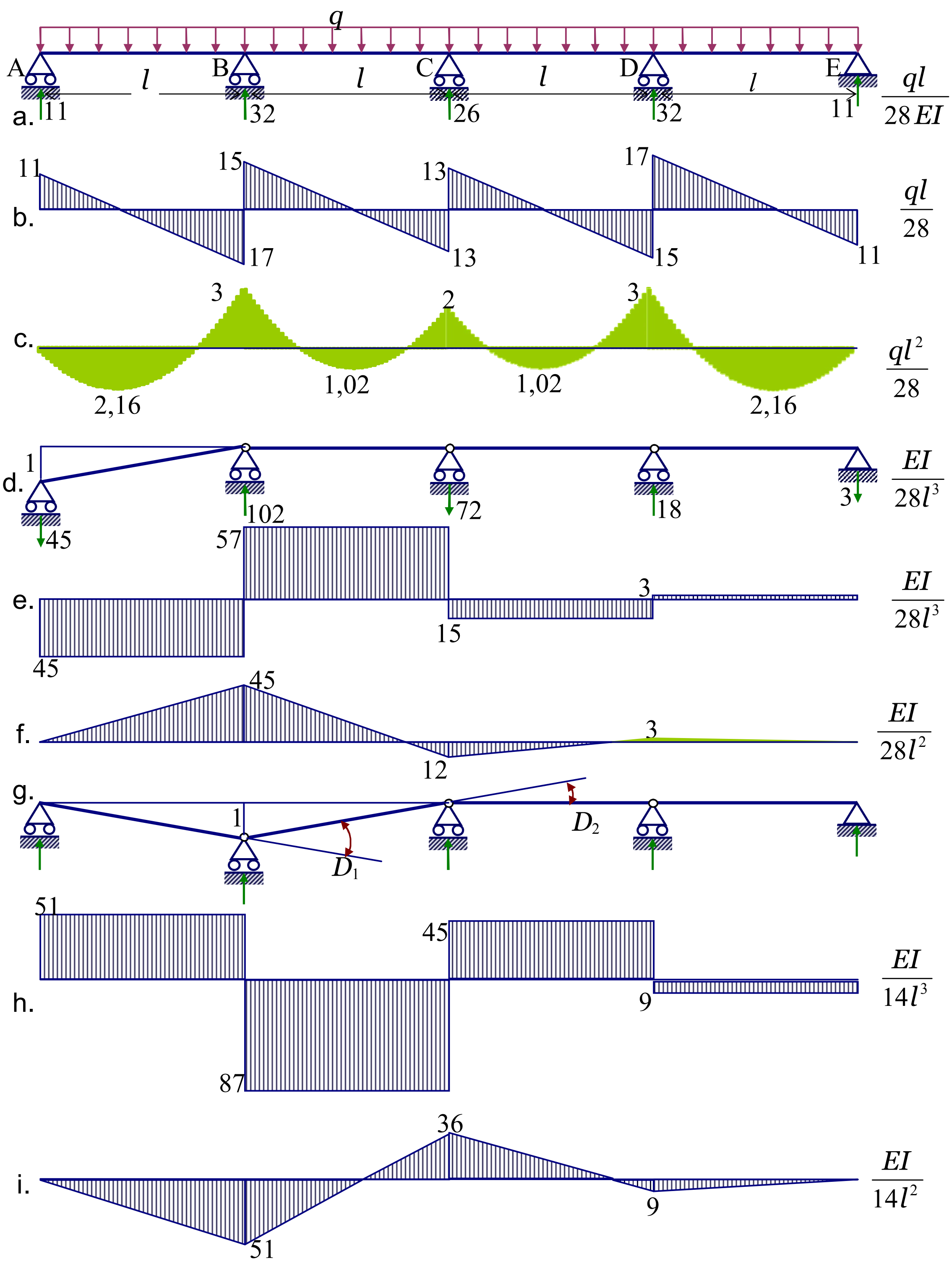
$$[F]=-\frac{3EI}{28l}\begin{bmatrix}15 & -4 & 1\\ -4 & 16 & -4\\ 1 & -4 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{ql^3}{12EI} & \dfrac{1}{l} & -\dfrac{2}{l}\\ \dfrac{ql^3}{12EI} & 0 & \dfrac{1}{l}\\ \dfrac{ql^3}{12EI} & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{3ql^2}{28} & -\dfrac{45EI}{28l^2} & \dfrac{51EI}{14l^2}\\ -\dfrac{ql^2}{14} & \dfrac{3EI}{7l^2} & -\dfrac{18EI}{7l^2}\\ -\dfrac{3ql^2}{28} & -\dfrac{3EI}{28l^2} & \dfrac{9EI}{14l^2}\end{bmatrix}.$$

Bước 5. Tính phản lực tại các gối R_A, R_B, R_C, R_D, R_E sử dụng phương trình (11.9) :

$$[A]=[A_s]+[A_u][F]$$

$$=\begin{bmatrix}ql/2 & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql & 0 & 0\\ ql/2 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/l & 0 & 0\\ -2/l & 1/l & 0\\ 1/l & -2/l & 1/l\\ 0 & 1/l & -2/l\\ 0 & 0 & 1/l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{3ql^2}{28} & -\dfrac{45EI}{28l^2} & \dfrac{51EI}{14l^2}\\ -\dfrac{ql^2}{14} & \dfrac{3EI}{7l^2} & -\dfrac{18EI}{7l^2}\\ -\dfrac{3ql^2}{28} & -\dfrac{3EI}{28l^2} & \dfrac{9EI}{14l^2}\end{bmatrix}.$$

Phản lực, biểu đồ lực cắt và mô men biểu diễn trên hình 11.5.



Hình 11.5. Biểu đồ nội lực cho dầm liên tục ở ví dụ 11.2

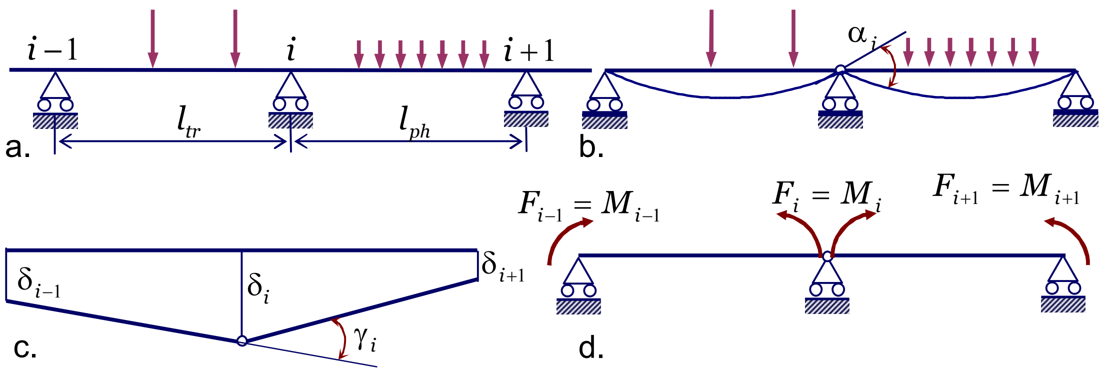
Giá trị cụ thể của các phản lực và nôi lực:

$$\begin{bmatrix} R_{Aa} & R_{Ab} & R_{Ac} \\ R_{Ba} & R_{Bb} & R_{Bc} \\ R_{Ca} & R_{Cb} & R_{Cc} \\ R_{Da} & R_{Db} & R_{Dc} \\ R_{Ea} & R_{Eb} & R_{Ec} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{28}ql & -\frac{45EI}{28l^3} & \frac{51EI}{14l^3} \\ \frac{32}{28}ql & \frac{102EI}{28l^3} & -\frac{138EI}{14l^3} \\ \frac{26}{28}ql & -\frac{72EI}{28l^3} & \frac{132EI}{14l^3} \\ \frac{32}{28}ql & \frac{18EI}{28l^3} & -\frac{54EI}{14l^3} \\ \frac{11}{28}ql & -\frac{3EI}{28l^3} & \frac{9EI}{14l^3} \end{bmatrix}.$$

11.5 Phương trình ba mô men

Trong thực tế thiết kế thường gặp bài toán phân tích dầm liên tục chịu lực cắt với các gối đỡ bị lún. Đơn giản hóa phương pháp lực áp dụng cho trường hợp cụ thể này dẫn đến phương trình ba mô men.

Trên hình 11.6, xét 2 nhịp dầm liền kề của dầm liên tục. Xét nhịp dầm bên trái và bên phải của gối đỡ thứ i với độ dài l_{tr} và l_{ph}, độ cứng EI_{tr} và EI_{ph}. Các gối đỡ là $i-1$, i, $i+1$ có độ lún tương ứng ký hiệu là δ_{i-1}, δ_i, δ_{i+1}.



Hình 11.6. Thiết lập phương trình cho gối i

Đưa về hệ tĩnh định bằng cách đưa các khớp tại gối đỡ sao cho mỗi nhịp dầm làm việc như một dầm đơn giản (ví dụ 11.3). Qui ước dấu như trong hình 11.6d.

Sự sai lệch về chuyển vị là góc xoay tương đối của các nhịp dầm liền kề, như trên hình 11.6b và 11.6c:

$$D_i = \alpha_i - \gamma_i . \tag{11.13}$$

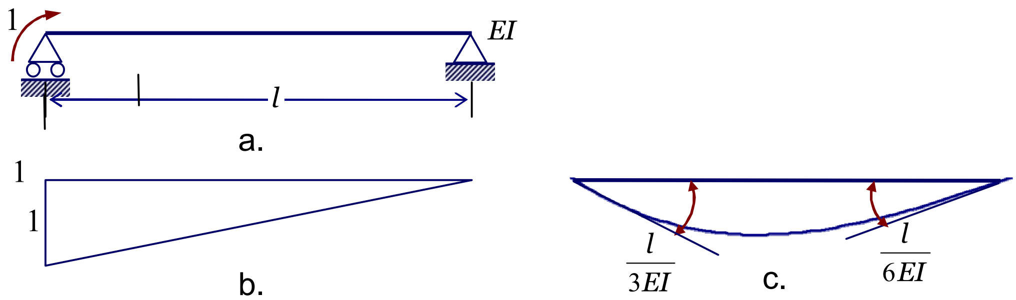
Các lực dư $\{F_i\}$ chính là các mô men liên kết $\{M_i\}$, giá trị của chúng phải đảm bảo sao cho góc xoay bị triệt tiêu. Phương trình thỏa mãn điều kiện liên tục tại điểm i:

$$D_i + f_{i,i-1}F_{i-1} + f_i F_i + f_{i,i+1}F_{i+1} = 0\,. \tag{11.14}$$

Các hệ số f_i là các hệ số độ mềm của kết cấu đã giải phóng. Trên hình 11.7a trình bày dầm đơn giản chịu mô men đơn vị tại một đầu, 11.7b là biểu đồ mô men và 11.7c là đường cong chuyển vị và các góc xoay tại A và B (phụ lục 6).

Áp dụng kết quả này nhận được các hệ số độ mềm:

$$f_{i,i-1} = \frac{l_{tr}}{6EI_{tr}}, \quad f_{i,i} = \frac{l_{tr}}{3EI_{tr}} + \frac{l_{ph}}{3EI_{ph}}, \quad f_{i,i+1} = \frac{l_{ph}}{6EI_{ph}}.$$



Hình 11.7. Các hệ số độ mềm

Như vậy, phương trình (11.14) có dạng:

$$M_{i-1}\frac{l_{tr}}{EI_{tr}} + 2M_i\left(\frac{l_{tr}}{EI_{tr}} + \frac{l_{ph}}{EI_{ph}}\right) + M_{i+1}\frac{l_{ph}}{EI_{ph}} = -6D_i\,. \tag{11.15}$$

Khi độ cứng trên toàn dầm không đổi, phương trình ba mô men có dạng:

$$M_{i-1}l_{tr} + 2M_i\left(l_{tr} + l_{ph}\right) + M_{i+1}l_{ph} = -6EID_i\,. \tag{11.16}$$

Viết phương trình này cho từng gối đỡ sẽ thu được hệ phương trình, lời giải của nó là các mô men cần tìm. Góc xoay D_i có thể tính được từ phương trình (11.13) với góc γ_i xác định từ hình 11.6c:

$$\gamma_i = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{l_l} + \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{l_r}, \tag{11.17}$$

và góc α_i có thể xác định bằng phụ lục 6.

Ví dụ 11.4. Tìm biểu đồ mô men cho dầm trên hình 11.8a với hai trường hợp tải như sau:

(a) Lực thẳng đứng như trên hình 11.8a.

(b) Gối đỡ B và C lún xuống một đoạn có giá trị là $b/100$ và $b/200$.

Độ cứng của dầm không đổi và bằng EI.

Lời giải: Phương trình ba mô men áp dụng cho nút A và B để tìm mô men tại đó. Tại điểm C, có thể dễ dàng tìm được; trường hợp (a) $M_C = \dfrac{qb^2}{2}$, trường hợp (b) $M_C = 0$.

Trước tiên, tìm sai lệch về chuyển vị theo công thức (11.13), chú ý; trường hợp (a) $\gamma = 0$ và trường hợp (b) $\alpha = 0$. Dùng phụ lục 6 và công thức (11.17) tìm được:

$$\{D\}_a = \begin{Bmatrix} 5{,}208\dfrac{qb^3}{EI} \\ 5{,}208\dfrac{qb^3}{EI} \end{Bmatrix} \; ; \; \{D\}_b = \begin{Bmatrix} 0{,}002 \\ -0{,}00325 \end{Bmatrix}.$$

Dùng phương trình (11.15), đối với trường hợp (a):

$$\frac{b}{EI}(10M_1 + 5M_2) = -6 \times 5{,}208\frac{qb^3}{EI}$$

$$\frac{b}{EI}\left(5M_1 + 18M_2 - 4\frac{qb^2}{2}\right) = -6 \times 5{,}208\frac{qb^3}{EI}$$

và trường hợp (b):

$$\frac{b}{EI}(10M_1 + 5M_2) = -6 \times 0{,}002$$

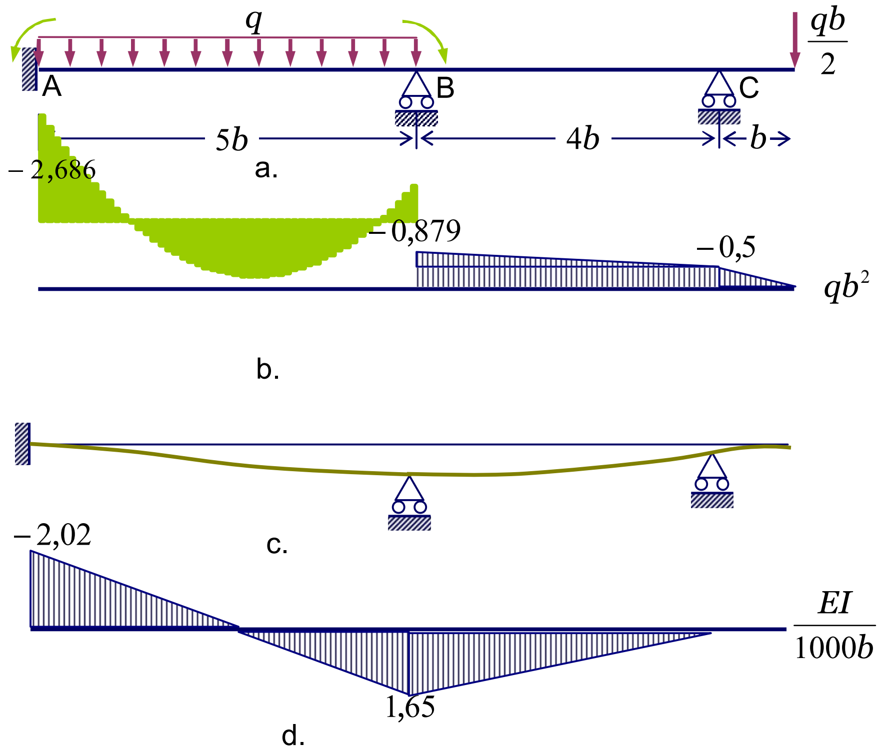
$$\frac{b}{EI}(5M_1 + 18M_2) = 6 \times 0{,}00325$$

Có thể viết chung dưới dạng ma trận:

$$\frac{b}{EI}\begin{bmatrix}10 & 5\\ 5 & 18\end{bmatrix}[M]=\begin{bmatrix}-31{,}25\dfrac{qb^3}{EI} & -0{,}0120\\ -29{,}25\dfrac{qb^3}{EI} & 0{,}0195\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [M]=\begin{bmatrix}-2{,}686qb^2 & -2{,}02\dfrac{EI}{1000b}\\ -0{,}879qb^2 & 1{,}65\dfrac{EI}{1000b}\end{bmatrix}.$$

Biểu đồ mô men được biểu diễn trên hình 11.8 b và c.



Hình 11.8. Biểu đồ nội lực cho dầm trong ví dụ 11.4

Chú ý trường hợp (a), khi vẽ biểu đồ mô men để tìm phương trình của đường parabol cho đoạn dầm chịu lực phân bố phải tìm phản lực tại điểm A. Phản lực đó có thể tìm được vì đã biết mô men tại A và tại B, cụ thể:

$$M_B = M_A + \frac{q(5b)^2}{2} - 5bR_A \Rightarrow R_A = \frac{M_A}{5b} - \frac{M_B}{5b} + \frac{5}{2}qb\,.$$

Phương trình parabol biểu diễn biểu đồ mô men trong đoạn AB có dạng:

$$M = -M_A + \frac{qx^2}{2} - R_A x .$$

Có thể vẽ theo cách đơn giản hơn: đặt giá trị mô men tại A và B, tạm thời nối lại bằng đường thẳng, trên đoạn AB có lực phân bố đều nên tại điểm giữa của đoạn thẳng vừa nối hạ xuống một đoạn là $ql^2/8$. Nối ba điểm bằng một đường parabol, nhận được biểu đồ mô men cho đoạn AB.

Đoạn BC và CD có thể dễ dàng vẽ được biểu đồ mô men. Vì không có lực tập trung cũng như lực phân bố nên biểu đồ mô men là các đường thẳng nối các điểm đã có giá trị mô men.

Tương tự như vậy, trường hợp (b) có nội lực sinh ra do sự lún của các gối đỡ. đã tính được mô men tại A và B, còn tại C mô men bằng không. Biểu đồ mô men là những đường thẳng nối các điểm với giá trị mô men đã biết.

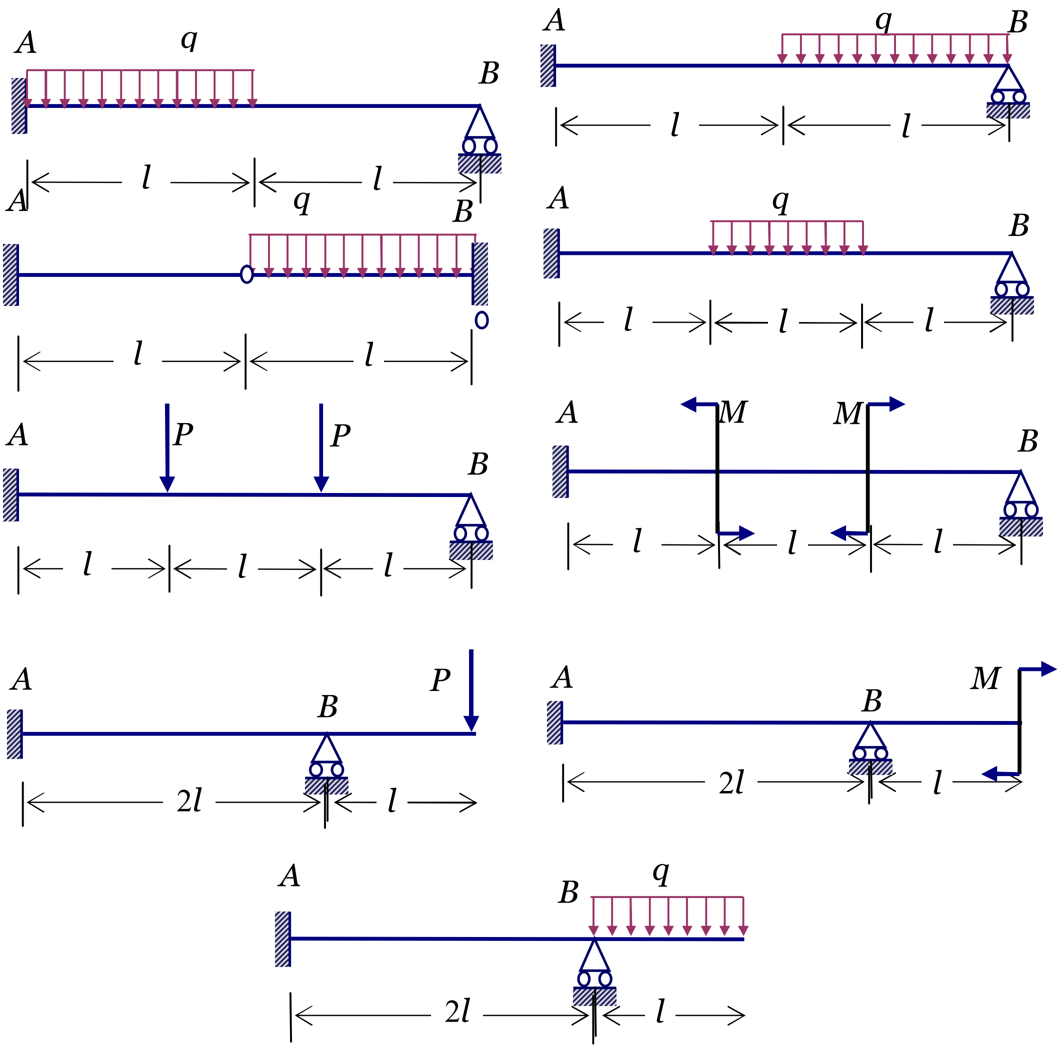
Kết luận chương 11

Phương pháp lực có thể áp dụng cho kết cấu bất kỳ chịu tải trọng môi trường.

- Lời giải của phương trình tương thích được xây dựng một cách trực tiếp cho các lực cần tìm.
- Số phương trình bằng với số lực dư và bằng với bậc siêu tĩnh.
- Phương pháp lực không thích hợp khi dùng máy tính vì việc lựa chọn lực dư làm ẩn số không duy nhất.

Bài tập chương 11

11.1 Dùng phương pháp lực, tìm phản lực tại các liên kết và vẽ biểu đồ M và Q cho các trường hợp dầm siêu tĩnh trong các hình ở hình 11.9. Độ cứng của các dầm không thay đổi và bằng EI

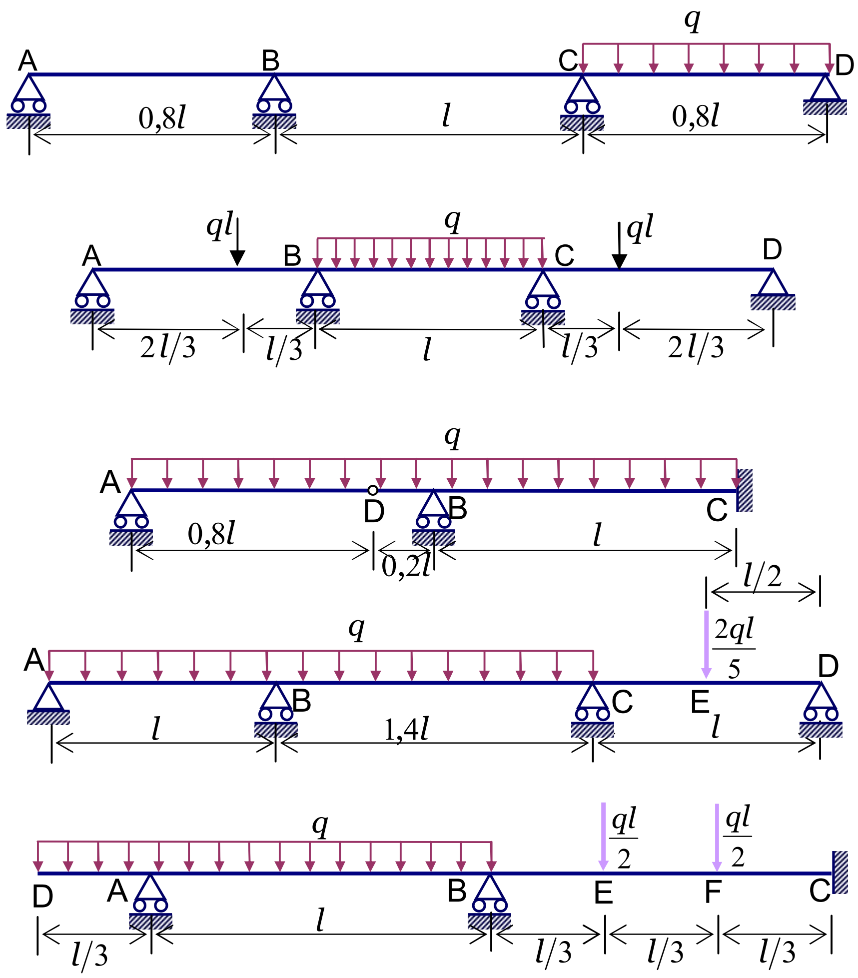


Hình 11.9

11.2 Dùng phương trình ba mô men, vẽ biểu đồ mô men và biểu đồ lực cắt của các dầm liên tục như trên hình 11.10 với hai trường hợp tải trọng:

- Chịu tải trọng bên ngoài như trên hình vẽ.
- Gối đỡ B lún xuống một đoạn bằng $l/2000$.

Độ cứng của các dầm không thay đổi và bằng EI.



Hình 11.10

CHƯƠNG 12
Phương pháp chuyển vị

12.1 Mô tả phương pháp

1. Vì phương pháp chuyển vị chọn các chuyển vị làm ẩn nên cần xác định bậc tự do của hệ. Thiết lập hệ tọa độ để xác định vị trí và hướng của các chuyển vị nút. Số lực hạn chế bằng với số bậc tự do được đặt vào các tọa độ để ngăn cản chuyển vị tại các nút. Chú ý ở đây lực hạn chế không phải lựa chọn, không như lực dư ở phương pháp lực dẫn đến cách lựa chọn là không duy nhất. Đây là ưu điểm khi lập chương trình tính toán phân tích kết cấu.

2. Sau đó các lực hạn chế được xác định như tổng các lực đầu phần tử của tất cả các phần tử nối vào nút. Phụ lục 7 và phụ lục 8 là bảng lực đầu phần tử cho các trường hợp chịu lực thường gặp.

Chú ý lực hạn chế cần ngăn cản chuyển vị do mọi tác động, ví dụ như ngoại lực, thay đổi nhiệt độ hay dư ứng lực. Các hiệu ứng có thể xem xét riêng biệt hay đồng thời. Trường hợp kể đến tác động do sự di chuyển của các nút trong kết cấu, ví dụ như sự lún của gối đỡ, thì các lực gây nên sự di chuyển đó phải được kể đến trong lực hạn chế.

Nội lực tại các vị trí cần tìm của phần tử cũng được xác định cho cấu hình đã bị hạn chế.

3. Kết cấu được giả thiết là biến dạng theo cách sau: một tọa độ được giả thiết là có chuyển vị đơn vị, còn các tọa độ khác cho chuyển vị bằng không. Sau đó xác định lực cần thiết để giữ kết cấu ở cấu hình giả định trên. Các lực này đặt vào các tọa độ đại diện cho bậc tự do. Đồng thời ứng với cấu hình giả định này xác định các nội lực tại các vị trí cần tìm. Bước tính này được lặp lại cho từng tọa độ.

4. Tiếp theo xác định giá trị của các chuyển vị sao cho các lực hạn chế bị triệt tiêu. Sử dụng các phương trình tổng hợp cộng dồn các tác động của từng chuyển vị lên lực hạn chế.

5. Cuối cùng xác định lực trên kết cấu siêu tĩnh ban đầu bằng cách cộng các lực trên kết cấu đã bị hạn chế với lực do chuyển vị gây ra được xác định trong bước 4.

Ví dụ 12.1. Xét giàn phẳng trên hình 12.1a gồm m phần tử nối bằng khớp tại điểm A. Tìm nội lực trong các thanh dưới tác động của tổ hợp tải trọng sau:

(1) Ngoại lực P đặt tại điểm A.

(2) Thanh thứ k giãn dài một đoạn là Δ_k do nhiệt độ tăng trong thanh đó.

Bậc tự do của hệ đang xét là hai: chuyển dịch thẳng của nút A trong mặt phẳng theo hai trục x và y, ký hiệu là D_1 và D_2. Hướng của chuyển vị tùy chọn, ở đây chọn như hình 12.1b.

Trường hợp (1) hạn chế chuyển dịch của điểm A bằng cách đặt lực có độ lớn như lực P nhưng có hướng ngược lại. Các thành phần F_{11}, F_{21} theo các hướng 1, 2:

$$F_{11} = -P\cos\alpha ,$$

$$F_{21} = -P\sin\alpha .$$

Ký hiệu E_i, l_i và a_i là mô đun đàn hồi, độ dài và diện tích mặt cắt của thanh thứ i và đặt θ_i là góc với trục x của thanh thứ i.

Xét trường hợp (2) độ giãn dài Δ_k của thanh thứ k được hạn chế bằng một lực đặt vào điểm A gây ra sự nén của thanh cùng giá trị như sự giãn. Do vậy lực nén này cần có giá trị là $(a_k E_k / l_k)\Delta_k$. Các thành phần của lực nén này trên hai hướng 1 và 2 là:

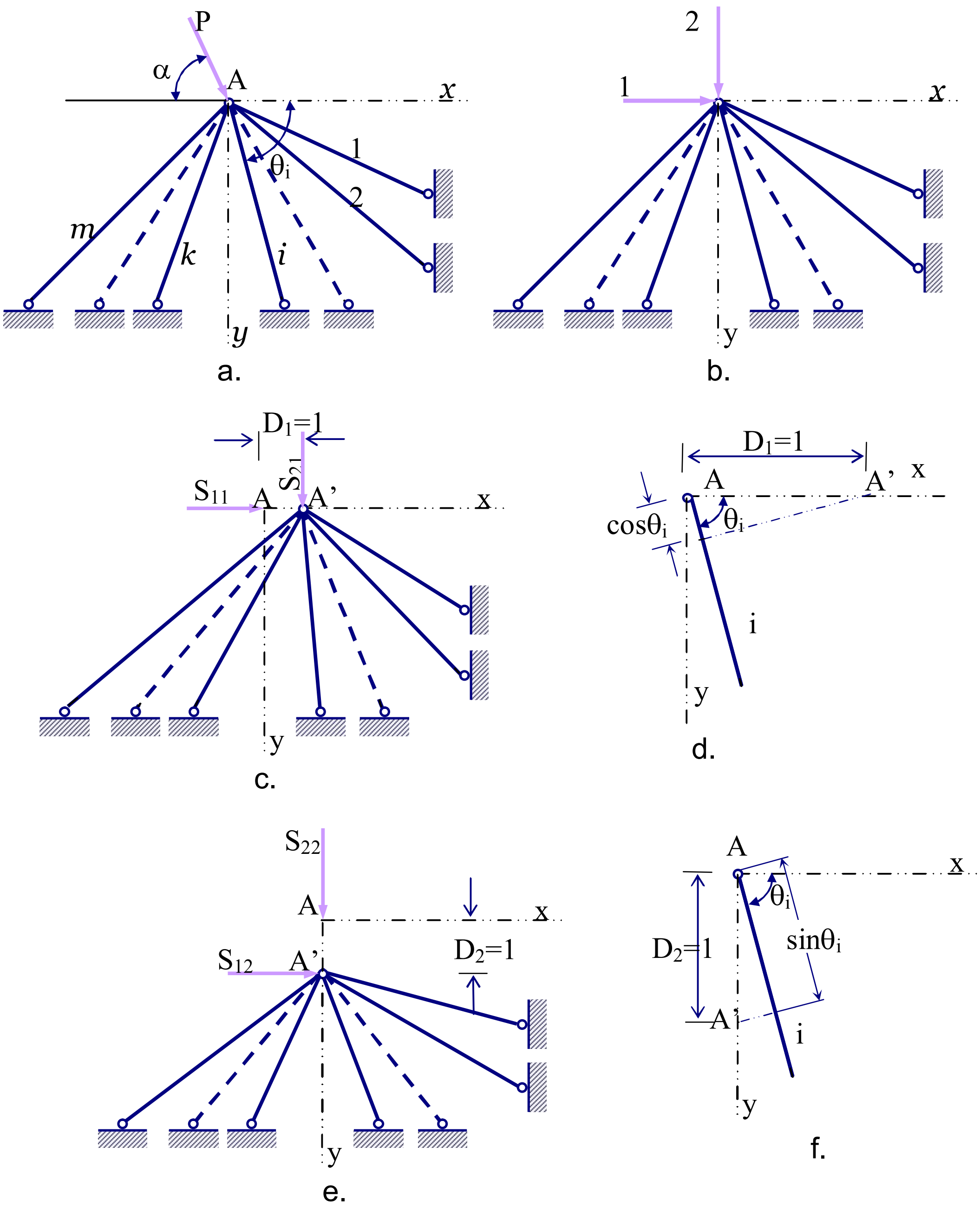
$$F_{12} = \frac{a_k E_k}{l_k}\Delta_k \cos\theta_k ,$$

$$F_{22} = \frac{a_k E_k}{l_k}\Delta_k \sin\theta_k .$$

Như vậy tổng lực hạn chế là:

$$F_1 = F_{11} + F_{12} ,$$

$$F_2 = F_{21} + F_{22} .$$



Hình 12.1. Mô tả phương pháp chuyển vị

Có thể thấy, khi chuyển vị bị ngăn cản, sẽ không có nội lực ở các thanh trong trường hợp (1), còn trường hợp (2) chỉ có thanh thứ k có lực nén, các thanh còn lại không có nội lực. Ký hiệu $\{A_r\}$ là véc tơ lực dọc trục trong các thanh trong điều kiện kết cấu bị hạn chế chuyển vị:

$$A_{r1} = 0,$$
$$A_{r2} = 0,$$
$$\ldots$$
$$A_{rk} = -\frac{a_k E_k}{l_k}\Delta_k,$$
$$\ldots$$
$$A_{rm} = 0.$$

Trên hình 12.1c biểu diễn các lực cần để kết cấu biến dạng ở cấu hình mà $D_1 = 1$ và $D_2 = 0$. Hình 12.1d cho thấy chuyển vị sang ngang một đơn vị làm thanh i bất kỳ ngắn đi một đoạn $\cos\theta_i$ và gây ra lực nén $(a_i E_i / l_i)\cos\theta_i$ dọc thanh thứ i. Do vậy để giữ điểm A ở cấu hình này cần đặt lực có các thành phần $(a_i E_i / l_i)\cos^2\theta_i$ và $(a_i E_i / l_i)\cos\theta_i \sin\theta_i$ theo các hướng 1 và 2. Vậy tổng lực cần để tất cả các thanh ở đúng cấu hình này là:

$$S_{11} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\cos^2\theta_i$$

và $S_{21} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\cos\theta_i \sin\theta_i$.

Tương tự, như vậy để điểm A ở cấu hình mà $D_1 = 0$ và $D_2 = 1$ (hình 12.1e và f) cần đặt các lực sau:

$$S_{12} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\cos\theta_i \sin\theta_i$$

và $S_{22} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i E_i}{l_i}\sin^2\theta_i$.

Các phần tử S_{ij} có 2 chỉ số: chỉ số thứ nhất là chỉ số tọa độ của lực hạn chế, chỉ số thứ hai là chỉ số của thành phần chuyển vị có giá trị đơn vị.

Trong thực tế, điểm A dịch chuyển đi các đoạn D_1 và D_2 theo hướng 1 và 2, và không có lực hạn chế nào cả. Do vậy tổ hợp của lực hạn chế và tác động của chuyển vị thật phải bằng không. Từ quan hệ tĩnh học thể hiện sự thật là khi điểm A có chuyển vị D_1 và D_2 thì các lực hạn chế bằng không có biểu thức:

$$\left.\begin{aligned} F_1 + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 = 0 \\ F_2 + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{12.1}$$

12.2 Ma trận độ cứng

Phương trình (12.1) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\{F\} + [S]\{D\} = 0\,,$$

$$[S]\{D\} = \{-F\}\,, \tag{12.2}$$

trong đó $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix};\quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix};\quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}.$

(có thể so sánh với phương trình quan hệ hình học (11.4) ở phương pháp lực).

Véc tơ $\{F\}$ phụ thuộc vào tải trọng của kết cấu. Thành phần của ma trận $[S]$ là các lực ứng với chuyển vị đơn vị. Do vậy ma trận $[S]$ chỉ phụ thuộc vào đặc trưng kết cấu, thể hiện độ cứng của kết cấu. Vì vậy $[S]$ được gọi là ma trận độ cứng và các thành phần của nó được gọi là các hệ số độ cứng.

Các thành phần của véc tơ chuyển vị $\{D\}$ xác định từ:

$$\{D\} = [S]^{-1}\{-F\}. \tag{12.3}$$

Trường hợp chung, khi hệ có n bậc tự do thì có kích cỡ của $\{D\}_{n\times 1}$, $[S]_{n\times n}$, $\{F\}_{n\times 1}$. Ma trận $[S]$ là ma trận vuông đối xứng.

Nội lực trong thanh i bất kỳ được xác định bằng tổ hợp của các điều kiện hạn chế và tác động của các chuyển vị nút:

$$A_i = A_{ri} + \left(A_{ui1}D_1 + A_{ui2}D_2 + \cdots + A_{uin}D_n\right). \tag{12.4}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\{A\} = \{A_r\} + [A_u]_{m\times n}\{D\}, \tag{12.5}$$

trong đó thành phần của $\{A\}$ là tổng nội lực trong các thanh, thành phần của $\{A_r\}$ là nội lực trong các thanh dưới điều kiện hạn chế và thành phần của $[A_u]$ là nội lực trong các thanh ứng với các chuyển vị đơn vị. Cột j của $[A_u]$ là nội lực trong các thanh khi $D_j = 1$ và các chuyển vị còn lại $D_k = 0$ khi $k = 1,\cdots, j-1, j+1,\cdots,n$.

Trong ví dụ ở hình 12.1:

$$[A_u] = \begin{bmatrix} -\frac{a_1E_1}{l_1}\cos\theta_1 & -\frac{a_1E_1}{l_1}\sin\theta_1 \\ -\frac{a_2E_2}{l_1}\cos\theta_2 & -\frac{a_2E_2}{l_2}\sin\theta_2 \\ \\ -\frac{a_mE_m}{l_m}\cos\theta_m & -\frac{a_mE_m}{l_m}\sin\theta_m \end{bmatrix}.$$

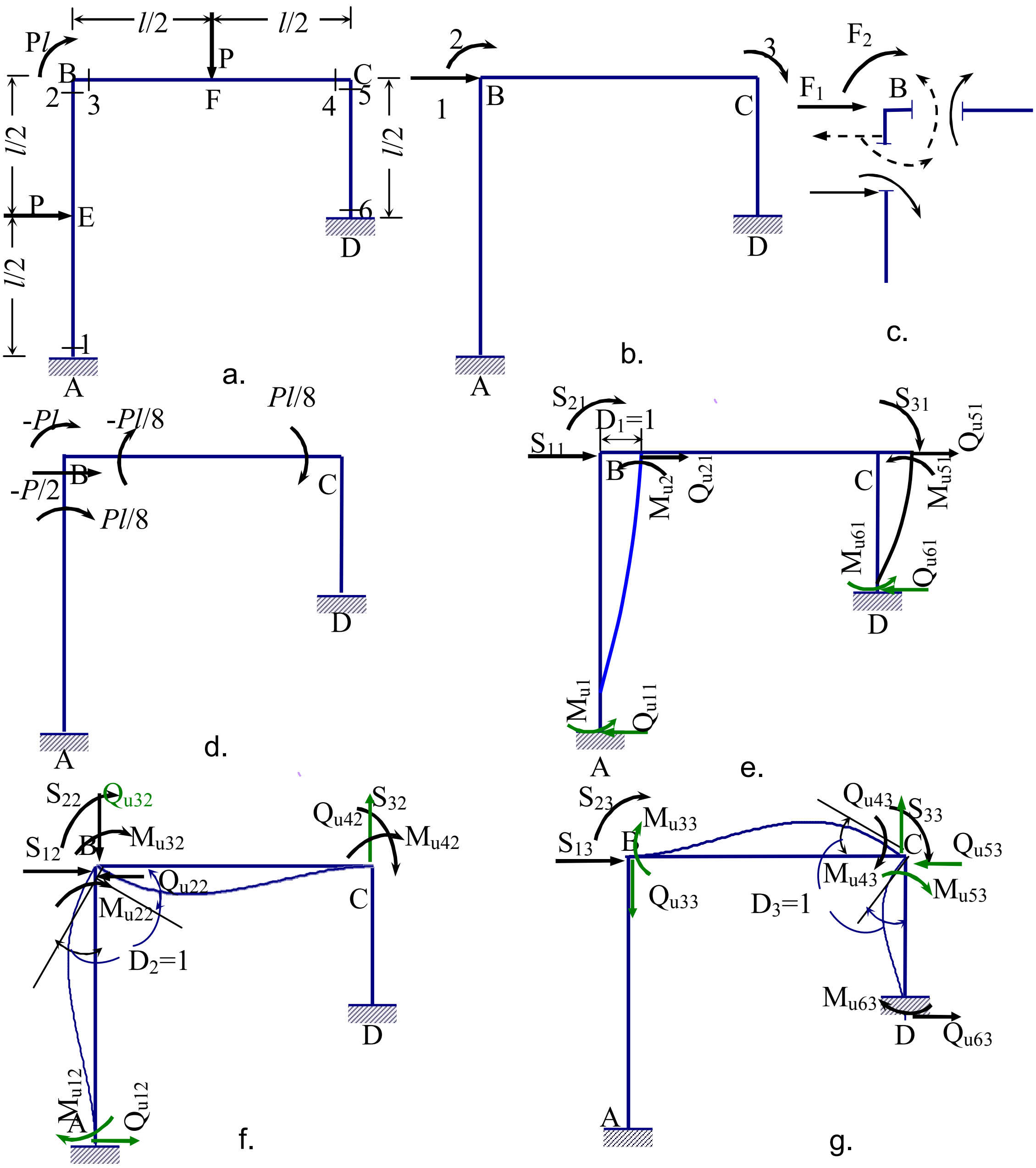
Khi xét khung với các liên kết ngàm ở nút cần tìm nội lực ở mặt cắt hay ở gối đỡ. Chính vì vậy có phương trình ở dạng tổng quát (12.5), ở đây $\{A\}$ có thể là đáp ứng bất kỳ - lực cắt, lực dọc trục, mô men uốn hay mô men xoắn.

Ví dụ 12.2. Xét khung phẳng trên hình 12.2a gồm các phần tử có cùng độ cứng EI được nối cứng với nhau. Xác định biểu đồ mô men cho khung dưới tác động của lực P ở E và F và ngẫu lực Pl tại điểm B. Bỏ qua sự thay đổi độ dài của thanh.

Hệ có 3 bậc tự do, như hình 12.2b, đó là chuyển vị ngang (nút B và C như nhau vì coi độ dài thanh không đổi), góc xoay tại B và tại A. Hệ tọa độ như trong hình 12.2b. Lực hạn chế là tổng các lực đầu phần tử ở các thanh, tính được bằng phụ lục 8.

Hình 12.2c biểu diễn quan hệ giữa lực đầu phần tử và lực hạn chế chuyển vị. Các lực tác động là ở nút biểu diễn bằng các mũi tên liền, còn lực hạn chế có giá trị bằng và hướng ngược lại bằng mũi tên ngắt quãng. Như vậy cần đặt vào điểm B các lực F_1 và F_2 cùng hướng với các mũi tên ngắt quãng để ngăn cản chuyển vị. Do vậy để có được các lực hạn chế này chỉ cần thêm các lực đầu phần tử như hình 12.2d. Các lực hạn chế chuyển vị tại điểm B và điểm C cho dưới đây:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -0{,}5P \\ (0{,}125Pl - 0{,}125Pl - Pl) \\ 0{,}125Pl \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ -l \\ 0{,}125l \end{Bmatrix}. \quad \text{(a)}$$



Hình 12.2. Lập ma trận độ cứng cho ví dụ 12.2

Để vẽ biểu đồ nội lực cần xác định mô men và lực cắt tại các mặt cắt ở hai đầu thanh. Ký hiệu 1, 2, 3, 4, 5, 6 là các mặt cắt tại các đầu thanh như trên hình 12.2a. Quy ước dấu mô men dương quay theo chiều kim đồng hồ, lực cắt dương làm thanh võng xuống. Các giá trị của 6 mô men và lực cắt ứng với điều kiện hạn chế chuyển vị sẽ là:

$$\{M_r\} = \frac{Pl}{8}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \ \{Q_r\} = -\frac{P}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Các phần tử của ma trận độ cứng chính là các lực ở các tọa độ cần để đưa kết cấu đến vị trí như hình 12.2e, 12.2f, 12.2d. Các lực này bằng tổng các lực đầu phần tử tính theo phụ lục 8.

– Trường hợp $D_1 = 1; D_2 = 0; D_3 = 0$:

$$S_{11} = \frac{12EI}{l^3} + \frac{12EI}{(l/2)^3} = \frac{108EI}{l^3},$$

$$S_{21} = -\frac{6EI}{l^2},$$

$$S_{31} = -\frac{6EI}{(l/2)^2} = -\frac{24EI}{l^2},$$

– rường hợp $D_1 = 0; D_2 = 1; D_3 = 0$:

$$S_{12} = -\frac{6EI}{l^2},$$

$$S_{22} = \frac{8EI}{l},$$

$$S_{32} = \frac{2EI}{l},$$

– Trường hợp $D_1 = 0; D_2 = 0; D_3 = 1$:

$$S_{13} = -\frac{6EI}{(l/2)^2} = -\frac{24EI}{l^2},$$

$$S_{23} = \frac{2EI}{l},$$

$$S_{33} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l/2} = \frac{12EI}{l},$$

Ma trận độ cứng $[S]$ có dạng:

$$[S]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}108 & -6l & -24l\\ -6l & 8l^2 & 2l^2\\ -24l & 2l^2 & 12l^2\end{bmatrix}\quad [S]^{-1}=\frac{l^2}{1368EI}\begin{bmatrix}23l & 6 & 45\\ 6 & 108/l & -18/l\\ 45 & -18/l & 207/l\end{bmatrix}. \qquad \text{(b)}$$

Thế (a) và (b) vào phương trình (12.3) nhận được:

$$\{D\}=[S]^{-1}\{-F\}=\frac{Pl^2}{1368EI}\begin{bmatrix}23l & 6 & 45\\ 6 & 108/l & -18/l\\ 45 & -18/l & 207/l\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5\\ l\\ -0.125l\end{Bmatrix}=\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix}0,0087l\\ 0,1355\\ -0,0156\end{Bmatrix}.$$

Để viết ma trận nội lực đầu thanh gây ra do chuyển vị đơn vị, đặt các giá trị mô men (lực cắt) tại các mặt cắt 1, 2, ..., 6 vào cột 1, 2 và 3 cho trường hợp chuyển vị đơn vị như trên hình 12.2e, 12.2f, 12.2g:

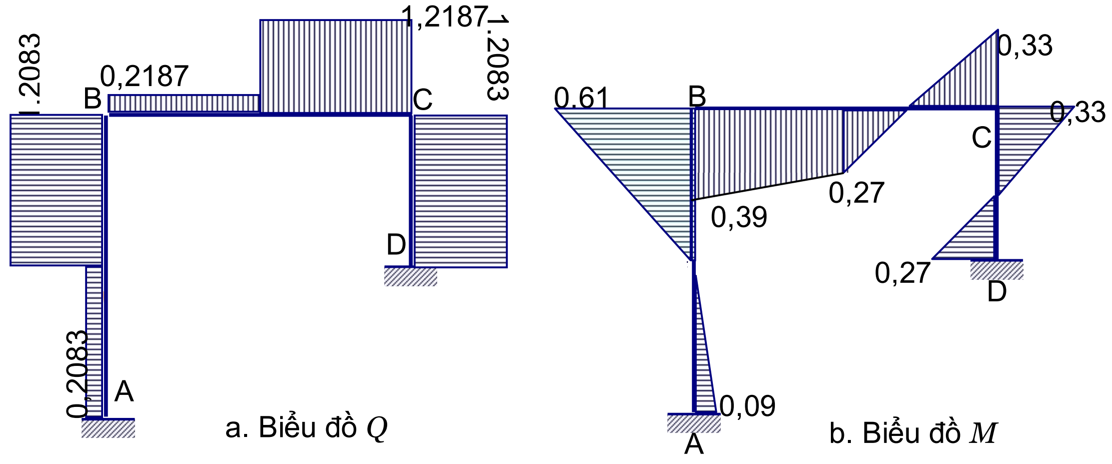
$$[M_u]=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}-6/l & 2 & 0\\ -6/l & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ -24/l & 0 & 8\\ -24/l & 0 & 4\end{bmatrix};\ [Q_u]=\frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix}-12/l & 6 & 0\\ 12/l & -6 & 0\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & -6 & -6\\ 96/l & 0 & -24\\ -96/l & 0 & 24\end{bmatrix}.$$

Mô men (lực cắt) tại các mặt cắt đầu thanh được tính bằng phương trình (12.5):

$$\{M\}=\frac{Pl}{8}\begin{Bmatrix}-1\\ 1\\ -1\\ 1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}-6/l & 2 & 0\\ -6/l & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ -24/l & 0 & 8\\ -24/l & 0 & 4\end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix}0,0087l\\ 0,1355\\ -0,0156\end{Bmatrix}=Pl\begin{Bmatrix}0,09375\\ 0,61458\\ 0,38542\\ 0,33333\\ -0,33333\\ -0,27083\end{Bmatrix};$$

$$\{Q\}=\frac{P}{2}\begin{Bmatrix}-1\\ -1\\ -1\\ -1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix}-12/l & 6 & 0\\ 12/l & -6 & 0\\ 0 & 6 & 6\\ 0 & -6 & -6\\ 96/l & 0 & -24\\ -96/l & 0 & 24\end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix}0,0087l\\ 0,1355\\ -0,0156\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0,20833\\ -1,20833\\ 0,21875\\ -1,21875\\ 1,20833\\ -1,20833\end{Bmatrix}:$$

Biểu đồ lực cắt và mô men trình bày trong hình 12.3a và 12.3b.



Hình 12.3 Biểu đồ lực cắt và mô men cho ví dụ 12.2

Chú ý: Khi sử dụng các chương trình tính toán nói chung không bỏ qua biến dạng dọc trục. Lúc đó đối với khung phẳng tại mỗi nút có ba chuyển vị gồm: hai dịch chuyển thẳng và một góc xoay. Tại mỗi mặt cắt có ba nội lực gồm: lực dọc trục, lực cắt và mô men. Phương trình (12.5) được áp dụng để tính cả ba nội lực này.

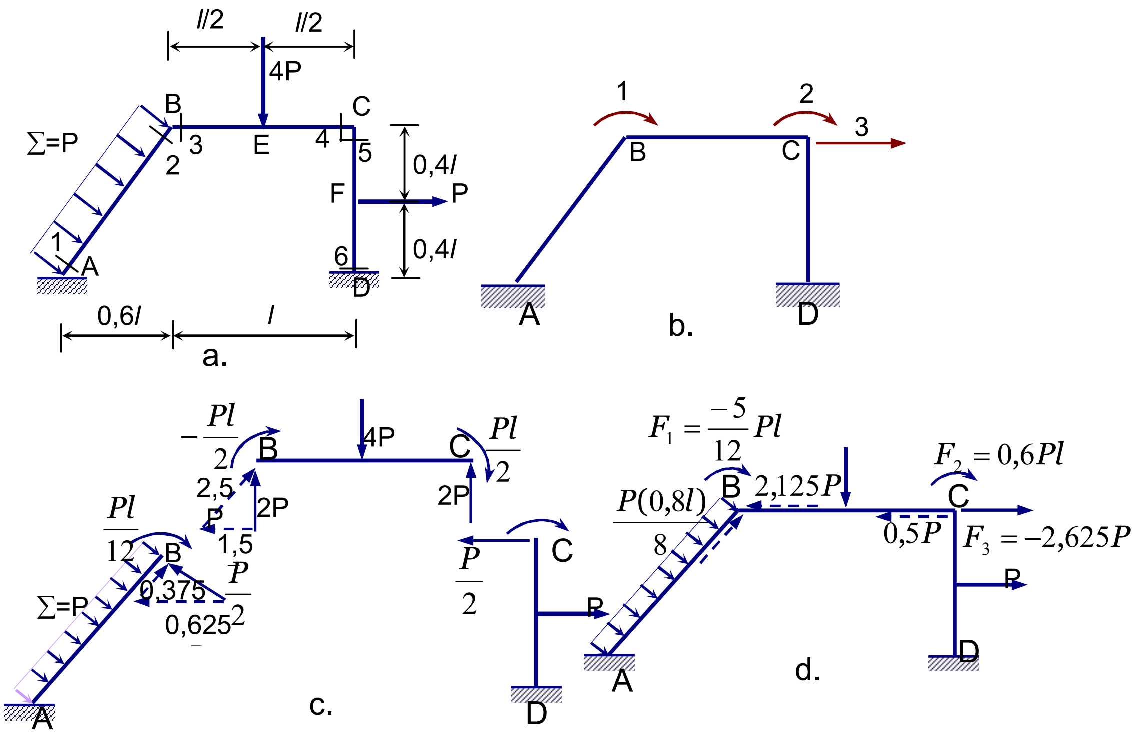
Khung với các thanh nghiêng được xét trong ví dụ 12.3.

Ví dụ 12.3. Vẽ biểu đồ mô men cho khung trên hình 12.4a. Độ cứng của thanh không đổi bằng EI. Bỏ qua biến dạng dọc trục.

Trên hình 12.4b. biểu diễn ba bậc tự do ứng với ba tọa độ: hai góc xoay và một dịch chuyển thẳng. Lực đầu phần tử do ngoại lực xác định trên hình 12.4c. Lực hạn chế F_1 và F_2 xác định bằng cách cộng mô men. Để tính lực F_3, tách các lực cắt tại nút B và nút C ra thành các thành phần dọc theo trục của phần tử (hình 12.4d), sau đó cộng các thành phần theo hướng của tọa độ thứ 3.

Như vậy:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{Pl}{12} - \dfrac{Pl}{2} \\ \dfrac{Pl}{2} + \dfrac{P(0{,}8l)}{8} \\ -0{,}625P - 1{,}5P - \dfrac{P}{2} \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -\dfrac{5}{12}l \\ 0{,}6l \\ -2{,}625 \end{Bmatrix}; \ \{M_r\} = Pl\begin{Bmatrix} -1/12 \\ 1/12 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ -0{,}1 \end{Bmatrix} \ \{Q_r\} = -\frac{P}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$



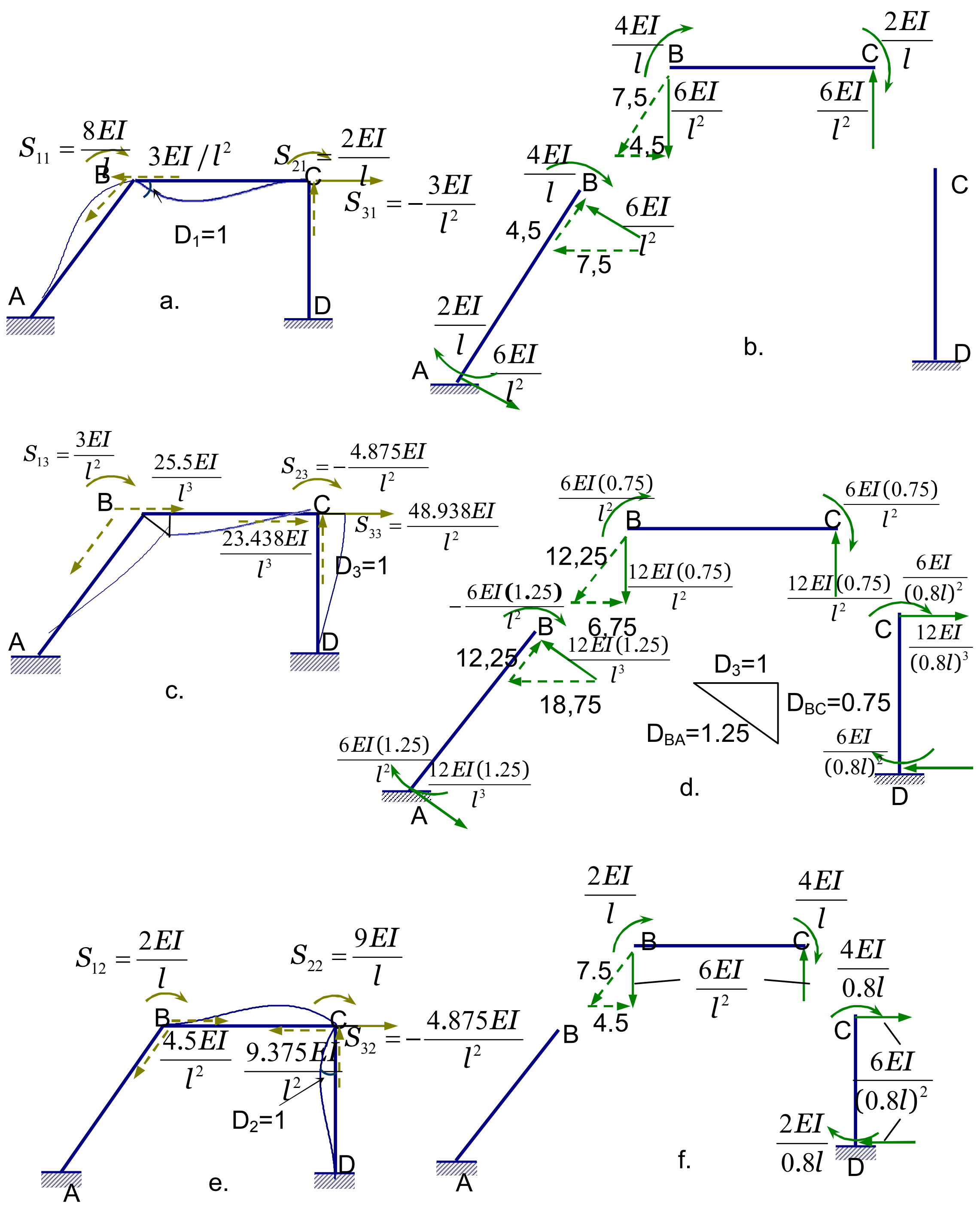
Hình 12.4

Để xác định các nội lực tại đầu phần tử ứng với từng trường hợp chuyển vị đơn vị sử dụng phụ lục 8, xem trên hình 12.5.

Khi $D_3 = 1$ dịch chuyển tương đối của các thanh AB và BC là $D_{BA} = 1{,}25$, $D_{BC} = 0{,}75$. Ma trận $[M_u]$ và $[Q_u]$ có dạng:

$$[M_u] = \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} 2l & 0 & -7{,}25 \\ 4l & 0 & -7{,}25 \\ 4l & 2l & 4{,}5 \\ 2l & 4l & 4{,}5 \\ 0 & 5l & -9{,}375 \\ 0 & 2{,}5l & -9{,}375 \end{bmatrix};$$

$$[Q_u] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6l & 0 & -15 \\ -6l & 0 & 15 \\ 6l & 6l & 9 \\ -6l & -6l & -9 \\ 0 & 6l & 23{,}4375 \\ 0 & -6l & -23{,}4375 \end{bmatrix}.$$



HÌnh 12.5. Thiết lập ma trận độ cứng cho hệ khung có thanh chéo

Để thiết lập ma trận độ cứng $[S]$, tính lực đầu phần tử như trên hình 12.5e, 12.5g và 12.5i, nhận được:

– Trường hợp $D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 0$:

$$S_{11} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l} = \frac{8EI}{l},$$
$$S_{21} = \frac{2EI}{l},$$
$$S_{31} = -\frac{7,5EI}{l^2} + \frac{4,5EI}{l^2} = -\frac{3EI}{l^2};$$

– Trường hợp $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 0$:

$$S_{12} = \frac{2EI}{l},$$
$$S_{22} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{0,8l} = \frac{9EI}{l},$$
$$S_{32} = \frac{4.5EI}{l^2} - \frac{6EI}{(0,8l)^2} = -\frac{4,875EI}{l^2};$$

– Trường hợp $D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1$:

$$S_{13} = -\frac{6EI(1,25)}{l^2} + \frac{6EI(0,75)}{l^2} = -\frac{3EI}{l^2},$$
$$S_{23} = \frac{6EI(0,75)}{l^2} - \frac{6EI}{(0,8l)^2} = -\frac{4,875EI}{l^2}, \qquad .$$
$$S_{33} = \frac{18,75EI}{l^3} + \frac{6,75EI}{l^3} + \frac{12EI}{(0,8l)^3} = \frac{48,9375EI}{l^3}.$$

Ma trận độ cứng [S] và nghịch đạo của nó:

$$\left[S\right] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 8l^2 & 2l^2 & -3l \\ 2l^2 & 9l^2 & -4,875l \\ -3l & -4,875l & 48,9375 \end{bmatrix};$$

$$\left[S\right]^{-1} = \frac{l}{24921EI}\begin{bmatrix} 3333,375 & -666 & 138l \\ -666 & 3060 & 264l \\ 138l & 264l & 544l^2 \end{bmatrix}.$$

Thế vào phương trình (12.2):

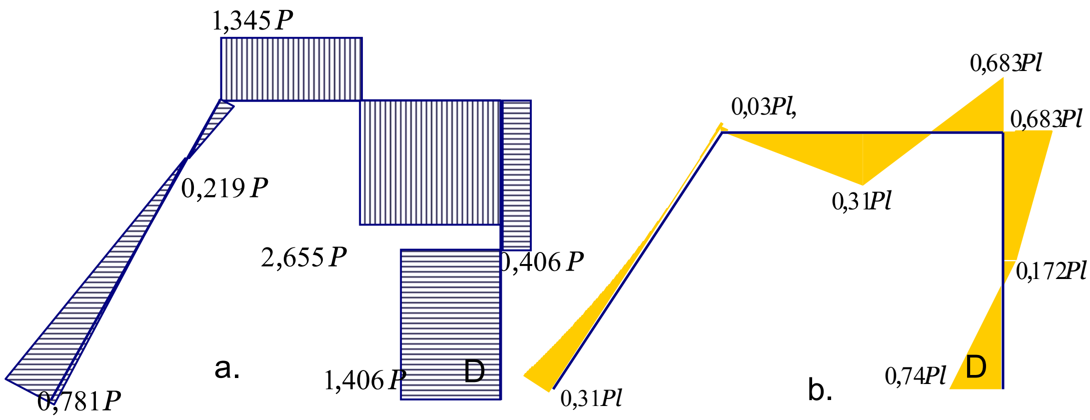
$$\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 8l^2 & 2l^2 & -3l \\ 2l^2 & 9l^2 & -4{,}875l \\ -3l & -4{,}875l & 48{,}9375 \end{bmatrix}\{D\} = P\begin{Bmatrix} 5l/12 \\ -0{,}6l \\ 2{,}625 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{D\} = \frac{Pl_2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0863 \\ -0{,}057 \\ 0{,}05325l \end{Bmatrix}$$

Để vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mô men phải tính nội lực tại các mặt cắt ở đầu các thanh. Sử dụng ma trận [M_u], [V_u], {M_r}, {V_r} và {D} đã tính được thế vào phương trình (12.5) nhận được:

$$\{M\} = Pl\begin{Bmatrix} -1/12 \\ 1/12 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}1 \\ 0{,}1 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} 2l & 0 & -7{,}5 \\ 4l & 0 & -7{,}5 \\ 4l & 2l & 4{,}5 \\ 2l & 4l & 4{,}5 \\ 0 & 5l & -9{,}375 \\ 0 & 2.5l & -9{,}375 \end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0863 \\ -0{,}057 \\ 0{,}05325l \end{Bmatrix} = Pl\begin{Bmatrix} -0{,}31012 \\ 0{,}029153 \\ -0{,}02915 \\ 0{,}684241 \\ -0{,}68424 \\ -0{,}74174 \end{Bmatrix};$$

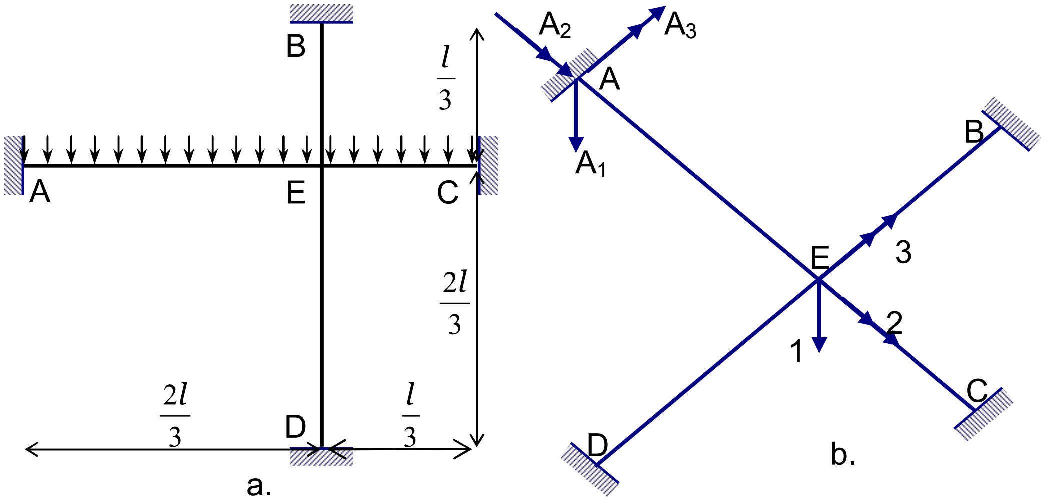
$$\{Q\} = P\begin{Bmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \\ -2 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6l & 0 & -15 \\ -6l & 0 & 15 \\ 6l & 6l & 9 \\ -6l & -6l & -9 \\ 0 & 6l & 23{,}4375 \\ 0 & -6l & -23{,}4375 \end{bmatrix}\frac{Pl^2}{EI}\begin{Bmatrix} 0{,}0863 \\ -0{,}057 \\ 0{,}05325l \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -0{,}780966 \\ -0{,}219034 \\ -1{,}344912 \\ -2{,}655088 \\ 0{,}4061 \\ -1{,}4061 \end{Bmatrix}.$$

Trên hình 12.6 biểu diễn biểu đồ lực cắt (hình 12.6a) và biểu đồ mô men (hình 12.6b).



Hình 12.6. Biểu đồ nội lực

Ví dụ 12.4. Tìm ba thành phần phản lực (lực thẳng đứng, mô men uốn và mô men xoắn) tại điểm A của khung ngang như trên hình 12.7 chịu tải trọng phân bố đều q trên đoạn AC. Tất cả các thanh có cùng diện tích mặt cắt ngang, và tỷ lệ giữa độ cứng xoắn và độ cứng uốn $GJ/EI = 0{,}5$.



Hình 12.7. Mạng dầm

Hệ có 3 bậc tự do là các chuyển vị tại điểm E, có tọa độ như trên hình 12.7b. Trên hình 12.7b biểu diễn các lực hạn chế chuyển dịch $\{F\}$và phản lực $\{A_r\}$ tại A khi bị hạn chế. Sử dụng phụ lục 7 để tính các lực này:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -\frac{q}{2}\frac{2l}{3} - \frac{q}{2}\frac{l}{3} \\ 0 \\ \frac{q}{12}\left(\frac{2l}{3}\right)^2 - \frac{q}{12}\left(\frac{l}{3}\right)^2 \end{Bmatrix} = q\begin{Bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ \frac{l^2}{36} \end{Bmatrix};\ \{A_r\} = \begin{Bmatrix} -\frac{q}{2}\frac{2l}{3} \\ 0 \\ -\frac{q}{12}\left(\frac{2l}{3}\right)^2 \end{Bmatrix} = q\begin{Bmatrix} -\frac{l}{3} \\ 0 \\ -\frac{l^2}{27} \end{Bmatrix}.$$

Để thiết lập ma trận độ cứng phần tử cũng như ma trận phản lực tại đầu A, với từng cấu hình biến dạng khi từng chuyển vị bằng đơn vị (còn các chuyển vị khác bằng không) sử dụng phụ lục 8. Khi đó có ma trận phản lực tại điểm A như sau:

$$[A_u] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} -40{,}5 & 0 & 13{,}5l \\ 0 & -0{,}75l^2 & 0 \\ -13{,}5l & 0 & 3l^2 \end{bmatrix}.$$

Các phần tử của ma trận độ cứng cho từng cấu hình được tính dưới đây:

– Trường hợp $D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 0$:

$$S_{11} = \frac{12EI}{l_{AE}^3} + \frac{12EI}{l_{EC}^3} + \frac{12EI}{l_{DE}^3} + \frac{12EI}{l_{EB}^3} = \frac{12EI}{l^3}\left(2\cdot\frac{3^3}{2^3} + 2\cdot 3^3\right) = 729\frac{EI}{l^3},$$

$$S_{21} = -\frac{6EI}{l_{BE}^2} + \frac{6EI}{l_{ED}^2} = -\frac{6EI}{l^2}\left(3^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) = -40,5\frac{EI}{l^2},$$

$$S_{31} = -\frac{6EI}{l_{AE}^2} + \frac{6EI}{l_{EC}^2} = \frac{6EI}{l^2}\left(3^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) = 40,5\frac{EI}{l^2};$$

– Trường hợp $D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 0$:

$$S_{12} = \frac{6EI}{l_{DE}^2} - \frac{6EI}{l_{EB}^2} = \frac{6EI}{l^2}\left(\frac{3^2}{2^2} - 3^2\right) = -40,5\frac{EI}{l^2},$$

$$S_{22} = \frac{GJ}{l_{AE}} + \frac{GJ}{l_{EC}} + \frac{4EI}{l_{DE}} + \frac{4EI}{l_{EB}} = \frac{EI}{l}\left(\frac{3}{2\cdot 2} + \frac{3}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + 4\cdot 3\right) = 20,25\frac{EI}{l},$$

$$S_{32} = 0;$$

– Trường hợp $D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 1$:

$$S_{13} = \frac{6EI}{l_{EC}^2} - \frac{6EI}{l_{AE}^2} = \frac{6EI}{l^3}\left(3^2 - \frac{3^2}{2^2}\right) = 40,5\frac{EI}{l^2},$$

$$S_{23} = 0,$$

$$S_{33} = \frac{GJ}{l_{DE}} + \frac{GJ}{l_{EB}} + \frac{4EI}{l_{AE}} + \frac{4EI}{l_{EC}} = \frac{EI}{l}\left(\frac{3}{2\cdot 2} + \frac{3}{2} + \frac{4\cdot 3}{2} + 4\cdot 3\right) = 20,25\frac{EI}{l}.$$

Ma trận độ cứng có dạng:

$$[S] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 729 & -40,5l & 40,5l \\ -40,5l & 20,25l^2 & 0 \\ 40,5l & 0 & 20,25l^2 \end{bmatrix}.$$

Thế vào phương trình (12.2) tìm được véc tơ chuyển vị:

$$\{D\} = \frac{ql^3}{EI}\begin{Bmatrix} 0,0010l \\ 0,0020 \\ -0,0034 \end{Bmatrix}.$$

Phản lực tại đầu A tìm được từ phương trình (12.5):

$$\{A\}=q\begin{Bmatrix}-\dfrac{l}{3}\\0\\-\dfrac{l^2}{27}\end{Bmatrix}+\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}-40,5 & 0 & 13,5l\\0 & -0,75l^2 & 0\\-13,5l & 0 & 3l^2\end{bmatrix}\frac{ql^3}{EI}\begin{Bmatrix}0,0010l\\0,0020\\-0,0034\end{Bmatrix}=ql\begin{Bmatrix}-0,4197\\-0,0015l\\-0,0611l\end{Bmatrix}.$$

12.3 Giải bài toán với các trường hợp đặt tải khác

Như đã nói ở mục 12.2, ma trận độ cứng chỉ phụ thuộc vào tính chất của kết cấu, không phụ thuộc vào ngoại lực. Vì vậy khi xem xét các trường hợp tải khác nhau không cần tính lại ma trận độ cứng. Nếu có p trường hợp tải, lời giải (phương trình (12.3)) có thể viết gọn dưới dạng phương trình ma trận:

$$[D]_{n\times p}=[S]^{-1}_{n\times n}[-F]_{n\times p}. \tag{12.6}$$

Mỗi cột của các ma trận $[D]$ và $[-F]$ ứng với một trường hợp tải.

Ảnh hưởng của môi trường

Trong chương 11 đã dùng phương pháp lực để tính toán các ảnh hưởng của thay đổi nhiệt độ, co ngót hay dư ứng lực. Tương tự, phương pháp chuyển vị cũng xem xét đến các hiệu ứng trên. Có thể áp dụng phương trình (12.3), nhưng véc tơ $\{F\}$ khi đó là véc tơ lực hạn chế chuyển vị nút gây ra bởi những hiệu ứng trên.

Trường hợp hiệu ứng của dịch chuyển gối đỡ vẫn dùng phương trình (12.3) khi dịch chuyển này ở vị trí và có phương chiều không trùng với bậc tự do của hệ. Trường hợp dịch chuyển này trùng với bậc tự do, cần biến đổi phương trình (12.3). Ví dụ 12.5 sẽ giải thích rõ cách biến đổi.

12.4 Năm bước giải của phương pháp chuyển vị

Bước 1. Xác định hệ tọa độ biểu diễn các chuyển vị nút, đồng thời xác định các đáp ứng cần tính $[A]_{m\times p}$ và xác định quy ước dấu nếu cần.

Bước 2. Xác định lực hạn chế $[F]_{n\times p}$ và ma trận đáp ứng $[A_r]_{m\times p}$ do ngoại lực tác động lên kết cấu.

Bước 3. Thiết lập ma trận độ cứng $[S]_{n\times n}$ và ma trận đáp ứng $[A_u]_{m\times n}$. Cột thứ j của các ma trận nhận được bằng cách cho kết cấu biến dạng theo cấu hình mà chuyển vị ở tọa độ thứ j bằng đơn vị, các chuyển vị còn lại bằng không.

Bước 4. Giải phương trình cân bằng $[S]_{n\times n}[D]_{n\times p} = [-F]_{n\times p}$ để tìm $[D]$.

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ phương trình $[A]_{m\times p} = [A_r]_{m\times p} + [A_u]_{m\times n}[D]_{n\times p}$.

Cũng như phương pháp lực, sau bước thứ ba nhận được các ma trận cần thiết. Bước 4 và 5 chỉ là thuần túy các phép tính đại số.

Ở đây các ký hiệu:

n, p, m lần lượt là số bậc tự do, số trường hợp tải, số đáp ứng (phản lực hay nội lực) cần xác định.

$[A]_{m\times p}$ là ma trận đáp ứng cần xác định - lời giải của bài toán. Đáp ứng cần xác định có thể là nội lực tại mặt cắt (lực dọc trục N, lực cắt Q, mô men uốn M_y, M_z và mô men xoắn M_x) hay phản lực R tại các liên kết.

$[A_r]_{m\times p}$ là đáp ứng do ngoại lực tác động lên kết cấu khi hạn chế chuyển vị.

$[A_u]_{m\times n}$ là đáp ứng do các cấu hình biến dạng với chuyển vị đơn vị lần lượt tại từng tọa độ.

$[F]_{n\times p}$ là lực hạn chế đặt tại các tọa độ để ngăn cản các chuyển vị do lực tác động gây ra.

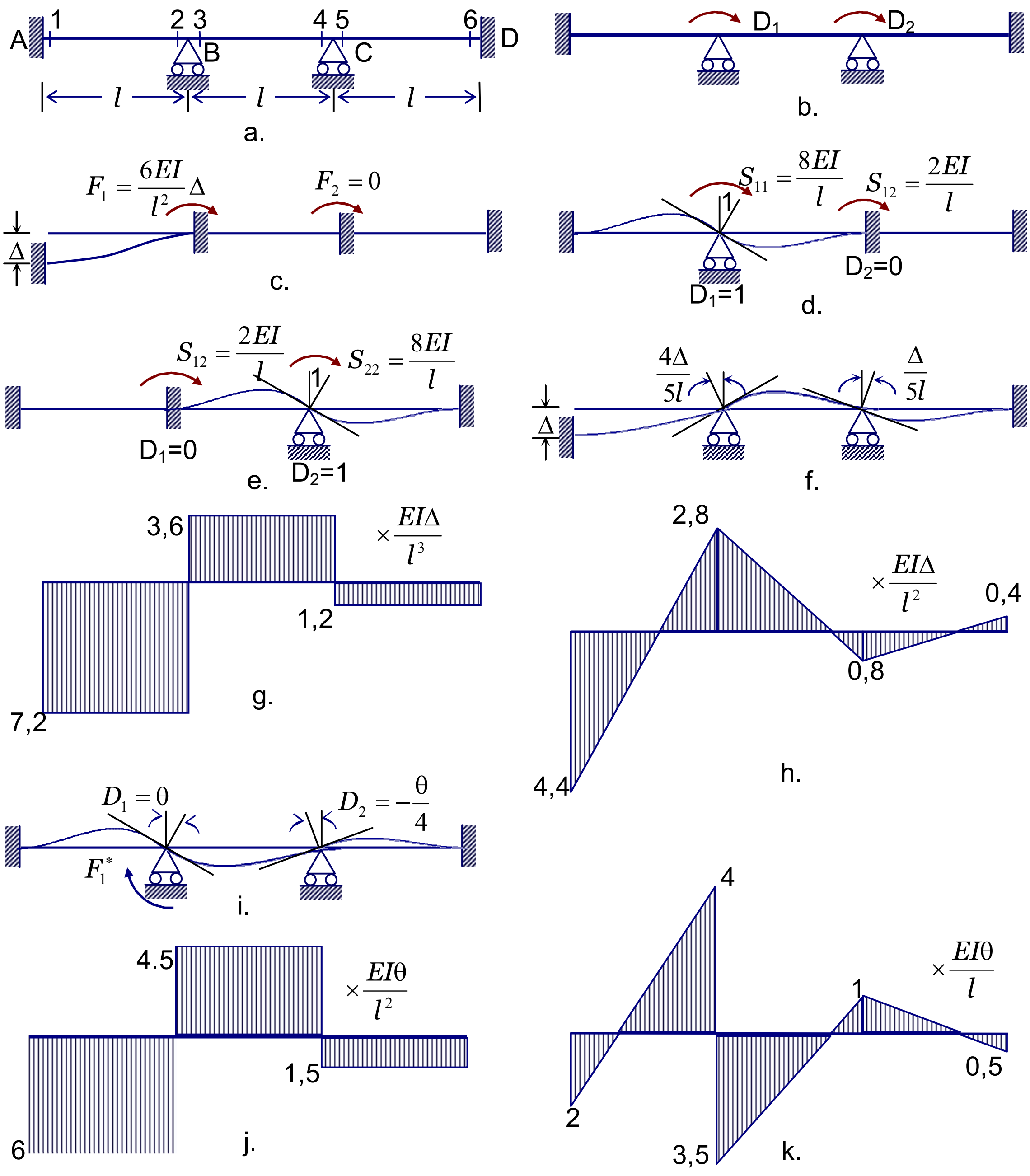
$[S]_{n\times n}$ là ma trận độ cứng.

Ví dụ 12.5. Dầm liên tục như trên hình 12.8a có độ cứng uốn EI không đổi, có hai ngàm tại A và D và hai gối đỡ di động tại B và C. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm với hai trường hợp tải: a) Điểm A lún xuống một đoạn là Δ; b) Khi dầm quay đi một góc θ theo chiều kim đồng hồ tại gối B.

Số bậc tự do của hệ là 2, đó là góc xoay D_1 và D_2 tại B và C (hình 12.8b). Dịch chuyển của điểm A không ứng với bậc tự do. Lúc này lực hạn chế có nhiệm vụ giữ cho chuyển vị $D_1 = D_2 = 0$ như biểu diễn trên hình 12.8c.

Dùng phụ lục 8 tính được:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2}\Delta \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$



Hình 12.8. Biểu đồ nội lực của ví dụ 12.5

Quy ước mô men dương theo chiều kim đồng hồ, lực dương hướng lên trên. Các mô men và lực cắt tại các mặt cắt 1, 2,...,6 (hình 12.8a) ứng với điều kiện hạn chế (hình 12.8c) như sau:

$$\{M_r\} = \begin{Bmatrix} M_{r1} \\ M_{r2} \\ M_{r3} \\ M_{r4} \\ M_{r5} \\ M_{r6} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2}\Delta \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \ \{Q_r\} = \begin{Bmatrix} Q_{r1} \\ Q_{r2} \\ Q_{r3} \\ Q_{r4} \\ Q_{r5} \\ Q_{r6} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\Delta \begin{Bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Lực đầu phần tử cần để giữ các phần tử ở cấu hình với D_1 hoặc D_2 bằng đơn vị (hình 12.8d và 12.8e) được xác định từ phụ lục 8 và từ đó có ma trận độ cứng:

$$[S] = -\frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}; \ [S]^{-1} = \frac{l}{60EI}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Giải phương trình (12.3) nhận được:

$$\{D\} = \frac{l}{60EI}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\frac{EI}{l^2}\Delta\begin{Bmatrix} -6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta}{60l}\begin{Bmatrix} -48 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta}{5l}\begin{Bmatrix} -4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow D_1 = -\frac{4\Delta}{5l}; D_2 = \frac{\Delta}{5l}.$$

Mô men và lực cắt tại các mặt cắt 1,2,...6 gây ra khi từng chuyển vị D_1 hoặc D_2 bằng đơn vị được tính theo phụ lục 8:

$$[M_u] = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \ [Q_u] = \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Đường cong biến dạng của dầm do dịch chuyển Δ của điểm A biểu diễn trên hình 12.8f. Nội lực tại các mặt cắt tính được từ phương trình (12.5). Biểu đồ lực cắt và biểu đồ mô men biểu diễn trên hình 12.8g và 12.8h.

$$\{M\} = \frac{EI}{l^2}\Delta\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\frac{\Delta}{l}\begin{Bmatrix} -0,8 \\ 0,2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2}\Delta\begin{Bmatrix} 4,4 \\ 2,8 \\ -2,8 \\ -0,8 \\ 0,8 \\ 0,4 \end{Bmatrix};$$

$$\{Q\} = \frac{EI}{l^3}\Delta\begin{Bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\frac{\Delta}{l}\begin{Bmatrix} -0,8 \\ 0,2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\Delta\begin{Bmatrix} -7,2 \\ 7,2 \\ 3,6 \\ -3,6 \\ -1,2 \\ 1,2 \end{Bmatrix}.$$

Để kiểm tra kết quả tính toán, dùng điều kiện cân bằng tại điểm B và C, ở đó tổng mô men phải bằng không.

Xét trường hợp tải (b) như trên hình 12.8i. Để tạo ra chuyển vị xoay tại điểm B cần có một mô men F_1^* (cặp ngẫu lực) tác động vào điểm B. Gọi véc tơ ngoại lực là $\{F\} = \{F_1^*, 0\}$. Khi đó quan hệ giữa lực và chuyển vị được biểu diễn qua:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^* \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Ma trận độ cứng S đã xác định trong trường hợp tải (a). Có $D_1=\theta$, từ phương trình thứ hai xác định được D_2:

$$D_2 = -\frac{S_{21}}{S_{22}}D_1 = -\frac{\dfrac{2EI}{l}}{\dfrac{8EI}{l}}\theta = -\frac{\theta}{4}.$$

Trong trường hợp này, nội lực tại các mặt cắt trong điều kiện hạn chế bằng không $\{M_r\} = 0$; $\{Q_r\} = 0$. Dùng phương trình (12.5) với các ma trận $[M_u]$ và $[Q_u]$ đã tính được từ trường hợp (a), tính được nội lực tại các mặt cắt:

$$\{M\} = +\frac{EI}{l}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\theta\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{Bmatrix} = \frac{EI\theta}{l}\begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3,5 \\ 1 \\ -1 \\ -0,5 \end{Bmatrix};$$

$$\{Q\} = \frac{EI}{l^2}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 6 & 0 \\ -6 & -6 \\ 6 & 6 \\ 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\theta\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.25 \end{Bmatrix} = \frac{EI\theta}{l^2}\begin{Bmatrix} -6 \\ 6 \\ -4,5 \\ 4,5 \\ 1,5 \\ -1,5 \end{Bmatrix}.$$

12.5 Ảnh hưởng của chuyển vị tại các tọa độ

Trường hợp tải (b) trong ví dụ 12.5 sẽ được tổng quát hóa trong mục này. Giả thiết hệ có n bậc tự do.

Mục đích là tìm ảnh hưởng của m chuyển vị cho trước Δ_1, Δ_2, …, Δ_m tại m tọa độ. Viết ma trận độ cứng sao cho tọa độ ứng với các chuyển dịch cho trước sẽ nằm ở m dòng và cột đầu:

$$[S] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m} & S_{1,m+1} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm} & S_{m,m+1} & \cdots & S_{11} \\ \hline S_{m+1,1} & S_{m+1,2} & \cdots & S_{m+1,m} & S_{m+1,m+1} & \cdots & S_{11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{n,m} & S_{n,m+1} & \cdots & S_{nn} \end{array}\right]; \tag{12.7}$$

Ma trận này có thể viết dưới dạng:

$$[S] = \left[\begin{array}{c|c} [S_{11}] & [S_{12}] \\ \hline [S_{21}] & [S_{22}] \end{array}\right], \tag{12.8}$$

ở đây $[S_{ij}]$ là các ma trận con. Chúng có kích cỡ như sau $[S_{11}]_{m\times m}$, $[S_{12}]_{m\times(n-m)}$, $[S_{21}]_{(n-m)\times m}$, $[S_{22}]_{(n-m)\times(n-m)}$.

Cần phải có m lực $F_1^*, F_2^*, \cdots, F_m^*$ tác động vào các tọa độ từ 1 đến m để có được các chuyển vị Δ_1, Δ_2, ...,Δ_m. Vì không có ngoại lực nên tại n-m tọa độ còn lại sẽ xuất hiện chuyển vị D_{m+1}, D_{m+2},..., D_n. Quan hệ giữa lực và chuyển vị được viết:

$$\begin{bmatrix} [S_{11}] & \vdots & [S_{12}] \\ \hline [S_{21}] & \vdots & [S_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1^*\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (12.9)$$

ở đây $\{D_1\}$ là véc tơ các chuyển vị cho trước Δ, $\{D_2\}$ là véc tơ các chuyển vị chưa biết D_{m+1}, D_{m+2},..., D_n và $\{F_1^*\}$ là véc tơ các lực chưa biết tại các tọa độ 1,2,...,m.

Từ dòng thứ hai của phương trình ma trận (12.9) tìm được:

$$\{D_2\} = -[S_{22}]^{-1}[S_{21}]\{D_1\}. \quad (12.10)$$

Khi đã biết chuyển vị tại n tọa độ có thể tìm đáp ứng tại mặt cắt bất kỳ bằng phương trình:

$$\{A\} = [A_u]\{D\}. \quad (12.11)$$

Phương trình này như phương trình (12.5) với véc tơ $\{A_r\} = 0$, vì không có ngoại lực nên đáp ứng chỉ có ảnh hưởng của chuyển vị {D}.

Tính véc tơ lực $\{F_1^*\}$ sử dụng phương trình

$$\{F_1^*\} = \left[[S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}]\right]\{D_1\}. \quad (12.12)$$

12.6 Sử dụng phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Quan hệ giữa ma trận độ mềm và ma trận độ cứng

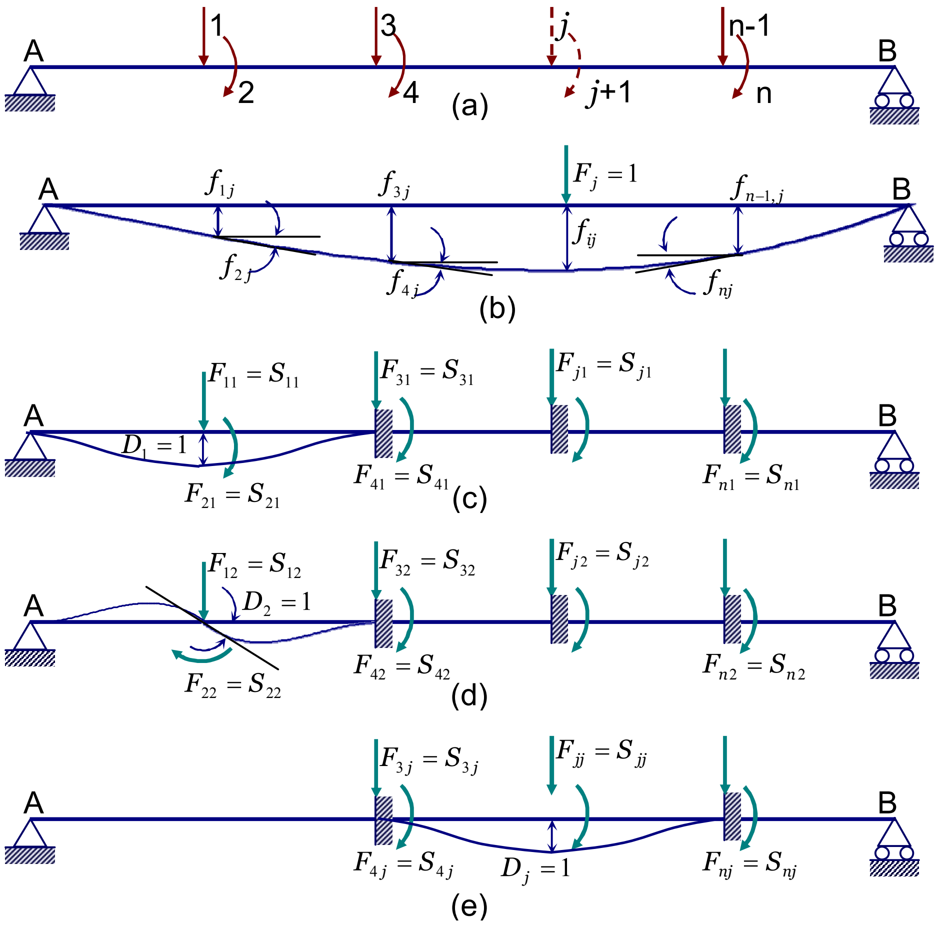
Phần này tìm quan hệ giữa ma trận độ cứng và ma trận độ mềm. Trên hình 12.9 biểu diễn hệ tọa độ với n tọa độ ứng với vị trí và hướng của các chuyển vị D_1, D_2, ..., D_n và các lực F_1, F_2, ..., F_n. Các thành phần của véc tơ chuyển vị $\{D\}$ có thể biểu diễn qua các thành phần của véc tơ lực $\{F\}$ bằng hệ phương trình:

$$D_1 = f_{11}F_1 + f_{12}F_2 + \cdots + f_{1n}F$$
$$D_2 = f_{21}F_1 + f_{22}F_2 + \cdots + f_{2n}F$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$D_n = f_{n1}F_1 + f_{n2}F_2 + \cdots + f_{nn}F$$

Hệ số f_{ij} là hệ số ảnh hưởng độ mềm, chúng là chuyển vị đơn vị tại tọa độ thứ i khi chỉ có một lực đơn vị tác động tại tọa độ j. Có thể viết dưới dạng ma trận:

$$[f]_{n\times n}\{F\}_{n\times 1} = \{D\}_{n\times 1} \tag{12.13}$$

Không nên nhầm lẫn phương trình này với phương trình (11.4) $[f]\{F\} = \{-D\}$ dùng trong phương pháp lực để tìm giá trị của lực dư $\{F\}$ gây ra chuyển vị $\{-D\}$ điều chỉnh sai lệch chuyển vị $\{D\}$ gây ra do giải phóng liên kết.



Hình 12.9. Hệ tọa độ của phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Lực $\{F\}$ có thể biểu diễn qua chuyển vị khi giải phương trình (12.13):

$$\{F\}_{n\times 1} = [f]^{-1}_{n\times n}\{D\}_{n\times 1}. \tag{12.14}$$

Phương trình (12.14) có thể dùng để xác định lực tạo thành các phần tử của ma trận độ cứng của cùng kết cấu đang xét. Nếu cho kết cấu biến dạng theo cấu hình mà $D_1 = 1$, còn các thành phần chuyển vị khác $D_2 = D_3 = \cdots = D_n = 0$ (hình 12.9c) nhận được:

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ \vdots \\ F_{n1} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Tương tự, cho kết cấu biến dạng theo cấu hình mà $D_2 = 1$, còn các thành phần chuyển vị khác $D_1 = D_3 = \cdots = D_n = 0$ (hình 12.9d):

$$\begin{Bmatrix} F_{12} \\ F_{22} \\ \cdots \\ F_{n2} \end{Bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Tổng quát, cho kết cấu biến dạng ở cấu hình mà $D_j = 1$, còn các thành phần chuyển vị khác bằng không (hình 12.9e), nhận được hệ phương trình giống như hai phương trình vừa viết ở trên. Tất cả phương trình này có thể gộp lại trong một phương trình ở dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & & F_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{bmatrix} = [f]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Bmatrix}.$$

Các lực F_{ij} trong ma trận bên trái thực chất là các phần tử của ma trận độ cứng cần tính. Ma trận cuối là ma trận đơn vị, do vậy :

$$[S] = [f]^{-1}, \tag{12.15}$$

ở đây $[S]$ là ma trận độ cứng ứng với tọa độ đã cho. Nghịch đảo cả hai vế nhận được:

$$[S]^{-1} = [f]. \tag{12.16}$$

Phương trình (12.15) và (12.16) chỉ ra rằng, ma trận độ cứng là nghịch đảo của ma trận độ mềm và ngược lại ứng với cùng hệ tọa độ lực và chuyển vị dùng để thiết lập hai ma trận này.

Tuy nhiên, với phương pháp lực cần giải phóng liên kết để kết cấu thành tĩnh định. Hệ tọa độ thể hiện vị trí và hướng của các lực dư. Còn trong phương pháp chuyển vị thì đưa vào các lực để hạn chế chuyển vị nút. Tọa độ trong trường hợp này biểu diễn vị trí và hướng của chuyển vị chưa biết. Nghịch đảo của ma trận độ mềm trong phương pháp lực là ma trận độ cứng nhưng không thể dùng trong phương pháp chuyển vị. Tương tự như vậy, nghịch đảo của ma trận độ cứng trong phương pháp chuyển vị là một ma trận độ mềm nhưng không thể dùng cho phương pháp lực.

Lựa chọn phương pháp

Việc lựa chọn phương pháp phân tích kết cấu chủ yếu là xem xét việc thiết lập ma trận độ cứng và ma trận đồ mềm: việc thiết lập ma trận nào dễ hơn chọn phương pháp tương ứng. Ví dụ trên hình 12.9a, ma trận độ cứng có thể thiết lập dễ dàng khi dùng phụ lục 8. Các chuyển vị đơn vị tại nút j chỉ gây ra các lực tại j và hai nút j-1, j+1 liền kề (hình 12.9e). Ví dụ như trên hình 12.9c, chỉ cần tính S_{11}, S_{21}, S_{31}, S_{41}, còn các thành phần khác bằng không. Mặt khác, nếu sử dụng phương pháp lực khi thiết lập cột thứ j của ma trận độ mềm thì phải đặt một lực đơn vị và tính tất cả các chuyển vị. Trong ví dụ này, việc lập ma trận độ mềm phức tạp hơn lập ma trận độ cứng. Tuy nhiên, không phải lúc nào việc thiết lập ma trận cứng cũng dễ hơn thiết lập ma trận độ mềm, như ví dụ 12.6.

Xem xét một cách tổng quát, trong phương pháp lực, việc lựa chọn liên kết để giải phóng có thể ảnh hưởng đến số phép tính cần tính. Ví dụ như dầm liên tục, nếu đặt các khớp ở gối đỡ đưa hệ về các dầm đơn giản thì lực dư đơn vị chỉ ảnh hưởng đến hai dầm liền kề. Những kết cấu khác không thể tìm được lực dư mà chỉ gây ảnh hưởng địa phương. Thông thường, từng lực dư đơn vị riêng biệt có tác động đến chuyển vị ở tất cả các tọa độ.

Trong phương pháp chuyển vị, tất cả các chuyển vị bị hạn chế không phụ thuộc vào việc lựa chọn chuyển vị cần tìm. Thiết lập ma trận độ cứng nói chung là không phức tạp vì các hiệu ứng địa phương thường đã được xem xét từ trước. Chuyển vị đơn vị ở một nút chỉ ảnh hưởng đến các phần tử nối vào nút đó. Hai tính chất này làm cho phương pháp chuyển vị dễ thiết lập hơn, và cũng là lý do cho thấy phương pháp chuyển vị thích hợp cho lập trình tính toán bằng máy tính.

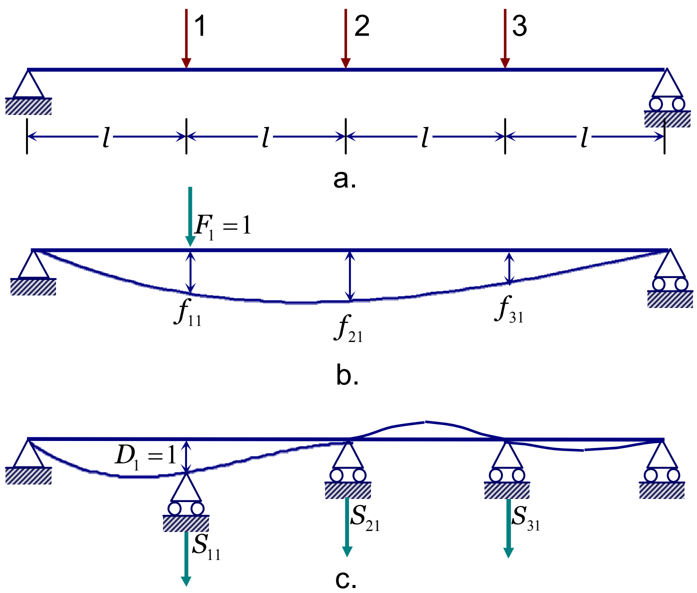
Khi tính toán bằng tay, việc giảm bớt số phương trình cần tính toán rất quan trọng. Việc lựa chọn phương pháp lực hay phương pháp chuyển vị phụ thuộc vào bậc siêu tĩnh hay bậc tự do nhỏ hơn. Không có nguyên tắc tổng quát.

Trong phương pháp chuyển vị có thể giảm số phương trình bằng cách chỉ hạn chế một số chuyển vị đủ để có thể phân tích kết cấu (xem ví dụ 12.9).

Ví dụ 12.6. Xét dầm trên hình 12.10a, với ba tọa độ.

Từng cột của ma trận độ mềm được xác định từ phụ lục 8 để tính chuyển vị khi đặt lực dư đơn vị (hình 12.10b):

$$[f]=\begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}.$$

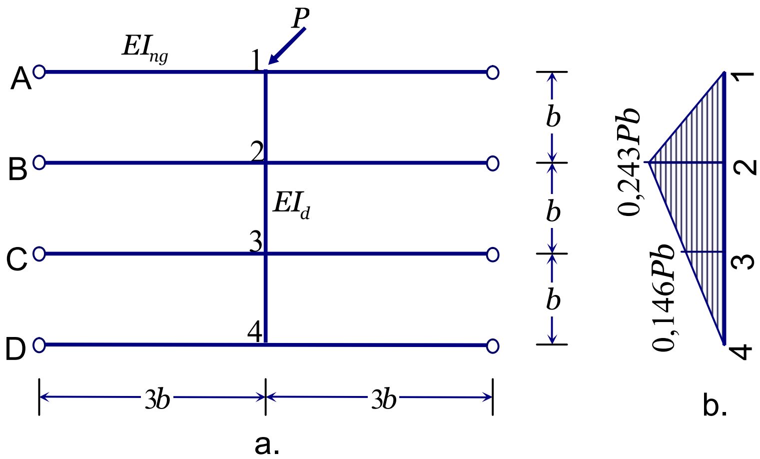


Hình 12.10. So sánh giữa phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Để thiết lập ma trận độ cứng, mỗi cột của [S] đòi hỏi phải phân tích một kết cấu siêu tĩnh. Ví dụ như khi thiết lập cột thứ nhất phải xem xét kết cấu ở cấu hình biến dạng như trên hình 12.10c – là hệ có ba bậc siêu tĩnh:

$$[S]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 9{,}857 & -9{,}429 & 3{,}857 \\ -9{,}429 & 13{,}714 & -9{,}429 \\ 3{,}857 & -9{,}429 & 9{,}857 \end{bmatrix}=[f]^{-1}.$$

Ví dụ 12.7. Khung ngang trên hình 12.11a gồm 4 dầm ngang chính và một dầm dọc trên mặt cầu có độ cứng $EI_{ngang} : EI_{doc} = 3:1$. Độ cứng xoắn bỏ qua. Vẽ biểu đồ mô men của dầm dọc dưới tác động của lực dọc tập trung tại nút 1.



Hình 12.11. Hệ khung ngang và biểu đồ nội lực

Tại mỗi nút có ba bậc tự do gồm: một chuyển vị dọc và hai góc xoay quanh trục trong mặt phẳng của khung ngang. Tuy nhiên nếu hạn chế chuyển vị dọc thì hệ trở thành hệ các dầm liên tục, sử dụng phụ lục 9 có thể tính toán ảnh hưởng của dịch chuyển nút không cần biết góc xoay.

Xét hệ tọa độ gồm 4 chuyển vị thẳng đứng tại nút 1, 2, 3 và 4, quy ước dấu dương hướng xuống. Sử dụng các giá trị ở các bảng trong phụ lục 9 cho trường hợp dầm hai nhịp đối với dầm chính và trường hợp dầm ba nhịp cho dầm dọc có thể thiết lập ma trận độ cứng. Cột đầu tiên của ma trận độ cứng được tính toán như sau:

Cho chuyển vị $D_1 = 1$ còn $D_2 = D_3 = D_4 = 0$, khi đó chỉ có dầm chính A và dầm dọc biến dạng, còn các dầm khác không bị biến dạng. Các nút cho phép quay tự do. Sau đó đặt các lực dọc để giữ cho dầm A và dầm dọc ở cấu hình này. Xem bảng PL9.1 ở trường hợp dầm hai nhịp, tìm trong bảng phản lực tại dòng 2 và cột hai (vì gối đỡ thứ hai lún 1 đơn vị và xét phản lực tại gối đỡ thứ hai) nhận được:

$$S_{11} = 6\frac{EI_{ng}}{(3b)^3} = \frac{2}{3}\frac{EI_d}{b^3}.$$

Đối với dầm dọc, tìm trường hợp dầm ba nhịp trong bảng phản lực, lấy toàn bộ các phần tử trên hàng thứ nhất:

$$S_{11} = 1{,}6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{21} = -3{,}6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{31} = 2{,}4\frac{EI_d}{b^3};\ S_{41} = -0{,}4\frac{EI_d}{b^3}.$$

Như vậy cột thứ nhất của ma trận độ cứng có dạng:

$$S_{11} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 1{,}6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{21} = -3{,}6\frac{EI}{b^3};\ S_{31} = 2{,}4\frac{EI}{b^3};\ S_{41} = -0{,}4\frac{EI}{b^3}.$$

Tương tự, cho các trường hợp cấu hình biến dạng khác vẫn dùng bảng PL9.1 trong phụ lục 9. Dầm ngang chính vẫn dùng phần tử thứ 2 trong dòng thứ 2 của bảng phản lực cho trường hợp dầm hai nhịp. Còn đối với dầm dọc lần lượt dùng dòng thứ 2, 3 và 4 của bảng phản lực cho trường hợp dầm ba nhịp. Sẽ nhận được:

$$S_{12} = -3.6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{22} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 9.6\frac{EI}{b^3};\ S_{32} = -8.4\frac{EI}{b^3};\ S_{42} = 2.4\frac{EI}{b^3}.$$

$$S_{13} = 2.4\frac{EI}{b^3};\ S_{23} = -8.4\frac{EI}{b^3};\ S_{33} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 9.6\frac{EI}{b^3};\ S_{43} = -3.6\frac{EI_d}{b^3}.$$

$$S_{14} = -0.4\frac{EI}{b^3}\quad S_{24} = 2.4\frac{EI}{b^3};\ S_{34} = -3.6\frac{EI_d}{b^3};\ S_{44} = \frac{2EI_d}{3b^3} + 1.6\frac{EI_d}{b^3}.$$

$$[S] = \frac{EI}{b^3}\begin{bmatrix} 2{,}267 & -3{,}6 & 2{,}4 & -0{,}4 \\ -3{,}6 & 10{,}267 & -8{,}4 & 2{,}4 \\ 2{,}4 & -8{,}4 & 10{,}267 & -3{,}6 \\ -0{,}4 & 2{,}4 & -3{,}6 & 2{,}267 \end{bmatrix}.$$

Với tải trọng P tác động vào điểm 1, cần lực hạn chế chuyển vị có hướng ngược lại với P, vậy $\{F\} = \{-P, 0, 0, 0\}$. Giải phương trình (12.2) tìm được chuyển vị:

$$\{D\} = \frac{Pb^3}{EI_d}\begin{Bmatrix} 1{,}133 \\ 0{,}511 \\ 0{,}076 \\ -0{,}221 \end{Bmatrix}.$$

Mô men uốn trên dầm dọc bằng không tại điểm 1 và 4, do vậy cần xác định mô men tại điểm 2 và 3. Quy ước mô men uốn dương nếu làm cho sợi ở đáy bị kéo. Trong trường hợp này lực P tác động vào nút nên véc tơ $\{M_r\} = 0$. Khi tải trọng tác động vào vị trí khác thì cần phải xác định $\{M_r\}$ bằng cách tính toán các dầm liên tục với các nhịp bằng nhau qua các gối đỡ cố định.

Phần tử của ma trận $[M_u]$ là các phản lực tại gối đỡ xác định từ bảng PL9.1 trong phụ lục 9 cho trường hợp dầm ba nhịp:

$$[M_u] = \frac{EI_d}{b^2}\begin{bmatrix} -1{,}6 & 3{,}6 & -2{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -2{,}4 & 3{,}6 & -1{,}6 \end{bmatrix}.$$

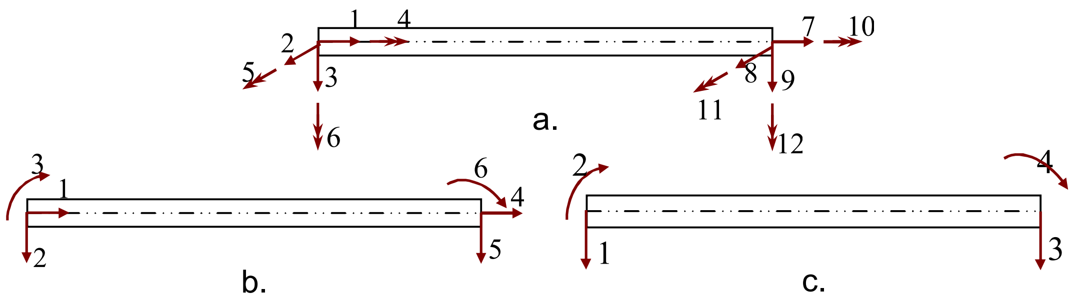
Sử dụng công thức (12.5) tính được:

$$\{M\} = \frac{EI_d}{b^2}\begin{bmatrix} -1{,}6 & 3{,}6 & -2{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & -2{,}4 & 3{,}6 & -1{,}6 \end{bmatrix}\frac{Pb^3}{EI_d}\begin{Bmatrix} 1{,}133 \\ 0{,}511 \\ 0{,}076 \\ -0{,}021 \end{Bmatrix} = Pb\begin{Bmatrix} -0{,}243 \\ -0{,}146 \end{Bmatrix}.$$

Biểu đồ mô men cho trên hình 12.11b.

Ma trận độ cứng cho dầm thẳng

Trong phần đầu chương này đã sử dụng phụ lục 8 tìm các lực đầu phần tử của từng thanh riêng biệt, sau đó cộng lực đầu của tất cả các phần tử nối vào từng nút. Ở đây thiết lập ma trận độ cứng cho một thanh thẳng riêng biệt, vì sẽ dùng thường xuyên trong phân tích hệ khung. Xét phần tử dầm với 12 tọa độ tại hai đầu nút gồm các chuyển vị thẳng và góc xoay theo các trục x, y và z (hình (12.12a). Ký hiệu độ dài thanh là l, diện tích mặt cắt là A, mô men bậc hai của diện tích đối với trục z và trục y là I_z, I_y, hằng số đàn hồi là E, và độ cứng xoắn là GJ.



Hình 12.12. Phần tử dầm thẳng

Khi bỏ qua biến dạng trượt và hiệu ứng vặn, mọi phần tử của ma trận độ cứng có thể thiết lập nhờ phụ lục 8. Phần tử thứ i bất kỳ tại cột j bằng lực tại tọa độ i đó do chuyển vị đơn vị tại tọa độ j gây ra. Ma trận độ cứng sẽ có dạng đối xứng như sau:

$$
[S]=\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & & & & & & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & & & & & & \\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l}
\end{array}\right]
\tag{12.17}
$$

Nếu xét bài toán trong mặt phẳng xy, thì ma trận độ cứng chỉ xét cho 6 tọa độ là 1, 2, 6, 7, 8, và 12 (hình 12.12b). Xóa các cột và các hàng 3, 4, 5, 9,10 và 11, nhận được ma trận đối xứng:

$$[S]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (12.18)$$

Nếu bỏ qua lực dọc trục sẽ không xét tọa độ 1 và 4 nữa (hình 12.12c), vậy ma trận độ cứng của dầm thẳng chỉ còn kích cỡ là 4x4, đối xứng:

$$[S]=\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & & & \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (12.19)$$

Những ma trận độ cứng này được thiết lập cho trục tọa độ với trục x trùng với trục của dầm. Hệ trục này gọi là hệ trục tọa độ địa phương. Khi xét trong hệ tọa độ tổng thể thì phải dùng ma trận chuyển để chuyển ma trận độ cứng về hệ tọa độ tổng thể.

Giản lược ma trận độ cứng

Quan hệ giữa chuyển vị {D} và lực {F} đặt ở cùng một tọa độ:

$$[S]\{D\}=\{F\}. \quad (12.20)$$

Nếu chuyển vị tại một số tọa độ bị ngăn cản do có các liên kết và ma trận [S] bố trí sao cho phương trình ứng với các tọa độ này nằm ở phía dưới thì:

$$\begin{bmatrix} [S_{11}] & \vdots & [S_{12}] \\ [S_{21}] & \vdots & [S_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}. \tag{12.21}$$

trong đó $\{D_2\}=0$ đại diện cho các chuyển vị đã bị hạn chế. Từ đây có thể viết:

$$[S_{11}]\{D_1\} = \{F_1\}, \tag{12.22}$$

$$[S_{21}]\{D_1\} = \{F_2\}. \tag{12.23}$$

Từ phương trình (12.22) nhận thấy ma trận độ cứng của những tọa độ còn lại có thể nhận được bằng cách xóa các cột và các dòng ứng với tọa độ đã bị hạn chế chuyển dịch. Ma trận độ cứng nhận được sẽ có bậc nhỏ đi. Từ phương trình (12.23) nếu biết các chuyển vị $\{D_1\}$ có thể tính được phản lực tại các gối đỡ ngăn cản chuyển vị $\{D_2\}$.

Ví dụ trên hình 12.12c, giả thiết hai chuyển vị thẳng đứng 1 và 3 bị hạn chế. Như vậy ma trận độ cứng ứng với hai tọa độ còn lại (2 và 4) sẽ nhận được bằng cách xóa các dòng và các cột thứ nhất và thứ ba trong ma trận (12.19):

$$[S] = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l} \\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \tag{12.24}$$

Phản lực $\{F_1, F_3\}$ ở tọa độ 1 và 3 được tìm từ phương trình:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{6EI}{l^2} \\ -\dfrac{6EI}{l^2} & -\dfrac{6EI}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \end{Bmatrix}. \tag{12.25}$$

Nếu lực bằng không ở một số tọa độ, có nghĩa là tại tọa độ đó tự do chuyển động. Ma trận độ cứng ứng với các tọa độ còn lại có thể tính được từ các ma trận con trong phương trình (12.21). Cho $\{F_2\} = 0$ trong phương trình (12.21):

$$\begin{cases} [S_{11}]\{D_1\} + [S_{12}]\{D_2\} = \{F_1\} \\ [S_{21}]\{D_1\} + [S_{22}]\{D_2\} = \{0\} \end{cases}. \tag{12.26}$$

Từ phương trình thứ hai, giản ước $\{D_2\}$ trong phương trình thứ nhất có:

$$\left[[S_{11}] - [S_{12}][S_{22}]^{-1}[S_{21}]\right] \cdot \{D_1\} = \{F_1\}. \tag{12.27}$$

Phương trình này giống phương trình (12.12), viết lại thành:

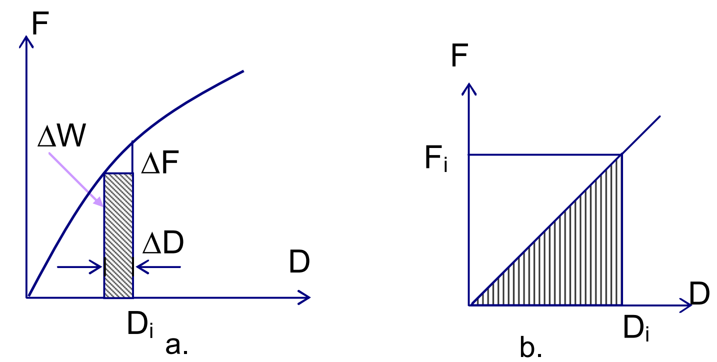
$$[S^*]\{D_1\} = \{F_1\}, \tag{12.28}$$

ở đây ma trận $[S^*]$ là ma trận độ cứng giản lược liên hệ giữa lực $\{F_1\}$ với chuyển vị $\{D_1\}$ và có dạng:

$$[S^*] = [S_{11}] - [S_{12}] \cdot [S_{22}]^{-1} [S_{21}]. \tag{12.29}$$

Tính chất của ma trận độ mềm và ma trận độ cứng

Xét lực F_i tác dụng từ từ lên kết cấu, sao cho động năng của khối lượng bằng không. Ký hiệu D_i là chuyển vị do lực F_i gây ra tại chính điểm đặt lực và có cùng hướng với lực F_i. Nếu kết cấu đàn hồi thì quan hệ giữa lực và chuyển vị là đường cong (gia tải và cất tải như nhau) (hình 12.13a).



Hình 12.13

Tại một thời điểm nào đó lực F_i tăng lên ΔF_i và chuyển vị tăng tương ứng lên ΔD_i thì công thực hiện bởi ΔF_i là:

$$\Delta W \approx F_i \Delta D_i .$$

là hình chữ nhật gạch chéo trên hình 12.13a. Nếu gia tải đủ nhỏ thì công ngoại lực thực hiện bởi F_i sẽ bằng phần diện tích bên dưới đường cong giữa 0 và D_i.

Khi vật liệu tuân thủ định luật Hooke thì đường cong trên hình 12.13a thay bằng đường thẳng trên hình 12.13b. Khi đó công thực hiện bởi lực F_i có biểu thức:

$$W = \frac{1}{2} F_i D_i \,.$$

Nếu kết cấu chịu tác dụng của một hệ lực F_1, F_2, ..., F_n tăng từ từ và gây ra các chuyển vị tương ứng D_1, D_2, ..., D_n tại các điểm và hướng như lực tác động thì công ngoại lực (công ngoại) biểu diễn qua:

$$W = \frac{1}{2}\left(F_1 D_1 + F_2 D_2 + \cdots + F_n D_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i \,. \qquad (12.30)$$

Viết lại dưới dạng ma trận:

$$[W]_{1\times 1} = \frac{1}{2}\{F\}_{n\times 1}^T \{D\}_{n\times 1} \,. \qquad (12.31)$$

Thay chuyển vị bằng lực qua ma trận độ mềm, nhận được:

$$[W]_{1\times 1} = \frac{1}{2}\{F\}_{n\times 1}^T [f]_{n\times n} \{F\}_{n\times 1} \,. \qquad (12.32)$$

Làm phép chuyển đổi cả hai vế, vế trái không đổi, với vế phải có nguyên tắc sau: phép chuyển đổi một tích sẽ là tích của các ma trận đã chuyển đổi nhưng thứ tự ngược lại, nên:

$$[W]_{1\times 1} = \frac{1}{2}\{F\}_{n\times 1}^T [f]_{n\times n}^T \{F\}_{n\times 1} \,. \qquad (12.33)$$

Từ phương trình (12.32) và (12.33) thấy rằng ma trận độ mềm và ma trận chuyển đổi của nó bằng nhau:

$$[f] = [f]^T \Rightarrow f_{ij} = f_{ji} \,. \qquad (12.34)$$

Ma trận độ mềm là ma trận đối xứng. Đây là tính chất quan trọng của ma trận độ mềm.

Phương trình (12.15) chỉ ra rằng ma trận độ cứng là nghịch đảo của ma trận độ mềm nên suy ra *ma trận độ cứng cũng đối xứng:*

$$S_{ij} = S_{ji} \,. \qquad (12.35)$$

Tính chất quan trọng thứ hai của ma trận độ cứng và độ mềm là *các phần tử đường chéo S_{ii} và f_{ii} phải dương*. f_{ii} là chuyển vị tại tọa độ i dưới tác động của lực đơn vị cũng vào điểm i nên chuyển vị phải cùng hướng với lực, vì thế f_{ii} dương. Còn S_{ii} là lực cần đặt vào tọa độ i sao cho gây nên chuyển vị đơn vị tại điểm i, do vậy S_{ii} có cùng hướng.

Phương trình (12.32) biểu diễn công ngoại lực qua lực và ma trận độ mềm, nếu thế lực bằng biểu thức (12.20) vào phương trình (12.31) nhận được biểu diễn công ngoại lực qua chuyển vị và ma trận độ cứng:

$$W = \frac{1}{2}\{F\}^T[f]\{F\} \tag{12.36}$$

và

$$W = \frac{1}{2}\{D\}^T[S]\{D\}. \tag{12.37}$$

Đây là các dạng toàn phương của các thành phần của $\{F\}$ và $\{D\}$. Dạng toàn phương là xác định dương nếu chúng dương với mọi véc tơ khác không của biến, hơn nữa chúng bằng không khi và chỉ khi các véc tơ biến bằng không. Định thức của các ma trận đối xứng xác định dương phải dương.

Như vậy ma trận độ cứng và ma trận độ mềm là *ma trận xác định dương*. Hệ phương trình:

$$[S]\{D\} = \{F\}$$

và

$$[f]\{F\} = \{D\}$$

cũng sẽ xác định dương. Như vậy đối với một véc tơ vế phải khác không, hai hệ phương trình trên có *một nghiệm duy nhất.*

Kết luận chương 12

Phương pháp chuyển vị có thể dùng cho kết cấu bất kỳ, đặc biệt có lợi khi hệ có bậc siêu tĩnh cao. Qui trình tính toán chuẩn có thể áp dụng dễ dàng cho hệ giàn, khung, khung ngang và các loại kết cấu khác dưới tác động của ngoại lực hay biến dạng cho trước.

Ma trận độ cứng và ma trận độ mềm có quan hệ với nhau theo nghĩa chúng là nghịch đảo của nhau khi sử dụng cùng một hệ tọa độ của lực và chuyển vị.

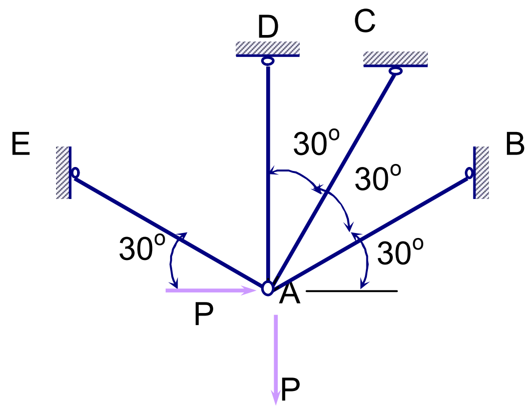
Tuy nhiên tọa độ lựa chọn trong phương pháp lực và phương pháp chuyển vị không cùng nhau nên quan hệ đó không đúng trong phân tích.

Lựa chọn phương pháp phân tích phụ thuộc vào bài toán và cả vào việc có dùng máy tính hay không. Phương pháp chuyển vị thích hợp cho việc lập trình để tính toán.

Ma trận độ cứng và độ mềm đối xứng, có các phần tử trên đường chéo lớn hơn không và chúng xác định dương. Như vậy lời giải của hệ phương trình trong phương pháp lực cũng như phương pháp chuyển vị là duy nhất.

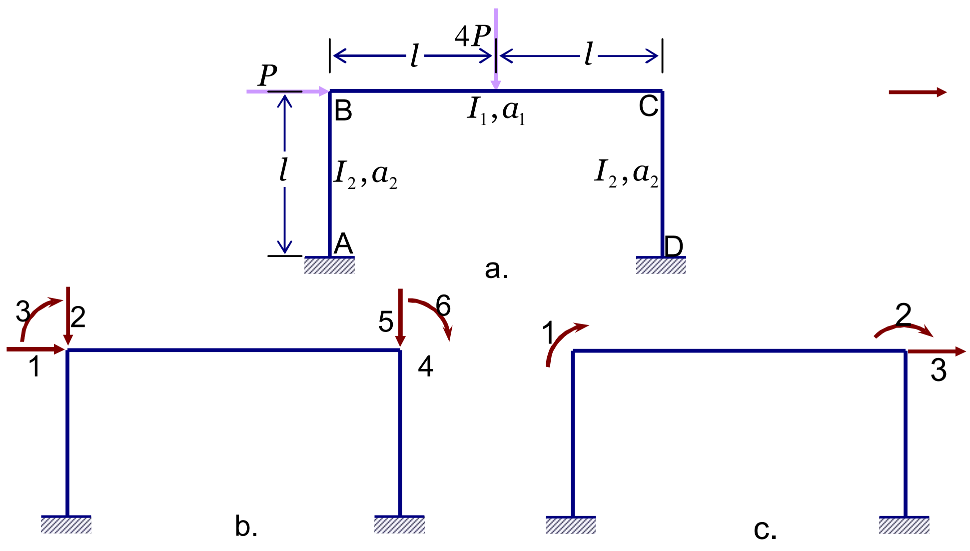
Bài tập chương 12

12.1 Dùng phương pháp chuyển vị tìm nội lực tại các phần tử của hệ giàn phẳng trên hình 12.14. Giả thiết tất cả các phần tử có cùng giá trị l/aE.



Hình 12.14

12.2. Cho khung phẳng chịu lực ngang bằng P tác dụng vào điểm B từ phải sang và lực dọc $4P$ từ trên xuống tại điểm giữa của thanh BC (hình 12.15a).



Hình 12.15

1. Thiết lập ma trận độ cứng cho khung phẳng trên hình 12.15 cho 2 trường hợp:

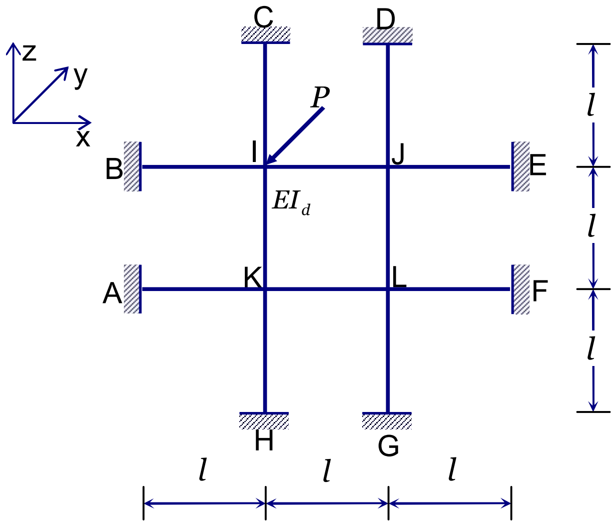
a. Sáu chuyển vị cần tìm (tại 2 nút B và C mỗi nút có 3 tọa độ) (hình 12.15b).

b. Bỏ qua biến dạng dọc trục (hình 12.15c).

c. Dùng phép giản lược tìm ma trận độ cứng S^* cho tọa độ 3 trên hình 12.15c.

2. Cho $I_1 = 4I_2$, tìm mô men nội lực tại các mặt cắt đầu phần tử (M_{AB}, M_{BA}, M_{BC}, M_{CB}, M_{CD}, và M_{DC}) trong trường hợp b.

12.3. Cho khung ngang trên hình 12.16 với lực thẳng đứng P tác dụng vào điểm I.



Hình 12.16

1. Thiết lập ma trận độ cứng cho hai trường hợp:

a. Tại mỗi nút I, J, K, L có 3 bậc tự do: chuyển vị thẳng đứng hướng xuống dưới theo trục y và hai góc xoay quanh hai trục x và z. Lấy $GJ / EI = 0{,}5$ cho tất cả các dầm.

b. Bỏ qua biến dạng xoắn (chỉ xét chuyển vị thẳng đứng).

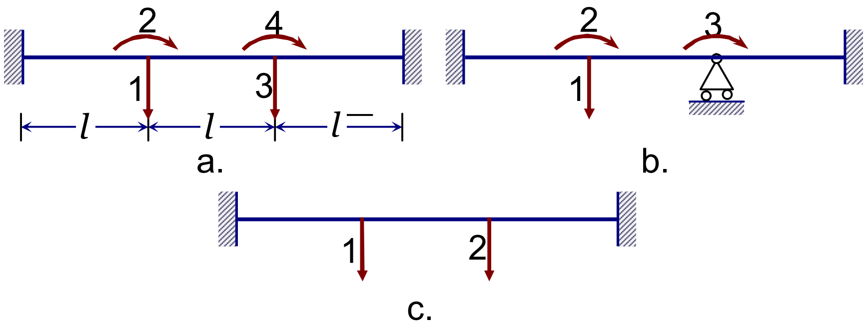
2. Tìm mô men nội lực tại các mặt cắt đầu phần tử ở hai thanh BE và AF trong trường hợp (b).

12.4. Trên hình 12.17 là ba hệ tọa độ của dầm có độ cứng không đổi EI. Thiết lập ma trận độ cứng:

a. Cho 4 tọa độ (hình 12.17a).

b. Ma trận độ cứng giản lược cho 3 tọa độ (hình 12.17b).

c. Ma trận độ cứng giản lược cho 2 tọa độ (hình 12.17c).



Hình 12.17

CHƯƠNG 13.
Phương pháp công ảo

13.1 Thế năng biến dạng

Trong chương 3 đã nhắc đến khái niệm thế năng biến dạng và trong các bài toán thanh cũng đã xem xét thế năng biến dạng của từng loại nội lực. Trong mục này, trước khi đi vào chi tiết nguyên lí công ảo sẽ hệ thống lại các biểu thức thế năng biến dạng của từng loại nội lực.

Công thức tính thế năng biến dạng đàn hồi tổng quát như sau:

$$dU = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dv. \tag{13.1}$$

Thế năng biến dạng lực dọc trục

Xét đoạn dl có diện tích mặt cắt ngang A và độ dài l chịu một lực dọc trục N. Trong trường hợp này ứng suất pháp $\sigma = N/A$, biến dạng $\varepsilon = \sigma/E$. Như vậy từ phương trình (13.1) có tổng thế năng biến dạng :

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{EA} dl. \tag{13.2}$$

Khi thanh thẳng thì:

$$U = \frac{1}{2}\frac{N^2 l}{EA}. \tag{13.3}$$

Thế năng biến dạng do mô men uốn

Xét đoạn dl chịu mô men uốn M quanh trục z - một trục chính của mặt cắt ngang (hình 13.1b). Ứng suất pháp tại phần tử dA có khoảng cách $\overline{y}$ đến trục z là $\sigma = M\overline{y}/I$, biến dạng tương ứng $\varepsilon = \sigma/E = M\overline{y}/EI$. Như vậy từ phương trình (13.1) có thế năng biến dạng của phần tử:

$$dU = \frac{1}{2}\frac{M^2\overline{y}^2}{EI^2} dv = \frac{1}{2}\frac{M^2\overline{y}^2}{EI^2} dA dl.$$

Lấy tích phân trên toàn bộ mặt cắt ngang của đoạn dl, tìm được thế năng biến dạng:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI^2}dl\int_a \bar{y}^2 dA\,.$$

Tích phân bên vế phải chính là mô men quán tính I, vậy:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dl\,. \tag{13.4}$$

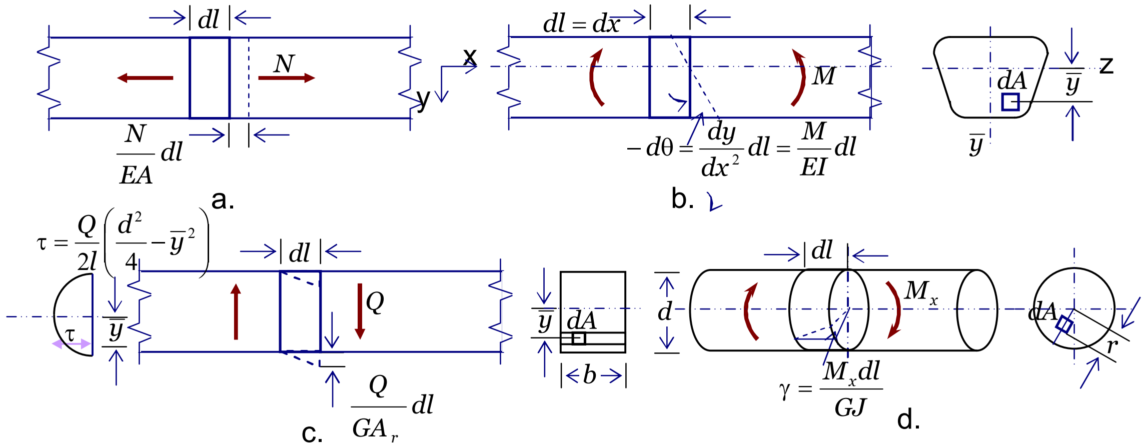
Từ đó có tổng thế năng biến dạng do uốn:

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dl\,. \tag{13.5}$$

Tích phân được lấy trên toàn bộ độ dài của phần tử kết cấu.

Trên hình 13.1b, hai mặt cắt chặn hai đầu của đoạn dl xoay đi so với nhau một góc $-d\theta = -\left(d^2y/dx^2\right)dl$, ở đây trục y hướng xuống dưới. Công ngoài do ngẫu lực M thực hiện để xoay đi một góc $-d\theta$ là:

$$\Delta W = -\frac{1}{2}Md\theta\,. \tag{13.6}$$



Hình 13.1.

Vì ngẫu lực dương (làm căng các sợi bên dưới) làm giảm góc nghiêng $\theta = dy/dx$ của trục biến dạng của dầm nên phương trình này mang dấu âm. Sự chênh lệch giữa góc nghiêng của đầu trái và đầu phải của đoạn dx chính là $-d\theta = -\left(d^2y/dx^2\right)$.

Vì công ngoại phải bằng công nội lực nên ta có $\Delta W = \Delta U$. Từ phương trình (13.4) và (13.6):

$$d\theta = -\frac{M}{EI}dl. \qquad (13.7)$$

Thế (13.7) vào (13.5) nhận được tổng thế năng biến dạng do mô men uốn :

$$U = -\frac{1}{2}\int M d\theta. \qquad (13.8)$$

Thế năng biến dạng do lực cắt

Xét đoạn dl chịu lực cắt Q (hình 13.1c). Nếu lực cắt gây ra ứng suất tiếp τ thì biến dạng trượt ε tại phần tử có diện tích da có dạng τ/G. Như vậy từ phương trình (13.1) thế năng biến dạng của đoạn dl

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int \frac{\tau^2}{G} dl \cdot da. \qquad (13.9)$$

Lấy tích phân trên toàn bộ mặt cắt ngang, sao cho giá trị của dU phụ thuộc vào sự thay đổi của lực cắt trên toàn bộ mặt cắt ngang. Ví dụ nếu mặt cắt ngang là hình chữ nhật thì:

$$\tau = \frac{Q}{2I}\left(\frac{d^2}{4} - \overline{y}^2\right), \qquad (13.10)$$

ở đây b là chiều rộng, d là chiều cao của hình chữ nhật, còn $\overline{y}$ là khoảng cách của sợi đến trục trung tâm và $I = bd^3/12$.

Thế (13.10) vào (13.9):

$$\Delta U = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2 dl}{4GI^2}\int_{-d/2}^{d/2}\left(\frac{d^2}{4} - \overline{y}^2\right)^2 b d\overline{y}.$$

Tính tích phân này và biết diện tích mặt cắt ngang là $a = b \cdot d$:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \times \left(1{,}2\frac{Q^2}{GA}\right)dl. \qquad (13.11)$$

Công thức (13.11) cho thanh có tiết diệt hình chữ nhật. Đối với tiết diện bất kỳ có công thức tổng quát:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{GA_r}\right)dl. \qquad (13.12)$$

ở đây A_r được gọi là diện tích thu nhỏ hay còn gọi là diện tích chịu cắt, phụ thuộc vào phân bố ứng suất tiếp, có nghĩa phụ thuộc vào hình học của tiết diện. Với hình chữ nhật $A_r = A/1{,}2$. Với thép hình chữ I diện tích thu nhỏ $A_r \cong A_w$ diện tích của bản cánh.

Từ phương trình (13.12), tổng thế năng biến dạng do trượt:

$$U = \frac{1}{2}\int\left(\frac{Q^2}{GA_r}\right)dl. \tag{13.13}$$

ở đây tích phân lấy trên toàn bộ độ dài của từng phần tử kết cấu.

Thế năng biến dạng do xoắn

Hình 13.1d biểu diễn đoạn dl của một thanh có tiết diện tròn chịu tác động của mô men xoắn M_x. Ứng suất tiếp tại điểm có khoảng cách r đến tâm là:

$$\tau = M_x r/J,$$

ở đây $J = I_\rho$ và I_ρ là mô men quán tích cực.

Biến dạng tương ứng là $\varepsilon = \tau/G$. Từ phương trình (13.1), thế năng biến dạng của đoạn dl:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int\frac{M_x^2 r^2}{GJ^2}dl\cdot da = \frac{1}{2}\frac{M_x^2 dl}{GJ^2}\int r^2 da.$$

Trong công thức trên tích phân:

$$\int r^2 da = I_\rho = J.$$

Như vậy :

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{M_x^2 dl}{GJ},$$

suy ra tổng thế năng biến dạng do xoắn sẽ là:

$$U = \frac{1}{2}\int\frac{M_x^2 dl}{GJ}. \tag{13.14}$$

Biểu thức này có thể áp dụng cho thanh có tiết diện khác với hình tròn. Trong trường hợp đó J là hằng số xoắn hay ‘’mô men quán tính’’ xoắn (đơn vị m^4) phụ thuộc vào hình dáng của tiết diện. Biểu thức của J cho một số mắt cắt khác với hình tròn có thể xem trong phụ lục 3.

Tổng thế năng biến dạng

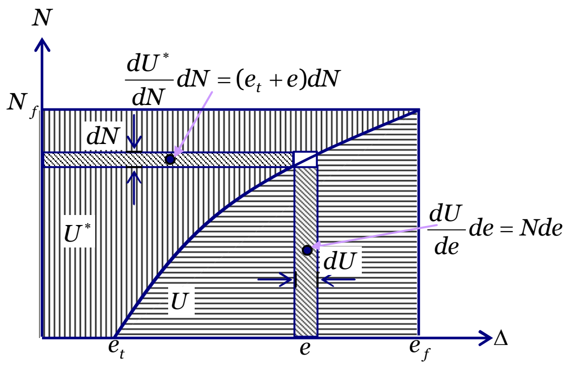
Nếu kết cấu chịu cả bốn loại nội lực như trên, khi đó thế năng biến dạng tổng thể sẽ là tổng của các năng lượng biến dạng cho trong các phương trình (13.2), (13.5), (13.13) và (13.14):

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{N^2 dl}{EA} + \frac{1}{2}\int \frac{M^2 dl}{EI} + \frac{1}{2}\int \frac{Q^2 dl}{GA_r} + \frac{1}{2}\int \frac{M_x^2 dl}{GJ}. \tag{13.15}$$

Tích phân lấy trên toàn bộ chiều dài của từng phần tử kết cấu. Cần chú ý mỗi nội năng là tích của nội lực N, M, Q và M_x tác động lên đoạn dl và thực hiện trên chuyển dịch tương ứng tại hai đầu nút của đoạn dl.

Năng lượng bù và công bù

Khái niệm này có thể áp dụng cho kết cấu bất kỳ. Nhưng ở đây sẽ xem xét trường hợp thanh chịu kéo nén của hệ dàn với các liên kết khớp. Giả sử thanh bị dãn một đoạn là e do lực kéo N và một đoạn e_t do thay đổi của môi trường (ví dụ như nhiệt độ, hay co ngót v.v). Đặt $\Delta = e + e_t$. Giả thiết có quan hệ giữa Δ và N như trên hình 13.2. Vậy khi đặt lực từ từ để đạt đến giá trị N_f và gây ra biến dạng e_f sao cho $\Delta_f = e_t + e_f$ thì thế năng biến dạng là $U = \int_0^{e_f} N de$, chính bằng diện tích của phần gạch ngang trong hình 13.2.



Hình 13.2

Định nghĩa năng lượng bù là :

$$U^* = \int_0^{N_f} \Delta dN \,. \tag{13.16}$$

hoặc;

$$U^* = N_f e_t + \int_0^{N_f} edN \tag{13.16'}$$

là diện tích phần gạch dọc trong hình 13.2.

Chú ý: khái niệm năng lượng bù không có ý nghĩa vật lý, ở đây sử dụng thuật ngữ này đơn thuần vì sự thuận tiện.

Hình 13.2. cho thấy tổng năng lượng bù và thế năng biến dạng bằng diện tích của hình chữ nhật :

$$N_f\left(e_t + e_f\right) = U + U^* \,.$$

Khi độ dãn dài tăng từ e đến $(e+de)$, U sẽ tăng một lượng $N \cdot de$, sao cho:

$$\frac{dU}{de} = N \,. \tag{13.17}$$

Đạo hàm tương ứng của U^* theo N sẽ bằng độ dãn dài Δ, vậy:

$$\frac{dU^*}{dN} = e_t + e = \Delta \,. \tag{13.18}$$

Nếu theo biểu đồ lực-chuyển vị (tương tự như biểu độ lực-độ dãn dài) trên hình 13.2 thì diện tích bên trái của đường cong là công bù W^*, vậy:

$$W^* = \int_0^{N_f} DdF \,, \tag{13.19}$$

ở đây N_f là giá trị sau cùng của lực F và $D = d_t + d$ là tổng chuyển vị, d là chuyển vị do tác động của lực F và d_t là chuyển vị do tác động của môi trường như nhiệt độ, co ngót, v.v.

Nếu hệ lực F_1, F_2, ..., F_n tác động từ từ lên kết cấu và tổng chuyển vị tại các vị trí và hướng ứng với các lực này là D_1, D_2, ..., D_n, thì công bù sẽ là:

$$W^* = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{F_{if}} D_i dF_i \,, \tag{13.20}$$

ở đây F_{if} là giá trị sau cùng của F_i.

Công bù sẽ bằng công ngoại lực khi kết cấu đàn hồi tuyến tính và chuyển vị D chỉ do ngoại lực sinh ra $(d_t = 0)$ thì:

$$W^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i \tag{13.21}$$

13.2 Nguyên lý công ảo

Phát biểu chung

Nguyên lý công ảo liên hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương thích trong kết cấu tuyến tính cũng như phi tuyến. Thực chất, cho hệ lực giả tưởng (ảo) cân bằng hay chuyển vị ảo nhỏ tác động lên kết cấu và liên hệ với chuyển vị thực hay lực thực tương ứng. Có thể sử dụng hệ lực ảo hoặc chuyển vị ảo bất kỳ, sao cho hệ lực này thỏa mãn điều kiện cân bằng hay các chuyển vị này đảm bảo điều kiện tương thích. Điều này có nghĩa chuyển vị ảo là chuyển vị hữu hạn bất kỳ khả dĩ về mặt hình học có thể xảy ra. Chúng phải liên tục trong kết cấu và thỏa mãn các điều kiện trên biên. Với sự lựa chọn lực ảo và chuyển vị ảo thích hợp có thể dùng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị và nội lực.

Xét kết cấu biến dạng dưới tác động của ngoại lực và môi trường như nhiệt độ hay co ngót. Gọi tổng năng lượng biến dạng thực tại một điểm bất kỳ là ε, và chuyển vị (thực) tương ứng tại n tọa độ đã chọn là D_1, D_2, ..., D_n. Giả thiết trước khi có tải trọng thực và biến dạng thực, kết cấu chịu hệ lực ảo là F_1, F_2, ..., F_n tại n tọa độ gây ra ứng suất ảo σ tại điểm bất kỳ. Hệ lực ảo này cân bằng nhưng không nhất thiết phải ứng với chuyển vị thực $\{D\}$. Nguyên lý công ảo phát biểu: *tích của chuyển vị thực và lực ảo tương ứng (chính là công bù ảo) sẽ bằng với tích của biến dạng thực với ứng suất ảo tương ứng (chính là năng lượng bù ảo).* Có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i D_i = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv, \tag{13.22}$$

ở đây σ là ứng suất ảo ứng với lực ảo F và ε là biến dạng thực tương thích với chuyển vị thực $\{D\}$. Tích phân lấy trên toàn bộ thể tích của kết cấu và tổng theo tất cả lực ảo $\{F\}$. Phương trình (13.22) phát biểu: *công bù của ngoại lực ảo và* *năng lượng bù của nội lực ảo khi chuyển động dọc theo chuyển vị thực bằng nhau:*

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\text{lực ảo}\\ \text{tại i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{chuyển vị thực}\\ \text{tại i}\end{pmatrix}=\int_V\begin{pmatrix}\text{ứng}\\ \text{suất ảo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Biến dạng}\\ \text{thực}\end{pmatrix}dv.$$

Nguyên lý công ảo dưới dạng này được áp dụng trong định lý lực đơn vị để tính chuyển vị tại tọa độ bất kỳ qua biến dạng do nội lực thực gây ra.

Nguyên lý này còn dùng để xác định ngoại lực tại một tọa độ từ nội lực. Khi đó cần chuyển vị ảo $\{D\}$ tương thích với biến dạng ảo ε tại mọi điểm. Tích của ngoại lực thực $\{F\}$ và chuyển vị ảo bằng với tích của ứng suất thực và biến dạng ảo tương thích với $\{D\}$. Quan hệ này có thể viết dưới dạng (13.22):

$$\sum_{i=1}^{n}F_iD_i=\int_v\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dv\,,$$

ở đây σ là ứng suất thực ứng với lực thực và ε là biến dạng ảo tương thích với chuyển vị ảo $\{D\}$.

Trong trường hợp này phát biểu: *công ảo của ngoại lực và nội lực thực khi chuyển động dọc theo chuyển vị ảo bằng nhau:*

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}\text{lực thực}\\ \text{tại i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{chuyển vị}\\ \text{ảo tại i}\end{pmatrix}=\int_V\begin{pmatrix}\text{ứng suất}\\ \text{thực}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Biến dạng}\\ \text{ảo}\end{pmatrix}dv.$$

Khi áp dụng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị (hay lực), cần chọn lực ảo (hay chuyển vị ảo) sao cho vế bên phải của phương trình (13.22) cho ta định lượng cần thiết. Có thể làm được điều này khi dùng định lý lực đơn vị hay định lý chuyển vị đơn vị để tính chuyển vị hay lực tương ứng.

Định lý lực đơn vị và chuyển vị đơn vị

Khi dùng nguyên lý công ảo để tính chuyển vị D_j tại tọa độ thứ j, chọn hệ lực ảo $\{F\}$ sao cho nó chỉ chứa có một lực đơn vị tại tọa độ j. Khi đó (13.22) có dạng:

$$1\times D_j=\int_v\{\sigma_{uj}\}^T\{\varepsilon\}dv \quad\Rightarrow\quad D_j=\int_v\{\sigma_{uj}\}^T\{\varepsilon\}dv\,. \qquad (13.23)$$

ở đây σ_{uj} là ứng suất ảo ứng với lực ảo đơn vị tại j, và ε là biến dạng thực do tải trọng thực gây ra. Phương trình này chính là định lý lực đơn vị và là dạng tổng quát (không giới hạn ở tuyến tính) của phương trình (13.30) xây dựng ở phần sau cho hệ tuyến tính.

Nguyên lý công ảo còn dùng để tính lực tại tọa độ thứ j, nếu biết phân bố của ứng suất thực hay của nội lực.Chọn chuyển vị ảo D_j tại tọa độ thứ j, những chuyển vị tại các điểm đặt lực khác không thay đổi. Sẽ xác định biến dạng tương thích. Công ảo của nội lực và ngoại lực thực thực hiện trên chuyển vị ảo này có dạng:

$$F_j \times D_j = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv . \tag{13.24}$$

σ là ứng suất thực ứng với lực thực và ε là biến dạng ảo ứng với chuyển vị ảo.

Trong kết cấu đàn hồi tuyến tính, các thành phần biến dạng ε tại điểm bất kỳ tỉ lệ với giá trị của chuyển vị tại j, sao cho:

$$\varepsilon = \varepsilon_{uj} D_j , \tag{13.25}$$

ở đây ε_{uj} là biến dạng tương thích với chuyển vị đơn vị tại j và chuyển vị tại các điểm đặt lực khác bằng không. Phương trình (13.24) sẽ có dạng:

$$F_j = \int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon_{uj}\} dv . \tag{13.26}$$

Phương trình này chính là định lý lực đơn vị,

Định lý này không áp dụng cho hệ phi tuyến vì đã sử dụng quan hệ (13.25), quan hệ tỉ lệ này chỉ đúng khi hệ là tuyến tính.

Định lý chuyển vị đơn vị là cơ sở để tính các đặc trưng độ cứng của phần tử kết cấu được áp dụng trong phần tử hữu hạn, khi kết cấu liên tục (bản, vật thể ba chiều) được chia thành những phần tử với các biên giả tưởng (hình tam giác, hình nón ba cạnh).

13.3 Tính chuyển vị bằng công ảo

Mô tả phương pháp

Xét kết cấu đàn hồi tuyến tính trên hình 13.3 chịu hệ lực F_1, F_2, ..., F_n gây nên ứng lực N, M, Q và M_x tại mặt cắt bất kỳ.

Do công ngoại lực và công nội lực bằng nhau, từ phương trình (13.1) và (13.15) sẽ có :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i = \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{EA}dl + \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dl + \frac{1}{2}\int \frac{Q^2}{GA_r}dl + \frac{1}{2}\int \frac{M_x^2}{GJ}dl\,, \tag{13.27}$$

ở đây D_i là chuyển vị tại vị trí và hướng của lực F_i, còn N, M, Q và M_x là nội lực tại mặt cắt bất kỳ do hệ lực $\{F\}$ gây ra.

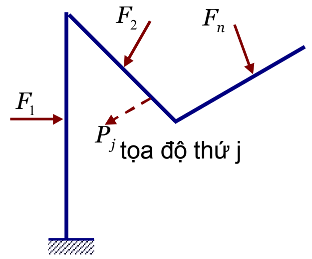
Giả thiết tại thời điểm khi lực $\{F\}$ tác động đã có lực ảo P_j tác động vào vị trí và hướng của tọa độ thứ j (hình 13.3). Lực này gây ra ứng lực N_{Pj}, M_{Pj}, Q_{Pj} và M_{xPj}. Công ngoại lực và công nội lực lúc này cũng phải bằng nhau:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i D_i + P_j D_j = {} & \frac{1}{2}\left[\int \frac{N^2}{EA}dl + \int \frac{M^2}{EI}dl + \int \frac{Q^2}{GA_r}dl + \int \frac{M_x^2}{GJ}dl\right] \\ & + \left[\int \frac{N_{Pj}N}{EA}dl + \int \frac{M_{Pj}M}{EI}dl + \int \frac{Q_{Pj}Q}{GA_r}dl + \int \frac{M_{xPj}M_x}{GJ}dl\right],\end{aligned} \tag{13.28}$$

ở đây D_j là chuyển vị tại j do hệ lực $\{F\}$ tại hướng của lực ảo j. Số hạng thứ hai trong cả hai vế biểu diễn công của lực P_j thực hiện khi chuyển động dọc theo chuyển vị gây ra bởi hệ lực $\{F\}$.

Lấy (13.28) trừ đi (13.27) nhận được

$$P_j D_j = \int \frac{N_{Pj}N}{EA}dl + \int \frac{M_{Pj}M}{EI}dl + \int \frac{Q_{Pj}Q}{GA_r}dl + \int \frac{M_{xPj}M_x}{GJ}dl\,. \tag{13.29}$$



Hình 13.3

Để xác định chuyển vị tại vị trí và hướng bất kỳ do hệ lực $\{F\}$ gây ra chia (13.29) cho P_j. Vậy chuyển vị tại j là:

$$D_j = \int \frac{N_{uj}N}{EA}dl + \int \frac{M_{uj}M}{EI}dl + \int \frac{Q_{uj}Q}{GA_r}dl + \int \frac{M_{xuj}M_x}{GJ}dl\,, \tag{13.30}$$

ở đây $N_{uj} = \dfrac{N_{Pj}}{P_j}$ $M_{uj} = \dfrac{M_{Pj}}{P_j}$ $Q_{uj} = \dfrac{Q_{Qj}}{P_j}$ và $M_{xuj} = \dfrac{M_{xPj}}{P_j}$ là nội lực tại mặt cắt bất kỳ do lực ảo đơn vị ($P_j = 1$) tại tọa độ j gây ra. Phương trình (13.30) là một trường hợp của định lý lực đơn vị áp dụng cho hệ khung.

Sử dụng phương trình (13.30) để tính chuyển vị tại mặt cắt bất kỳ, nội lực tại mọi mặt cắt của kết cấu có thể xác định do: (i) lực thực và (ii) lực ảo đơn vị. Lực thứ hai là lực giả tưởng, tải trọng giả đưa ra chỉ đơn thuần để tính toán. Cụ thể, nếu chuyển vị cần tính toán là dịch chuyển thẳng thì lực giả tưởng là lực tập trung đặt vào điểm và hướng của dịch chuyển phải tìm. Nếu chuyển vị phải tìm là góc xoay, thì lực đơn vị là một ngẫu lực tác động vào cùng hướng và cùng vị trí của góc xoay. Nếu cần xác định dịch chuyển tương đối giữa hai điểm, thì cần hai lực đơn vị tác động ngược hướng tại các điểm đó dọc theo đường thẳng nối các điểm đó. Tương tự, nếu cần xác định góc xoay tương đối, thì cần hai ngẫu lực đơn vị tác động ngược hướng tại các điểm đó.

Nội lực N_{uj}, M_{uj}, Q_{uj} và M_{xuj} là tỉ số của lực trên lực ảo đơn vị. Nếu chuyển vị cần tính là dịch chuyển thẳng, lực ảo sẽ là một lực. Chấp nhận hệ đơn vị đo lực và độ dài là N và m, khi đó N_{uj}, M_{uj}, Q_{uj} và M_{xuj} có đơn vị lần lượt là N/N, Nm/N, N/N và Nm/N. Nếu lực ảo là ngẫu lực thì N_{uj}, M_{uj}, Q_{uj} và M_{xuj} có đơn vị lần lượt là N/Nm, Nm/Nm, N/Nm và Nm/Nm. Ta có thể kiểm tra phép tính bằng cách kiểm tra đơn vị của các phép tính.

Mỗi số hạng trong (13.30) thể hiện sự đóng góp của từng loại nội lực. Trong thực tế không phải lúc nào cũng có cả bốn loại nội lực, vậy một số số hạng sẽ không cần tính. Có thể bỏ qua các số hạng có đóng góp không đáng kể .

Chuyển vị của kết cấu siêu tĩnh

Như trong mục 13.2 đã trình bày, nguyên lý công ảo có thể áp dụng cho kết cấu bất kỳ, tĩnh định hay siêu tĩnh. Tuy nhiên trường hợp siêu tĩnh cần tính nội lực gây ra do tải trọng thực bằng phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị.

Sau đó, cần tìm nội lực N_{uj}, M_{uj}, Q_{uj} và M_{xuj} do lực ảo đơn vị tác động tại j. Những lực này có thể xác định cho kết cấu đã giải phóng liên kết (bất kỳ) thỏa mãn điều kiện cân bằng với lực ảo đơn vị. Điều này có thể thực hiện được bằng cách giải phóng một số liên kết đảm bảo kết cấu không bị biến hình, vì nguyên lý công ảo liên hệ giữa chuyển vị ảo tương thích của kết cấu thực với hệ lực ảo cân bằng, hệ lực này không nhất thiết phải ứng với hệ lực thực.

Ví dụ 13.1. Xét kết cấu trên hình 13.4a, tìm chuyển vị ngang D_4 tại điểm C. Chỉ xét biến dạng uốn. Độ cứng của các thanh không đổi bằng EI.

Biểu đồ mô men đã có từ ví dụ 12.3 và biểu diễn trên hình 13.4b.

Lực đơn vị tác động vào tọa độ 4 vào kết cấu tĩnh định có được bằng cách cắt khung chỉ để lại thanh CD (hình 13.4c). Biểu đồ mô men uốn M_{u4} biểu diễn trên hình 13.4d.

Sử dụng phương trình (13.30) và chỉ xét uốn:

$$D_4 = \int \frac{M_{u4}M}{EI} dl.$$

Tích phân này chỉ cần lấy trên đoạn CD vì mô men uốn M_{u4} bằng không trên các đoạn còn lại. Trên đoạn CD biểu đồ mô men M là hình thang có các cạnh là (-0,334Pl) và (0,271 Pl), còn biểu đồ mô men M_{u4} là tam giác vuông chiều cao $l/2$. Sử dụng công thức ở ô thuộc dòng thứ 3 và cột thứ 3 của phụ lục 10, sẽ có:

$$D_4 = \frac{1}{EI}\left[\frac{l}{2}\frac{(l/2)}{6}\left(2\times 0{,}271Pl - 0{,}334PL\right)\right] = 0{,}0087\frac{Pl^3}{EI}.$$

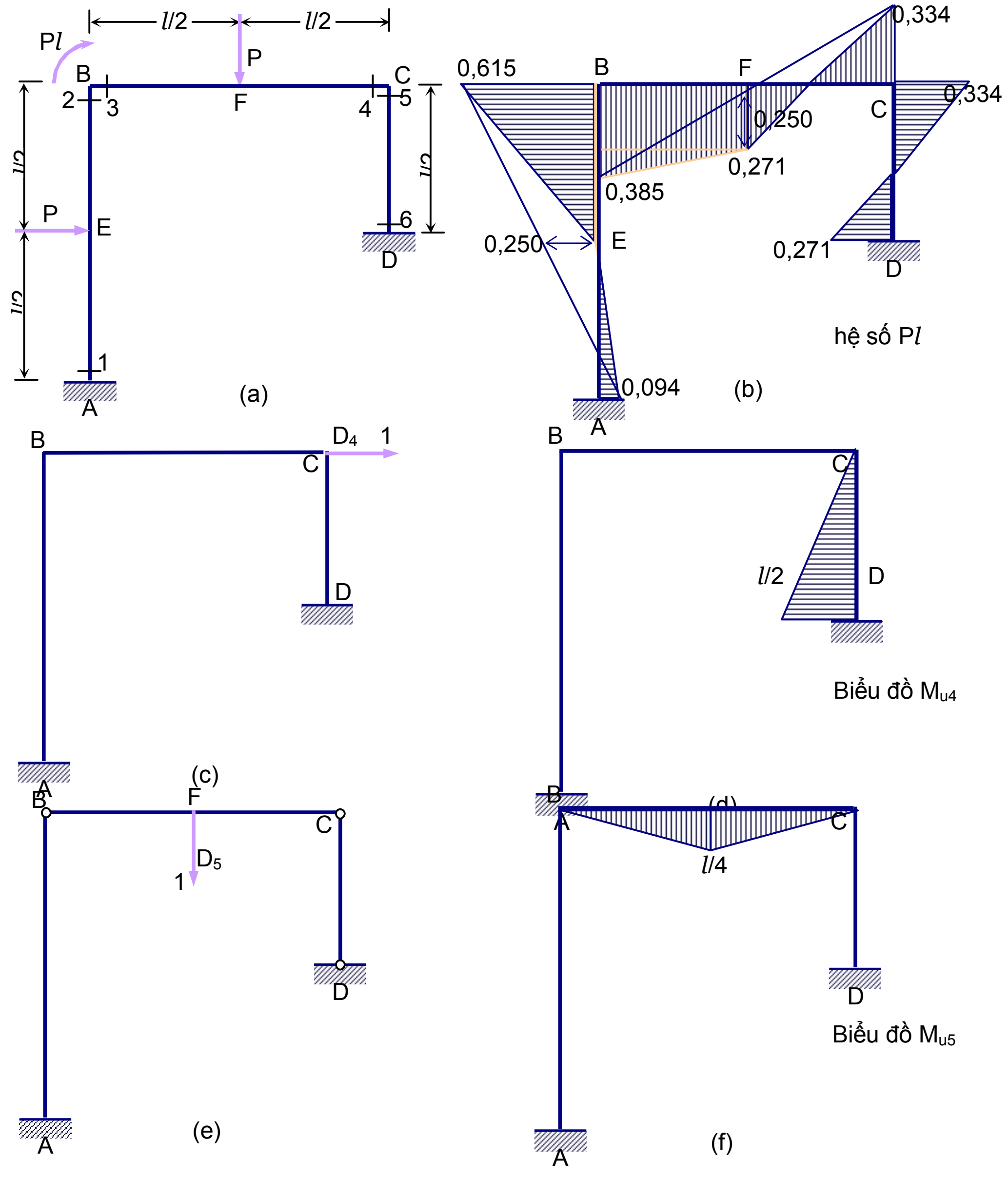
Chuyển vị thẳng đứng tại F ký hiệu là D_5. Ta đặt lực ảo đơn vị tác động vào khung có ba liên kết khớp (hình 13.4e). Biểu đồ mô men M_{u5} biểu diễn trên hình 13.4f. Tương tự như với D_4, nhận được:

$$D_5 = \int \frac{M_{u5}M}{EI} dl.$$

Tích phân này chỉ cần lấy trên đoạn BC vì mô men uốn bằng không trên các đoạn còn lại. Trên đoạn BC biểu đồ mô men M là tổng của hình thang có các cạnh (0,385Pl) và (-0,334Pl) và tam giác cân có cạnh là BC và chiều cao là $Pl/4$.

Biểu đồ mô men uốn M_{u4} cũng là tam giác cân có cạnh là BC và chiều cao là $l/4$. Sử dụng công thức ở ô thuộc cột thứ 6 và dòng thứ 3 và ô thuộc cột thứ 6 và dòng thứ 4 của phụ lục 10, nhận được:

$$D_5 = \frac{1}{EI}\left[\frac{l}{4}\frac{l}{6}\frac{3}{2}(0{,}385Pl - 0{,}334Pl) + \frac{1}{3}\frac{Pl}{4}\frac{l}{4}l\right] = 0{,}0240\frac{Pl^3}{EI}$$



Hình 13.4

Có thể đưa ra các lực ảo khác để tính D_4 và D_5.

Đánh giá tích phân để tính chuyển vị bằng phương pháp công ảo

Trong phần trước, tích phân:

$$\int \frac{M_{uj} M}{EI} dl$$

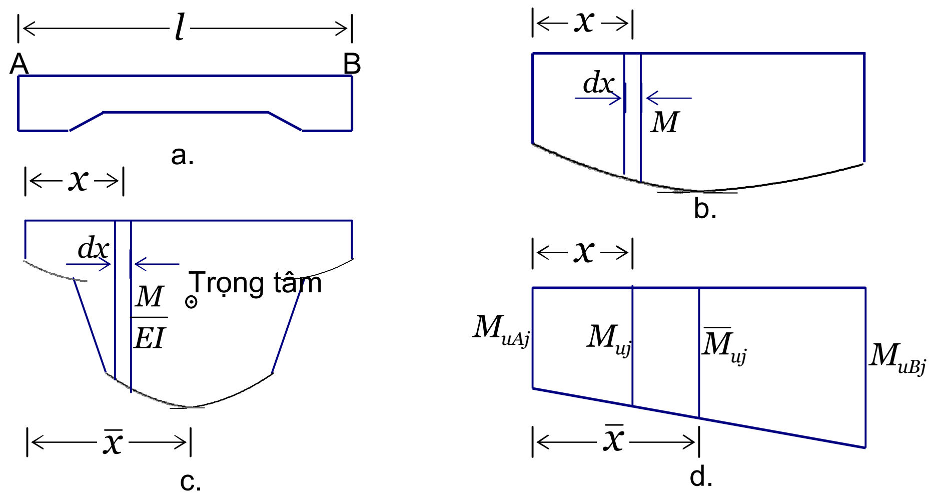
thường xuất hiện trong phương trình công ảo. Sẽ xét cách tính tích phân này, sau đó các tích phân khác cũng có thể làm tương tự.

Nếu kết cấu có m phần tử, thì tích phân có thể thay bằng tổng:

$$\int \frac{M_{uj} M}{EI} dl = \sum_{m} \int M_{uj} \frac{M}{EI} dl \tag{13.31}$$

sao cho bài toán đưa về tính tích phân cho một phần tử.

Xét phần tử thẳng AB có độ dài l, có tiết diện thay đổi chịu uốn (hình 13.5a). Hình 13.5b biểu diễn biểu đồ mô men uốn do tải trọng bất kỳ. Nếu chia tung độ của biểu đồ này cho EI, nhận được biểu đồ M/EI trên hình 13.5c.



Hình 13.5

Vì thanh AB thẳng, nên biểu đồ mô men uốn M_{uj} trên đoạn AB do lực ảo đơn vị tại tọa độ bất kỳ sẽ là đường thẳng (hình 13.5d). Ký hiệu tung độ của biểu đồ này tại A và B là M_{uAj} và M_{uBj}. Tung độ tại mặt cắt bất kỳ cách A một đoạn x là:

$$M_{uj} = M_{uAj} + \left(M_{uBj} - M_{uAj}\right)\frac{x}{l}.$$

Thế biểu thức của M_{uj} vào tích phân:

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI}dl = M_{uAj}\int_0^l \frac{M}{EI}dx + \left(\frac{M_{uBj} - M_{uAj}}{l}\right)\int_0^l \frac{M}{EI}xdx\,. \tag{13.32}$$

Tích phân trong số hạng thứ nhất là diện tích của biểu đồ M / EI, ký hiệu:

$$a_M = \int_0^l \frac{M}{EI}dx$$

Nếu $\bar{x}$ là khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ M / EI đến điểm A, khi đó tích phân trong số hạng thứ 2 là mô men bậc nhất của diện tích a_M đối với A và được tính qua công thức:

$$\int_0^l \frac{M}{EI}xdx = a_M\bar{x}\,.$$

Như vậy phương trình (13.32) sẽ có dạng:

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI}dl = a_M\left[M_{uAj} + \left(M_{uBj} - M_{uAj}\right)\frac{\bar{x}}{l}\right].$$

Số hạng trong dấu ngoặc vuông chính là tung độ $\overline{M}_{uj}$ của biểu đồ M_{uj} tại mặt cắt đi qua trọng tâm của biểu đồ M / EI. Vậy:

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI}dl = a_M\overline{M}_{uj}\,. \tag{13.33}$$

Bằng cách phân tích tương tự, có thể tính toán:

$$\int \frac{Q_{uj}Q}{Ga_r}dl = a_Q\overline{Q}_{uj}\,, \tag{13.34}$$

$$\int \frac{M_{xuj}M_x}{GJ}dl = a_{M_x}\overline{M}_{xuj}\,, \tag{13.35}$$

$$\int \frac{N_{uj}N}{Ea}dl = a_N\overline{N}_{uj}\,. \tag{13.36}$$

Các ký hiệu bên vế phải của các phương trình (13.33)-(13.36) là:

a_M, a_Q, a_{M_x} và a_N lần lượt là diện tích các biểu đồ $\frac{M}{EI}$, $\frac{Q}{GA_r}$, $\frac{M_x}{GJ}$ và $\frac{N}{EA}$;

$\overline{M}_{uj}$, $\overline{Q}_{uj}$, $\overline{M}_{xuj}$ và $\overline{N}_{uj}$ lần lượt là giá trị của M_{uj}, Q_{uj}, M_{xuj} và N_{uj} tại trọng tâm của các diện tích a_M, a_Q, a_{M_x} và a_N tương ứng ở trên.

Diện tích và trọng tâm của một số hình thường gặp có thể xem trong phụ lục 2. Với thanh có độ cứng $EI = const$, giá trị của tích phân $\int M_{uj} M dl$ cho một số hình thường gặp cho trong phụ lục 10.

Chú ý: giá trị của tích phân không phụ thuộc vào quy ước dấu của nội lực, đảm bảo rằng quy ước dấu cho lực ảo và lực thực như nhau.

13.4 Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ dàn

Chuyển vị của dàn

Trong dàn phẳng hay dàn không gian từ m thanh liên kết khớp, chỉ chịu lực tại các nút, nội lực duy nhất là lực dọc trục, vậy phương trình (13.30) có dạng :

$$D_j = \sum_{i=1}^{m} \int_l \frac{N_{uj} N_i}{EA} dl \,. \qquad (13.37)$$

Nói chung tiết diện không đổi trong từng thanh nên:

$$D_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{N_{uji} N}{E_i A_i} l_i \,, \qquad (13.38)$$

ở đây m là số phần tử, N_{uji} là lực dọc trục trong thanh thứ i do lực ảo tại điểm j và $\frac{N_i l_i}{E_i A_i}$ là thay đổi độ dài của thanh thứ i do lực thực gây ra, giả thiết vật liệu tuân thủ định luật Hooke.

Phương trình (13.38) có thể viết dưới dạng:

$$D_j = \sum_{i=1}^{m} N_{uji} \Delta_i \,, \qquad (13.39)$$

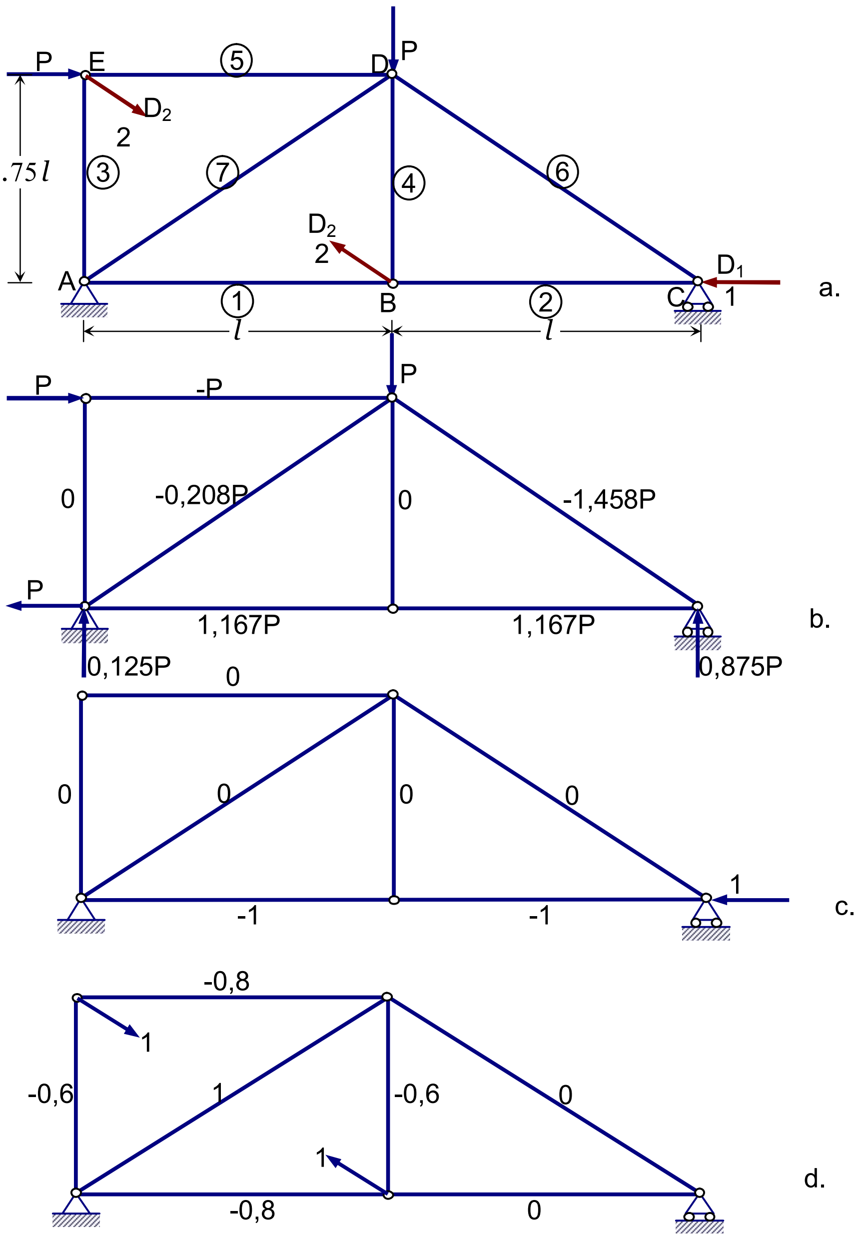
trong đó Δ_i là thay đổi độ dài thực của thanh thứ i. Biểu thức này dùng khi thay đổi độ dài là do các nguyên nhân khác ngoài ngoại lực ví dụ như thay đổi nhiệt độ. Sự tăng hay giảm nhiệt độ trong thanh thứ i đi ΔT độ sẽ gây ra sự thay đổi độ dài là:

$$\Delta_j = \alpha \Delta T l_i \,, \qquad (13.40)$$

trong đó l_i độ dài của thanh thứ i và α là hệ số giãn nở nhiệt.

Phương trình (13.39) đúng cho cả kết cấu tuyến tính và phi tuyến.

Ví dụ. 13.2. Dàn phẳng như trên hình 13.6a, chịu tác động của hai lực bằng nhau P tại E và D. Tiết diện của các thanh 1, 2, 3, 4 và 5 là A, còn các thanh 6 và 7 là 1,25A. Xác định chuyển vị ngang D_1 của điểm C và dịch chuyển tương đối D_2 của hai điểm B và E.



Hình 13.6

Nội lực được xác định và cho trên hình 13.6b. Nội lực do lực ảo đơn vị gây ra tại tọa độ D_1 và D_2 được xác định và cho trên hình 13.6c và 13.6d. Các giá trị nhận được có thể kiểm tra từ điều kiện cân bằng tại nút.

Quy ước dấu: thanh chịu kéo có lực dọc trục dương.

Tính D_1 và D_2 dùng phương trình (13.38), các tính toán cho dưới dạng bảng. Từ bảng 13.1 nhận được chuyển vị D_1 và D_2 là tổng của cột $\frac{N_u Nl}{EA}$ tương ứng. Vậy :

$D_1 = -2{,}334\frac{Pl}{EA}$ và $D_2 = -0{,}341\frac{Pl}{EA}$.

Dấu âm của D_1 chỉ ra rằng, chuyển vị ngược với hướng của lực ảo trong hình 13.6c. Có nghĩa điểm C dịch sang bên phải. Tương tự dịch chuyển tương đối của B và E ngược với hướng của lực ảo, như vậy chúng tách ra khỏi nhau.

Bảng 13.1. Tính D_1 và D_2 (Ví dụ 13.2)

Phần tử	Đặc trưng của thanh			Tải thực	Tính D_1		Tính D_2	
	Độ dài	Tiết diện	$\frac{l}{EA}$	N	N_u	$\frac{N_u Nl}{EA}$	N_u	$\frac{N_u Nl}{EA}$
1	1	1	1	1,167	-1	-1,167	-0,8	-0,933
2	1	1	1	1,167	-1	-1,167	0	0
3	0,75	1	0,75	0	0	0	-0,6	0
4	0,75	1	0,75	0	0	0	-0,6	0
5	1	1	1	-1	0	0	-0,8	0,800
6	1,25	1,25	1	-1,458	0	0	0	0
7	1,25	1,25	1	-0,208	0	0	1	-0,208
Hệ số	l	A	$\frac{l}{EA}$	P	-	$\frac{Pl}{EA}$	-	$\frac{Pl}{EA}$
						-2,334		-0,341

Ví dụ 13.3. Cũng với dàn phẳng trong ví dụ 13.2, tìm chuyển vị D_2, khi nhiệt độ ở phần tử thứ 5 và 6 tăng lên 30° (trường hợp này không có lực P tác dụng). Giả thiết hệ số giãn nở nhiệt α=0,6×10^{-5}/^{o}C. Lực ảo đơn vị tác động như trên hình 13.6d. Thay đổi độ dài thực chất chỉ xuất hiện ở hai phần tử số 5 và 6, sử dụng (13.40):

$$\Delta_5 = 0{,}6\times10^{-5}\times30\times l = 18\times10^{-5}l$$

$$\Delta_6 = 0{,}6\times10^{-5}\times30\times1{,}25l = 22{,}5\times10^{-5}l$$

Từ phương trình (13.39) ta có

$$D_2 = \sum_{i=5,6} N_{ui2}\Delta_i = -0{,}8(18\times10^{-5}l) + 0\times(22{,}5\times10^{-5}l) = -14{,}4\times10^{5}l\,.$$

Chuyển vị của dàn dùng đại số ma trận

Cho dàn có m phần tử, phương trình (13.38) cho chuyển vị tại các nút theo các hướng xác định bằng các tọa độ j. Biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$D_j = \{N_u\}^T_{j\;m\times1}[f_M]_{m\times m}\{N\}_{m\times1}\,, \tag{13.41}$$

ở đây $\{N_u\}^T_j$ là ma trận chuyển đổi của ma trận $\{N_u\}_j$ và là các nội lực do lực ảo đơn vị tại tọa độ j gây ra. Các thành phần của ma trận $\{N\}$ là nội lực do lực thực gây ra. Cuối cùng, ma trận độ mềm theo biến dạng dọc trục $[f_M]$ có dạng :

$$[f_M] = \begin{bmatrix} \dfrac{l_1}{E_1A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{l_2}{E_2A_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{l_m}{E_mA_m} \end{bmatrix}. \tag{13.42}$$

Đây là ma trận đường chéo, với các phần tử trên đường chéo chính là sự thay đổi độ dài do lực đơn vị gây ra. Ma trận này là ma trận độ mềm của kết cấu chưa ghép nối.

Sử dụng ma trận có ưu điểm khi dùng máy tính để tính toán chuyển vị tại một số nút. Giả sử chuyển vị cần tìm tại n tọa độ. Lực ảo đơn vị tác động riêng biệt vào từng nút. Bố trí các lực này dưới dạng ma trận như sau

$$[N_u]_{m\times n} = \begin{bmatrix} N_{u11} & N_{u12} & \cdots & N_{u1n} \\ N_{u21} & N_{u22} & \cdots & N_{u2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{un1} & N_{un2} & \cdots & N_{unn} \end{bmatrix}, \tag{13.42}$$

ở đây phần tử trong cột thứ j là nội lực trong phần tử do lực ảo tác động vào tọa độ thứ j. Chỉ số thứ nhất của N_u xác định phần tử dàn, chỉ số thứ hai xác định tọa độ j, tại đó lực ảo đơn vị tác động.

Các biểu thức (13.43) và (13.41) có thể mở rộng cho trường hợp xác định chuyển vị tại n tọa độ như sau:

$$\{D\}_{n\times 1} = [N_u]^T_{m\times n}[f_M]_{m\times m}\{N\}_{m\times 1} \tag{13.43}$$

Khi chuyển vị cần xác định cho p trường hợp tải trọng:

$$[D]_{n\times p} = [N_u]^T_{m\times n}[f_M]_{m\times m}[N]_{m\times p}. \tag{13.44}$$

Các ký hiệu được dùng là:

D là chuyển vị tại các tọa độ;

N_u là nội lực tại phần tử do lực ảo đơn vị gây ra ở các tọa độ. Thành phần N_{uij} trong ma trận $[N_u]$ là nội lực ở phần tử thứ i do lực ảo đơn vị tác động tại tọa độ thứ j;

$f_M = l/EA$ là độ mềm của phần tử;

N là nội lực tại phần tử do tải trọng thực; phần tử của từng cột trong ma trận $[N]$ là lực ứng với từng trường hợp tải trọng;

n là số tọa độ mà tại đó cần tính chuyển vị;

m là số phần tử;

p là số trường hợp tải.

Nếu chuyển vị cần tìm là do sự thay đổi độ dài của các thanh do thay đổi nhiệt độ, hay do nguyên nhân biến dạng khác, phương trình (13.39) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận tương đương như phương trình (13.45) :

$$[D]_{n\times p} = [N_u]^T_{m\times n}[\Delta]_{m\times p}. \tag{13.46}$$

Phần tử ở từng cột của [Δ] là độ dãn dài của từng thanh ứng với từng trường hợp.

Ví dụ 13.4. Giải ví dụ 13.2 dùng ma trận. Chuyển vị cần tính tại tọa độ 1 và 2 biểu diễn trên hình 13.6a.

Trong bài toán này $n = 2$, $m = 7$ và $p = 1$. Lực tạo thành các ma trận $[N]$ và $[N_u]$ biểu diễn trên hình 13.6b, 13.6c và 13.6d. Vậy:

$$[N_u]_{7\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & -0{,}8 \\ -1 & 0 \\ 0 & -0{,}6 \\ 0 & -0{,}6 \\ 0 & -0{,}8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \; [N_u]_{7\times 1} = \begin{bmatrix} 1{,}167 \\ 1{,}167 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1{,}458 \\ -0{,}208 \end{bmatrix}; \; [f_M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Thế vào phương trình (13.44):

$$[D]_{2\times 1} = [N_u]^T_{7\times 2}[f_M]_{7\times 7}[N]_{7\times 1} = \frac{Pl}{EA}\begin{bmatrix} -2{,}334 \\ -0{,}341 \end{bmatrix}.$$

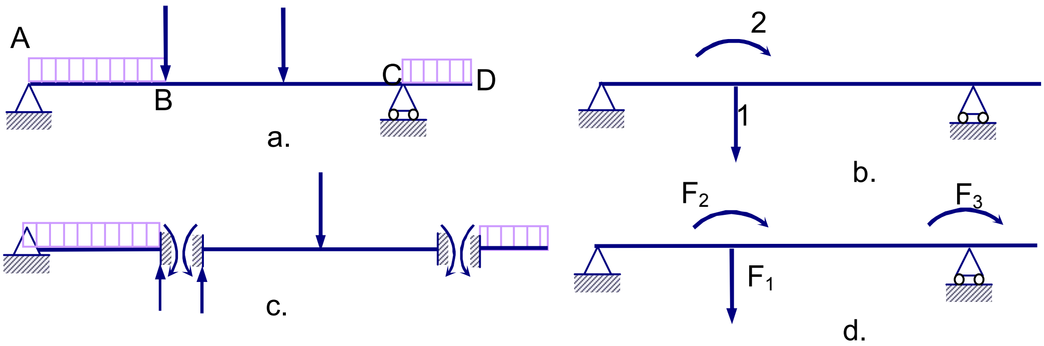
Kết quả nhận được trùng với kết quả tính trong bảng 13.1 cho ví dụ 13.2.

13.5 Áp dụng phương pháp công ảo cho hệ khung

Tải trọng nút tương đương

Như đã thấy khi phân tích kết cấu bằng phương pháp lực, chuyển vị được chọn tại một số tọa độ, thường chọn tại các nút và cũng nhận thấy sẽ rất tiện nếu sử dụng ma trận để tính toán. Như vậy đòi hỏi tải trọng phải đặt tại nút. Tuy nhiên tải trọng tác động ở giữa các nút có thể đưa về tải trọng nút tương đương. Các tải tương đương được chọn sao cho chuyển vị tại nút sẽ bằng với chuyển vị do tải trọng thật gây ra. Chyển vị tại các điểm không phải là nút không nhất thiết phải bằng với chuyển vị do tải thực gây ra.

Xét dầm trên hình 13.7a, cần tìm chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 tại B (hình 13.7b). Coi điểm B là một nút nối phần tử AB với BC. Trên hình 13.7c chuyển vị tại nút B và C đã bị hạn chế và phải xác định lực đầu phần tử do tải trọng thực gây ra. Có thể dùng phụ lục 7 để tính. Lực đầu phần tử tại các nút cộng lại và thành lực nút tương đương đặt vào kết cấu (hình 13.7d). Những lực này tương đương về mặt tĩnh học với tải trọng thực và gây ra chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 giống như tải trọng thực. Góc xoay tại C cũng sẽ giống như góc xoay do tải trọng thực gây ra. Nhưng điều này không đúng cho chuyển vị tại các nút A và D.



Hình 13.7

Thật vậy, xác định chuyển vị tại 1, 2 và góc xoay tại C bằng cách tổ hợp chuyển vị do các trường hợp tải trọng trên hình 13.7c và 13.7d gây ra. Nhưng lực trong trường hợp hình 13.7c không gây ra chuyển vị 1, 2 và góc xoay tại C. Khi cởi bỏ các lực hạn chế bằng cách đặt vào các lực như trên hình 13.7d sẽ gây ra các chuyển vị tại tọa độ 1 và 2 và góc xoay tại C bằng với chuyển vị do tải trọng thực gây ra.

Trong trường hợp trên, đưa vào các hạn chế tại những tọa độ cần xác định chuyển vị, Tuy nhiên có thể đưa thêm các hạn chế tại các vị trí khác để thuận tiện hơn cho việc tính các lực đầu phần tử.

Tất nhiên, thay thế bằng lực nút tương đương sẽ cũng gây ra phản lực bằng với phản lực trong trường hợp tải thực. Nội lực tại các đầu nút của phần tử do lực nút tương đương gây ra được cộng với lực đầu phần tử do tải trọng thực cho nội lực trong trường hợp tải thực.

Ưu điểm của việc dùng tải trọng nút tương đương là biểu đồ nội lực tương ứng là đường thẳng. Do vậy, việc tính tích phân trong phương trình (13.44) dễ dàng hơn nhiều.

Chuyển vị của dầm và khung

Nội lực chính trong dầm và khung là mô men uốn và lực cắt. Lực dọc trục và mô men xoắn hoặc không tồn tại hoặc đóng góp rất nhỏ so với chuyển vị ngang và góc xoay. Vì vậy, trong phương trình (13.44) có thể bỏ qua các thành phần kéo nén và xoắn khi tính chuyển vị ngang và góc xoay. Như vậy chuyển vị của dầm chịu lực cắt và mô men uốn có dạng:

$$D_j = \int \frac{M_{uj}M}{EI}dl + \int \frac{Q_{uj}Q}{GA_r}dl. \quad (13.47)$$

Hơn nữa, các tiết diện của dầm dùng trong thực tế được thiết kế sao cho biến dạng do trượt không đáng kể và có thể bỏ qua. Nên chuyển vị sẽ là:

$$D_j = \int \frac{M_{uj}M}{EI}dl. \quad (13.48)$$

Từ phương trình (13.7) có thay đổi độ võng của trục biến dạng của dầm trên một đoạn dl là $d\theta = -M / EIdl$. Thế vào (13.48) nhận được:

$$D_j = \int M_{uj}d\theta. \quad (13.49)$$

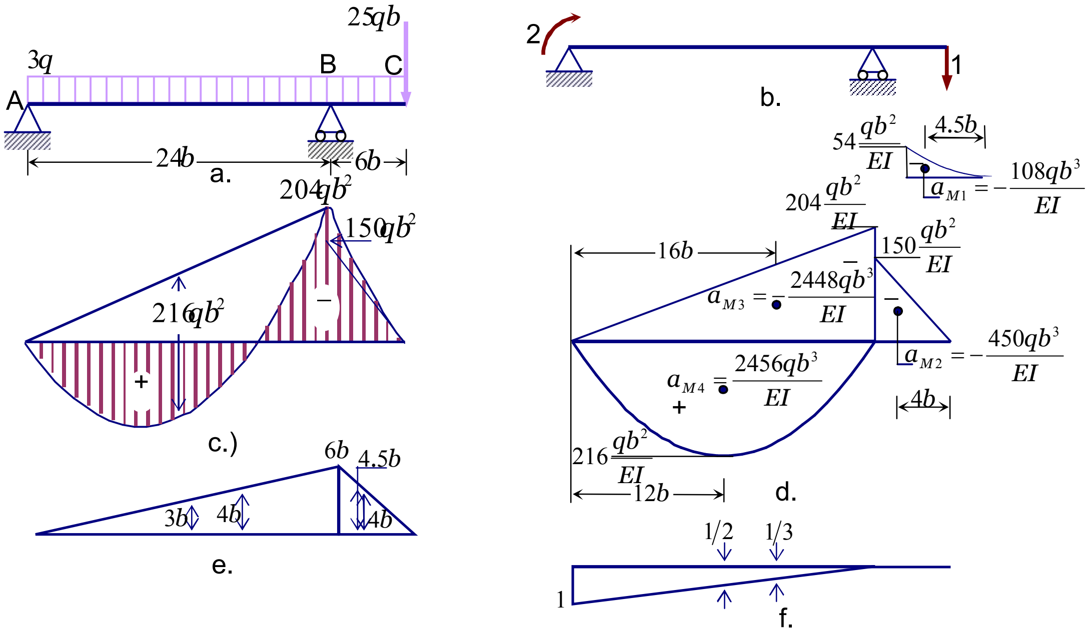
Độ võng âm nếu nó có cùng hướng với sự thay đổi góc do mô men dương gây ra. Quy ước dấu của độ võng xem trên hình 13.4b.

Phương trình (13.49) có thể dùng để tìm chuyển vị do các nguyên nhân không phải là ngoại lực gây ra, ví dụ như chêch lệch nhiệt độ của mặt trên và mặt dưới của dầm.

Ví dụ 13.5. Hình 13.8a biểu diễn dầm ABC với một đầu treo tự do. Tìm chuyển vị dọc D_1 tại C và góc xoay D_2 tại A. Dầm có độ cứng uốn không đổi EI. Chỉ xét biến dạng do uốn.

Biểu đồ mô men cho trên hình 13.8c với tung độ vẽ lên mặt chịu kéo. Hình 13.8e và 13.8f cho biểu đồ mô men do các lực đơn vị tại toạ độ 1 và 2. Vì $EI = const$ nên có thể xác định trọng tâm của biểu đồ M thay vì M / EI, sau đó lấy giá trị tìm được chia cho $EI = const$. Chia biểu đồ M thành các phần để dễ tìm trọng tâm như trên hình 13.8d. Phần diện tích của biểu đồ dương thì mang dấu dương, và chỉ cần tọa độ trọng tâm theo chiều dài của dầm.

Bước tiếp theo xác định tung độ của các biểu đồ mô men M_{uj} ứng với trọng tâm của từng phần diện tích (hình 13.8e và 13.8f).



Hình 13.8

Chuyển vị D_1 và D_2 tính theo (13.33):

$$D_j = \sum a_M \overline{M}_{uj} ,$$

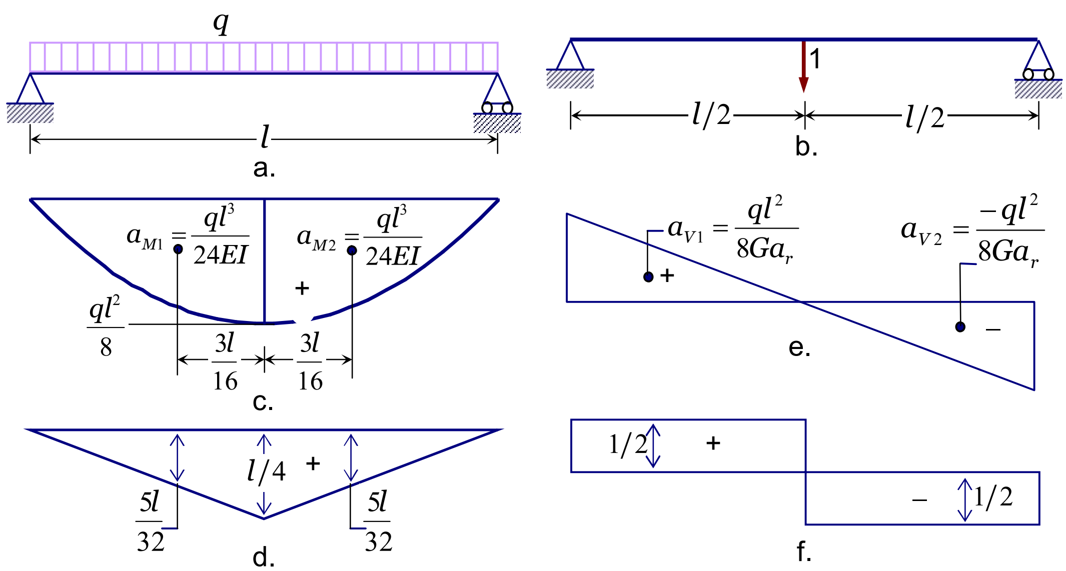
ở đây $\overline{M}$ là tung độ tại trong tâm của biểu đồ mô men. Vậy:

$$D_1 = \frac{qb^4}{EI}\left(108\times 4{,}5 + 450\times 4 + 2448\times 4 - 3456\times 3\right) = \frac{1710}{EI}qb^4 ,$$

và $D_2 = \dfrac{qb^3}{EI}\left(2448\times\dfrac{1}{3} - 3456\times\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{912}{EI}qb^3$.

Kết quả tính có dấu dương có nghĩa chuyển vị D_1 và D_2 theo hướng của các tọa độ trên hình 13.8b.

Ví dụ 13.6. Tìm tỉ lệ đóng góp của lực cắt so với đóng góp của mô men uốn lên tổng chuyển vị tại điểm giữa của dầm thép chữ I gối tựa đơn giản chịu lực phân bố đều (Hình 13.9a). Các dữ liệu khác: mô men quán tính chống uốn của dầm là I; diện tích thu nhỏ $A_r = A_w$ diện tích bản cánh của tiết diện chữ I; tỉ lệ giưa mô đun trượt và mô đun đàn hồi $G/E = 0{,}4$; độ dài nhịp l; cường độ phân bố lực là q (lực/đơn vị độ dài).



Hình 13.9

Hình 13.9c và 13.9d biểu diễn biểu đồ mô men uốn và lực cắt do tải trọng thực gây nên. Cho lực ảo đơn vị tác động vào tọa độ 1 (hình 13.9b) nơi cần tìm chuyển vị. Các biểu đồ của M_{u1} và Q_{u1} cho trên hình 13.9d và 13.9f. Ta chia biểu đồ M và Q là hai phần ứng với hai phần của biểu đồ M_{u1} và Q_{u1}. Xác định tung độ $\overline{M}_{u1}$ và $\overline{Q}_{u1}$ ứng với trọng tâm của từng phần biểu đồ. Khi đó chuyển vị tại điểm giữa là

$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI} dl + \int \frac{Q_{u1}Q}{GA_r} dl \qquad (13.50)$$

trong đó độ võng do uốn là:

$$\int \frac{M_{uj}M}{EI} dl = \sum a_M \overline{M}_{u1} = 2\frac{ql^3}{24EI}\frac{5l}{32} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI},$$

còn độ võng do lực cắt:

$$\int \frac{Q_{uj}Q}{GA_r} dl = \sum a_Q \overline{Q}_{u1} = 2\frac{ql^2}{8GA_r}\frac{1}{2} = \frac{ql^2}{8GA_r}.$$

Suy ra:

$$\frac{D \text{ do Q}}{D \text{ do } M} = \frac{ql^2}{8GA_r}\frac{384}{5}\frac{EI}{ql^4} = \frac{48}{5}\frac{E}{G}\frac{I}{l^2 A_r}.$$

Công thức này đúng cho dầm đơn giản tiết diện bất kỳ chịu lực phân bố đều. Trong trường hợp cụ thể này thì có $G = 0,4E$ nên:

$$\frac{D \text{ do } Q}{D \text{ do } M} = \frac{48}{5}\frac{E}{0,4E}\frac{I}{l^2 A_r} = 24\frac{I}{l^2 A_r} = c\left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

ở đây h là chiều cao của tiết diện chữ I và

$$c = 24\frac{I}{h^2 A_w}.$$

Giá trị c phụ thuộc vào tỉ lệ của tiết diện, với thép cán nói chung giá trị c thay đổi từ 7 đến 20. Trong các tài liệu tra cứu có thể tìm thấy giá tri c cho các loại tiết diện thép cán thường gặp.

Với các thanh chữ I, trên thực tế tỉ lệ h/l nằm trong khoảng 1/10 và 1/20. Dầm đơn giản chịu tải phân bố đều có tiết diện hình chữ nhật với $G = 0,4E$ và $h/l = 1/5, 1/10$ và $1/15$, thì độ võng do lực cắt chiếm 9,6; 1,4 và 1,07% của độ võng do uốn. Nếu là dầm đỡ dạng tấm cũng với chiều cao như vậy, thì độ võng do lực cắt chiếm 15 đến 25%.

Ví dụ 13.7. Xét dầm đơn giản AB chịu tải phân bố đều trên hình 13.10a. Xác định độ võng ở giữa dầm và góc xoay tại các gối. Bỏ qua biến dạng trượt.

Hệ tọa độ cho các chuyển vị cần tìm như trên hình 13.10b. Hình 13.10c biểu diễn lực đầu phần tử do tải thực gây ra trên kết cấu đã bị hạn chế. Nội lực này là lực nút tương đương đặt vào kết cấu như trên hình 13.10d. Biểu đồ mô men uốn đối với hệ lực này cho trên hình 13.10e, biểu đồ mô men do lực đơn vị tác động vào các tọa độ 1 và 2 vẽ trên hình 13.10f và 13.10g.

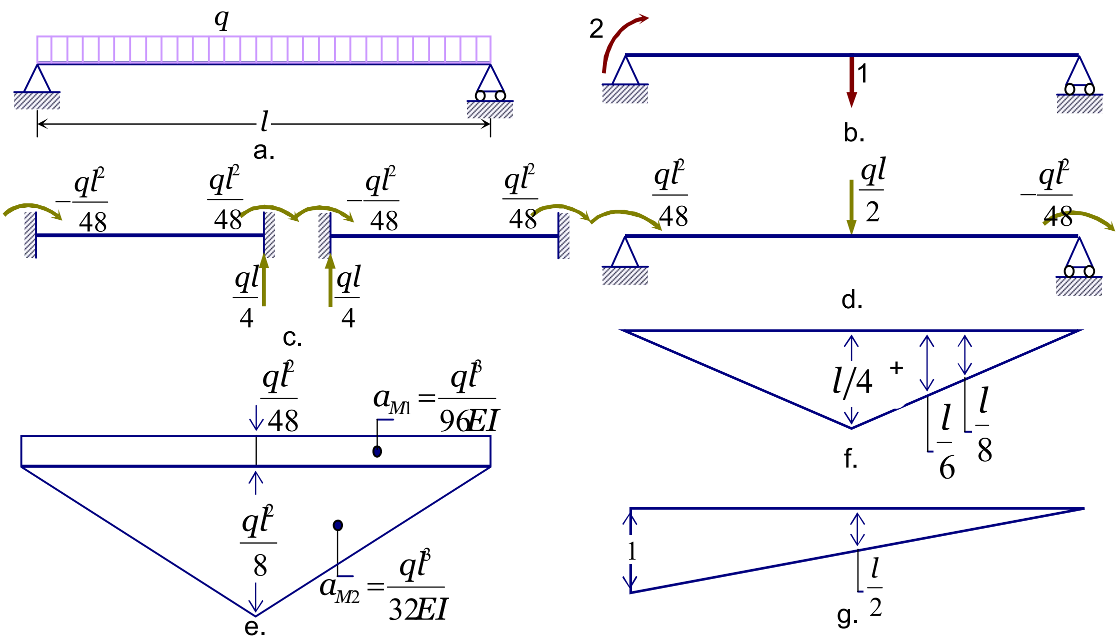
Từ phương trình (13.47) tính chuyển vị D_1 và D_2 sử dụng phụ lục 10:

$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI}dl = 2\left(\frac{ql^3}{96EI}\times\frac{l}{8} + \frac{ql^3}{32EI}\times\frac{l}{6}\right) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

và

$$D_2 = \int \frac{M_{u2}M}{EI}dl = 2\left(\frac{ql^3}{96EI} + \frac{ql^3}{32EI}\right)\frac{1}{2} = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Các giá trị này giống như giá trị đã cho trong phụ lục 6.



Hình 13.10

Ví dụ 13.8. Ống ABC như trên hình 13.11a được ngàm một đầu với A và nằm trên mặt phẳng ngang. Một lực thẳng đứng P tác động vào đầu C. Tìm chuyển vị tại C do uốn và xoắn. Ống có tiết diện không đổi. Cho $G = 0{,}4E$ và $J = 2I$.

Biểu đồ mô men uốn M và mô men xoắn M_x ứng với tải trọng thực biểu diễn trên hình 13.11c và 13.11d với diện tích và trọng tâm cho trên hình vẽ. Lực ảo đặt vào tọa độ 1, là tọa độ thẳng đứng tại C - điểm cần tìm chuyển vị. Biểu đồ của M_{u1} và M_{xu1} do lực ảo gây nên vẽ trên hình 13.11e và 13.11f.

Từ phương trình (13.30), chỉ lấy thành phần uốn và xoắn:

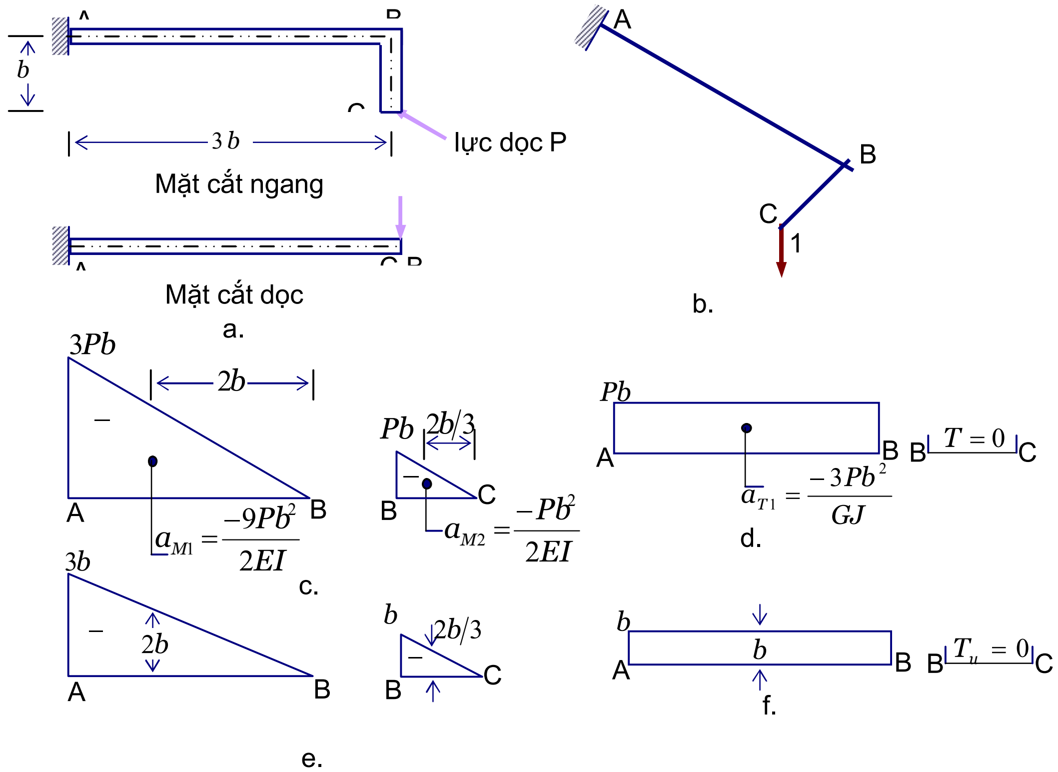
$$D_1 = \int \frac{M_{u1}M}{EI}dl + \int \frac{M_{xu1}M_x}{GJ}dl .$$

Tính các tích phân theo từng đoạn AB và BC dùng phương trình (13.33) và (13.35) sau đó lấy tổng, nhận được:

$$D_1 = \sum a_M \bar{M}_{u1} + \sum a_{M_x} \bar{M}_{xu1}$$

$$= \left(-\frac{4.5Pb^2}{EI}\right)(-2b) + \left(-\frac{0.5Pb^2}{EI}\right)\left(-\frac{2b}{3}\right) + \left(-\frac{3Pb^2}{GJ}\right)(-b)$$

$$= \frac{28}{3}\frac{Pb^3}{EI} + \frac{3Pb^3}{GJ} = \frac{Pb^3}{EI}\left(\frac{28}{3} + \frac{3}{0.4\times 2}\right) = 13{,}08333\frac{Pb^3}{EI}.$$



Hình 13.11

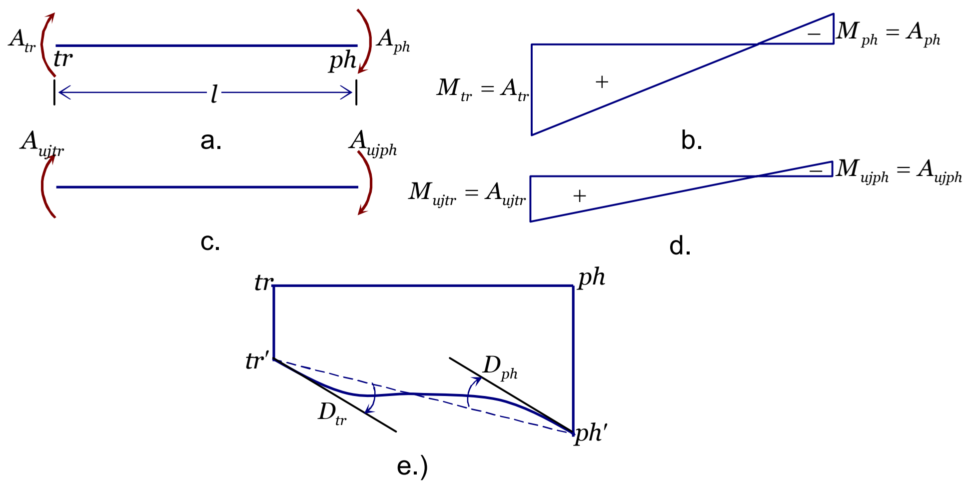
Chuyển vị của dầm và khung dùng đại số ma trận

Ở mục trước, khi tải tác động quy về lực tương đương tại nút, chuyển vị tại các nút sẽ giống như khi đặt tải thực. Nếu kết cấu chỉ gồm các phần tử thẳng thì lực tương đương sẽ gây ra mô men biến đổi tuyến tính giữa các nút và lực cắt và lực kéo nén là hằng số giữa các nút.

Hình 13.12a biểu diễn phần tử của kết cấu phẳng gồm m phần tử. Ký hiệu A_{tr} và A_{ph} là mô men tại đầu trái và đầu phải của phần tử do tải trọng bất kỳ tác động tại các nút. Giả thiết mô men dương nếu quay theo chiều kim đồng hồ. Biểu đồ mô men như trên hình 13.12b.

Mô men A_{ujtr} và A_{ujph} do lực ảo tác động vào tọa độ j chỉ ra trên hình 13.12c, và biểu đồ mô men tương ứng trên hình 13.12d. Nếu chỉ xét biến dạng do uốn, thì từ (13.48) xác định chuyển vị cho tất cả các phần tử của kết cấu. Dùng (13.33) để đánh giá tích phân trong (13.48) cho các phần tử trên hình 13.12 hay dùng phụ lục 10 có thể chỉ ra phần đóng góp của uốn trong chuyển vị tại nút j:

$$\Delta D_j = \int \frac{M_{u1} M}{EI} dl = \frac{l}{6EI}\left(2A_{tr}A_{ujtr} - A_{tr}A_{ujph} - A_{ph}A_{ujtr} + 2A_{ph}A_{ujph}\right).$$



Hình 13.12

Dưới dạng ma trận:

$$\Delta D_j = \{A_u\}_j^T [f_M] \{A\} \tag{13.51}$$

ở đây:

$$\{A_u\}_j = \begin{Bmatrix} A_{ujtr} \\ A_{ujph} \end{Bmatrix}, \tag{13.52}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_{tr} \\ A_{ph} \end{Bmatrix}, \tag{13.53}$$

$$[f_M] = \frac{l}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{13.54}$$

Các số hạng của ma trận $[f_M]$ là các góc xoay tại đầu dầm D_{tr} và D_{ph} so với trục thanh (đường gạch không liên tục trên hình 13.12e) do các ngẫu lực đơn vị tác động vào một trong các đầu dầm đơn giản (xem phụ lục 6). Ma trận $[f_M]$ là ma trận mềm uốn của phần tử.

Có thể nhận được phương trình (13.51) bằng phương pháp công ảo. Trong mục 13.2, chuyển vị D_j về mặt giá trị là công của nội lực do lực ảo đơn vị tại nút thứ j khi dịch chuyển theo chuyển vị do tải trọng thực gây ra. Cấu hình sau biến dạng trên hình 13.12e có thể tạo ra bằng cách dịch chuyển phần tử như một vật rắn tuyệt đối đến vị trí đường gạch không liên tục tr'ph', sau đó tác động hai mô men uốn M_{tr} và M_{ph} tại hai đầu của thanh tr'ph' gối tựa đơn giản. Nhân hai ma trận (13.53) và (13.54) nhận được góc xoay tại hai đầu D_{tr} và D_{ph} so với thanh chéo:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_{tr} \\ D_{ph} \end{Bmatrix} = [f_M]\{A\}. \tag{13.55}$$

Tích $\{A_u\}_j^T\{D\}$ cho công của hai mô men A_{utrj} và A_{uphj} khi di chuyển dọc theo D_{tr} và D_{ph}. Vậy:

$$\Delta D_j = \{A_u\}_j^T\{D\}. \tag{13.56}$$

Thế $\{D\}$ từ (13.55) vào (13.56) nhận được (13.51).

Chuyển vị tại j có thể xác định bằng cách lấy tổng trên tất cả các phần tử:

$$D_j = \sum_{i=1}^{m}\{A_u\}_{ij}^T[f_M]_i\{A\}_i\ . \tag{13.57}$$

Phương trình này có thể chuyển về dạng:

$$D_j = \{A_u\}_{j\,2m\times1}^T[f_M]_{2m\times2m}\{A\}_{2m\times1}\ , \tag{13.58}$$

trong đó

$$\{A_u\}_j = \begin{Bmatrix} \{A_u\}_{1j} \\ \{A_u\}_{2j} \\ \dots \\ \{A_u\}_{mj} \end{Bmatrix}, \tag{13.59}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} \{A\}_1 \\ \{A\}_2 \\ \dots \\ \{A\}_m \end{Bmatrix}, \tag{13.60}$$

$$[f_M] = \begin{bmatrix} [f_M]_1 & & & \\ & [f_M]_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & [f_M]_m \end{bmatrix}. \tag{13.61}$$

Ma trận $[f_M]$ chứa các ma trận độ mềm của từng phần tử và được gọi là ma trận độ mềm của kết cấu chưa ghép nối.

Phương trình (13.57) có lợi thế hơn phương trình (13.58) khi sử dụng máy tính vì các ma trận chiếm ít bộ nhớ hơn (4xm số hạng so với 2mx2m số hạng).

Nếu cần tính chuyển vị tại n tọa độ thì lực ảo đơn vị được đặt vào từng tọa độ riêng biệt và nhận được một tập hợp các mô men đầu phần tử. Các mô men này thiết lập thành ma trận:

$$[A_u]_{2m\times 2m} = \begin{bmatrix} \{A_u\}_{11} & \{A_u\}_{12} & \cdots & \{A_u\}_{1n} \\ \{A_u\}_{21} & \{A_u\}_{22} & \cdots & \{A_u\}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \{A_u\}_{m1} & \{A_u\}_{m2} & \cdots & \{A_u\}_{mn} \end{bmatrix}, \tag{13.62}$$

ở đây chỉ số thứ nhất là số hiệu phần tử, chỉ số thứ hai là số hiệu của tọa độ đặt lực ảo.

Nếu cần tính n chuyển vị do p trường hợp tải gây ra thì các mô men đầu phần tử được xác định cho từng phần tử với từng trường hợp tải. Các mô men này tạo thành ma trận:

$$[A]_{2m\times p} = \begin{bmatrix} \{A\}_{11} & \{A\}_{12} & \cdots & \{A\}_{1p} \\ \{A\}_{21} & \{A\}_{22} & \cdots & \{A\}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \{A\}_{m1} & \{A\}_{m2} & \cdots & \{A\}_{mp} \end{bmatrix}. \tag{13.63}$$

Chỉ số thứ nhất ký hiệu phần tử, chỉ số thứ hai ký hiệu trường hợp tải.

Viết dưới dạng ma trận phương trình tương tự như phương trình (13.45):

$$[D]_{n\times p} = [A_u]^T_{2m\times n}[f_M]_{2m\times 2m}[A]_{2m\times p}. \tag{13.64}$$

Các ký hiệu được dùng là:

$[D]$ là phần đóng góp do biến dạng uốn vào chuyển vị tại một tọa độ;

$\{A_u\}$ là ma trận con kích cỡ 2x1, số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra;

$[f_M]_i$ là ma trận độ mềm uốn của phần tử thứ i (phương trình (13.61)) và $[f_M]_i = \frac{l_i}{6E_iI_i}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$;

$\{A\}$ – ma trận con kích cỡ 2x1, số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do trường hợp tải thực gây ra.

Với giả thiết các phần tử thẳng và tải trọng chỉ đặt tại nút thì lực dọc trục, lực cắt và mô men xoắn sẽ không đổi dọc theo phần tử. Nếu xem xét sự đóng góp của các chuyển vị này ta có thể đưa ra một phương trình tổng quát giống như phương trình (13.58) cho trường hợp chuyển vị của dàn khi chịu lực dọc trục. Vậy:

$$[D]_{n\times p} = [A_u]^T_{m\times n}[f_M]_{m\times m}[A]_{m\times p}. \qquad (13.65)$$

Các ký hiệu được dùng là:

Thành phần D_{ij} của ma trận $[D]$ là phần đóng góp của lực dọc trục, lực cắt hay mô men xoắn vào chuyển vị tại tọa độ thứ i ở trường hợp tải trọng thứ j;

Thành phần A_{ij} của ma trận $[A_u]$ là lực dọc trục, lực cắt hay mô men xoắn của phần tử thứ i do lực ảo đơn vị đặt tại tọa độ thứ j gây ra;

Ma trận độ mềm $[f_M]$ là ma trận vuông đường chéo, thành phần f_{Mii} là độ mềm của phần tử thứ i với: lực dọc trục $f_{Nii} = \frac{l}{EI}$, lực cắt $f_{Qii} = \frac{l}{Ga_r}$, mô men xoắn $f_{Mxii} = \frac{l}{GJ}$;

Thành phần A_{ij} của ma trận $[A]$ là lực dọc trục, lực cắt hay mô men xoắn của phần tử thứ i do trường hợp tải trọng thực thứ j gây ra;

n là số tọa độ mà tại đó cần tính chuyển vị;

m là số phần tử;

p là số trường hợp tải.

So sánh các phương trình (13.64) và (13.65), thấy rằng phần đóng góp của biến dạng uốn, dọc trục, trượt và xoắn có thể biểu diễn qua các phương trình tương tự nhau. Vậy tổng chuyển vị có thể nhận được bằng phép tổng:

$$[D]=\sum_{s=1}^{4}[A_u]_s^T[f_M]_s[A]_s\,, \tag{13.66}$$

ở đây s đại diện cho bốn loại biến dạng. Kích cỡ của các ma trận trong phương trình này sẽ giống như trong (13.64) đối với biến dạng uốn và như trong (13.65) cho các trường hợp khác. Các ký hiệu A_s và A là nội lực suy rộng có thể là lực hay ngẫu lực mô men.

Ví dụ 13.9. Khung như trên hình 13.13a làm từ các dầm chữ I có các đặc trưng hình học như sau: $A=1{,}34\times10^{-4}l^2$, $A_r=A_{cánh}=0{,}65\times10^{-4}l^2$, $I=5{,}30\times10^{-8}l^4$ và $G=0{,}4E$. Xác định sự đóng góp của mô men uốn, lực dọc trục và lực cắt vào chuyển vị tại ba tọa độ như trên hình 13.13b.

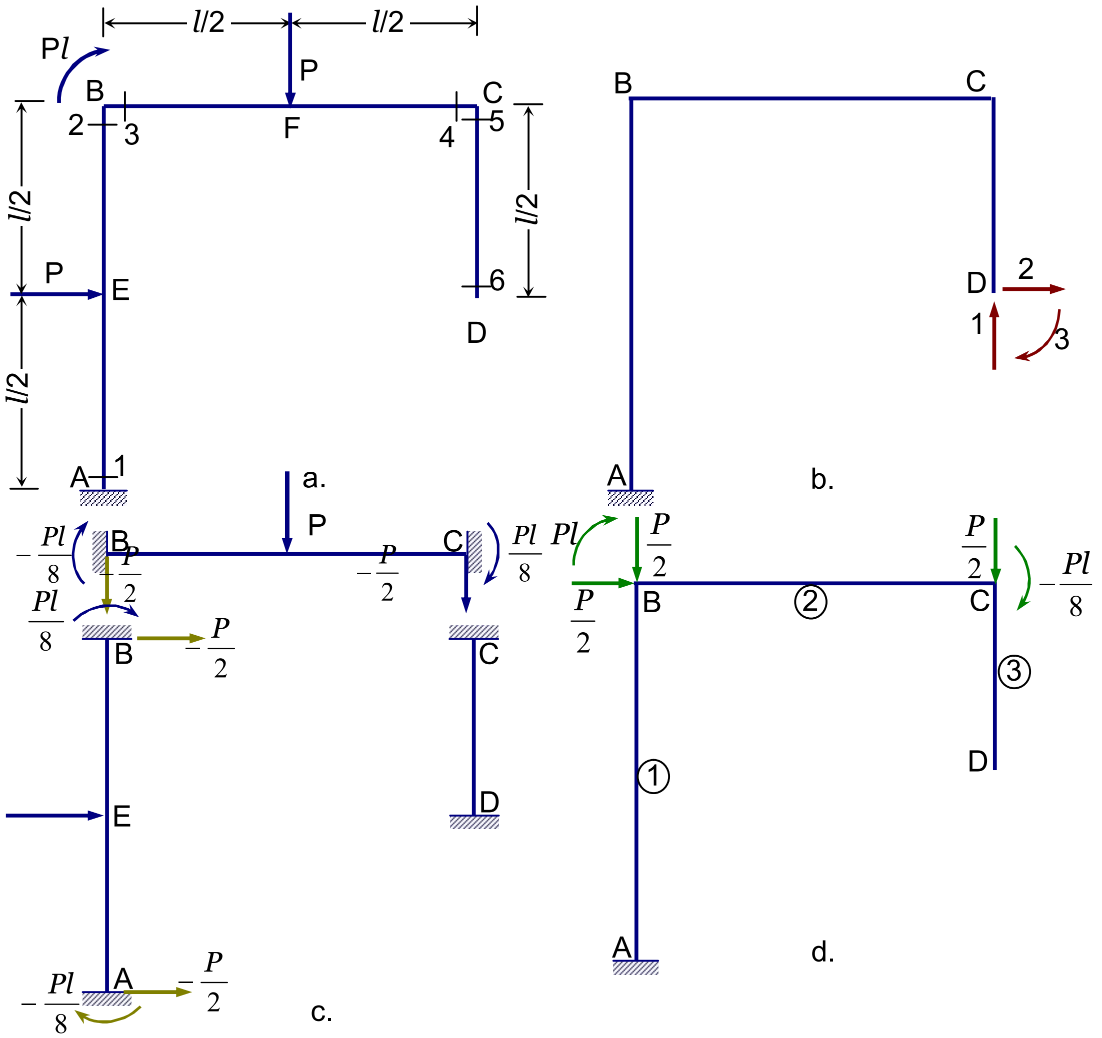
Bước thứ nhất thay tải trọng thực bằng các lực tương đương tại các nút A, B, C và D. Bằng cách đặt hạn chế tại các nút (hình 13.13c) xác định các lực đầu phần tử theo phụ lục 7 và đặt vào các nút như các lực tương đương (hình 13.13d). Sau đó tiến hành tìm chuyển vị do các lực tương đương này.

a) Biến dạng uốn

Xác định mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị tác động tại từng tọa độ riêng biệt gây ra và do tải trọng nút tương đương trên hình 13.13d. Các mô men đầu phần tử này tập hợp trong ma trận $[A_u]$ và $[A]$:

$$[A_u]_{6\times3}=\begin{bmatrix} l & -0{,}5l & -1 \\ -l & -0{,}5l & 1 \\ l & 0{,}5l & -1 \\ 0 & -0{,}5l & 1 \\ 0 & 0.5l & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\qquad [A]_{6\times1}=Pl\begin{bmatrix} -1{,}875 \\ 1{,}375 \\ -0{,}375 \\ -0{,}25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Chú ý các mô men đầu phần tử được liệt kê theo đúng thứ tự và cùng quy ước dấu ở cả hai ma trận trên. Lần lượt liệt kê mô men bên trái đến mô men bên phải của từng phần tử. Mô men dương là mô men theo chiều kim đồng hồ.



Hình 13.13

Ma trận độ mềm của từng phần tử có dạng

$$[f_M]_{6\times6} = \frac{l}{6EI}\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & 1 \end{array}\right].$$

Thế vào phương trình (13.64) tìm được phần đóng góp của biến dạng uốn vào chuyển vị tại các tọa độ :

$$[D]_{3\times1} = \frac{Pl^3}{6EI}\begin{Bmatrix} -10{,}375 \\ 0{,}125 \\ 10{,}50/l \end{Bmatrix} = \frac{P}{El}\begin{Bmatrix} -3263\times10^4 \\ -39\times10^4 \\ 3301\times10^4/l \end{Bmatrix}.$$

b) Biến dạng do lực dọc trục

Lực dọc trục của phần tử do tải tác động tập hợp trong ma trận $[A_u]$ và $[A]$ dưới đây, quy ước lực kéo là lực dương:

$$[A_u]_{6\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [A]_{3\times1} = P\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Độ mềm của từng phần tử riêng biệt có thể tập hợp lại dưới dạng ma trận như sau:

$$[f_M]_{3\times3} = \frac{l}{EA}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Thế vào phương trình (13.65) tìm được phần đóng góp của biến dạng dọc trục vào chuyển vị tại các tọa độ :

$$[D]_{3\times1} = \frac{Pl}{EA}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{El}\begin{Bmatrix} -75\times10^4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

c) Biến dạng trượt

Lực cắt của phần tử do tải trọng ảo và tải trọng thực tác động được tập hợp trong ma trận $[A_u]$ và $[A]$:

$$[A_u]_{6\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad [A]_{3\times1} = P\begin{Bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Tương tự như trường hợp lực dọc trục độ mềm của từng phần tử riêng biệt có thể tập hợp lại dưới dạng ma trận sau:

$$[f_M]_{3\times 3} = \frac{l}{GA_r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Thế vào phương trình (13.65) ta tìm được phần đóng góp của biến dạng trượt vào chuyển vị tại các tọa độ :

$$[D]_{3\times 1} = \frac{Pl}{GA_r}\begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{Pl}{0,4E\times 0,65\times 10^{-4} l^2}\begin{Bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{P}{El}\begin{Bmatrix} -1,92\times 10^4 \\ 1,92\times 10^4 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Rõ ràng phần đóng góp của biến dạng uốn lớn hơn hẳn so với biến dạng dọc trục và trượt cắt. Chính vì vậy các biến dạng này thường bị bỏ qua.

13.6 Ma trận độ mềm tổng thể của kết cấu

Ma trận độ mềm có thể thiết lập cho từng phần tử của kết cấu sử dụng phương trình (13.64) và (13.65). Các phần tử của ma trận độ mềm là chuyển vị tại tọa độ do lực đơn vị tác động riêng biệt tại từng tọa độ. Do vậy tải trọng thực và tải trọng ảo sẽ như nhau ta ký hiệu là $[A]=[A_u]$ và phương trình (13.65) trở thành

$$[f]=\sum_{s=1}^{4}[A_u]_s^T[f_M]_s[A_u]_s \tag{13.67}$$

ở đây $[f]$ là ma trận độ mềm của kết cấu tổng thể, $[f_M]$ là ma trận độ mềm của kết cấu chưa ghép nối (xem công thức (13.61)) và chỉ số s ký hiệu 4 nguyên nhân gây ra biến dạng gồm: uốn, dọc trục, trượt và xoắn. Nếu ta chỉ xét biến dạng do uốn thì (13.67) thành

$$[f]=[A_u]_{2m\times n}^T[f_M]_{2m\times 2m}[A_u]_{2m\times n} \tag{13.68}$$

Các ký hiệu được dùng là

$[f]$ là ma trận độ mềm tổng thể của kết cấu;

$\{A_u\}$ là ma trận con kích cỡ 2x1, số hạng của nó là hai mô men tại đầu phần tử do lực ảo đơn vị đặt tại một tọa độ gây ra;

$[f_M]_i$ là ma trận độ mềm uốn của phần tử thứ i (phương trình (13.61)) và bằng

$$[f_M]_i = \left(\frac{l}{6EI}\right)_i \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix};$$

m - số phần tử;

n - số tọa độ.

Phương trình (13.67) còn có thể viết dưới dạng

$$[f] = \sum_{i}^{m} \sum_{s=1}^{4} [A_u]_{is}^{T} [f_M]_{is} [A_u]_{is} \tag{13.69}$$

ở đây $[A_u]_{is}$ và $[f_M]_{is}$ là các ma trận của phần tử thứ *i*

Khi chỉ kể đến biến dạng do uốn, phương trình (13.68) viết theo cách này có dạng

$$[f] = \sum_{i}^{m} [A_u]_{i\ 2\times n}^{T} [f_M]_{i2\times 2} [A_u]_{i2\times n} \tag{13.70}$$

13.7 Ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

Chuyển hệ tọa độ của chuyển vị và lực

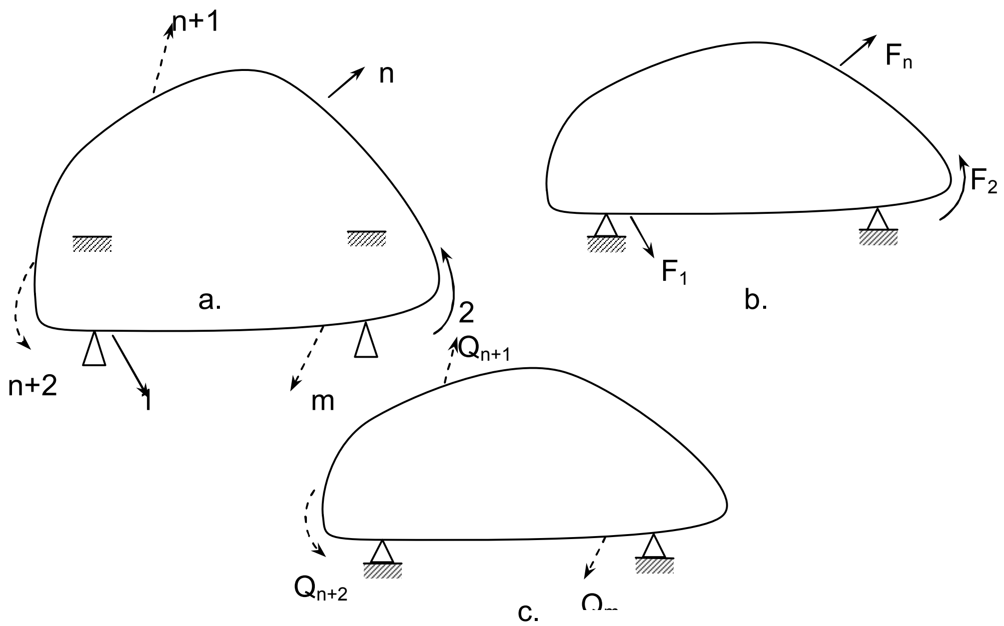
Xuất phát từ nguyên lý công ngoại lực bằng công nội lực, trường hợp kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi tuyến tính tuân thủ định luật Hooke ta có định lý tương hỗ Betti.

Xét kết cấu bất kì, ví dụ như trên hình 13.14a, với các tọa độ $1,2,\cdots,n$, $n+1,n+2,\cdots,m$. Hệ lực $F=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$ tác động vào các tọa độ $1,2,\cdots,n$ (hình 13.14b) và hệ lực $Q=\{Q_{n+1},Q_{n+2},\cdots,Q_m\}$ tác động vào các tọa độ $n+1,n+2,\cdots,m$ (hình 13.14c). Khi chỉ có hệ lực F tác động sẽ gây ra các chuyển vị tại các tọa độ, được kí hiệu là $\{D_{1F},D_{2F},\cdots,D_{mF}\}$. Tương tự, khi chỉ có hệ lực Q tác động sẽ gây ra chuyển vị tại các nút và ta kí hiệu là $\{D_{1Q},D_{2Q},\cdots,D_{mQ}\}$

Định lý Betti phát biểu, khi kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi tuyến tính tuân thủ định luật Hooke ta có quan hệ

$$\sum_{i=1}^{n} F_i D_{iQ} = \sum_{i=n+1}^{m} Q_i D_{iF} \tag{13.71}$$

Có nghĩa tổng các tích của hệ lực F và chuyển vị tại các tọa độ tương ứng do hệ lực Q gây ra bằng tổng các tích của hệ lực Q và chuyển vị tại các tọa độ tương ứng do hệ lực F gây ra.



Hình 13.14

Ta dùng định lý Betti để chuyển hệ lực bất kỳ tác động lên kết cấu về lực tương đương tại tọa độ (độc lập và là các bậc tự do của hệ).

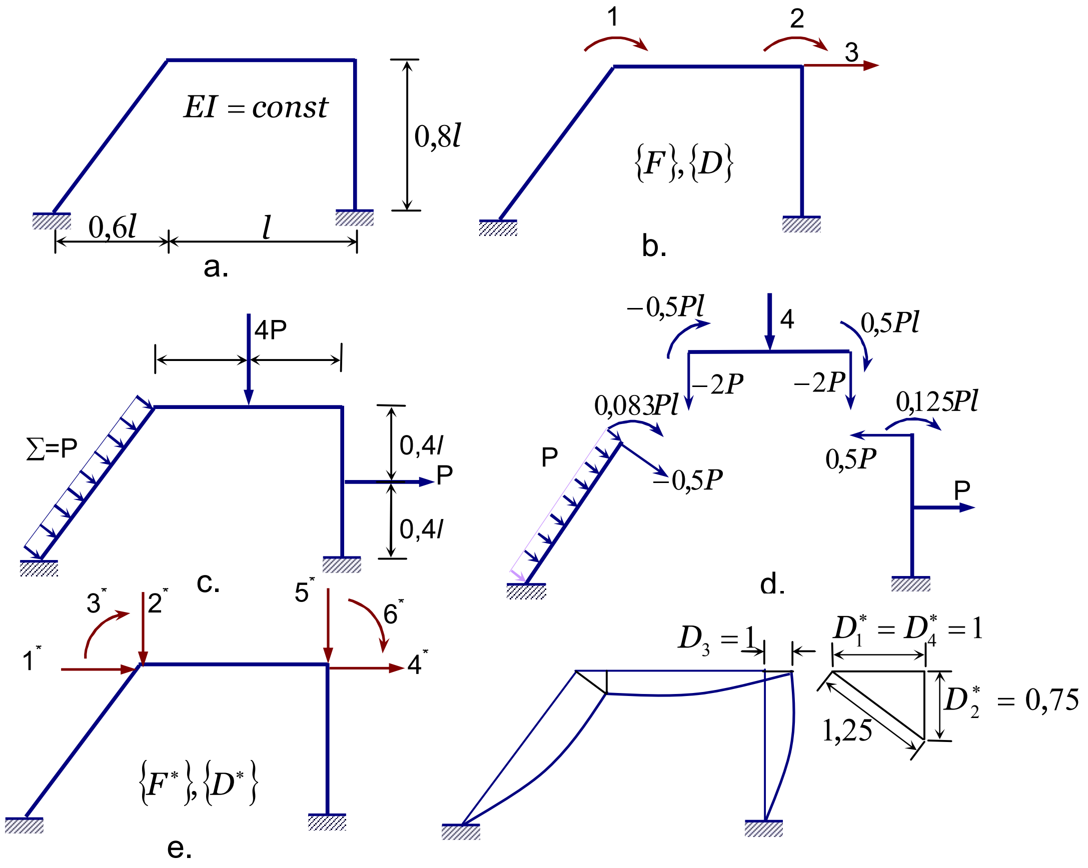
Xét ví dụ khung trên Hình 13.15a. Khi không kể đến lực dọc trục hệ có ba bậc tự do (Hình 13.15b). Nếu ta biết ma trận độ mềm $[f]$ của hệ thì chuyển vị độc lập $\{D\}$ do lực ngoài $\{F\}$ gây ra có thể xác định bằng phương trình $\{D\}=[f]\{F\}$, lực và chuyển vị đều cho tại ba tọa độ trên.

Nếu hệ chịu tác động của hệ lực bất kỳ, bước đầu tiên ta phải đưa lực về lực tương đương tại nút. Các lực đầu phần tử biểu diễn trên Hình 13.15d được cộng lại cho ta lực tương đương $\{F^*\}$ như trên Hình 13.15e. Các lực $\{F^*\}$ tác động tại các tọa độ $\{D^*\}$ này, các tọa độ này không độc lập và liên hệ với $\{D\}$ bằng

$$\{D^*\}=[C]\{D\} \tag{13.72}$$

ma trận $[C]$ xác định từ hình học của khung. Phần tử của ma trận $[C]$ là giá trị của chuyển vị D^* ứng với dịch chuyển đơn vị tại một trong các tọa độ D.

$$\{D^*\}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{D\}_{3\times 1}\,;\ [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{13.73}$$



Hình 13.15

Sử dụng định lý Betti cho hai hệ lực ta được

$$\sum_{i=1}^{3} F_i D_i = \sum_{j=1}^{6} F_j^* D_j^*$$

Thế D* vào phương trình trên và đưa về dạng ma trận ta có

$$\{D\}^T \{F\} = \{D\}^T [C]^T \{F^*\} \tag{13.74}$$

từ đây ta có

$$\{F\} = [C]^T \{F^*\} \tag{13.75}$$

Chuyển hệ tọa độ của ma trận độ mềm và ma trận độ cứng

Xét hệ tọa độ trên kết cấu tuyến tính. Xác định vị trí và hướng của lực ngoài $\{F\}$ và chuyển vị $\{D\}$, xác định ma trận độ cứng $[S]$ và ma trận độ mềm $[f]$. Trong hệ tọa độ khác ta có các đại lượng tương ứng $\{F^*\}$, $\{D^*\}$, $[S^*]$ và $[f^*]$. Nếu lực và chuyển vị liện hệ qua

$$\{D\} = [H]\{D^*\} \text{ hoặc } \{F^*\} = [H]^T \{F\} \tag{13.76}$$

ta có công thức chuyển đổi ma trận độ cứng $[S]$ thành $[S^*]$ như sau

$$[S^*] = [H]^T [S][H] \tag{13.77}$$

Khi lực tại hai hệ tọa độ có liên hệ

$$\{F\} = [L]\{F^*\} \text{ hoặc } \{D^*\} = [L]^T \{D\} \tag{13.78}$$

ta có công thức chuyển đổi ma trận độ mềm như sau

$$[f^*] = [L]^T [f][L] \tag{13.79}$$

Các ma trận chuyển đổi $[H]$ và $[L]$ được thiết lập từ quan hệ hình học giữa các chuyển vị $\{D\}$ và $\{D^*\}$, suy ra các ma trận này không phụ thuộc vào các lực ngoài tác dụng lên kết cấu. Hai hệ lực $\{F\}$ và $\{F^*\}$ được gọi là tương đương, khi hệ lực $\{F\}$ gây ra các chuyển vị $\{D\}$ và $\{D^*\}$ có cùng độ lớn như chuyển vị do hệ lực $\{F^*\}$ gây ra. Ngoài ra, hệ lực $\{F\}$ và $\{F^*\}$ thực hiện cùng một công khi gây ra các chuyển vị $\{D\}$ hay $\{D^*\}$.

Ma trận độ cứng tổng thể của kết cấu

Ma trận độ cứng của kết cấu có thể thiết lập bằng cách ghép nối các ma trận độ cứng của các phần tử tạo thành.

Xét kết cấu trên Hình 13.16a trong hệ tọa độ 13.16b. Công ngoại lực bằng năng lượng biến dạng của kết cấu vì

$$W = U = \frac{1}{2}\{D\}^T [S]\{D\} \tag{13.80}$$

ở đây $[S]$ là ma trận độ cứng ứng với tọa độ trên Hình 13.16b.

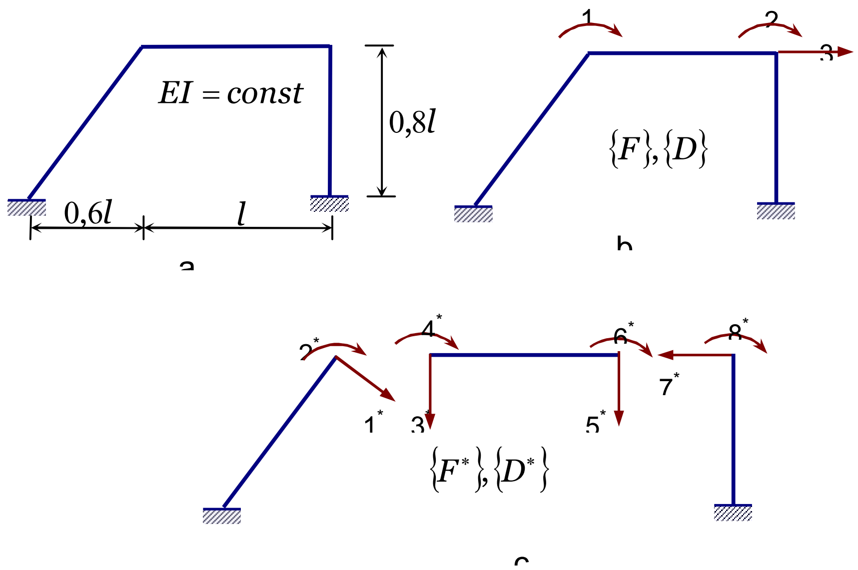
Năng lượng biến dạng cũng có thể nhận được bằng tổng năng lượng biến dạng của từng phần tử riêng biệt. Tổng này bằng với công của lực đầu phần tử thực hiện trên chuyển vị $\{D^*\}$ tại tọa độ trên Hình 13.13c.

$$U = \frac{1}{2}\{D^*\}^T[S_M]\{D^*\} \tag{13.81}$$

ở đây $[S_M]$ là ma trận độ cứng của kết cấu khi chưa lắp ghép (ở hệ tọa độ địa phương của từng phần tử)

$$[S_M] = \begin{bmatrix} [S_M]_1 & & & \\ & [S_M]_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & [S_M]_m \end{bmatrix} \tag{13.82}$$

$[S_M]_i$ là ma trận độ cứng của phần tử thứ i ứng với tọa độ $\{D^*\}$ tại đầu phần tử, m là số hiệu của phần tử.



Hình 13.16

Chuyển vị $\{D^*\}$ và $\{D\}$ liên hệ theo hình học bằng $\{D^*\} = [C]\{D\}$, thế vào phương trình (13.81) ta nhận được

$$U = \frac{1}{2}\{D\}^T [C]^T [S_M][C]\{D\} \qquad (13.83)$$

So sánh (13.80) với (13.83) ta thấy

$$[S]_{n\times n} = [C]^T_{p\times n}[S_M]_{p\times p}[C]_{p\times n} \qquad (13.84)$$

n số chuyển vị $\{D\}$ và p số chuyển vị $\{D^*\}$. Để thuận tiện cho việc lập trình ta chuyển (13.84) về dạng

$$[S] = \sum_i^m [C]_i^T [S_M]_i [C]_i \qquad (13.85)$$

trong đó $[C]_i$ là ma trận liên hệ các tọa độ $\{D^*\}$ tại các đầu nút của phần tử thứ i với tọa độ của kết cấu $\{D\}$. Thường chọn các thành phần tọa độ D^* theo hệ trục chính của tiết diện của phần tử.

Ví dụ 13.10. Lập ma trận độ cứng cho kết cấu trên hình 13.16a dùng công thức (13.85). Ma trận độ cứng cho kết cấu này đã được thiết lập theo qui trình của phương pháp chuyển vị trong ví dụ 12.3 chương 12.

Với các chuyển vị $\{D\}$ được chọn như trên hình 13.16b và $\{D^*\}$ như trên hình 13.16b. Từ hình học của hệ khung ta xác định các ma trận $[C]_i$ có dạng

$$[C]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1{,}25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \ [C]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \ [C]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận độ cứng của phần tử khi chưa lắp ghép, trong hệ tọa độ $\{D^*\}$ theo (12.19) trong mục 12.6.3 cho phần tử dầm phẳng là các ma trận đối xứng có dạng

$$[S_M]_1 = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix};$$

$$[S_M]_2 = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & & & \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix};$$

$$[S_M]_3 = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(0,8l)^3} & \\ \frac{6EI}{(0,8l)^2} & \frac{4EI}{0,8l} \end{bmatrix}.$$

Sử dụng công thức (13.85), ta có

$$[C]_1^T [S_M]_1 [C]_1 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & & \\ 0 & 0 & \\ -\frac{7,5EI}{l^2} & 0 & \frac{18,75EI}{l^3} \end{bmatrix};$$

$$[C]_2^T [S_M]_2 [C]_2 = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & & \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & \\ \frac{4,5EI}{l^2} & \frac{4,5EI}{l^2} & \frac{6,75EI}{l^3} \end{bmatrix};$$

$$[C]_3^T [S_M]_3 [C]_3 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & \frac{5EI}{l} & \\ 0 & -\frac{9,375EI}{l^2} & \frac{23,4375EI}{l^3} \end{bmatrix};$$

$$[S] = \sum_i^m [C]_i^T [S_M]_i [C]_i = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{l} & & \\ \frac{2EI}{l} & \frac{9EI}{l} & \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{4,875EI}{l^2} & \frac{48,9375EI}{l^3} \end{bmatrix}.$$

Trùng với ma trận độ cứng đã nhận được trong ví dụ 12.3 chương 12.

Kết luận chương 13

Khái niệm công ảo rất quan trọng trong cơ học kết cấu, rất tiện lợi khi biểu diễn công ảo của ứng suất bất kỳ dưới dạng thích hợp khi đưa bài toán về dạng ma trận. Khi đó ta có thể cùng một lúc xem xét các thành phần của thế năng biến dạng do lực dọc trục, mô men uốn, lực cắt và mô men xoắn gây nên.

Khái niệm năng lượng bù và công bù không có ý nghĩa vật lý nhưng giá trị số của nó dễ dàng biểu diễn các phương trình năng lượng.

Nguyên lý công khả dĩ liên hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương ứng của kết cấu bất kỳ (tuyến tính hay phi tuyến). Ta dùng lực ảo hay chuyển vị ảo và sử dụng đẳng thức giữa công bù của ngoại lực ảo với năng lượng bù của nội lực ảo thực hiện trên chuyển vị thực. Tương tự ta có thể dùng đẳng thức giữa công ảo của ngoại lực và nội lực thực hiện trên chuyển vị ảo. Các định lý lực đơn vị và chuyển vị đơn vị là những công thức tiện dụng. Chú ý định lý thứ hai chỉ áp dụng cho kết cấu tuyến tính

Phương pháp công ảo là phương pháp tổng quát. Có thể sử dụng cho kết cấu phẳng và không gian, siêu tĩnh và tĩnh định. Tuy nhiên, đầu tiên ta phải xác định ứng lực cho mọi trường hợp kết cấu. Cơ sở của phương pháp công ảo là quan hệ giữa hệ lực cân bằng với hệ chuyển vị tương ứng.

Tính toán chuyển vị bằng phương pháp công ảo gồm xác định nội lực do tải trọng thực và tải trọng ảo đơn vị tác dụng tại từng điểm (tọa độ) nơi ta cần tìm chuyển vị. Nếu cần tính một vài chuyển vị thì công việc tính toán trở nên khá nặng nề, do vậy cần hệ thống qui trình tính toán lại dưới dạng ma trận và lập chương trình tính toán.

Khi ta áp dụng phương pháp công ảo, nói chung bốn loại nội lực là lực dọc trục, mô men uốn, lực cắt và mô men xoắn đều tham gia đóng góp vào chuyển vị . Đối với hệ dàn chỉ có lực dọc trục gây ra chuyển vị. Biểu thức của công ảo là tích phân của tích hai hàm số, có thể sử dụng phụ lục 10 để tính.

Khi áp dụng phương pháp công ảo vào hệ khung với tải trọng đặt vào một điểm bất kỳ của phần tử, nên ta quy về các tải nút tương đương (theo nghĩa chuyển vị do chúng gây ra tại các điểm cần tính như tải thực).

Quy trình tính chuyển vị cho hệ khung bằng phương pháp công ảo rất rõ ràng. Trong hệ khung biến dạng do uốn là phần đóng góp chính trong chuyển vị, do vậy các biến dạng do các lực khác gây ra thường được bỏ qua. Tuy nhiên ta cũng nên kiểm tra xem chúng có thực sự nhỏ hay không. Các công thức đều được viết dưới dạng ma trận, rất tiện dụng khi tính chuyển vị tại một số điểm và cho nhiều trường hợp tải.

Các ví dụ trong chương này chỉ trình bày cho các phần tử thẳng với tiết diện không đổi. Tuy nhiên, phương pháp công ảo có thể áp dụng cho kết cấu với các phần tử cong và có tiết diện thay đổi. Một trong những cách gần đúng là ta chia kết cấu thực thành một loạt phần tử thẳng với tiết diện không đổi.

Cuối cùng cần nhấn mạnh lại là phương pháp công ảo cho phép xem xét cả bốn loại nội lực cùng một lúc, trong khi các phương pháp khác chỉ xem xét từng loại nội lực một cách riêng biệt.

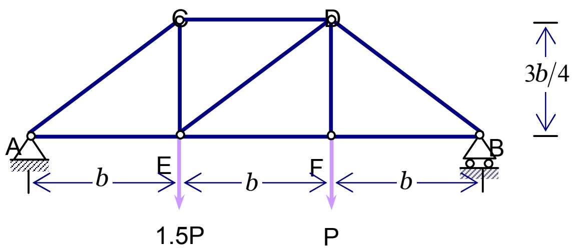
Bài tập chương 13

Bài 13.1 Cho dàn phẳng trên hình vẽ tìm

a) Chuyển vị thẳng đứng tại E chịu tải như trên hình 13.17;

b) Chuyển vị tại E khi dàn không chịu tải trọng và phần tử CD co lại một đoạn $\Delta = b/2000$;

Các phần tử có cùng độ cứng chống kéo $EA = const$.



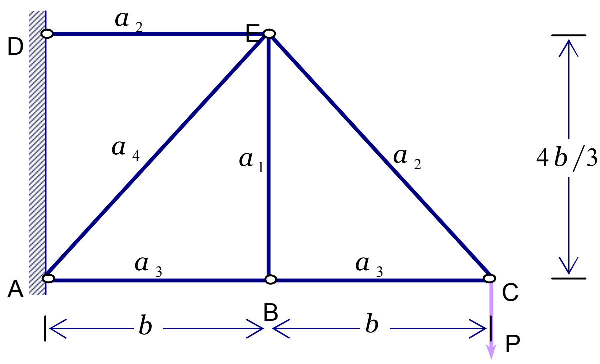
Hình 13.17.

Bài 13.2 Cho dàn phẳng như trên hình vẽ, tìm

a) Chuyển vị tại C chịu tải trọng P như trên hình 13.18;

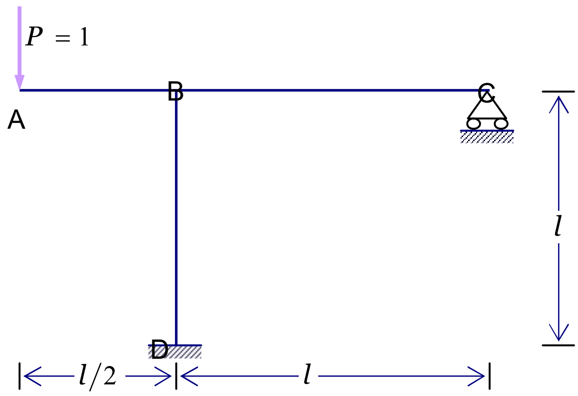
b) Chuyển vị thẳng đứng tại C khi dàn không chịu tải trọng và hai phần tử DE và EC đều co lại một đoạn $\Delta = 0{,}3cm$;

Các phần tử có tiết diện như trên hình vẽ. Giả thiết mô đun đàn hồi $E = 2{,}1 \times 10^{11} N/m^2$.



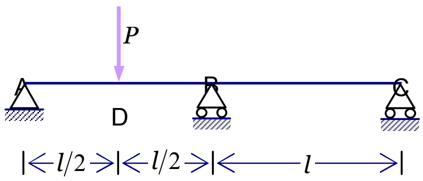
Hình 13.18.

Bài 13.3 Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm A của khung trên hình 13.19, chỉ xét đến biến dạng uốn. Độ cứng chống uốn $EI = const$ trên toàn bộ khung.



Hình 13.19.

Bài 13.4 Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm D và góc xoay tại điểm A của dầm trên hình 13.20, chỉ xét đến biến dạng uốn. Độ cứng chống uốn $EI = const$ trên toàn bộ khung.



Hình 13.20.

CHƯƠNG 14

Phương pháp phần tử hữu hạn – Sơ lược

14.1 Giới thiệu

Kết cấu là một hệ cơ học có vô số bậc tự do và theo lý thuyết cơ học môi trường liên tục, chuyển động của nó được biểu biểu diễn qua trường chuyển vị $u(x_1,x_2,x_3,t)$, $v(x_1,x_2,x_3,t)$, $w(x_1,x_2,x_3,t)$ thoả mãn các điều kiện trên biên. Để tìm trường chuyển vị này đòi hỏi phải giải hệ phương trình đạo hàm riêng rất phức tạp, ngay cả trong trường hợp biên đơn giản. Có rất ít trường hợp có thể nhận được lời giải giải tích của các phương trình chuyển động ở dạng phương trình đạo hàm riêng. Đối với kết cấu dạng khung, dàn, việc thiết lập phương trình chuyển động cho trường chuyển vị nói trên là không thực tế. Với các kết cấu phức tạp, cần có cách tiếp cận riêng, chủ yếu là tìm cách rời rạc hoá chúng và đưa chúng về những hệ đơn giản hơn, có hữu hạn bậc tự do. Ở đây sẽ bắt đầu bằng một phương pháp cổ điển, đơn giản nhưng vẫn còn đang được sử dụng hiện nay để giải các phương trình đạo hàm riêng.

Rời rạc hoá bằng phương pháp Rayleigh-Ritz

Một trong những phương pháp rời rạc hoá được áp dụng rộng rãi là phương pháp Rayleigh-Ritz. Phương pháp này sử dụng nguyên lý biến phân của chuyển dịch để đưa bài toán có vô số bậc tự do về bài toán với n hữu hạn bậc tự do, được mô tả bằng hệ phương trình vi phân thường, tương tự như hệ rời rạc. Việc rời rạc hoá bắt đầu từ việc chọn cách xấp xỉ gần đúng hàm chuyển vị, để có thể viết $\{D\}$ dưới dạng:

$$\{D(x_1,x_2,x_3,t)\}=[L(x_1,x_2,x_3)]\{\mathrm{q}(t)\}. \tag{14.1}$$

trong đó $\{\mathrm{q}(t)\}=\{q_1 \ldots q_n\}^T$ là véc tơ các tọa độ suy rộng,

$[L]$ là ma trận nội suy chuyển vị kích cỡ (3 $\times$ n):

$$L_j(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix} f_{1j}(x_1,x_2,x_3) & \cdots & f_{1n}(x_1,x_2,x_3) \\ f_{2j}(x_1,x_2,x_3) & \cdots & f_{2n}(x_1,x_2,x_3) \\ f_{3j}(x_1,x_2,x_3) & \cdots & f_{3n}(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix}.$$

Áp dụng phép biến phân ảo cho các tọa độ suy rộng $\{q\}$, sẽ có phương trình chuyển động dưới dạng rời rạc hoá:

$$[\mathrm{S}]\{\mathrm{q}\}+[\mathrm{M}]\{\ddot{\mathrm{q}}\}=\{\mathrm{p}(t)\}, \tag{14.2}$$

trong đó

$[\mathrm{M}]=\int\limits_V \rho[\mathrm{L}]^T[\mathrm{L}]d\mathrm{V}$ là ma trận khối lượng đối xứng và xác định dương;

$[S]=\int\limits_V [B]^{\mathrm{T}}[d][B]d\mathrm{V}$ là ma trận độ cứng đối xứng và xác định dương;

$\{\mathrm{p}\}=\int\limits_{S_\sigma}[L]^T\{\bar{\mathrm{t}}\}dA+\int\limits_V [L]^{\mathrm{T}}\{\bar{\mathrm{X}}\}d\mathrm{V}$ là véc tơ ngoại lực;

$[\bar{L}]$ là ma trận nội suy biến dạng, tính được từ ma trận nội suy chuyển vị qua phép vi phân $[\mathrm{B}]=[\partial][\mathrm{L}]$ với $[\partial]$ là toán tử vi phân có dạng:

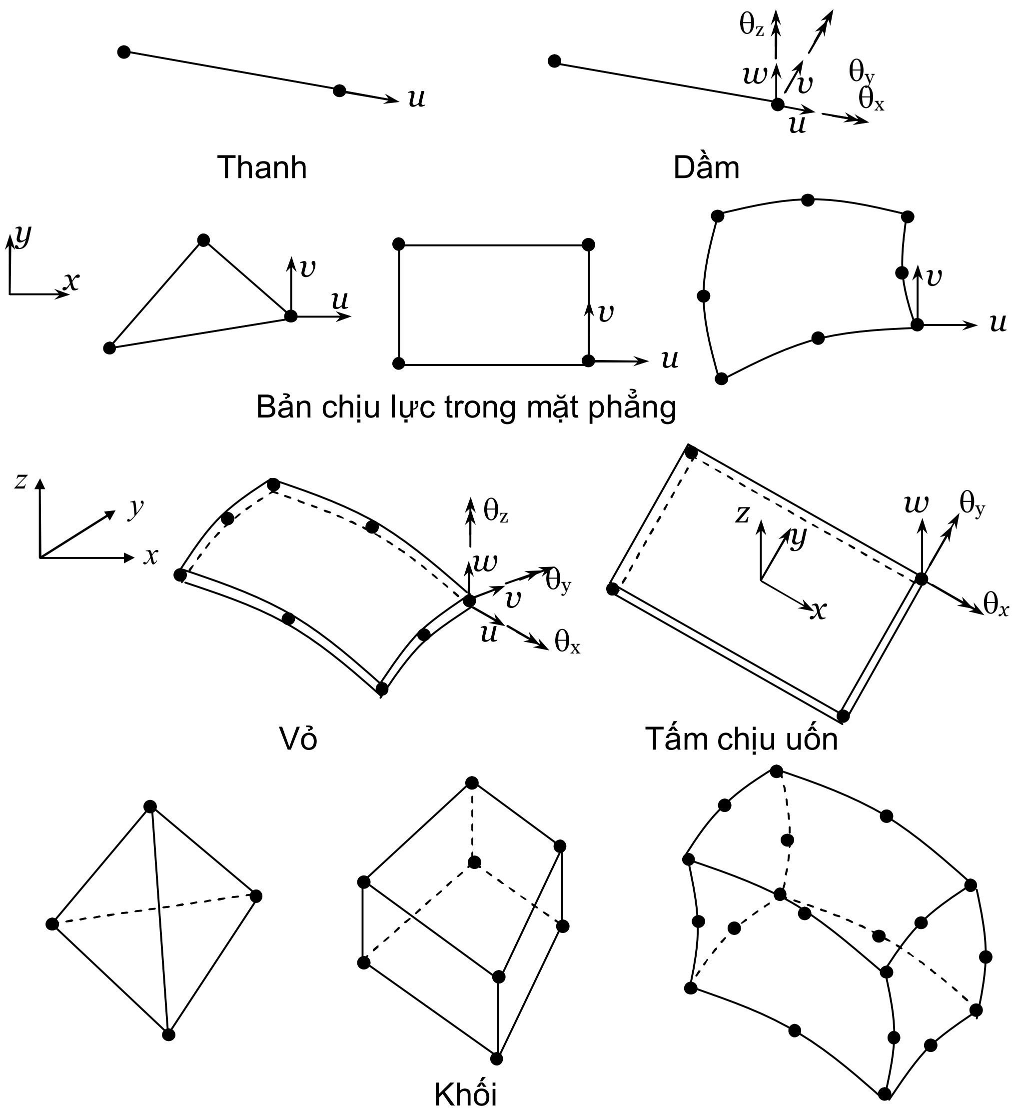
$$[\partial]^T=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \tag{14.3}$$

$[d]$ là ma trận quan hệ ứng suất và biến dạng theo định luật Hooke.

Như vậy, một hệ liên tục có vô số bậc tự do đã được đưa về hệ hữu hạn bậc tự do, mô tả bằng phương trình vi phân thường (14.2), có thể giải bằng các công cụ đã biết. Tuy vậy, phương pháp này mới chỉ đưa ra ý tưởng rời rạc ở dạng toán học thuần tuý, mà không biết được sai số là bao nhiêu. Việc phát triển phương pháp này cho các bài toán của cơ học kết cấu đã dẫn đến sự ra đời của phương pháp phần tử hữu hạn, một công cụ tính toán hữu hiệu.

14.2 Phương pháp phần tử hữu hạn – cơ sở

Phương pháp phần tử hữu hạn được xem như sự phát triển của phương pháp Rayleigh-Ritz. Tư tưởng chủ yếu của nó là việc chia vật thể biến dạng hay kết cấu thành một số hữu hạn các phần tử có hình học đơn giản (hình 14.1) với trường chuyển vị giả thiết là đã biết.



Hình 14.1 Ví dụ về các loại phần tử và bậc tự do tại nút.

Đưa vật thể liên tục (kết cấu) với bậc tự do là vô cùng về hệ hữu hạn bậc tự do với các ẩn số là các chuyển vị tại nút. Trong khuôn khổ của cơ học kết cấu có thể nói phương pháp phần tử hữu hạn là một ứng dụng của phương pháp chuyển vị. Hệ khung, dàn hay lưới ngang sử dụng phần tử là các thanh nối tại các nút và có thể gọi thanh là phần tử một chiều. Phần tử hữu hạn hai chiều và ba chiều dùng cho kết cấu tường ngăn, vỏ và các kết cấu có hình khối như móng máy. Phần tử hữu hạn có thể có nhiều loại hình dạng với các nút ở góc hay ở cạnh (hình 14.1). Các chuyển vị cần tìm có thể là dịch chuyển thẳng hay các góc xoay.

Chuyển vị ở điểm bất kì trong phần tử được biểu diễn qua các chuyển vị nút. Sử dụng trường chuyển vị giả định (ví dụ là hàm đa thức của các tọa độ x và y). Biến dạng xác định bằng phép vi phân các chuyển vị và sau đó ứng suất xác định từ biến dạng bằng định luật Hooke. Chính việc sử dụng trường chuyển vị giả định là sự phát triển của phương pháp Rayleigh-Ritz.

Phương pháp phần tử hữu hạn được phát triển do sự phát triển của máy tính. Việc tính toán tiến hành với các ma trận được tổng hợp từ các ma trận của tất cả của loại phần tử sử dụng khi mô hình hóa. Các ma trận tổng thể này ghép nối từ các ma trận phần tử. Ma trận phần tử gồm có:

– Ma trận độ cứng liên hệ giữa chuyển vị nút với nội lực tại nút.
– Ma trận ứng suất liên hệ giữa ứng suất (nội lực) với chuyển vị tại nút.
– Véc tơ lực đầu phần tử biểu diễn các tải phân bố, tải trọng tập trung tác động vào một điểm nào đó trên phần tử không phải là điểm nút hay khi có dãn nở nhiệt (được gọi là tải phần tử). Các tải phần tử được tương đương hóa bằng cách đưa về các tải trọng tác dụng ở các điểm nút của phần tử.

14.3 Áp dụng năm bước tính toán của phương pháp chuyển vị

Xét hệ khung phẳng như các ví dụ trong chương 12. Nếu bỏ qua biến dạng dọc trục, chỉ xét đến uốn trong mặt phẳng và giả thiết trục x trùng với trục thanh, khi đó mỗi phần tử có hai nút và mỗi nút có hai bậc tự do. Các bậc tự do này là độ võng v theo phương y và góc quay $v' = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Mục đích là xác định nội lực tại các mặt cắt ở hai đầu thanh $\{Q_1, M_1, Q_2, M_2\}$. Ngoại lực tại các nút gồm có véc tơ lực tại nút $\{F_y, M_z\}_i$ và lực phân bố theo đơn vị dài trên thanh, có thể xem xét cả tải trọng do thay đổi nhiệt độ.

Áp dụng năm bước của phương pháp chuyển vị (chương 3):

Bước 1. Xác định các bậc tự do bằng các chuyển vị v và v' tại mỗi nút, đồng thời xác định các đáp ứng cần tính là nội lực tại hai mặt cắt hai đầu thanh $\{A\}_m = \{Q_1, M_1, Q_2, M_2\}_m^T$ cho từng phần tử.

Bước 2. Với ngoại lực tác dụng, thiết lập véc tơ tải hạn chế $\{F\}$, đồng thời xác định véc tơ $\{A_r\}_m = \{Q_{r1}, M_{r1}, Q_{r2}, M_{r2}\}_m^T$ là nội lực tại phần tử thứ m khi chuyển vị bị hạn chế. Ở đây:

$$\{F\} = \{F_a\} + \{F_b\} \tag{14.4}$$

trong đó $\{F_a\}$ là hợp lực của ngoại lực tại nút nhưng ngược dấu, $\{F_b\}$ là tải phần tử quy về nút, chúng cân bằng với các ngoại lực không đặt tại nút, ví dụ như lực phân bố trên thanh, lực tập trung không đặt vào các điểm nút của phần tử hay tải nhiệt.

Bước 3. Thiết lập ma trận độ cứng $[S]$ bằng cách ghép nối tất cả các ma trận độ cứng $[S]_m$ của từng phần tử. Đồng thời thiết lập ma trận nội lực ở các mặt cắt ở hai đầu thanh của phần tử thứ m $[A_u]_m$ có kích cỡ 4x4. Các cột của ma trận $[A_u]_m$ là véc tơ nội lực $\{Q_{u1}, M_{u1}, Q_{u2}, M_{u2}\}_m^T$ sinh ra khi cho các chuyển vị $\{D\}_m$ tại hai đầu nút của phần tử thứ m lần lượt bằng đơn vị. Trong trường hợp đang xét, $\{D\}_m$ có bốn giá trị $\{v_1, v_1', v_2, v_2'\}_m^T$.

Bước 4. Giải phương trình cân bằng:

$$[S]\{D\} = \{-F\} \tag{14.5}$$

để tìm véc tơ chuyển vị $\{D\}$ có kích cỡ là $2n$, n là số nút .

Bước 5. Tìm các đáp ứng từ phương trình:

$$\{A\}_m = \{A_r\}_m + [A_u]_m \{D\}_m . \tag{14.6}$$

14.4 Phương trình đàn hồi cơ sở

Theo định luật Hooke, quan hệ ứng suất và biến dạng có dạng:

$$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\}. \tag{14.7}$$

trong đó $\{\sigma\}$ và $\{\varepsilon\}$ là các véc tơ ứng suất và biến dạng suy rộng tương ứng, và ma trận $[d]$ là ma trận vuông đối xứng, gọi là ma trận hệ số đàn hồi.

Các thành phần biến dạng được xác định từ chuyển vị bằng phương trình suy rộng sau đây:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{f\}. \tag{14.8}$$

trong đó $[\partial]$ là ma trận các toán tử vi phân và véc tơ $\{f\}$ là véc tơ các hàm mô tả trường chuyển vị.

Ví dụ:

– Trạng thái ứng suất đơn:

$\{\sigma\} \equiv \sigma$, $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon$, $[d] \equiv E$, $\{f\} \equiv u$, $[\partial] \equiv d/dx$.

– Kéo hoặc nén thanh thẳng:

$\{\sigma\} \equiv N$, $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon$, $[d] \equiv EA$, $\{f\} \equiv u$, $[\partial] \equiv d/dx$.

– Thanh chịu uốn thuần túy:

$\{\sigma\} \equiv M$, $\{\varepsilon\} \equiv \varepsilon$, $[d] \equiv EI$, $\{f\} \equiv v$, $[\partial] \equiv d^2/dx^2$.

14.5 Nội suy chuyển vị

Để thiết lập ma trận phần tử, cần các hàm nội suy để xác định dạng biến dạng của phần tử. Chuyển vị của một điểm bất kì trong phần tử liên hệ với chuyển vị nút bằng công thức:

$$\{f\} = [L]\{D^*\}. \tag{14.9}$$

trong đó $\{D^*\}$ là chuyển vị tại nút;

$\{f\}$ là véc tơ các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kì;

$[L]$ là ma trận các hàm của tọa độ xác định vị trí của điểm trong phần tử.

Hàm nội suy của trường chuyển vị $[L]$ còn được gọi là hàm dạng, được chọn để thoả mãn các yêu cầu:

1. Nội suy biểu diễn bằng các hàm liên tục từng đoạn. Để đơn giản, trường chuyển vị trong mỗi phần tử biểu diễn bằng tổ hợp một số các hàm đã chọn sao cho thể hiện được ứng xử của phần tử kết cấu trong kết cấu tổng thể. Nói chung hàm nội suy có dạng đa thức.
2. Các hàm này được chọn sao cho các tọa độ suy rộng của phương pháp Rayleigh-Ritz là các giá trị địa phương của trường chuyển vị trong kết cấu (hình 14.1), hay nói một cách ngắn gọn, toạ độ suy rộng là chuyển vị tại các nút của phần tử.

Nếu cả hai điều kiện này được thoả mãn chặt chẽ thì gần đúng nhận được sẽ là khả dĩ động học theo quan điểm của phương pháp Rayleigh-Ritz. Ngoài ra, trường chuyển vị là khả vi trên toàn bộ miền của từng phần tử và các tọa độ suy rộng có cùng giá trị tại nơi giao nhau của các phần tử, đảm bảo tính liên tục của trường ứng suất ở mức độ tổng thể.

Ví dụ:

– Trường hợp kéo, nén đúng tâm $\{f\} \equiv u$, $\{D^*\} = \{u_1, u_2\}$ là dịch chuyển thẳng tại hai đầu nút. Ma trận hàm nội suy $[L]$ gồm hai hàm nội suy:

$$[L] = [1 - \xi, \xi].$$

trong đó $\xi = x/l$ và l là độ dài thanh.

– Trường hợp thanh chịu uốn $\{f\} \equiv v$ và véc tơ chuyển vị nút:

$$\{D^*\} = \left\{ v_1, \left(\frac{dv}{dx}\right)_1, v_2, \left(\frac{dv}{dx}\right)_2 \right\}$$

Ma trận hàm nội suy $[L]$ gồm bốn hàm nội suy:

$$[L] = \left[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, l\xi[\xi - 1]^2, \xi^2(3 - \xi), l\xi^2(\xi - 1)\right].$$

trong đó $\xi = x/l$ và l là độ dài thanh.

14.6 Ma trận độ cứng và ma trận ứng suất phần tử

Véc tơ chuyển vị tại một điểm bất kì trong phần tử được biểu diễn qua chuyển vị nút như (14.9):

$\{f\} = [L]\{D^*\}.$

Bằng phép vi phân gần đúng, nhận được biểu thức của biến dạng:

$\{\varepsilon\} = [\partial]\{f\} = [\partial][L]\{D^*\}.$

Như vậy, biến dạng tại một điểm bất kì có thể biểu diễn bằng:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{D^*\}. \tag{14.10}$$

trong đó

$$[B] = [\partial][L]. \tag{14.11}$$

Khi đó, định luật Hooke có dạng:

$\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\} = [d][B]\{D^*\},$

$$\{\sigma\} = [\sigma_u]\{D^*\}. \tag{14.12}$$

ở đây $[\sigma_u]$ là ma trận ứng suất của phần tử:

$$[\sigma_u] = [d][B]. \tag{14.13}$$

Các phần tử ở cột thứ j của ma trận $[\sigma_u]$ là các thành phần ứng suất tại điểm cần xác định khi cho chuyển vị $D_j^* = 1$.

Phần tử S_{ij}^* của ma trận độ cứng là nội lực tại tọa độ i sinh ra do chuyển vị đơn vị tại tọa độ j. S_{ij}^* có thể xác định theo định lí chuyển vị đơn vị (chương 13):

$$S_{ij}^* = \int_V \{\sigma_{uj}\}^T \{\varepsilon_{ui}\} dV. \tag{14.14}$$

ở đây

$\{\sigma_{uj}\}$ là ứng suất thực tại điểm nào đó sinh ra do dịch chuyển đơn vị ở tọa độ j,

$\{\varepsilon_{ui}\}$ là biến dạng ảo ở chính điểm có $\{\sigma_{uj}\}$ tương ứng sinh ra do dịch chuyển ảo đơn vị tại tọa độ i.

Khi xét phần tử hai chiều, lấy tích phân trên toàn bộ diện tích. Khi xét bài toán thanh, lấy tích phân trên toàn bộ chiều dài. Như vậy, ứng suất và biến dạng trong tích phân này là các ứng suất và biến dạng mở rộng.

Biểu diễn qua hàm dạng, sẽ có phần tử của ma trận độ cứng:

$$S_{ij}^{*} = \int_V \{B\}_j^T [d] \{B\}_i \, dV . \tag{14.15}$$

trong đó $\{B\}_j$ và $\{B\}_i$ là cột thứ i và thứ j của ma trận $[B]$. Ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn được tính từ công thức:

$$\left[S^{*}\right] = \int_V [B]^T [d][B] dV . \tag{14.16}$$

14.7 Véc tơ tải phần tử

Véc tơ lực hạn chế $\{F\}$ trong phương trình cân bằng (14.5) có chứa thành phần $\{F_b\}$ là các lực cân bằng với các ngoại lực không tác dụng tại nút (14.4). Xét một phần tử riêng biệt, thành phần cân bằng với các lực khối tại nút j được xác định bằng:

$$F_{bj} = -\int_V \{L_j\}^T \{p\} dV . \tag{14.17}$$

trong đó $\{p\}$ biểu diễn cường độ ngoại lực phân bố trên phần tử tác dụng theo đúng hướng của chuyển vị $\{f\}$.

Sử dụng phương trình (14.17), coi hàm dạng L_j là các đường ảnh hưởng của lực nút tại j nhưng ngược dấu. Đây là một cách gần đúng vì giả thiết đường độ võng chính là trường chuyển vị thực.

Véc tơ tải phần tử quy về nút cân bằng với các ngoại lực không tác dụng tại nút có dạng:

$$\{F_b\} = -\int_V [L]^T \{p\} dV . \tag{14.18}$$

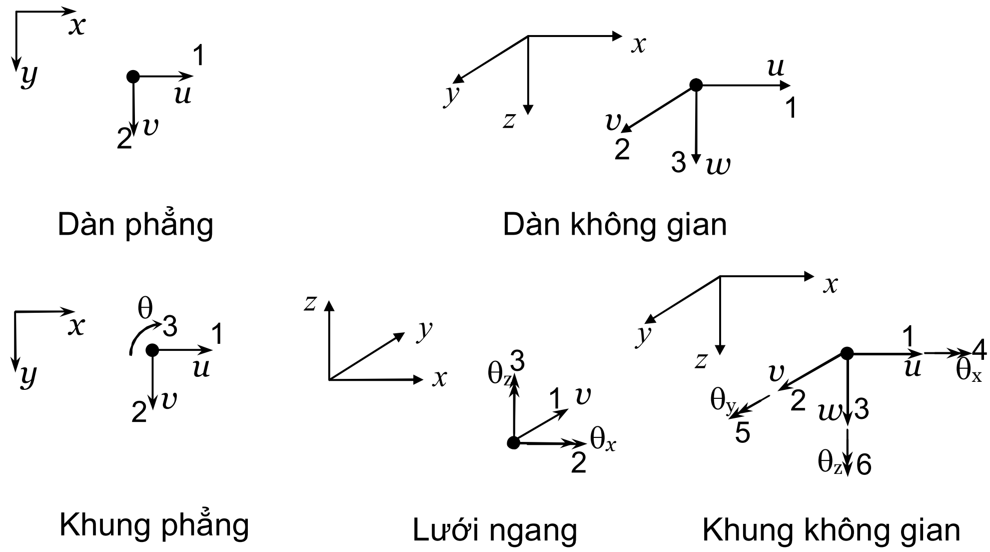
Véc tơ này là véc tơ tải phần tử tương thích, tương thích theo nghĩa sử dụng chính các hàm dạng $[L]$ để thiết lập cả ma trận độ cứng phần tử $[S^*]$ và véc tơ tải phần tử quy về nút $\{F_b^*\}$.

14.8 Phần tử dầm không gian

Hiện nay, trong tính toán kết cấu hệ khung, dàn không gian, phương pháp phần tử hữu hạn chiếm vị trí hàng đầu, trong đó phần tử dầm ba chiều đóng vai trò chủ đạo. Chính vì vậy, phương pháp phần tử hữu hạn sẽ được mô tả một cách cô đọng trên phần tử dầm không gian.

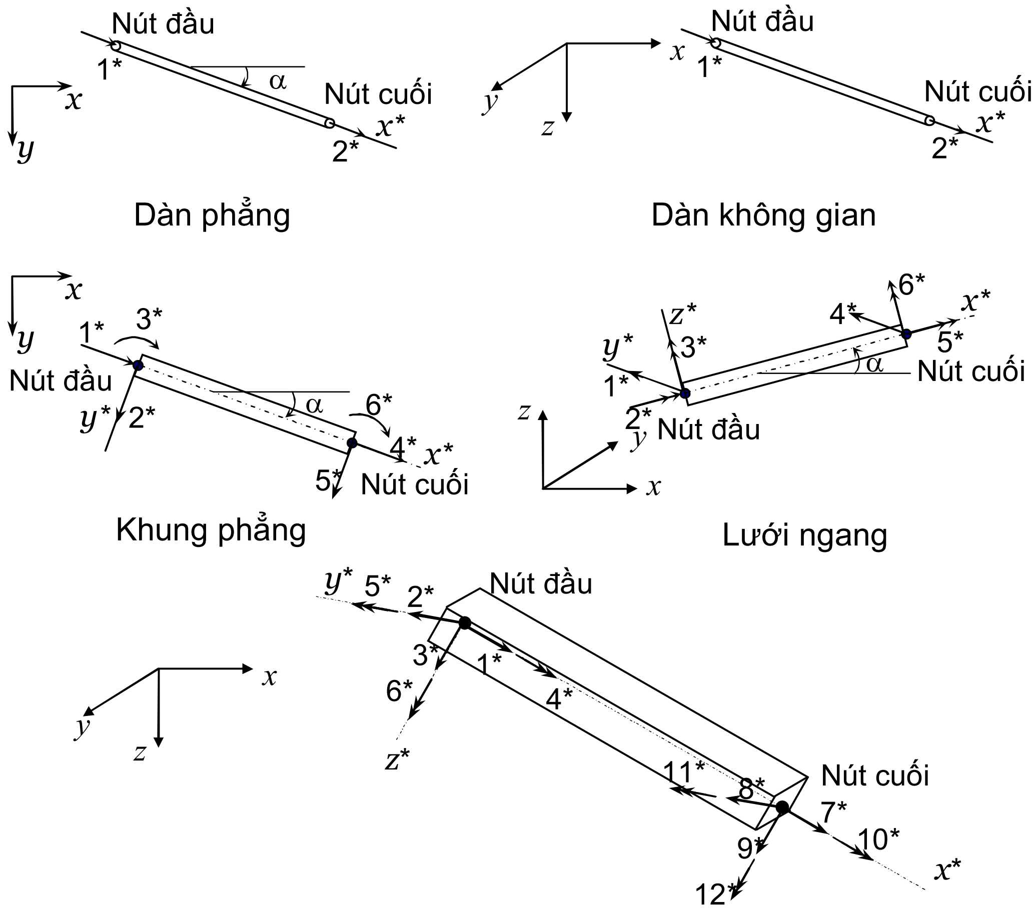
Hệ tọa độ địa phương

Khi xây dựng ma trận độ cứng cho phần tử $[S]_e$, tiến hành trên hệ tọa độ địa phương. Đối với phần tử dầm, chọn hệ tọa độ địa phương gồm trục dọc theo thanh đi qua trọng tâm và hai trục chính của tiết diện của thanh. Sau đó, ma trận độ cứng phần tử $[S]_e$ được chuyển về hệ tọa độ tổng thể của kết cấu để ghép nối thanh ma trận độ cứng tổng thể.



Hình 14.2. Trục tọa độ tổng thể, bậc tự do
và thứ tự đánh số tọa độ tại các nút của hệ khung

Bậc tự do của các nút trong hệ tọa độ tổng thể đối với các kết cấu khung dầm có thể xem trên hình 14.2, hệ tọa độ địa phương của các phần tử dầm xem trên hình 14.3.



Khung không gian

Hình 14.3. Tọa độ địa phương của các loại phần tử của hệ khung

Hệ trục địa phương kí hiệu là $\left(x^*, y^*, z^*\right)$, trục $\left(x^*\right)$ hướng dọc theo trục thanh từ nút đầu đến nút cuối. Việc chọn nút đầu và nút cuối là tùy ý.

Với tọa độ của hai điểm nút, có thể xác định được hướng của trục x^*, như vậy cũng xác định được góc α giữa trục x^* và trục x trong trường hợp phẳng. Tuy nhiên trong trường hợp khung không gian, khi chọn trục y^* và trục z^* là hệ trục quán tính chính của tiết diện, cần chỉ ra hướng của trục y^* bằng cách cho biết các cosin chỉ phương λ_{y^*x}, λ_{y^*y}, λ_{y^*z}.

Thiết lập ma trận độ cứng phần tử

Phần tử dầm không gian trong phương pháp phần tử hữu hạn được xây dựng dựa trên cơ sở chọn các hàm xấp xỉ là các đa thức Hermit. Những đa thức này thực chất là các hàm ảnh hưởng tĩnh học đối với các chuyển vị dọc trục, xoắn và uốn. Chúng có thể nhận được như lời giải của bài toán biến dạng tĩnh, dựa trên các giả thiết sau:

– Các đầu phần tử ngàm chặt với các nút trên lưới phần tử hữu hạn.

– Các đặc trưng cơ lý của phần tử không thay đổi dọc theo chiều dài của nó.

Trường hợp chung ở phần tử dầm không gian, chuyển vị tại các nút bao gồm:

$$\{D\}_e^T = \{D_1^e, ..., D_{12}^e\} = \{u_1, v_1, w_1, \theta_1, w_1', v_1', u_2, v_2, w_2, \theta_2, w_2', v_2'\}. \qquad (14.19)$$

trong đó u, v, w là các chuyển dịch thẳng; θ là góc xoắn; w', v' là các góc xoay quanh trục y và trục z tương ứng; trục x hướng theo trục của dầm. Trường chuyển vị $\{D\}_i^T = \{u(x), \theta(x), v(x), w(x)\}$ biểu diễn qua các chuyển vị nút $\{D\}_e^T$ nhờ các hàm nội suy (hàm dạng):

$$\{D\}_i = [\mathrm{L}(x)]\{\mathrm{D}\}_e. \qquad (14.20)$$

trong đó $[L(x)]$ là ma trận nội suy chuyển vị:

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 & 0 & \rho_6 & 0 & \rho_8 & 0 & 0 & 0 & \rho_{12} \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 & \rho_5 & 0 & 0 & 0 & \rho_9 & 0 & \rho_{11} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (14.21)$$

và hàm $\rho_j(x)$, j = 1,...,12 được gọi là hàm dạng, chúng là các đa thức:

$$\rho_j(x) = \sum_i C_{ij} x^i. \qquad (14.22)$$

Ma trận độ cứng nhận được từ tích phân (14.16):

$$[S^*] = \int_0^l [B^T(x)][d][B(x)]dx.$$

trong đó

$$[B(x)] = \begin{bmatrix} \rho_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_7' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{10}' & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2'' & 0 & 0 & 0 & \rho_6'' & 0 & \rho_8'' & 0 & 0 & 0 & \rho_{12}'' \\ 0 & 0 & \rho_3'' & 0 & \rho_5'' & 0 & 0 & 0 & \rho_9'' & 0 & \rho_{11}'' & 0 \end{bmatrix}, \quad (14.23)$$

$$\rho_j' = \frac{\partial \rho_j}{\partial x}, \; \rho_j'' = \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial x^2},$$

và

$$[d] = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_y \end{pmatrix}. \quad (14.24)$$

ở đây l độ dài của phần tử dầm,

A là diện tích mặt cắt ngang,

E là mô đun đàn hồi Young,

G là mô đun trượt, tính qua E và hệ số Poisson ν bằng công thức $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$,

J là mô men quán tính xoắn và I_y, I_z là các mô men quán tính đối với các trục z và trục y tương ứng của tiết diện.

Để nhận được các số hạng của ma trận độ cứng $[S^*]$, tính tích $[B]^T(x)[d][B]$ rồi lắp vào tích phân trong (14.16), nhận được các số hạng $S_{ij} \neq 0$ có dạng như sau:

$$S_{11} = \int_0^l EA\rho_1'^2 dx\,;\; S_{77} = \int_0^l EA\rho_7'^2 dx\,;\; S_{44} = \int_0^l GJ\rho_4'^2 dx\,;\; S_{10,10} = \int_0^l GJ\rho_{10}'^2 dx\,;$$

$$S_{71} = \int_0^l EA\rho_7'\rho_1' dx\,;\; S_{10,4} = \int_0^l GJ\rho_{10}'\rho_4' dx;$$

$$S_{33} = \int_0^l EI_y\rho_3''^2 dx\,;\; S_{55} = \int_0^l EI_y\rho_5''^2 dx\,;\; S_{99} = \int_0^l EI_y\rho_9''^2 dx\,;\; S_{11,11} = \int_0^l EI_y\rho_{11}''^2 dx\,;$$

$$S_{53} = \int_0^l EI_y \rho_5'' \rho_3'' dx\,;\; S_{93} = \int_0^l EI_y \rho_9'' \rho_3'' dx\,;\; S_{11,3} = \int_0^l EI_y \rho_{11}'' \rho_3'' dx\,;$$

$$S_{9,5} = \int_0^l EI_y \rho_9'' \rho_5'' dx\,;\; S_{11,5} = \int_0^l EI_y \rho_{11}'' \rho_5'' dx\,;\; S_{11,9} = \int_0^l EI_y \rho_{11}'' \rho_9'' dx\,;$$

$$S_{22} = \int_0^l EI_z \rho_2''^2 dx\,;\; S_{66} = \int_0^l EI_z \rho_6''^2 dx\,;\; S_{88} = \int_0^l EI_z \rho_8''^2 dx\,;\; S_{12,12} = \int_0^l EI_z \rho_{12}''^2 dx\,;$$

$$S_{62} = \int_0^l EI_z \rho_6'' \rho_2'' dx\,;\; S_{82} = \int_0^l EI_z \rho_8'' \rho_2'' dx\,;\; S_{12,2} = \int_0^l EI_z \rho_{12}'' \rho_2'' dx\,;$$

$$S_{86} = \int_0^l EI_z \rho_8'' \rho_6'' dx\,;\; S_{12,6} = \int_0^l EI_z \rho_{12}'' \rho_6'' dx\,;\; S_{12,8} = \int_0^l EI_z \rho_{12}'' \rho_8'' dx\,;$$

$$S_{ij} = S_{ji}. \tag{14.25}$$

Ma trận độ cứng phần tử $[K]_e$ là ma trận vuông đối xứng có dạng:

$$[S^*] = \begin{bmatrix}
S_{11} &&&&&&&&&&& \\
0 & S_{22} &&&&&&&&&& \\
0 & 0 & S_{33} &&&&&&&&& \\
0 & 0 & 0 & S_{44} &&&&&&&& \\
0 & 0 & S_{53} & 0 & S_{55} &&&&&&& \\
0 & S_{62} & 0 & 0 & 0 & S_{66} &&&&&& \\
S_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{77} &&&&& \\
0 & S_{82} & 0 & 0 & 0 & S_{86} & 0 & S_{88} &&&& \\
0 & 0 & S_{93} & 0 & S_{95} & 0 & 0 & 0 & S_{99} &&& \\
0 & 0 & 0 & S_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{10,10} && \\
0 & 0 & S_{11,3} & 0 & S_{11,5} & 0 & 0 & 0 & S_{11,9} & 0 & S_{11,11} & \\
0 & S_{12,2} & 0 & 0 & 0 & S_{12,6} & 0 & S_{12,8} & 0 & 0 & 0 & S_{12,12}
\end{bmatrix},$$

(14.26)

Đây là ma trận độ cứng của phần tử thiết lập trong hệ tọa độ địa phương. Như vậy cốt lõi của việc xây dựng ma trận độ cứng là lựa chọn ma trận hàm dạng $[L(x)]$.

Trường hợp phần tử dầm không gian, dùng hàm dạng là các hàm Hermit:

$$\rho_1(x) = \rho_4(x) = \rho_1^o(x) \equiv 1 - \frac{x}{l};\;\; \rho_7(x) = \rho_{10}(x) = \rho_2^o(x) \equiv \frac{x}{l};$$

$$\rho_2(x) = -\rho_3(x) = \rho_3^o(x) \equiv 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3};$$

$$\rho_5(x) = \rho_6(x) = \rho_4^o(x) \equiv x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2;$$

$$\rho_8(x) = -\rho_9(x) = \rho_5^o(x) \equiv 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3};$$

$$\rho_{11}(x) = \rho_{12}(x) = \rho_6^o(x) \equiv \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right); \qquad (14.27)$$

Các hàm $\rho_i(x)$ là các hàm biểu diễn đường chuyển dịch của dầm với hai đầu ngàm cứng có độ dài l. Chúng thực chất là nghiệm của các bài toán biên sau đây:

1. $u''(x) = 0$; $u(0) = u_1$; $u(l) = u_2$.
2. $\theta''(x) = 0$; $\theta(x) = \theta_1$; $\theta(l) = \theta_2$.
3. $\dfrac{d^4 v(x)}{dx^4} = 0$; $v(0) = v_1$; $v'(0) = v_1'$; $v(l) = v_2$ $v'(l) = v_2'$.
4. $\dfrac{d^4 w(x)}{dx^4} = 0$; $w(0) = -w_1$; $w'(0) = w_1'$; $w(l) = -w_2$; $w'(l) = -w_2'$. (14.28)

Nghiệm của bài toán thứ nhất có dạng:

$$u(x) = k_0 + k_1 x .$$

ở đây k_0 và k_1 là các hằng số tích phân tìm từ các điều kiện biên sau:

– $u(0) = u_1 \Rightarrow k_0 = u_1$

– $u(l) = u_2$ nên $u_1 + k_1 l = u_2 \Rightarrow k_1 = \dfrac{u_2 - u_1}{l}$

Như vậy, nghiệm của bài toán biên thứ nhất có dạng:

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2 .$$

Mặt khác, từ phương trình (14.23) có $u(x) = u_1 \rho_1(x) + u_2 \rho_7(x)$, suy ra:

$\rho_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$ và $\rho_7(x) = \frac{x}{l}$;

Với trình tự tương tự, giải bài toán biên thứ hai nhận được:

$\rho_4(x) = 1 - \frac{x}{l} = \rho_1(x)$ và $\rho_{10}(x) = \frac{x}{l} = \rho_7(x)$;

Xét bài toán biên thứ ba, nghiệm của nó có dạng:

$v(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$.

ở đây k_0, k_1, k_2 và k_3 là hằng số tích phân tìm từ các điều kiện biên sau:

– $v(0) = v_1 \Rightarrow k_0 = v_1$ và $v'(0) = v_1' \Rightarrow k_1 = v_1'$;

– Từ hai điều kiện $v(l) = v_2$ và $v'(l) = v_2'$, nhận được hệ hai phương trình:

$v_1 + v_1' l + k_2 l^2 + k_3 l^3 = v_2$;

$v_1' + 2k_2 l + 3k_3 l^2 = v_2'$;

Giải hệ hai phương trình trên tìm được hai hằng số k_2 và k_3:

$k_2 = \frac{3(v_2 - v_1) - 2v_1' l - v_2' l}{l^2}$; $k_3 = \frac{2(v_1 - v_2) + v_1' l + v_2' l}{l^3}$.

Như vậy, nghiệm của bài toán biên thứ ba có dạng:

$$v(x) = v_1 + v_1' x + \frac{3(v_2 - v_1) - 2v_1' l - v_2' l}{l^2} x^2 + \frac{2(v_1 - v_2) + v_1' l + v_2' l}{l^3} x^3$$

$$= v_1\left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right) + v_1' x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + v_2\left(\frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3\right) + v_2' \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

Mặt khác, từ (14.23), có $v(x) = v_1\rho_2(x) + v_1'\rho_6(x) + v_2\rho_8(x) + v_2'\rho_{12}(x)$, suy ra:

$\rho_2(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}$; $\rho_6(x) = x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$;

$\rho_8(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}$; $\rho_{12}(x) = \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right)$.

Tương tự, giải bài toán biên còn lại nhận được:

$$\rho_3(x) = -1 + 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} = -\rho_2(x); \quad \rho_5(x) = x\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 = \rho_6(x);$$

$$\rho_9(x) = -3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} = \rho_8(x); \quad \rho_{11}(x) = \frac{x^2}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right) = \rho_{12}(x)$$

Nếu đem biểu diễn các hàm dạng dưới dạng hàm bậc ba như sau:

$$\rho_j(x) = C_{0j} + C_{1j}x + C_{2j}x^2 + C_{3j}x^3 \quad j = 1,2,\cdots,12 \tag{14.29}$$

thì các hệ số C_{ij}, $i = 0,1,2,3;$ $j = 1,2,\cdots,12$ có dạng như cho trong bảng 14.1.

Bảng 14.1. Hệ số C_{ij} đối với phần tử dầm không gian

j	C_{0j}	C_{1j}	C_{2j}	C_{3j}
1	1	$-\frac{1}{l}$	0	0
2	1	0	$-\frac{3}{l^2}$	$\frac{2}{l^3}$
3	-1	0	$\frac{3}{l^2}$	$-\frac{2}{l^3}$
4	1	$-\frac{1}{l}$	0	0
5	0	1	$-\frac{2}{l}$	$\frac{1}{l^2}$
6	0	1	$-\frac{2}{l}$	$\frac{1}{l^2}$
7	0	$\frac{1}{l}$	0	0
8	0	0	$\frac{3}{l^2}$	$-\frac{2}{l^3}$
9	0	0	$-\frac{3}{l^2}$	$\frac{2}{l^3}$
10	0	$\frac{1}{l}$	0	0
11	0	0	$-\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l^2}$
12	0	0	$-\frac{1}{l}$	$\frac{1}{l^2}$

Lấy đạo hàm của các hàm dạng $\rho_i(x)$ để thiết lập ma trận $[B]$ nhận được:

$$\rho_1'(x) = \rho_4'(x) = -\rho_7'(x) = -\rho_{10}'(x) = \rho_1'^{o}(x) \equiv -\frac{1}{l};$$

$$\rho_2''(x) = -\rho_3''(x) = -\rho_8''(x) = \rho_9''(x) = \rho_3''^{o}(x) \equiv \frac{6}{l^2}\left(\frac{2x}{l} - 1\right);$$

$$\rho_5''(x) = \rho_6''(x) = \rho_4''^{o}(x) \equiv \frac{2}{l}\left(\frac{3x}{l} - 2\right);$$

$$\rho_{11}(x) = \rho_{12}''(x) = \rho_6''^{o}(x) \equiv \frac{2}{l}\left(\frac{3x}{l} - 1\right). \tag{14.30}$$

Đặt các biểu thức trong (14.30) vào để tính các tích phân (14.25), thiết lập được ma trận độ cứng của phần tử dầm không gian có dạng:

$$[S^*] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & & & & & & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & & & & & & \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l}
\end{bmatrix}$$

(14.31)

Nhận thấy, đây chính là ma trận độ cứng (12.7) nhận được cho phần tử dầm thẳng trong mục 12.6 của chương 12 - phương pháp chuyển vị.

Trường hợp dàn phẳng và dàn không gian, ma trận độ cứng có dạng:

$$\left[S^*\right]=\left[\begin{array}{cc} \dfrac{EA}{l} & -\dfrac{EA}{l} \\ \hline -\dfrac{EA}{l} & \dfrac{EA}{l} \end{array}\right] \qquad (14.32)$$

Trường hợp khung phẳng:

$$\left[S^*\right]=\left[\begin{array}{cccccc} \dfrac{EA}{l} & & & & & \\ 0 & \dfrac{12EI}{l^3} & & & & \\ 0 & \dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l} & & & \\ \hline -\dfrac{EA}{l} & 0 & 0 & \dfrac{EA}{l} & & \\ 0 & -\dfrac{12EI}{l^3} & -\dfrac{6EI}{l^2} & 0 & \dfrac{12EI}{l^3} & \\ 0 & \dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{2EI}{l} & 0 & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{4EI}{l} \end{array}\right] \qquad (14.33)$$

ở đây $I \equiv I_{z^*}$ với z^* là trục vuông góc với mặt phẳng của khung (hình 14.3)

Trường hợp lưới ngang:

$$\left[S^*\right]=\left[\begin{array}{cccccc} \dfrac{12EI}{l^3} & & & & & \\ 0 & \dfrac{GJ}{l} & & & & \\ \dfrac{6EI}{l^2} & 0 & \dfrac{4EI}{l^3} & & & \\ \hline -\dfrac{12EI}{l^3} & 0 & -\dfrac{6EI}{l^2} & \dfrac{12EI}{l^3} & & \\ 0 & -\dfrac{GJ}{l} & 0 & 0 & \dfrac{GJ}{l} & \\ \dfrac{6EI}{l^2} & 0 & \dfrac{2EI}{l} & -\dfrac{6EI}{l^2} & 0 & \dfrac{4EI}{l} \end{array}\right] \qquad (14.34)$$

ở đây $I \equiv I_{z^*}$ với z^* là trục nằm trên mặt phẳng của lưới.

Chú ý, ở đây không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Các cosin chỉ phương của hệ tọa độ địa phương của phần tử

Các cosin chỉ phương λ của hệ trục tọa độ địa phương của phần tử x^*, y^* và z^* được sử dụng trong các ma trận chuyển. Các cosin chỉ phương λ của hệ trục tọa độ địa phương được tính bằng tọa độ x,y,z của nút trong hệ tọa độ tổng thể. Đối với phần tử của dàn phẳng hay khung phẳng:

$$\lambda_{x^*x} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}},\ \lambda_{x^*y} = \frac{y_2 - y_1}{l_{12}}. \tag{14.35}$$

ở đây $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (14.36)

Các chỉ số dưới 1 và 2 chỉ nút đầu và nút cuối tương ứng của phần tử. Trong hệ tọa độ đề các vuông góc:

$$\lambda_{y^*x} = -\lambda_{x^*y},\ \lambda_{y^*y} = \lambda_{x^*x}. \tag{14.37}$$

Đối với phần tử của lưới ngang, cần tính:

$$\lambda_{x^*x} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}},\ \lambda_{x^*z} = \frac{z_2 - z_1}{l_{12}},\ \lambda_{z^*x} = -\lambda_{x^*z},\ \lambda_{z^*z} = \lambda_{x^*x}. \tag{14.38}$$

Đối với phần tử của dàn không gian hay khung không gian:

$$\lambda_{x^*x} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}},\ \lambda_{x^*y} = \frac{y_2 - y_1}{l_{12}},\ \lambda_{x^*z} = \frac{z_2 - z_1}{l_{12}}. \tag{14.39}$$

ở đây $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (14.40)

Như đã nêu trong 14.8.1, để xác định tọa độ địa phương trong trường hợp khung không gian cần chỉ ra các cosin chỉ phương của trục y^* λ_{y^*x}, λ_{y^*y}, λ_{y^*z}.

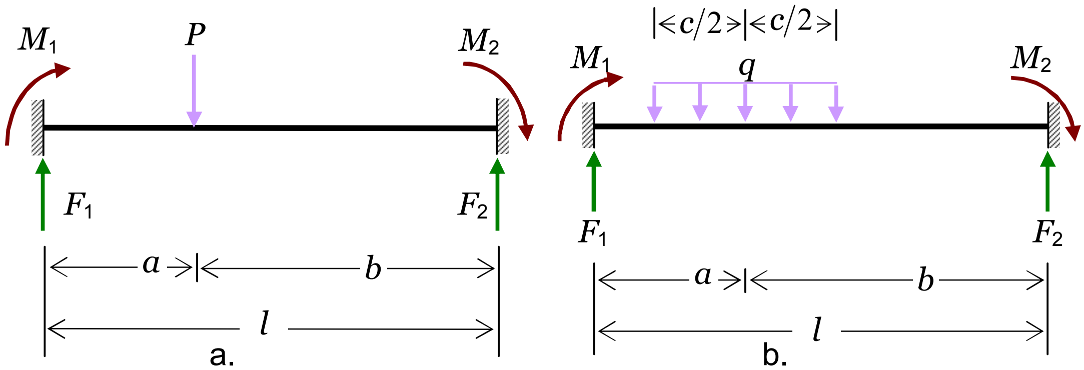
Còn cosin chỉ phương của trục z^* được tính bằng:

$$\lambda_{z^*x} = \lambda_{x^*y}\lambda_{y^*z} - \lambda_{x^*z}\lambda_{y^*y};\ \lambda_{z^*y} = \lambda_{x^*z}\lambda_{y^*x} - \lambda_{x^*x}\lambda_{y^*z};$$

$$\lambda_{z^*z} = \lambda_{x^*x}\lambda_{y^*y} - \lambda_{x^*y}\lambda_{y^*x}. \tag{14.41}$$

Véc tơ tải phần tử cho phần tử dầm

Sử dụng công thức (14.17) tính tải phần tử quy về nút, chúng cân bằng với ngoại lực tác dụng vào phần tử nhưng không vào điểm nút. Đối với phần tử dầm, xét hai trường hợp chịu tải thường gặp (hình 14.4) là tải tập trung đặt tại một điểm trên thanh và tải phân bố đều trên một đoạn của thanh.



Hình 14.4

Lực tập trung đặt tại một điểm trên thanh

Xét thanh chịu lực tập trung P đặt tại điểm cách nút đầu một đoạn a như trên hình 14.4a. Giả thiết lực P hướng theo trục y^* của hệ tọa độ địa phương. Như vậy:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tại điểm } x = a, \ \{p\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tại tất các các điểm } x \neq a.$$

Trước tiên, tính biểu thức trong dấu tích phân ở (14.17)

$$[L]^T\{p\} = \{0 \quad \rho_2 P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \rho_6 P \quad 0 \quad \rho_8 P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \rho_{12} P\}^T.$$

Dùng hàm dạng như trong (14.27), tính các thành phần khác không của lực quy về nút:

$$A_{r2} = F_v^1 = -P\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)\Bigg|_a = -P\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2} + 2\frac{a^3}{l^3}\right)$$

$$A_{r8} = F_v^2 = -P\left(3\frac{x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)\Bigg|_a = -P\left(3\frac{a^2}{l^2} - 2\frac{a^3}{l^3}\right)$$

$$A_{r6} = F_{v'}^1 = M_z^1 = -P\left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)\Bigg|_a = \frac{-Pa}{l^2}(l-a)^2 = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

$$A_{r12} = F_{v'}^2 = M_z^2 = P\left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l}\right)\Bigg|_a = \frac{Pa^2}{l^2}(l-a) = \frac{Pa^2 b}{l^2} \qquad (14.42)$$

Trường hợp khi tải đặt tại điểm giữa thanh $a = b = \dfrac{l}{2}$:

$$F_v^1 = F_v^2 = -\frac{P}{2},\ M_z^1 = -M_z^2 = -\frac{Pl}{8}. \tag{14.43}$$

Lực phân bố đều trên một đoạn của thanh

Xét thanh chịu lực phân bố đều q trong đoạn $[a-0{,}5c, a+0{,}5c]$ như trên hình 14.4b. Giả thiết lực phân bố q hướng theo trục y^* của hệ tọa độ địa phương. Như vậy:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \\ 0 \end{bmatrix} \text{ khi } x \in [a-0{,}5c, a+0{,}5c],\ \{p\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ khi } x \notin [a-0{,}5c, a+0{,}5c]$$

Trước tiên, tính biểu thức trong dấu tích phân ở (14.17):

$$[L]^T\{p\} = \{0 \quad \rho_2 q \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \rho_6 q \quad 0 \quad \rho_8 q \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \rho_{12} q\}^T$$

Dùng hàm dạng như trong (14.27), tính các thành phần khác không:

$$A_{r2} = F_v^1 = -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c} \rho_2 dx = -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c}\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right)dx = -q\left(x - \frac{x^3}{l^2} + \frac{x^4}{2l^3}\right)\Bigg|_{a-0,5c}^{a+0,5c}$$

$$= -\frac{qc}{4l^3}\left[4l^3 - \left(12a^2 + c^2\right)l + 2a\left(4a^2 + c^2\right)\right]$$

$$A_{r8} = F_v^2 = -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c} \rho_8 dx = -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c}\left(3\frac{x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right)dx = -q\left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^4}{2l^3}\right)\Bigg|_{a-0,5c}^{a+0,5c}$$

$$= -\frac{qc}{4l^3}\left[\left(12a^2 + c^2\right)l - 2a\left(4a^2 + c^2\right)\right]$$

$$A_{r6} = F_{v'}^1 = M_z^1 = -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c} \rho_6 dx$$

$$= -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c}\left(x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right)dx = -q\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3l} + \frac{x^4}{4l^2}\right)\Bigg|_{a-0,5c}^{a+0,5c}$$

$$= -\frac{qc}{12l^2}\left[12al^2 - 2l\left(12a^2 + c^2\right) + 3a\left(4a^2 + c^2\right)\right] = -\frac{qc}{12l^2}\left[12ab^2 + c^2(l - 3b)\right]$$

$$A_{r12} = F_{v'}^2 = M_z^2 = -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c}\rho_{12}dx = -q\int_{a-0,5c}^{a+0,5c}\left(\frac{x^3}{l^2}-\frac{x^2}{l}\right)\Bigg|dx = -q\left(\frac{x^4}{4l^2}-\frac{x^3}{3l}\right)\Bigg|_{a-0,5c}^{a+0,5c}$$

$$= -\frac{qc}{12l^2}\left[3a\left(4a^2+c^2\right)-l\left(12a^2+c^2\right)\right] = \frac{qc}{12l^2}\left[12a^2b+c^2(l-3a)\right]$$

(14.44)

Trường hợp khi tải phân bố trên toàn bộ độ dài $a = b = \frac{l}{2}$, $c = l$:

$$F_v^1 = F_v^2 = -\frac{ql}{2},\ M_z^1 = -M_z^2 = -\frac{ql^2}{12}. \qquad (14.45)$$

Chuyển đổi ma trận phần tử về hệ tọa độ tổng thể

Chuyển vị tại hai đầu nút của phần tử trong hệ thanh bất kì trong hệ tọa độ địa phương $\{D^*\}$ (hình 14.3) liên hệ với chuyển vị cũng tại các điểm nút này trong hệ tọa độ tổng thể $\{D\}$ (hình 14.2) bằng quan hệ hình học:

$$\{D^*\} = [t]\{D\}. \qquad (14.46)$$

ở đây ma trận $[t]$ là ma trận chuyển đổi, được thiết lập từ các cosin chỉ phương của các trục tọa độ địa phương x^*, y^*, z^* trong hệ tọa độ tổng thể. Ma trận $[t]$ cho các trường hợp hệ thanh như sau:

– Dàn phẳng:

$$[t] = \begin{bmatrix}\lambda_{x^*x} & \lambda_{x^*y}\end{bmatrix} \qquad (14.47)$$

– Dàn không gian:

$$[t] = \begin{bmatrix}\lambda_{x^*x} & \lambda_{x^*y} & \lambda_{x^*z}\end{bmatrix} \qquad (14.48)$$

– Khung phẳng:

$$[t] = \begin{bmatrix}\lambda_{x^*x} & \lambda_{x^*y} & 0\\ \lambda_{y^*x} & \lambda_{y^*y} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (14.49)$$

– Lưới ngang:

$$[t]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{x^*x} & \lambda_{x^*z}\\ 0 & \lambda_{z^*x} & \lambda_{z^*z}\end{bmatrix} \tag{14.50}$$

– Khung không gian:

$$[t]=\begin{bmatrix}\lambda_{x^*x} & \lambda_{x^*y} & \lambda_{x^*z}\\ \lambda_{y^*x} & \lambda_{y^*y} & \lambda_{y^*z}\\ \lambda_{z^*x} & \lambda_{z^*y} & \lambda_{z^*z}\end{bmatrix} \tag{14.51}$$

Đây là ma trận chuyển đổi các dịch chuyển $\{u^*, v^*, w^*\}$ sang $\{u, v, w\}$, để chuyển các góc quay $\{\theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*\}$ sang $\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}$ cũng dùng các ma trận $[t]$ này.

Ma trận độ cứng phần tử $[S^*]$ trong hệ tọa độ địa phương có thể chuyển về ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $[S_m]$ bằng liên hệ:

$$[S_m]=[T]^T[S^*][T]. \tag{14.52}$$

ở đây:

$$[T]=\begin{bmatrix}[t] & 0\\ 0 & [t]\end{bmatrix} \tag{14.53}$$

cho dàn phẳng, dàn không gian, khung phẳng và lưới ngang, với $[t]$ như trong (14.47) đến (14.50) tương ứng. Riêng trường hợp khung không gian:

$$[T]=\begin{bmatrix}[t] & 0 & 0 & 0\\ 0 & [t] & 0 & 0\\ 0 & 0 & [t] & 0\\ 0 & 0 & 0 & [t]\end{bmatrix} \tag{14.54}$$

với $[t]$ như trong (14.51).

Sử dụng phương trình (14.52), có thể viết hiển các ma trận độ cứng trong hệ tọa độ tổng thể cho các trường hợp khác nhau của hệ thanh:

– Dàn phẳng:

$$[S_m]=\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cc|cc} c^2 & & & \\ cs & s^2 & & \\ \hline -c^2 & -cs & c^2 & \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{array}\right] \tag{14.55}$$

ở đây $c=\cos\alpha=\lambda_{x^*x}$, $s=\sin\alpha=\lambda_{x^*y}$ và α là góc xác định trong hình 14.3 với quy ước dấu.

– Dàn không gian:

$$[S_m]=\frac{EA}{l}\left[\begin{array}{c|c} [S_{11}] & [S_{12}] \\ \hline [S_{21}] & [S_{22}] \end{array}\right] \tag{14.56}$$

ở đây:

$$[S_m]=\begin{bmatrix} \lambda^2_{x^*x} & & \\ \lambda_{x^*y}\lambda_{x^*x} & \lambda^2_{x^*y} & \\ \lambda_{x^*z}\lambda_{x^*x} & \lambda_{x^*z}\lambda_{x^*y} & \lambda^2_{x^*z} \end{bmatrix} \tag{14.57}$$

$$[S_{22}]=[S_{11}];\ [S_{21}]=-[S_{11}];\ [S_{12}]=[S_{21}]^T \tag{14.58}$$

– Khung phẳng:

$$[S_m]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{l}c^2+\frac{12EI}{l^3}s^2 & & & & & \\ \left(\frac{EA}{l}-\frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2+\frac{12EI}{l^3}c^2 & & & & \\ -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} & & & \\ \hline -\frac{EA}{l}c^2-\frac{12EI}{l^3}s^2 & -\left(\frac{EA}{l}-\frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{6EI}{l^2}s & \frac{EA}{l}c^2+\frac{12EI}{l^3}s^2 & & \\ \left(\frac{EA}{l}-\frac{12EI}{l^3}\right)cs & -\frac{EA}{l}s^2-\frac{12EI}{l^3}c^2 & -\frac{6EI}{l^2}c & \left(\frac{EA}{l}-\frac{12EI}{l^3}\right)cs & \frac{EA}{l}s^2+\frac{12EI}{l^3}c^2 & \\ -\frac{6EI}{l^2}s & \frac{6EI}{l^2}c & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{4EI}{l} \end{array}\right]$$

(14.59)

ở đây $c=\cos\alpha=\lambda_{x^*x}=\lambda_{y^*y}$, $s=\sin\alpha=\lambda_{x^*y}=-\lambda_{y^*x}$ và α là góc xác định trong hình 14.3 với quy ước dấu.

– Lưới ngang:

$$[S_m]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{12EI}{l^3} & & & & & \\
-\frac{6EI}{l^2}s & \frac{GJ}{l}c^2+\frac{4EI}{l}s^2 & & & & \\
\frac{6EI}{l^2}c & \left(\frac{GJ}{l}-\frac{4EI}{l}\right)cs & \frac{GJ}{l}s^2+\frac{4EI}{l}c^2 & & & \\
\hline
\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2}s & -\frac{6EI}{l^2}c & \frac{12EI}{l^3} & & \\
-\frac{6EI}{l^2}s & -\frac{GJ}{l}c^2+\frac{2EI}{l}s^2 & \left(-\frac{GJ}{l}-\frac{2EI}{l}\right)cs & \frac{6EI}{l^2}s & \frac{GJ}{l}c^2+\frac{4EI}{l}s^2 & \\
\frac{6EI}{l^2}c & \left(-\frac{GJ}{l}-\frac{2EI}{l}\right)cs & -\frac{GJ}{l}s^2+\frac{2EI}{l}c^2 & -\frac{6EI}{l^2}c & \left(\frac{GJ}{l}-\frac{4EI}{l}\right)cs & \frac{GJ}{l}s^2+\frac{4EI}{l}c^2
\end{array}\right]$$

(14.60)

ở đây $c=\cos\alpha=\lambda_{x^*x}=\lambda_{z^*z}$, $s=\sin\alpha=\lambda_{x^*z}=-\lambda_{z^*x}$ và α là góc xác định trong hình 14.3 với quy ước dấu.

– Cho khung không gian quá cồng kềnh nên không đưa ra ở đây.

Các ma trận $[T]$ này có thể dùng để chuyển lực phần tử quy về nút (mục 14.8.3) về hệ tọa độ tổng thể:

$$\{F\}_m=[T]^T\{A_r\}_m. \qquad (14.61)$$

Ghép nối ma trận độ cứng và véc tơ tải

Xét phần tử thanh với chỉ số nút đầu và nút cuối là k và j tương ứng. Tách ma trận phần tử trong hệ tọa độ tổng thể $[S_m]$ thành các ma trận con như sau:

$$[S_m]=\left[\begin{array}{c|c}[S_{11}] & [S_{12}]\\ \hline [S_{21}] & [S_{22}]\end{array}\right] \qquad (14.62)$$

Đường phân chia này cũng chính là các đường phân chia trong các công thức (14.55), (14.56), (14.59) và (14.60). Các thành phần nằm trên đường phân chia ngang biểu diễn các lực ở nút đầu (nút k), còn các thành phần nằm dưới biểu diễn lực tại nút cuối (nút j). Các thành phần nằm bên trái đường phân chia dọc là lực sinh ra do chuyển vị đơn vị tại nút j, còn các thành phần nằm bên phải là lực sinh ra do chuyển vị đơn vị tại nút k. Các ma trận con trong phương trình (14.62) có kích cỡ $s\times s$, ở đây s là số bậc tự do của nút, ví dụ dàn phẳng $s=2$ và dàn không gian, khung phẳng và lưới ngang $s=3$ và khung không gian $s=6$.

cũng chia ma trận độ cứng của kết cấu $[K]$ làm $n_j \times n_j$ ma trận con, có kích cỡ $s \times s$, ở đây n_j là số nút. Khi đó, các ma trận con trong phương trình (14.26) có thể sắp đặt vào ma trận có cùng kích cỡ và bố trí theo cùng kiểu như ma trận $[K]$:

$$\left[\overline{S}_m\right] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & j & & k & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ j \\ \\ k \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & [S_{11}] & \cdots & [S_{12}] & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & \\ \cdots & [S_{21}] & \cdots & [S_{22}] & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & \end{array}\right]_m \end{array} \tag{14.63}$$

Trong phương trình này chỉ biểu diễn các ma trận con ứng với nút j và nút k, các ma trận con còn lại là ma trận không. Ma trận này thể hiện phần đóng góp của phần tử thứ m vào ma trận độ cứng của kết cấu. Như vậy, ma trận độ cứng kết cấu nhận được từ phép tổng:

$$[S] = \sum_{m=1}^{n_m} \left[\overline{S}_m\right]. \tag{14.64}$$

ở đây n_m là số phần tử.

Chú ý, mỗi cột của ma trận độ cứng phần tử là một hệ các lực cân bằng và phép tổng (14.64) các ma trận độ cứng phần tử tạo ra ma trận độ cứng kết cấu $[K]$ cũng có tính chất này.

Ma trận độ cứng của kết cấu $[K]$ nhận được từ (14.64) là ma trận độ cứng của kết cấu tự do (chưa có liên kết). Ma trận này suy biến (có định thức bằng không), chưa thể dùng để tìm chuyển vị chưa biết. Bỏ đi các cột và các dòng ứng với bậc tự do của các chuyển vị bằng 0, nhận được ma trận độ cứng kết cấu thu gọn dùng trong phương trình cân bằng $[S]\{D\} = -\{F\}$.(xem mục 12.5, chương 12 - phương pháp chuyển vị).

Trong phương trình $[S]\{D\} = -\{F\}$, véc tơ $\{F\}$ là các lực cần để hạn chế các chuyển vị nút, có thể coi là tổng của hai véc tơ:

$$\{F\} = \{F_a\} + \{F_b\}. \tag{14.65}$$

ở đây $\{F_a\}$ liên hệ đến các ngoại lực tác dụng tại nút; còn $\{F_b\}$ liên hệ đến các lực khác (nằm giữa các nút), đến thay đổi nhiệt độ hay dịch chuyển của các gối đỡ. Véc tơ $\{F_b\}$ được tổng hợp từ các véc tơ lực phần tử quy về nút $\{F\}_m$ của từng phần tử đã chuyển sang hệ tọa độ tổng thể bằng phương trình (14.61). Véc tơ $\{F\}_m$ có 2s thành phần (s là số bậc tự do tại nút), có thể chia làm hai ma trận con $\{\{F\}_1 \quad \{F\}_2\}_m$, mỗi ma trận có s thành phần. Hai ma trận con này được bố trí vào véc tơ có cùng kích cỡ với véc tơ $\{F_b\}$ (hay $\{F\}$) theo cách sau:

$$\{\overline{F}_m\} = \begin{array}{c} \\ j \\ \\ k \\ \\ \end{array} \begin{Bmatrix} \cdots \\ \{F_1\} \\ \cdots \\ \{F_2\} \\ \cdots \end{Bmatrix}_m \tag{14.66}$$

Véc tơ này có n_j ma trận con, ngoài ma trận con thứ j và k, các ma trận con khác bằng 0, ở đây k và j là số hiệu của nút đầu và nút cuối của phần tử thứ m. Véc tơ $\{\overline{F}\}_m$ thể hiện phần đóng góp của phần tử thứ m vào véc tơ tải $\{F_b\}$, do vậy lấy tổng của tất cả phần tử:

$$\{F_b\} = \sum_{m=1}^{n_m} \{\overline{F}\}_m . \tag{14.67}$$

ở đây n_m là số phần tử.

Kích cỡ của ma trận $[K]$ và véc tơ $\{F\}$ rất lớn, đòi hỏi có những thuật toán phù hợp để lưu trữ và tiến hành tính toán.

Phản lực liên kết và nội lực tại hai đầu phần tử

Giải hệ phương trình $[S]\{D\} = -\{F\}$ với ma trận độ cứng kết cấu thu gọn (xem mục 14.8.5) tìm được véc tơ chuyển vị tại các nút $\{D\}$ trong hệ tọa độ tổng thể. Chia véc tơ $\{D\}$ thành các ma trận con, mỗi ma trận có s thành phần là chuyển vị tại mỗi nút, s là số bậc tự do của một nút. Đối với phần tử thứ m có nút đầu và nút cuối là j và k tương ứng, chuyển vị tại hai đầu trong hệ tọa độ địa phương được tính bằng công thức (14.46):

$$\{D^*\}_m = \left\{\begin{array}{c}\{D^*\}_1 \\ \hdashline \{D^*\}_2\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c:c}[t] & [0] \\ \hdashline [0] & [t]\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\{D\}_j \\ \hdashline \{D\}_k\end{array}\right\} \tag{14.68}$$

trong đó $\{D\}_j$ và $\{D\}_k$ là các ma trận con của $\{D\}$, ứng với nút j và nút k, $[t]_m$ là ma trận chuyển hệ tọa độ của phần tử thứ m có dạng như một trong các ma trận (14.47) đến (14.51).

Để tìm nội lực tại đầu phần tử $\{A\}$, dùng công thức:

$$\{A\} = \{A_r\} + [A_u]\{D\}.$$

trong đó $\{A\}_r$ là nội lực tại mặt cắt đầu phần tử khi $\{D\} = 0$ và $[A]_u$ là nội lực tại đầu phần tử khi chuyển vị cho bằng đơn vị tại từng tọa độ, thực chất $[A]_u \equiv [S^*]$. Véc tơ chuyển vị $\{D\}$ là chuyển vị trong hệ tọa độ địa phương, vậy:

$$\{A\} = \{A_r\} + [S^*]\{D^*\}. \tag{14.69}$$

Khi biết nội lực tại đầu phần tử $\{A\}$ cho từng phần tử, có thể tính được phản lực tại liên kết. Phản lực tại nút có liên kết được tính bằng công thức:

$$\{R\} = \sum\left([t]^T\{A\}\right)_i - \{F_S\}. \tag{14.70}$$

Ví dụ 14.1. Xét khung phẳng như trong hình 14.5a. EI và EA của các thanh như nhau.

Bước 1. Đánh số nút và số phần tử, có 4 nút và ba phần tử. Hai nút bị ngàm cứng, vậy có 6 phản lực tại liên kết cần xác định. Hai nút còn lại tự do, mỗi nút có 3 bậc tự do, tổng cộng là sáu bậc tự do, vậy cần xác định 6 chuyển vị. (hình 14.5b)

Bước 2. Thiết lập véc tơ tải. Tính tải phần tử quy về nút cho từng phần tử.

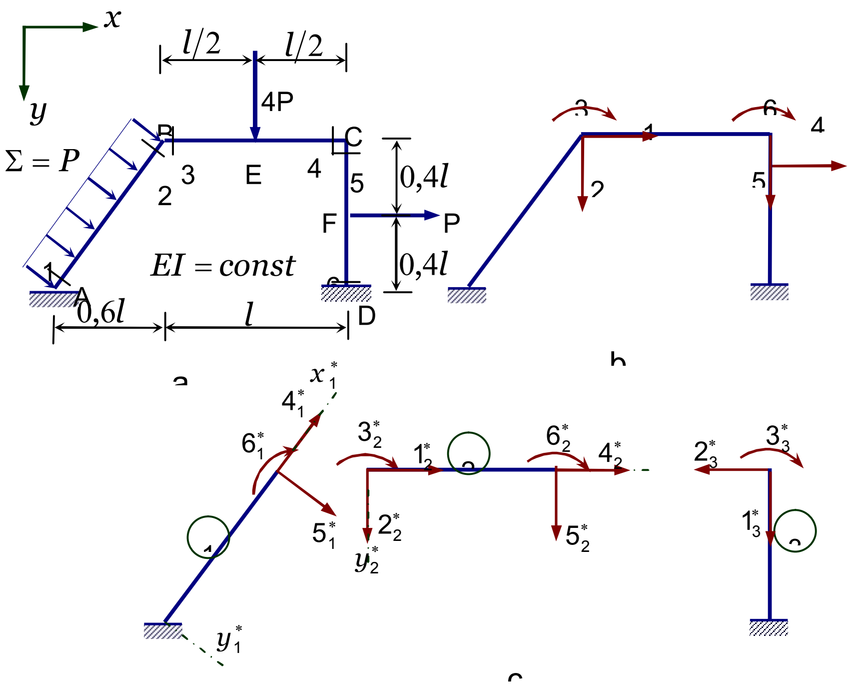
– Phần tử thứ nhất chịu tải phân bố đều trên toàn bộ độ dài theo (14.45):

$$\{A_r\}_1 = \left\{0 \quad -\frac{ql}{2} \quad -\frac{ql^2}{12} \quad 0 \quad \frac{ql}{2} \quad \frac{ql^2}{12}\right\}^T = \left\{0 \quad -\frac{P}{2} \quad -\frac{Pl}{12} \quad 0 \quad -\frac{P}{2} \quad \frac{Pl}{12}\right\}^T.$$

– Phần tử thứ hai và thứ ba chịu tải tập trung ở điểm giữa (14.43):

$$\{A_r\}_2 = \left\{0 \quad -2P \quad -\frac{Pl}{2} \quad 0 \quad -2P \quad \frac{Pl}{2}\right\}^T;$$

$$\{A_r\}_3 = \left\{0 \quad \frac{P}{2} \quad \frac{Pl}{10} \quad 0 \quad \frac{P}{2} \quad -\frac{Pl}{10}\right\}^T.$$



Hình 14.5

Để đưa về hệ tọa độ tổng thể, cần xác định các ma trận chuyển $[t]$ của từng phần tử. Tính các cosin chỉ phương của hệ tọa độ địa phương của các phần tử 1 và 3, hệ tọa độ địa phương của phần tử 2 trùng với hệ tọa độ tổng thể (hình 14.5c):

$$\lambda_{x_1^*x} = 0{,}6 \qquad \lambda_{x_1^*y} = -0{,}8 \qquad \lambda_{y_1^*x} = 0{,}8 \qquad \lambda_{y_1^*y} = 0{,}6$$

$$\lambda_{x_3^*x} = 0 \qquad \lambda_{x_3^*y} = 1 \qquad \lambda_{y_3^*x} = -1 \qquad \lambda_{y_3^*y} = 0$$

Sử dụng các công thức (14.49) và (14.53) cho khung phẳng, lập được các ma trận chuyển hệ tọa độ cho phần tử thứ nhất và thứ ba:

$$[t]_1=\begin{bmatrix}0,6 & -0,8 & 0\\ 0,8 & 0,6 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ [T]_1=\begin{bmatrix}[t] & 0\\ 0 & [t]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[t]_3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ [T]_1=\begin{bmatrix}[t] & 0\\ 0 & [t]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Như vậy, véc tơ lực $\{F_m\}$ của từng phần tử tính theo (14.61), $\{F\}_m=[T]^T\{A_r\}_m$:

$$\{F^*\}_1=\begin{bmatrix}0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -P/2\\ -Pl/12\\ 0\\ -P/2\\ Pl/12\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,4P\\ -0,3P\\ -Pl/12\\ 0,4P\\ -0,3P\\ Pl/12\end{Bmatrix};$$

$$\{F^*\}_2=\begin{Bmatrix}0\\ -2P\\ -0,5Pl\\ 0\\ -2P\\ 0,5Pl\end{Bmatrix};\qquad \{F^*\}_3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0,5P\\ 0,1Pl\\ 0\\ 0,5P\\ -0,1Pl\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0,5P\\ 0\\ 0,1Pl\\ 0,5P\\ 0\\ -0,1Pl\end{Bmatrix}.$$

Thiết lập véc tơ tải $\{F_b\}$ theo (14.66) và (14.67):

$$\{\overline{F}\}_1=\begin{Bmatrix}0,4P\\ -0,3P\\ Pl/12\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix};\ \{\overline{F}\}_2=\begin{Bmatrix}0\\ -2P\\ -0,5Pl\\ 0\\ -2P\\ 0,5Pl\end{Bmatrix};\ \{\overline{F}\}_3==\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0,5P\\ 0\\ 0,1Pl\end{Bmatrix};\ \{F_b\}=\begin{Bmatrix}0,4P\\ -2,3P\\ -0,417Pl\\ 0,5P\\ -2P\\ 0,6Pl\end{Bmatrix}.$$

Vì không có ngoại lực tác dụng vào các nút nên:

$$\{F_a\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix} \text{ và } \{F\}=\{F_b\}=\begin{Bmatrix}0{,}4P\\-2{,}3P\\-0{,}417Pl\\0{,}5P\\-2P\\0{,}6Pl\end{Bmatrix}.$$

Bước 3. Xây dựng ma trận độ cứng kết cấu. Trước tiên, thiết lập ma trận độ cứng của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương của chúng:

$$[S^*]_1=[S^*]_2=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{EA}{l} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & & & ĐX & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}\end{array}\right];$$

$$[S^*]_3=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{EA}{0{,}8l} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{0{,}8^3l^3} & & & ĐX & \\ 0 & \frac{6EI}{0{,}8^2l^2} & \frac{4EI}{0{,}8l} & & & \\ \hline -\frac{EA}{0{,}8l} & 0 & 0 & \frac{EA}{0{,}8l} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{0{,}8^3l^3} & -\frac{6EI}{0{,}8^2l^2} & 0 & \frac{12EI}{0{,}8^3l^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{0{,}8^2l^2} & \frac{2EI}{0{,}8l} & 0 & -\frac{6EI}{0{,}8^2l^2} & \frac{4EI}{0{,}8l}\end{array}\right].$$

Chuyển sang hệ tọa độ tổng thể bằng công thức (14.52) hay (14.59):

$$[S]_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{0,36EA}{l}+\frac{7,68EI}{l^3} & & & & & \\
\frac{5,76EI}{l^3}-\frac{0,48EA}{l} & \frac{0,64EA}{l}+\frac{4,32EI}{l^3} & & & ĐX & \\
\frac{4,8EI}{l^2} & \frac{3,6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\
\hdashline
\frac{-0,36EA}{l}-\frac{7,68EI}{l^3} & \frac{0,48EA}{l}-\frac{5,76EI}{l^3} & 0 & \frac{0,36EA}{l}+\frac{7,68EI}{l^3} & & \\
\frac{0,48EA}{l}-\frac{5,76EI}{l^3} & -\frac{0,64EA}{l}-\frac{4,32EI}{l^3} & -\frac{3,6EI}{l^2} & \frac{5,76EI}{l^3}-\frac{0,48EA}{l} & \frac{0,64EA}{l}+\frac{4,32EI}{l^3} & \\
\frac{4,8EI}{l^2} & \frac{3,6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{4,8EI}{l^2} & -\frac{3,6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{array}\right];$$

$$[S]_2 = \left[\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & & & ĐX & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\
\hdashline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{array}\right];$$

$$[S]_3 = \left[\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{23,4375EI}{l^3} & & & & & \\
0 & \frac{1,25EA}{l^3} & & & ĐX & \\
-\frac{9,375EI}{l^2} & 0 & \frac{5EI}{l} & & & \\
\hdashline
-\frac{23,4375EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{23,4375EI}{l^3} & & \\
0 & -\frac{1,25EA}{l^3} & 0 & 0 & \frac{1,25EA}{l^3} & \\
-\frac{9,375EI}{l^2} & 0 & \frac{2,5EI}{l} & \frac{9,375EI}{l^2} & 0 & \frac{5EI}{l}
\end{array}\right].$$

Bố trí lại theo (14.63):

$$[\overline{S}]_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc}
\frac{0,36EA}{l}+\frac{7,68EI}{l^3} & & & & & \\
\frac{5,76EI}{l^3}-\frac{0,48EA}{l} & \frac{0,64EA}{l}+\frac{4,32EI}{l^3} & & & ĐX & \\
\frac{4,8EI}{l^2} & \frac{3,6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right];$$

$$
\left[\overline{S}\right]_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & \frac{12EI}{l^3} & & & ĐX & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & & & \\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l}
\end{array}\right]; \quad
\left[\overline{S}\right]_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
0 & & & & & \\
0 & 0 & & & ĐX & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{23{,}4375EI}{l^3} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1{,}25EA}{l} & \\
0 & 0 & 0 & \frac{9{,}375EI}{l^2} & 0 & \frac{5EI}{l}
\end{array}\right].
$$

Cuối cùng, nhận được ma trận độ cứng kết cấu đã thu gọn bằng cách cộng 3 ma trận trên lại:

$$
\left[\overline{S}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{1{,}36EA}{l} + \frac{7{,}68EI}{l^3} & & & & & \\
\frac{5{,}76EI}{l^3} - \frac{0{,}48EA}{l} & \frac{0{,}64EA}{l} + \frac{16{,}32EI}{l^3} & & & ĐX & \\
\frac{4{,}8EI}{l^2} & \frac{9{,}6EI}{l^2} & \frac{8EI}{l} & & & \\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} + \frac{23.4375EA}{l^3} & & \\
0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{1{,}25EA}{l} + \frac{12EI}{l^3} & \\
0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{9{,}375EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{9EI}{l}
\end{array}\right]
$$

Bước 4. Giải phương trình $[S]\{D\} = -\{F\}$ nhận được véc tơ chuyển vị $\{D\}$.

Bước 5. Dùng công thức (14.69), (14.50) để tính nội lực tại các mặt cắt và phản lực tại gối đỡ.

Kết luận chương 14

Chương 14 giới thiệu sơ lược về phương pháp phần tử hữu hạn như một ứng dụng của phương pháp chuyển vị. Sử dụng các hàm dạng như trong phương pháp Rayleigh-Ritz, đưa bài toán vô số bậc tự do về bài toán hữu hạn bậc tự do và thiết lập được các ma trận phần tử.

Phương pháp phần tử hữu hạn thông dụng để mô hình hoá kết cấu công trình, trong cơ học kết cấu được tiến hành theo các bước như sau:

1. Chia kết cấu thành các phần tử bằng một lưới gồm các nút đóng vai trò liên kết giữa các phần tử với nhau trong một không gian tổng thể chọn sẵn. Mỗi

phần tử được xác định bằng các nút cố định trong một hệ toạ độ địa phương gắn với phần tử đó.

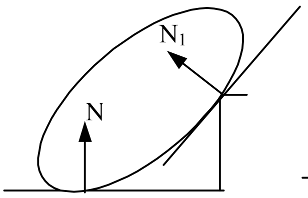
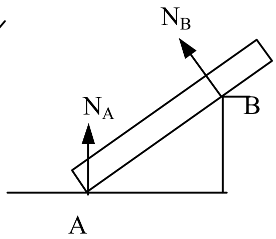
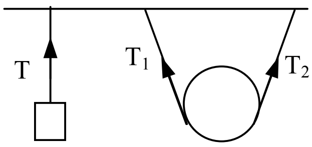
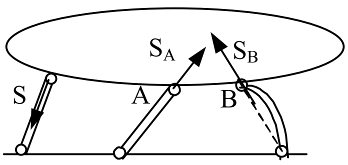
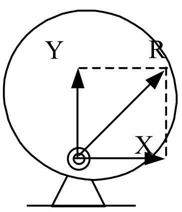
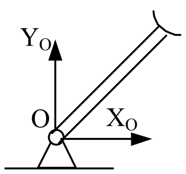
2. Định nghĩa các chuyển vị nút trong hệ toạ độ địa phương cũng như trong hệ toạ độ tổng thể và các liên kết biên ràng buộc lên các chuyển vị nút này.
3. Biểu diễn trường chuyển vị của phần tử như một vật rắn biến dạng thông qua các chuyển vị nút trong hệ toạ độ địa phương và sử dụng biểu diễn này cùng với các nguyên lý, phương trình của cơ học. Xây dựng các ma trận độ cứng, khối lượng và véc tơ tải trọng nút cho từng phần tử.
4. Ghép nối, liên kết các ma trận, véc tơ chuyển vị, lực nút,... của phần tử thành các ma trận và véc tơ tương ứng của cả kết cấu.

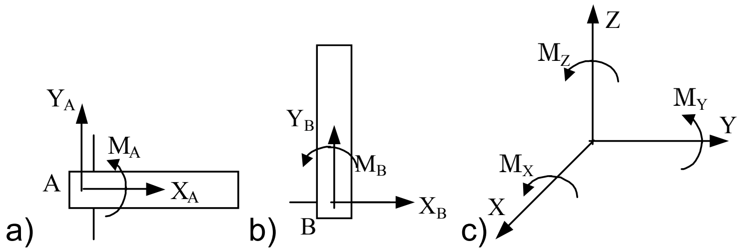
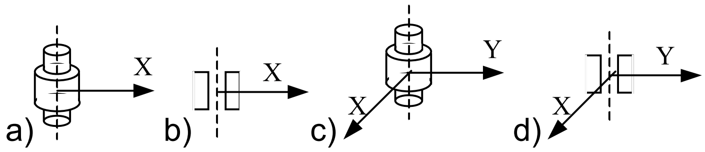
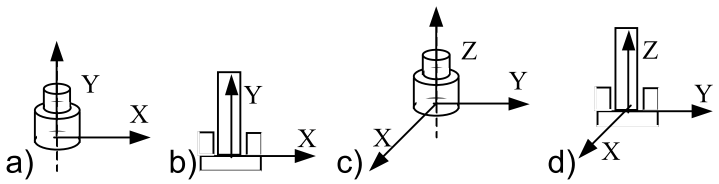
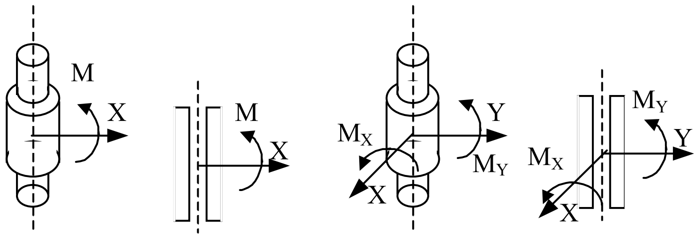
Quy trình này được áp dụng phổ biến trong các phần mềm phân tích kết cấu hiện có như: SAP2000, ANSYS, Abaqus, SAMCEF, NASTRAN v.v.

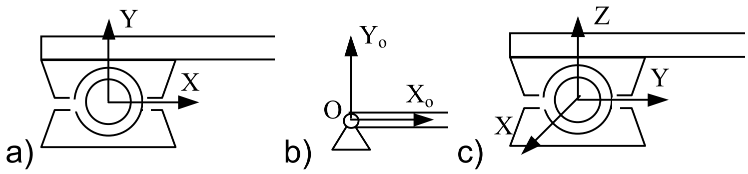
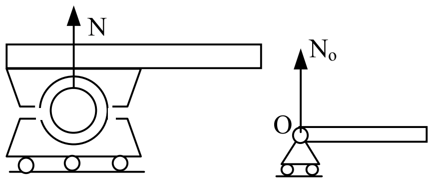
Trong chương này, chủ yếu giới thiệu qui trình của phương pháp phần tử hữu hạn áp dụng cho các loại phần tử thanh. Một ví dụ khung phẳng có ba phần tử được trình bày để minh họa cho các bước phân tích bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

PHỤ LỤC

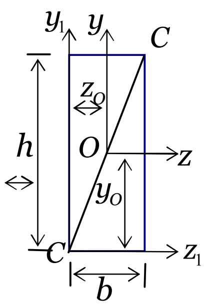
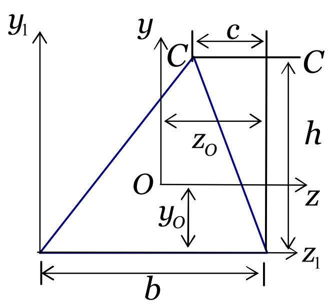
PHỤ LỤC 1.
Đặc điểm các phản lực liên kết thường gặp

Liên kết	Biểu diễn	Đặc điểm phản lực
Tựa (không ma sát)	 	Thẳng góc với mặt tựa, mặt tiếp xúc, hướng vào vật khảo sát - phản lực pháp
Dây (mềm và không co dãn)		Nằm theo dây, hướng ra ngoài vật khảo sát - sức căng
Thanh (chỉ chịu kéo hay nén)		Nằm theo thanh (đường nối 2 đầu thanh) hướng vào (ra) thanh khi thanh chịu kéo (nén) - ứng lực
Bản lề (trơn nhẵn)	 	Lực đặt tại bản lề chia ra hai thành phần - phản lực bản lề

Liên kết	Biểu diễn	Đặc điểm phản lực
Ngàm		Phẳng (a), (b): 2 thành phần lực X,Y và 1 ngẫu lực mô men M Không gian (c): 3 thành phần phản lực ngàm và 3 ngẫu lực mô men
ổ trụ ngắn		Cản trở di chuyển thẳng góc với trục. Phẳng (a,b): như phản lực tựa. Không gian (c,d): 2 phản lực
Cối (ổ trụ ngắn có mặt chắn		Cản trở di chuyển thẳng góc và dọc trục. Phẳng (a,b): 2 phản lực. Không gian (c,d): 3 phản lực
ổ trục dài		Cản trở di chuyển thẳng góc và quay. Phẳng (a,b): 1 phản lực và 1 ngẫu phản lực. Không gian (c,d): 2 phản lực và 2 ngẫu phản lực

Liên kết	Biểu diễn	Đặc điểm phản lực
Gối cố định		Cản trở di chuyển thẳng theo 2 phương. Phẳng (a,b): 2 phản lực Không gian(c): 3 phản lực
Gối di động (có con lăn)		Cản trở di chuyển theo phương thẳng với mặt nền. 1 phản lực.

PHỤ LỤC 2.
Đặc trưng hình học của các hình phẳng

Hình	Các đặc trưng hình học
	Chữ nhật $A = hb\,,y_O = \dfrac{h}{2}\,,z_O = \dfrac{b}{2}\,,\; I_z = \dfrac{bh^3}{12}\,,\; I_y = \dfrac{hb^3}{12}\,,$ $I_{zy} = 0\,,\; I_\rho = \dfrac{bh(b^2+h^2)}{12}\,,\; I_{CC} = \dfrac{b^3h^3}{6(b^2+h^2)}\,,\; I_{z1} = \dfrac{bh^3}{3}\,,$ $I_{y_1} = \dfrac{hb^3}{3}\,,\; I_{z1y1} = \dfrac{b^2h^2}{4}\,,\; I_{\rho 1} = \dfrac{bh(b^2+h^2)}{3}$
	Tam giác $A = \dfrac{hb}{2}\,,y_O = \dfrac{h}{3}\,,z_O = \dfrac{b+c}{3}\,,\; I_z = \dfrac{bh^3}{36}\,,$ $I_y = \dfrac{bh(b^2-bc+c^2)}{36}\,,\; I_{zy} = \dfrac{bh^2(b-2c)}{72}\,,$ $I_\rho = \dfrac{bh(h^2+b^2-bc+c^2)}{36}\,,\; I_{CC} = \dfrac{bh^3}{4}\,,$ $I_{z1} = \dfrac{bh^3}{12}\,,\; I_{y1} = \dfrac{bh(3b^2-3bc+c^2)}{12}\,,\; I_{z1y1} = \dfrac{bh^2(3b-2c)}{24}$ Tam giác cân, khi $c = \dfrac{b}{2}$: $y_O = \dfrac{h}{3}\,,z_O = \dfrac{b}{2}\,,\; I_z = \dfrac{bh^3}{36}\,,$ $I_y = \dfrac{bh^3}{48}\,,\; I_{zy} = 0\,,\; I_\rho = \dfrac{bh(4h^2+3b^2)}{144}\,,\; I_{z1} = \dfrac{bh^3}{12}\,,$ Tam giác vuông, khi $c = b$: $y_O = \dfrac{h}{3}\,,z_O = \dfrac{b}{3}\,,\; I_z = \dfrac{bh^3}{36}\,,$ $I_y = \dfrac{bh^3}{36}\,,\; I_{zy} = -\dfrac{b^2h^2}{72}\,,\; I_\rho = \dfrac{bh(h^2+b^2)}{36}\,,\; I_{z1} = \dfrac{bh^3}{12}\,,$ $I_{y1} = \dfrac{hb^3}{12}\,,\; I_{z1y1} = \dfrac{b^2h^2}{24}\,,\; I_{\rho 1} = \dfrac{bh(h^2+b^2)}{12}\,,\; I_{CC} = \dfrac{bh^3}{4}$

Hình	Các đặc trưng hình học
	Hình thang $A=(a+b)\dfrac{h}{2}$, $y_0=\dfrac{h(2a+b)}{3(a+b)}$, $I_Z=\dfrac{h^3\left(a^2+4ab+b^2\right)}{36(a+b)}$, $I_{Z1}=\dfrac{h^3(3a+b)}{12}$
	Hình tròn $A=\pi r^2=\dfrac{\pi d^2}{4}$, $I_z=I_y=\dfrac{\pi r^4}{4}=\dfrac{\pi d^4}{64}$, $I_{yz}=0$, $I_\rho=\dfrac{\pi r^4}{2}=\dfrac{\pi d^4}{32}$, $I_{z1}=\dfrac{5\pi r^4}{4}=\dfrac{5\pi d^4}{64}$

Hình	Các đặc trưng hình học
	Phần tư hình tròn $A = \frac{\pi r^2}{4}$, $y_O = z_O = \frac{4r}{3\pi}$ $I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{16}$, $I_{zy} = \frac{r^4}{8}$, $I_{z1} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144\pi} \approx 0{,}05488 r^4$
	Hình quạt $\alpha \le \frac{\pi}{2}$, $A = \alpha r^2$, $y_O = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$, $z_O = r\sin\alpha$ $I_y = \frac{r^4}{4}(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$, $I_z = \frac{r^4}{4}(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)$, $I_{zy} = 0$, $I_\rho = \frac{\alpha r^4}{2}$

PHỤ LỤC 3.
Các hằng số xoắn của một số mặt cắt thường gặp

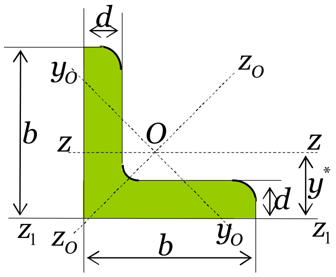
Hình	Các hằng số xoắn
	$J = hb^3\left[\frac{1}{3} - 0{,}21\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right] = \gamma hb^3$, $W_x = \alpha hb^2$, Giữa cạnh dài $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$, Giữa cạnh ngắn $\tau_1 = \beta\tau_{\max}$; ở các góc $\tau = 0$
	$J = I_\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$, $W_x = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$; $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$

h/b	1,0	1,5	2	2,5	3	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,313	0,339
β	1,0	0,859	0,795	0,766	0,753	0,742	0,742
γ	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,313	0,333

Hình	Các hằng số xoắn
	$J = b^4 \dfrac{\sqrt{3}}{80} = 0{,}02165b^4$; $W_x = 0{,}05b^3$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_x}{W_x} = 20\dfrac{M_x}{b^3}$ (ở giữa cạnh), ở các góc $\tau = 0$
	$J = \dfrac{2t_1 t_2 (h - t_2)^2 (b - t_1)^2}{b_1 t_2 + b_2 t_1 - t_2^2 - t_1^2}$

PHỤ LỤC 4.
Thông số của thép cán nóng theo TCVN

Bảng PL4.1. Thép góc đều cạnh – TCVN 1656-75

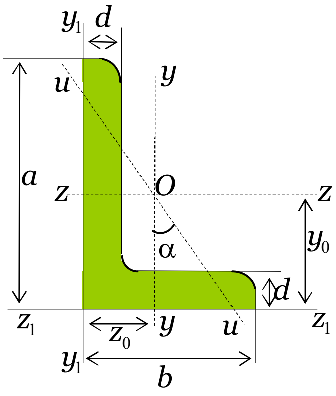


Số hiệu	Kích thước (mm)		Diện tích mặt cắt (cm2)	Khối lượng 1m dài (kg)	Các giá trị đối với trục							y^* cm
					$z-z$		z_O-z_O		y_O-y_O		z_1-z_1	
	b	d			I_z cm⁴	i_z cm	I_{z0} cm⁴	i_{z0} cm	I_{y0} cm⁴	i_{y0} cm	I_{z1} cm⁴	
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2.5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2.8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,2	0,8
3.2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3.6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4.5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,20	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		1	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5.6	56	3,5	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52

Số hiệu	Kích thước (mm)		Diện tích mặt cắt (cm2)	Khối lượng 1m dài (kg)	Các giá trị đối với trục							y^* cm
					$z-z$		z_O-z_O		y_O-y_O		z_1-z_1	
	b	d			I_z cm⁴	i_z cm	I_{z0} cm⁴	i_{z0} cm	I_{y0} cm⁴	i_{y0} cm	I_{z1} cm⁴	
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6.3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,14	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7.5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62, 6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	1,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	71,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	380	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
13	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	492	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61

Số hiệu	Kích thước (mm)		Diện tích mặt cắt (cm2)	Khối lượng 1m dài (kg)	Các giá trị đối với trục							y^* cm
					$z-z$		z_O-z_O		y_O-y_O		z_1-z_1	
	b	d			I_z cm^4	i_z cm	I_{z0} cm^4	i_{z0} cm	I_{y0} cm^4	i_{y0} cm	I_{z1} cm^4	
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	4,43	248	2,76	1097	2,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	841	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	115,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07

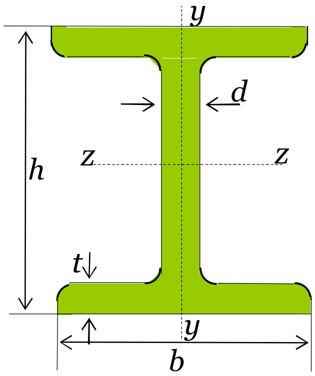
Bảng PL4.2. Thép góc cạnh không đều – TCVN 1657-75



Số hiệu	Kích thước mm			Diện tích mặt cắt (cm2)	Khối lượng 1m dài (kg)	Các giá trị đối với trục										Góc lệch tgα
						z-z		y-y		z_1-z_1		y_1-y_1		u-u		
	a	b	d			I_z cm^4	i_z cm^4	I_y cm^4	i_y cm	I_{z1} cm^4	y_0 cm	I_{y1} cm^4	z_0 cm	I_u cm^4	i_u cm	
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,7	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,328
			4	1,94	1,52	1,93	1	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4,2/5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,7	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,2	0,64	0,79	0,61	0,382
			4	2,8	2,2	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,6	0,379
5/3,2	50	32	3	24,2	1,9	6,17	1,6	1,99	0,91	12,4	1,6	3,26	0,72	1,18	0,7	0,403
			4	3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,9	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	4	3,58	2,81	11,4	1,78	3,7	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5	4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	2	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6	5,9	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,2	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
8/5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49	2,55	14,8	1,4	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9,5/6	90	56	5,5	7,86	9,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,7	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,2	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,38

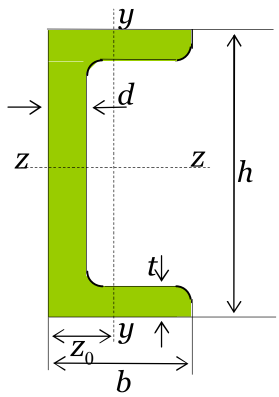
Số hiệu	Kích thước mm			Diện tích mặt cắt (cm2)	Khối lượng 1m dài (kg)	Các giá trị đối với trục											
						z-z		y-y		z_1-z_1		y_1-y_1		u-u		Góc lệch tgα
	a	b	d			I_z cm^4	i_z cm^4	I_y cm^4	i_y cm	I_{z1} cm^4	y_0 cm	I_{y1} cm^4	z_0 cm	I_u cm^4	i_u cm	
10/6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,7	113	3,19	35	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,5	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	3,15	47,1	1,75	333	3,4	85,8	1,5	28,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	3,53	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,4
12,5/8	125	80	7	14,1	11	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	4	83	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	28,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,4
14/9	140	90	8	18	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	22,9	18	666	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10	25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,39
			12	30	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	5,03	272	2,8	1910	5,4	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,4	0,374
20/12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,72	0,392
			14	43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,39
			16	49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,41
			16	63,6	49,6	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,5	0,408
			18	71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	2,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

Bảng PL4.3. Thép chữ I – TCVN 1655-75



Số hiệu	Kích thước mm				Diện tích mặt cắt (cm^2)	Khối lượng 1m dài (kg)	Các trị số đối với trục						
							z-z				*y-y*		
	h	*b*	*d*	*t*			I_z (cm^4)	W_z (cm^3)	i_z (cm)	S_z (cm^3)	I_y (cm^3)	W_y (cm^4)	i_y (cm)
10	100	55	4,5	7,2	12	9,46	198	39,7	5,03	23	17,9	6,5	1,2
12	120	64	4,8	7,3	15	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,7	1,4
14	140	73	4,9	7,5	17	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	12	1,6
16	160	81	5	7,8	20	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	15	1,7
18	180	90	5,1	8,1	23	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18	1,9
18a	180	100	5,1	8,3	25	19,9	1430	159	7,51	89,8	114	23	2,1
20	200	100	5,2	8,1	27	21	1840	154	8,28	104	115	23	2,1
20a	200	110	5,2	8,6	29	22,7	2030	203	8,37	114	155	28	2,3
22	220	110	5,4	8,7	31	24	2550	232	9,13	131	157	29	2,3
22a	220	120	5,4	8,9	33	25,8	2790	254	9,22	143	206	34	2,5
24	240	115	5,6	9,5	35	27,3	3460	289	9,77	163	198	35	2,4
24a	240	125	5,6	9,8	38	29,4	3800	317	10,1	178	260	42	2,6
27	270	125	6	9,8	40	31,5	5010	371	11,2	210	260	42	2,5
27a	270	135	6	10,2	43	33,9	5500	507	11,3	229	337	50	2,8
30	300	135	6,5	10,2	47	36,5	7080	472	12,3	268	337	50	2,7
30a	300	145	6,5	10,7	50	39,2	7780	518	12,5	292	436	60	3
33	330	140	7	11,2	54	42,2	9840	597	13,5	339	419	60	2,8
36	360	145	7,5	12,3	62	48,6	13380	743	14,7	423	516	71	2,9
40	400	155	8	13	71	56,1	18930	947	16,3	540	666	86	3,1
45	450	160	8,6	14,2	83	65,2	27450	1220	18,2	699	807	101	3,1
50	500	170	9,5	15,2	98	76,8	39290	1570	20	905	1040	122	3,3
55	550	180	10,3	16,5	114	89,8	55150	2000	22	1150	1350	150	3,4
60	600	190	11,1	17,8	132	104	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,6
65	650	200	12	19,2	153	120	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,8
70	700	210	13	20,8	176	138	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,9
70a	700	210	15	24	202	158	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4
70b	700	210	17,5	28,2	234	184	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,1

Bảng PL4.4. Thép chữ C – TCVN 1654-75



Số hiệu	Kích thước mm				Diện tích mặt cắt (cm^2)	Khối lượng 1 m dài (kg)	Các trị số đối với trục							z_o cm
							z-z				*y-y*			
	h	*b*	*d*	*t*			I_z cm^4	W_x cm^3	I_x cm	S_x cm^3	I_y cm^4	W_y cm^3	I_y cm	
5	50	32	4,4	7	6,16	4,34	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17	13,3	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5	8,4	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	160	68	5	9	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	19,8	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	22,6	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	25,8	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6	10,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

PHỤ LỤC 5.
Bảng hệ số uốn dọc φ(λ)

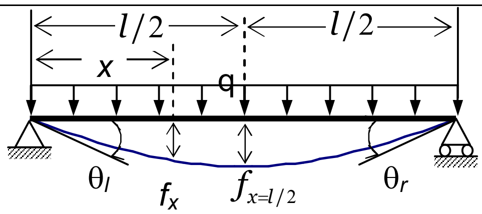
Độ mảnh λ	Thép CT3	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,97	0,99
20	0,96	0,91	0,97
30	0,94	0,81	0,93
40	0,92	0,69	0,87
50	0,89	0,54	0,80
60	0,86	0,44	0,71
70	0,81	0,34	0,60
80	0,75	0,26	0,48
90	0,69	0,20	0,38
100	0,60	0,16	0,31
110	0,52		0,25
120	0,45		0,22
130	0,40		0,18
140	0,36		0,16
150	0,32		0,14
160	0,29		0,12
170	0,26		0,11
180	0,23		0,10
190	0,21		0,09
200	0,19		0,08

PHỤ LỤC 6.
Dịch chuyển của các phần tử thanh thẳng

Thanh có độ cứng uốn là EI và độ cứng xoắn là GJ. Chiều dương của dịch chuyển hướng xuống, chiều dương của góc xoay theo chiều kim đồng hồ. Bỏ qua biến dạng trượt

$$f_x = \frac{qx}{24EI}\left(l^3 - 2lx^2 + x^3\right);$$

$$f_{x=\frac{l}{2}} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI};\ \theta_l = -\theta_r = \frac{ql^3}{24EI}$$

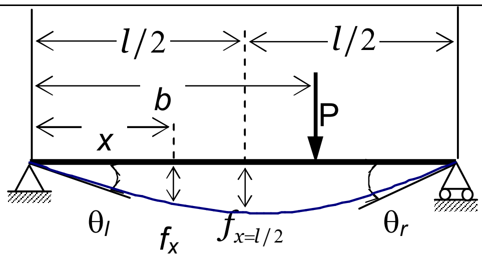


$$f_x = \begin{cases} \dfrac{P(l-b)x}{6lEI}\left(2lb - b^2 - x^2\right) & x \le b \\ \dfrac{Pb(l-x)}{6lEI}\left(2lx - x^2 - b^2\right) & x \ge b \end{cases}$$

$$\theta_l = \frac{Pb(l-b)}{6lEI}(2l-b);\ \theta_r = -\frac{Pb}{6lEI}\left(l^2 - b^2\right);$$

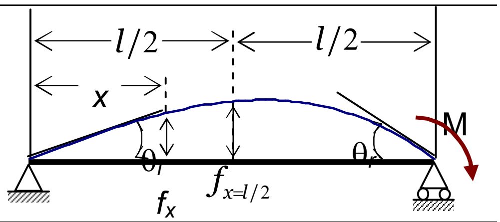
$$b = \frac{l}{2} \Rightarrow \theta_l = -\theta_r = \frac{Pl^2}{16EI};$$

$$f_{x=\frac{l}{2}} = \frac{Pl^3}{48EI}$$



$$f_x = \frac{Mx}{6EI}\left(\frac{x^2}{l} - l\right);\ f_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Ml^2}{16EI};$$

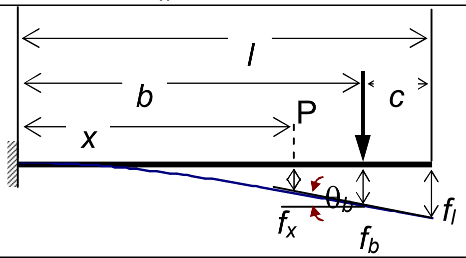
$$\theta_l = -\frac{Ml}{6EI};\ \theta_r = \frac{Ml}{3EI}$$



$$f_x = \frac{Pbx^2}{6EI}\left(3 - \frac{x}{b}\right) \quad 0 \le x \le b;$$

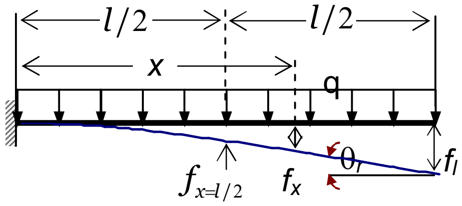
$$f_b = \frac{Pb^3}{2EI};\theta_b = \frac{Pb^2}{2EI};$$

$$f_x = f_b + \theta_b(l-x) \quad b \le x \le l;\ f_l = f_b + \theta_b c$$



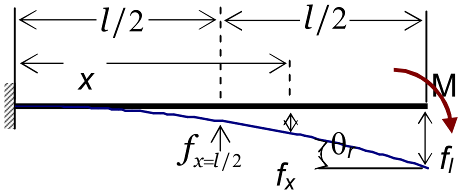
$$f_x = \frac{ql^4}{24EI}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)^4 - 1 + 4\frac{x}{l}\right]$$

$$f_l = \frac{ql^4}{8EI};\; f_{l/2} = \frac{17ql^4}{384EI};\; \theta_r = \frac{ql^3}{6EI};$$



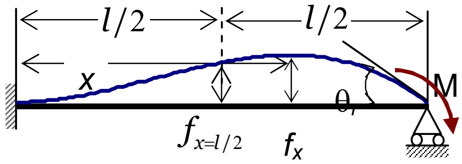
$$f_x = \frac{Mx^2}{2EI};\; f_l = \frac{Ml^2}{2EI};$$

$$f_{l/2} = \frac{Ml^2}{8EI};\; \theta_r = \frac{Ml}{EI};$$



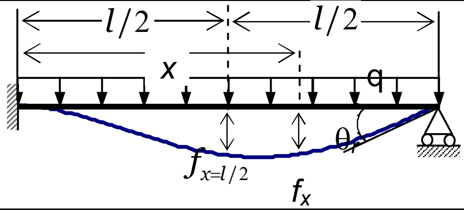
$$f_x = \frac{Mx^2}{4EI}\left(\frac{x}{l}-1\right);\; f_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Ml^2}{32EI};$$

$$\theta_r = \frac{Ml}{4EI}$$



$$f_x = \frac{ql^2x^2}{48EI}\left(3-5\frac{x}{l}+2\frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$f_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^4}{192EI};\; \theta_r = -\frac{ql^3}{48EI}$$



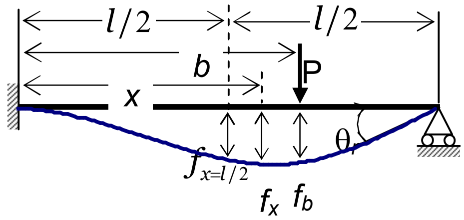
$$f_x = \frac{Pbx^2}{6EI}\left[\left(3-\frac{x}{b}\right)-\frac{b}{2l}\left(3-\frac{b}{l}\right)\left(3-\frac{x}{l}\right)\right]$$

$0 \le x \le b$

$$f_b = \frac{Pb^3}{6EI}\left(2-\frac{3b}{2l}+\frac{b^2}{2l^2}\right);\; \theta_r = \frac{-Pb^2}{4EI}\left(1-\frac{b}{l}\right);$$

$$f_x = \frac{Pb^2}{6EI}\left[3x-b-\frac{x^2}{2l}\left(3-\frac{b}{l}\right)\left(3-\frac{x}{l}\right)\right]$$

$b \le x \le l$



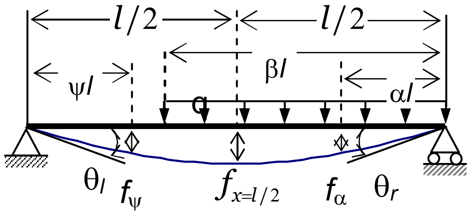
$$f_\psi = \frac{ql^4\beta^2\psi}{24EI}\left(2-\beta^2-2\psi^2\right) \quad \psi \le (1-\beta);$$

$$f_\alpha = -\frac{ql^4\alpha}{24EI}\left[2\beta(2-\beta)\alpha^2-\alpha^3+\beta^2(\beta-2)^2\right];$$

$\alpha \le \beta$

$$f_\beta = \frac{ql^4\beta^3}{24EI}(1-\beta)(4-3\beta);$$

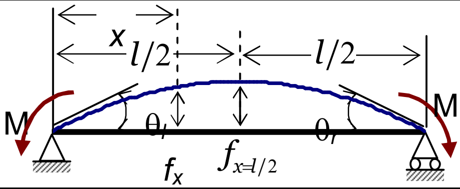
$$f_{\beta/2} = \frac{ql^4\beta^3}{384EI}\left(32-39\beta+12\beta^2\right);$$



$$\theta_r = \frac{-ql^3\beta^2}{24EI}(\beta-2)^2;\ \theta_l = \frac{ql^3\beta^2}{24EI}\left(2-\beta^2\right);$$

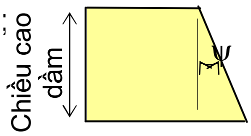
$$f_x = -\frac{Mx(l-x)}{2EI};\ f_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{Ml^2}{8EI};$$

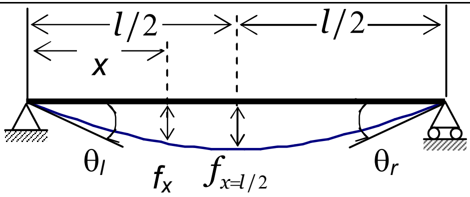
$$\theta_l = -\theta_r = -\frac{Ml}{2EI};$$



$$f_x = \frac{\psi x(l-x)}{2};\ f_{x=\frac{l}{2}} = \frac{\psi l^2}{8};$$

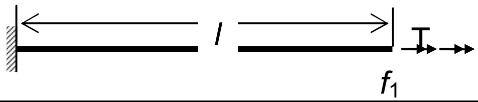
$$\theta_l = -\theta_r = \frac{\psi l}{2};$$





ψ - độ dãn nở nhiệt theo chiều cao dầm

$$f_1 = \frac{Tl}{GJ}$$



PHỤ LỤC 7.
Lực đầu phần tử của các phần tử thanh thẳng

Trong bảng cho lực đầu phần tử của dầm có độ cứng uốn và độ cứng xoắn không đổi. Quy ước dấu lực dương hương lên trên, mô men dương theo chiều kim đồng hồ. Khi sử dụng trong phương pháp chuyển vị ta sẽ lấy dấu theo hệ tọa độ đã chọn.

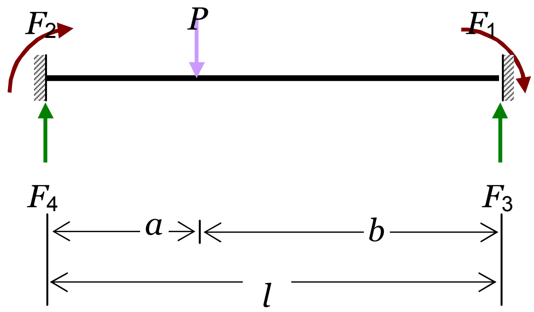
$$F_1 = \frac{Pa^2b}{l^2};\ \ F_2 = -\frac{Pab^2}{l^2};$$

$$F_3 = P\left[\frac{a}{l} + \frac{ab}{l^3}(a-b)\right];$$

$$F_4 = P\left[\frac{b}{l} + \frac{ab}{l^3}(b-a)\right];$$

Khi $a = b = \dfrac{l}{2}$; thì

$$F_1 = -F_2 = \frac{Pl}{8};\ \ F_3 = F_4 = \frac{P}{2};$$



$$F_1 = \frac{qc}{12l^2}\left[12a^2b + c^2(l-3a)\right];$$

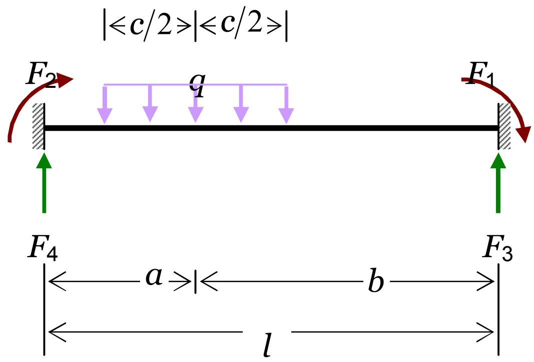
$$F_2 = -\frac{qc}{12l^2}\left[12ab^2 + c^2(l-3b)\right];$$

$$F_3 = \frac{qca}{l} + \frac{F_1+F_2}{l};$$

$$F_4 = \frac{qcb}{l} - \frac{F_1+F_2}{l};$$

Khi $a = b = \dfrac{l}{2}$; $c = l$ thì

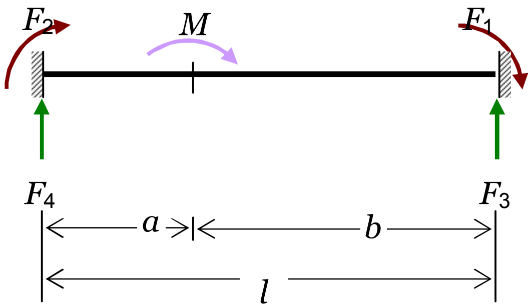
$$F_1 = -F_2 = \frac{ql^2}{12};\ \ F_3 = F_4 = \frac{ql}{2};$$



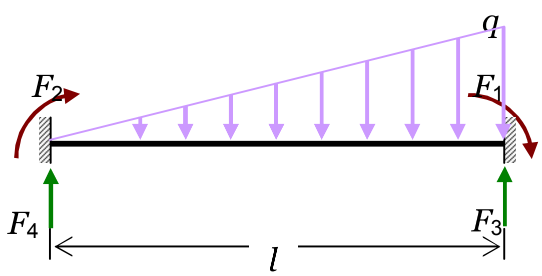
$$F_1 = \frac{Ma}{l}\left(2 - \frac{3a}{l}\right);$$
$$F_2 = \frac{Mb}{l}\left(2 - \frac{3b}{l}\right);$$
$$F_3 = -F_4 = \frac{6Mab}{l^3};$$

Khi $a = b = \frac{l}{2}$; thì

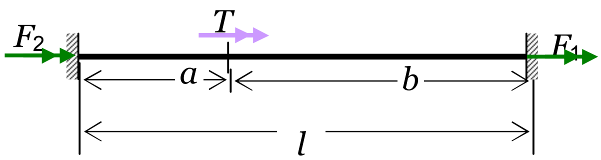
$$F_1 = F_2 = \frac{M}{4};\ F_3 = -F_4 = \frac{3M}{2l};$$



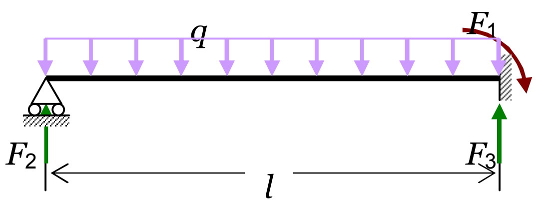
$$F_1 = \frac{ql^2}{20};\ F_2 = -\frac{ql^2}{30};$$
$$F_3 = \frac{7ql}{20};\ F_4 = \frac{3ql}{20};$$



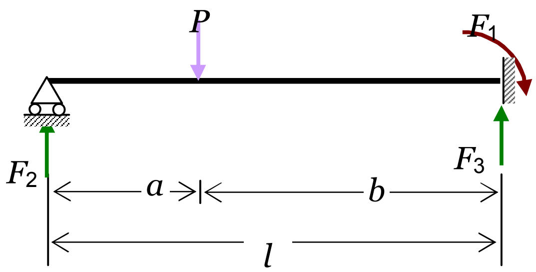
$$F_1 = -\frac{Ta}{l};\ F_2 = -\frac{Tb}{l};$$



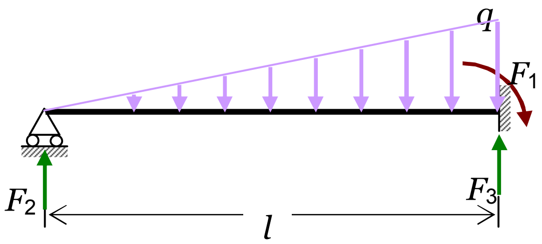
$$F_1 = \frac{ql^2}{8};\ F_2 = \frac{3ql}{8};\ F_3 = \frac{5ql}{8};$$



$$F_1 = \frac{Pab}{l^2}\left(a + \frac{b}{2}\right);$$
$$F_2 = P\left[\frac{b}{l} - \frac{ab}{l^3}\left(a + \frac{b}{2}\right)\right];$$
$$F_3 = P\left[\frac{a}{l} + \frac{ab}{l^3}\left(a + \frac{b}{2}\right)\right];$$

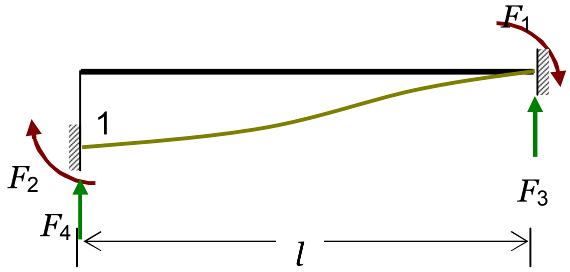
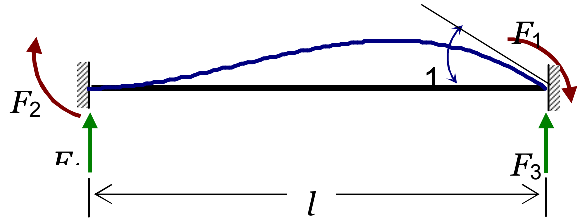
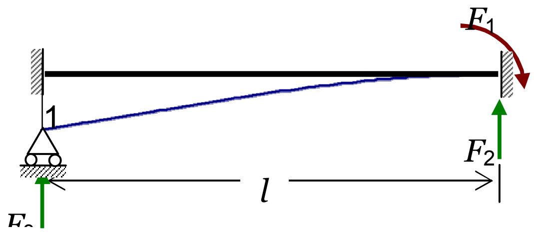
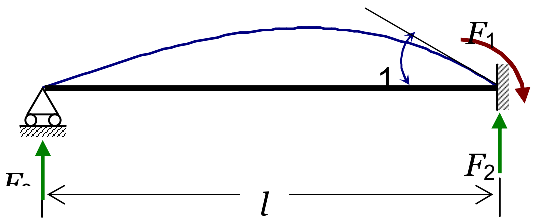


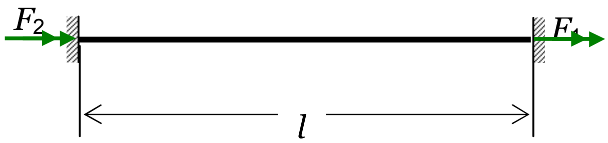
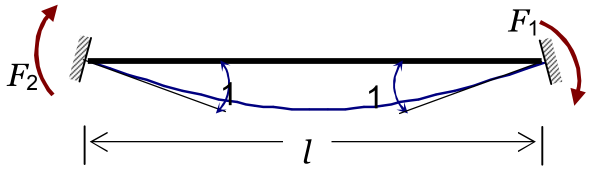
$F_1 = \dfrac{ql^2}{15}$; $F_2 = \dfrac{ql}{10}$; $F_3 = \dfrac{2ql}{5}$;



PHỤ LỤC 8.
Lực đầu phần tử do chuyển vị tại đầu nút của thanh thẳng

Trong bảng cho lực đầu phần tử tại đầu dầm khi cho trước chuyển vị là đơn vị. Quy ước dấu lực dương hướng lên, mô men dương quay theo chiều kim đồng hồ. Hiệu ứng của lực cắt bỏ qua. Bỏ qua uốn do lực dọc trục. Độ cứng của dầm không đổi

$F_1 = F_2 = \dfrac{6EI}{l^2};\ F_3 = -F_4 = \dfrac{12EI}{l^3};$	
$F_1 = \dfrac{4EI}{l}; F_2 = \dfrac{2EI}{l};$ $F_3 = -F_4 = \dfrac{6EI}{l^2};$	
$F_1 = \dfrac{3EI}{l^2};\ F_2 = -F_3 = \dfrac{3EI}{l^3};$	
$F_1 = \dfrac{3EI}{l};\ F_2 = -F_3 = \dfrac{3EI}{l^2};$	

Góc xoắn D=1 $F_1 = -F_2 = \frac{GI}{l}$; (Bỏ qua hiệu ứng vặn)	
$F_1 = -F_2 = \frac{2EI}{l}$;	

PHỤ LỤC 9.
Phản lực và mô men uốn tại các gối đỡ của dầm liên tục do chuyển vị đơn vị tại gối đỡ gây ra

Các bảng sau đây cho phản lực và mô men uốn tại các gối đỡ của dầm liên tục do chuyển vị đơn vị lún xuống tại từng gối đỡ gây ra. Tất cả các nhịp có độ dài l và có độ cứng không đổi. Số nhịp từ 2 (hoặc 1) đến 5. Các gối tại hai đầu liên kết khớp (Bảng PL9.1), hai đầu ngàm (Bảng PL9.2), và ngàm một đầu và khớp một đầu (Bảng PL9.3). Mô men uốn tại đầu khớp bằng không và không được kể đến trong bảng.

Các giá trị trong từng dòng là mô men uốn hay phản lực lần lượt của từng gối đỡ từ trái sang phải. Dòng đầu sau đề mục là ảnh hưởng của sự lún của gối đỡ thứ nhất kể từ bên trái, dòng thứ hai là ảnh hưởng của sự lún của gối đỡ thứ hai kể từ bên trái , v.v.

Hình PL9.1 biểu diễn ví dụ về cách sử dụng các bảng: số nhịp là 3, gối đỡ thứ hai lún xuống một đơn vị và mô men uốn và phản lực tại gối đỡ sẽ lấy ở dòng thứ hai của bảng PL9.1.2.1 và PL9.1.2.2 tương ứng.

Trong các bảng này, quy ước phản lực dương khi chúng tác động hướng lên, và quy ước mô men uốn dương khi chúng gây uốn ở thớ dưới của dầm. Khi phản lực dùng để thiết lập ma trận độ cứng thì lấy dấu phù hợp với hệ tọa độ đã chọn.

Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt.

Bảng PL9.1. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục. Hai đầu dầm là gối tựa. EI=const. Các nhịp có độ dài l bằng nhau

PL9.1.1. Dầm hai nhịp

PL9.1.1.1 Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.50000
3.00000
-1.50000

PL9.1.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.50000	3.00000	-1.50000
3.00000	-6.00000	3.00000
-1.50000	3.00000	-1.50000

PL9.1.2. Dầm ba nhịp

PL9.1.2.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.60000	0.40000
3.60000	-2.40000
-2.40000	3.60000
0.40000	-1.60000

PL9.1.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.60000	3.60000	-2.40000	0.40000
3.60000	-9.60000	8.40000	-2.40000
- 2.40000	8.40000	-9.60000	3.60000
0.40000	-2.40000	3.60000	-1.60000

PL9.1.3. Dầm bốn nhịp

PL9.1.3.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.60714	0.42857	-0.10714
3.64286	-2.57143	0.64286
-2.57143	4.28571	-2.57143
0.64286	-2.57143	3.64286
-0.10714	0.42857	-1.60714

PL9.1.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.60714	3.64286	-2.57143	0.64286	-0.10714

3.64286	-9.85714	9.42857	-3.85714	0.64286
-2.57143	9.42857	-13.71428	9.42857	-2.57143
0.64286	-3.85714	9.42857	-9.85714	3.64286
-0.10714	0.64286	-2.57143	3.64286	-1.60714

PL9.1.4. Dầm năm nhịp

PL9.1.4.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

-1.60765	0.43062	-0.11483	0.02871
3.64593	-2.58373	0.68900	-0.17225
-2.58373	4.33493	-2.75798	0.68900
0.68900	-2.75798	4.33493	-2.58373
-0.17225	0.68900	-2.58373	3.64593
0.02871	-0.11483	0.43062	-1.60765

PL9.1.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-1.60765	3.64593	-2.58373	0.68900	-0.17225	0.02871
3.64593	-9.87560	9.50239	-4.13397	1.03349	-0.17225
-2.58373	9.50239	-14.00956	10.53588	-4.13397	0.68900
0.68900	-4.13397	10.53588	-14.00957	9.50239	-2.58373
-0.17225	1.03349	-4.13397	9.50239	-9.87560	3.64593
0.02871	-0.17225	0.68900	-2.58373	3.64593	-1.60765

Bảng PL9.2. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục. Hai đầu dầm ngàm. EI=const. Các nhịp có độ dài l bằng nhau

PL9.2.1. Dầm một nhịp

PL9.2.1.1 Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

6.00000	-6.00000
-6.00000	6.00000

PL9.2.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-12.00000	12.00000
12.00000	-12.00000

PL9.2.2. Dầm hai nhịp

PL9.2.2.1 Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.50000	-3.00000	1.5000
-6.00000	6.00000	-6.0000
1.50000	-3.00000	4.5000

PL9.2.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.50000	12.00000	-4.50000
12.00000	-23.99998	12.00000
-4.50000	12.00000	-7.50000

PL9.2.3. Dầm ba nhịp

PL9.2.3.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.40000	-2.80000	0.80000	-0.40000
-5.60000	5.20000	-3.20000	1.60000
1.60000	-3.20000	5.20000	-5.60000
-0.40000	0.80000	-2.80000	4.40000

PL9.2.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.20000	10.80000	-4.80000	1.20000
10.80000	-19.20000	13.20000	-4.80000
-4.80000	13.20000	-19.20000	10.80000
1.20000	-4.80000	10.80000	-7.20000

PL9.2.4. Dầm bốn nhịp

PL9.2.4.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.39286	-2.78571	0.75000	-0.21429	0.10714
-5.57143	5.14286	-3.00000	0.85714	-0.42857
1.50000	-3.00000	4.50000	-3.00000	1.50000
-0.42857	0.85714	-3.00000	5.14286	-5.57143
0.10714	-0.21429	0.75000	-2.78571	4.39286

PL9.2.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.17857	10.71428	-4.50000	1.28571	-0.32143
10.71428	-18.85713	12.00000	-5.14285	1.28571
-4.50000	12.00000	-14.99999	12.00000	-4.50000
1.28571	-5.14285	12.00000	-18.85713	10.71428
-0.32143	1.28571	-4.50000	10.71428	-7.17857

PL9.2.5. Dầm năm nhịp

PL9.2.5.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.39235	-2.78469	0.74641	-0.20096	0.05742	-0.02871
-5.56938	5.13875	-2.98564	0.80383	-0.22966	0.11483
1.49282	-2.98564	4.44976	-2.81339	0.80383	-0.40191
-0.40191	0.80383	-2.81339	4.44976	-2.98564	1.49282
0.11483	-0.22966	0.80383	-2.98564	5.13875	-5.56938
-0.02871	0.05742	-0.20096	0.74641	-2.78469	4.39235

PL9.2.5.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.17703	10.70813	-4.47847	1.20574	-0.34450	0.08612
10.70813	-18.83252	11.91387	-4.82296	1.37799	-0.34450
-4.47847	11.91387	-14.69856	10.88038	-4.82296	1.20574
1.20574	-4.82296	10.88038	-14.69856	11.91387	-4.47847
-0.34450	1.37799	-4.82296	11.91387	-18.83252	10.70813
0.08612	-0.34450	1.20574	-4.47847	10.70813	-7.17703

Bảng PL9.3. Ảnh hưởng của chuyển vị lún đơn vị tại một gối đỡ của dầm liên tục. Hai đầu dầm ngàm. EI=const. Các nhịp có độ dài l bằng nhau

PL9.3.1. Dầm một nhịp

PL9.3.1.1 Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

3.00000
-3.00000

PL9.3.1.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-3.00000	3.00000
3.00000	-3.00000

PL9.3.2. Dầm hai nhịp

PL9.3.2.1 Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.28571	-2.57143
-5.14286	4.28571
0.85714	-1.71428

PL9.3.2.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-6.85714	9.42857	-2.57143
9.42857	-13.71428	4.28571
-2.57143	4.28571	-1.71428

PL9.3.3. Dầm ba nhịp

PL9.3.3.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.38462	-2.76923	0.69231
-5.53846	5.07692	-2.76923
1.38461	-2.76923	3.69231
-0.23077	0.46154	-1.61538

PL9.3.3.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.15385	10.61539	-4.15384	0.69231
10.61539	-18.46153	10.61538	-2.76923
-4.15384	10.61538	-10.15384	3.69231
0.69231	-2.76923	3.69231	-1.61538

PL9.3.4. Dầm bốn nhịp

PL9.3.4.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

4.39175	-2.78350	0.74227	-0.18557
-5.56701	5.13402	-2.96907	0.74227
1.48454	-2.96907	4.39175	-2.59794
-0.37113	0.74227	-2.59794	3.64948
0.06186	-0.12371	0.43299	-1.60825

PL9.3.4.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.17526	10.70103	-4.45361	1.11340	-0.18557
10.70103	-18.80411	11.81443	-4.45361	0.74227
-4.45361	11.81443	-14.35051	9.58763	-2.59794
1.11340	-4.45361	9.58763	-9.89690	3.64948
-0.18557	0.74227	-2.59794	3.64948	-1.60825

PL9.3.5. Dầm năm nhịp

PL9.3.5.1. Mô men uốn tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^2

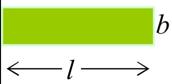
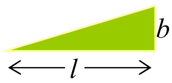
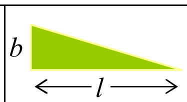
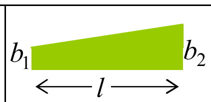
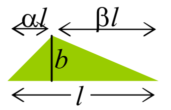
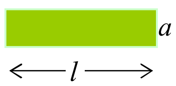
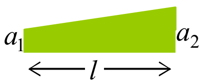
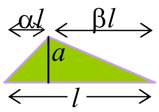
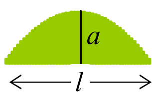
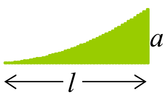
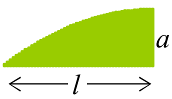
4.39227	-2.78453	0.74586	-0.19889	0.04972
-5.56906	5.13812	-2.98342	0.79558	-0.19889
1.49171	-2.98342	4.44199	-2.78453	0.69613
-0.39779	0.79558	-2.78453	4.34254	-2.58563
0.09945	-0.19889	0.69613	-2.58563	3.64641
-0.01657	0.03315	-0.11602	0.43094	-1.60773

PL9.3.5.2. Phản lực tại các gối đỡ nhân với hệ số EI/l^3

-7.17680	10.70718	-4.47513	1.19337	-0.29843	0.04972
10.70718	-18.82872	11.90055	-4.77438	1.19337	-0.19889
-4.47513	11.90055	-14.65193	10.70718	-4.17679	0.69613
1.19337	-4.77438	10.70718	-14.69856	9.51381	-2.58563
-0.29843	1.19337	-4.17679	9.51381	-9.87845	3.64641
0.04972	-0.19889	0.69613	-2.58563	3.64641	-1.60773

PHỤ LỤC 10.
Các giá trị của tích phân

Bảng dưới đây cho các giá trị của tính phân $\int_l M_u M dl$ dùng để tính chuyển vị của kết cấu khung bằng công ảo (phương trình 4.61). Bảng này có thể dùng để tính các tích phân $\int_l N_u N dl$, $\int_l Q_u Q dl$, $\int_l M_{xu} M_x dl$ hoặc tính phân theo đường l của hai hàm bất kì thay đổi theo quy luật như biểu đồ ở dòng trên cùng và dòng đầu bên trái

M \ M_u					
	abl	$\frac{1}{2}abl$	$\frac{1}{2}abl$	$\frac{al}{2}(b_1+b_2)$	$\frac{1}{2}abl$
	$\frac{bl}{2}(a_1+a_2)$	$\frac{bl}{6}(a_1+2a_2)$	$\frac{bl}{6}(2a_1+a_2)$	$\frac{l}{6}(2a_1b_1+a_1b_2$ $+a_2b_1+2a_2b_2)$	$\frac{bl}{6}[(1+\beta)a_1$ $+(1+\alpha)a_2]$
	$\frac{1}{2}abl$	$\frac{abl}{6}(1+\alpha)$	$\frac{abl}{6}(1+\beta)$	$\frac{al}{6}[(1+\beta)b_1$ $+(1+\alpha)b_2]$	$\frac{1}{3}abl$
	$\frac{2}{3}abl$	$\frac{1}{3}abl$	$\frac{1}{3}abl$	$\frac{al}{3}(b_1+b_2)$	$\frac{abl}{3}(1+\alpha\beta)$
	$\frac{1}{3}abl$	$\frac{1}{4}abl$	$\frac{1}{12}abl$	$\frac{al}{12}(b_1+3b_2)$	$\frac{abl}{12}(1+\alpha+\alpha^2)$
	$\frac{2}{3}abl$	$\frac{5}{12}abl$	$\frac{1}{4}abl$	$\frac{al}{12}(3b_1+5b_2)$	$\frac{abl}{12}(5-\beta-\beta^2)$

Tài liệu tham khảo

[1]. Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Vượng (2001) Cơ học ứng dụng. Nhà Xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

[2]. Lê Ngọc Hồng. (2006) Sức bền vật liệu. Nhà Xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[3]. Trần Văn Liên (2009) Sức bền vật liệu. Nhà Xuất bản Xây dựng, Hà Nội.

[4]. Gere J. M., Timoshenko S. P. (1984), Mechanics of Materials, Second edition, PWS-KENT Publishing Company.

[5]. Ghali A. and A. M. Neville. (1995) Structural Analysis. A Unified and Matrix Approach. Third Edition. Chapman & Hall, Melbourne.

[6]. Миролюбов И. Н., С. А. Енгалычев, Н. Д. Сергиевский, Ф. З. Алмаметов, Н. А. Курицын, К. Г. Смирнов-Васильев, Л. В. Яшина. (1974) Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. Издателство “Высшая школа”, Москова.

[7]. Феодосьев В. И. (1979), Сопротивление материалов. Издателство “Наука”, Москова.