ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN, HỌC KỲ I, NĂM HỌC 2018 - 2019

Tên học phần: PHƯƠNG PHÁP TOÁN CHO VẬT LÝ 1
Mã học phần: PHY2201 Số tín chỉ: 3 Đề số: 1
Dành cho sinh viên lớp học phần: PHY2201

Câu I.(3đ)

Giải phương trình vi phân sau:

$$x^2y'' - xy' + y = x, \tag{1}$$

với điều kiện biên $y(1) = 1$ và $y(e) = 2e$.

Đặt $x = e^t$, ta có $t = \ln x$.

Phương trình trở thành: $y_{tt} - 2y_t + y = e^t$.

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 2k + 1 = 0$.

Nghiệm tổng quát phương trình $y(t)$: $y(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$.

Nghiệm tổng quát phương trình (1): $y = C_1x + C_2x\ln x + \frac{1}{2}x\ln^2 x$.

Áp dụng điều kiện biên: $C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{2}$.

Nghiệm của bài toán: $y = x + \frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{2}x\ln^2 x$.

Câu II.(2đ)

Khai triển hàm thành chuỗi Laurent theo luỹ thừa của z

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}\right)$$

1) trong miền $0 < |z| < 2$.

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$f(z) = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - ...$$

2) trong miền $|z| > 2$.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{2z} = \frac{1}{2z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{z^4} + ...$$

Câu III.(2đ)

Áp dụng công thức tích phân Cauchy tính tích phân sau:

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} dz, (n \geq 0)$$

trong đó, C là đường cong: $z(t) = e^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$.

Công thức tích phân Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Ta có, $z_0 = 0$ nằm bên trong đường cong C.

$$\oint_C \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Với $n = 0$ ta có biểu thức dưới dấu tích phân e^z giải tích trên toàn mặt phẳng phức, nên giải tích cả bên trong đường cong C, theo định lý Cauchy ta có,

$$\oint_C e^z dz = 0.$$

Câu IV.(3đ)

Áp dụng Định lý về thặng dư tính các tích phân sau:

1) $$\oint_{|z|=2} \frac{1+z^2}{(1-z)^3} dz = -2\pi i$$

trong đó, $|z| = 2$ là đường tròn định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

2) $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}.$$

Đổi biến: $z = e^{i\theta}$; $dz = izd\theta$; $\cos\theta = \dfrac{z + 1/z}{2}$.

$$I = \oint_{S(0,1)} dz \frac{1}{iz} \frac{1}{2 + (z + 1/z)/2} = \oint_{S(0,1)} dz \frac{2}{i} \frac{1}{z^2 + 4z + 1}$$

Hàm số có hai điểm bất thường cô lập $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ là các điểm cực đơn. Trong đó, chỉ có $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ nằm trong đường tròn S(0,1).

Theo định lý về thặng dư ta có,

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Hà Nội, Ngày 26 tháng 12 năm 2018
Người làm đáp án