Đại Học Quốc Gia Hà Nội
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên

Môn học: Đại số đại cương
Học kì 1 năm học 2019-2020

ĐỀ THI HỌC KÌ

Dành cho lớp Toán tin, Thời gian: 120 phút.

Không sử dụng tài liệu. Không sử dụng máy tính.

Yêu cầu: Lập luận rõ ràng, chi tiết tất cả khẳng định trong bài làm. Các kết luận chỉ ghi đáp án mà không giải thích sẽ không được tính điểm.

Câu 1. Cho hai phép thế α, β của nhóm đối xứng S_7 trong đó

$$\alpha = (1,5)(2,3,7)(4,6), \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Tính α^{100}. Tìm cấp và dấu của phép thế này.

b) Tìm các phép thế $x \in S_7$ sao cho $x\alpha = \beta$.

c) Tìm một phép thế $y \in S_7$ sao cho $y^2 = \beta$.

Câu 2. Nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ là nhóm các ma trận vuông khả nghịch $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, trong đó luật nhóm là phép nhân ma trận. [Lưu ý rằng điều kiện khả nghịch của ma trận tương đương với định thức của nó khác không.]

a) Liệt kê tất cả các phần tử của nhóm $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$. [Gợi ý: Có tất cả 16 ma trận vuông cỡ 2×2 với hệ số trên $\mathbb{Z}_2$. Tính định thức của tất cả ma trận vuông này.]

b) Chứng minh rằng nhóm $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ không phải là một nhóm xyclic.

Câu 3. Xét nhóm đối xứng S_3.

a) Chứng minh rằng các nhóm con thực sự của S_3 đều là nhóm xyclic. [Gợi ý: Sử dụng định lí Lagrange.]

b) Nhóm con H của S_3 sinh bởi phép thế sơ cấp $(1,3)$ có phải là một nhóm con chuẩn tắc của S_3 không? Vì sao?

Câu 4. Cho I là iđêan của vành đa thức $\mathbb{Z}_7[X]$ sinh ra từ hai đa thức $f(X) = X^3 + 6X^2 + 3$ và $g(X) = X^5 + 5X^4 + 4X^3 + X^2 + 5X + 4$.

a) Tìm một đa thức $h(X)$ sao cho $I = \langle h(X) \rangle$. [Gợi ý: Sử dụng phép chia Euclid với dư.]

b) Iđêan I của vành đa thức $\mathbb{Z}_7[X]$ có phải là một ideal nguyên tố hay không? Vì sao?

Câu 5. Chứng minh các khẳng định sau đây.

a) Tập con $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right] = \left\{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ là một trường con của $\mathbb{R}$.

b) Vành thương $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2 - 20 \rangle$ đẳng cấu với trường $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$.

Hết.