

Đại Học Quốc Gia Hà Nội
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên

Môn học: Đại số đại cương
Học kì 1 năm học 2020-2021

ĐỀ THI HỌC KÌ

Dành cho lớp Toán tin (MAT3450), Thời gian: 120 phút.

Không sử dụng tài liệu. Không sử dụng máy tính.

Yêu cầu: Lập luận rõ ràng, chi tiết tất cả khẳng định trong bài làm.

Câu 1. Trong nhóm đối xứng S_9 , cho phép thế

$$\alpha = (1, 3, 5, 4)(1, 6, 7, 2, 4)(2, 9, 7, 8).$$

a) Tìm cấp và dấu của α .

b) Tính α^{-2020} .

c) Tìm một phép thế $x \in S_9$ sao cho $\alpha x \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Câu 2. Xét nhóm $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ các số thực khác không với phép toán nhân và nhóm $(\mathbb{R}, +)$ các số thực với phép toán cộng.

a) Tìm tất cả các phần tử cấp hữu hạn trong nhóm $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

b) Chứng minh rằng nhóm $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ không đẳng cấu với nhóm $(\mathbb{R}, +)$.

Câu 3. Xét nhóm thay phiên A_4 bao gồm các phép thế chẵn trong nhóm đối xứng S_4 .

a) Chứng minh rằng nhóm A_4 không cyclic.

b) Nhóm con của A_4 sinh ra từ phép thế $(1, 2, 3)$ có là một nhóm con chuẩn tắc của A_4 không? Vì sao?

Câu 4. Trong vành đa thức $\mathbb{R}[X]$, cho $f(X) = 6X^6 + 11X^5 - 4X^4 - 12X^3 - 15X^2 + 59X - 51$ và $g(X) = 2X^5 - X^4 + X^3 - 7X^2 + 11X - 6$. Gọi I là ideal của $\mathbb{R}[X]$ sinh ra từ $f(X)$ và $g(X)$.

a) Tìm một đa thức $h(X)$ sinh ra ideal I .

b) Chứng minh rằng I là một ideal nguyên tố của vành $\mathbb{R}[X]$.

Câu 5. a) Chứng minh rằng vành thương $\mathbb{Z}[X]/(5, X)$ đẳng cấu với vành \mathbb{Z}_5 .

b) Ideal $(5, X)$ của vành đa thức $\mathbb{Z}[X]$ có phải là một ideal cực đại hay không? Vì sao?

Hết.