ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2019-2020

Môn thi: Đại số đại cương — Mã số môn học: MAT3300
Số đơn vị tín chỉ: 4 — Đề số: 1

Dành cho sinh viên ngành: Toán, Toán SP
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (3 điểm) Kí hiệu $\mathbb{Z}_n$ là nhóm trên tập $\{0, 1, ..., n-1\}$ với phép toán cộng lấy modulo n. Kí hiệu $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$.

(a) Xét phép toán nhân "$\times$" lấy modulo n. Hãy kiểm tra $(\mathbb{Z}_n^*, \times)$ có phải là một nhóm không?

(b) Những nhóm nào trong ba nhóm $(\mathbb{Z}_7^*, \times)$, $(\mathbb{Z}_8^*, \times)$, $(\mathbb{Z}_9^*, \times)$ là nhóm xyclic?

(c) Liệt kê tất cả các phần tử sinh của các nhóm xyclic trong câu b).

Câu 2: (2 điểm)

(a) Vành nào trong các vành đa thức $K[x]$ là miền chính, với $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

(b) Vành thương nào sau đây là trường: $\mathbb{Q}[x]/I$, với $I = (x^3+1)$ hoặc $I = (x^3+2)$. Trong trường hợp là trường, hãy tính phần tử nghịch đảo (đối với phép nhân) của phần tử $x + I$.

Câu 2: (5 điểm)

a) Hãy nêu định nghĩa đặc số của một vành. Hãy xác định đặc số của các vành sau: $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{25}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

b) Nếu đặc số của một trường khác 0, hãy chứng minh đặc số này phải là một số nguyên tố.

c) Chứng minh rằng mọi trường hữu hạn đều có số phần tử là lũy thừa của một số nguyên tố.

d) Chứng minh rằng luôn tồn tại trường hữu hạn có số phần tử bằng p^n với mọi số nguyên tố p và mọi số nguyên dương n.

e) Hãy xây dựng một trường có 9 phần tử.

- HẾT -