ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ
NĂM HỌC 2020-2021
——oOo——

Môn thi: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã học phần: **MAT1090** Số tín chỉ: **3** Đề số: **1**

Dành cho sinh viên khoá: **K65** Ngành học:

Thời gian làm bài: **90 phút** (không kể thời gian phát đề).

(Sinh viên **không** *được sử dụng tài liệu. Bài làm chỉ ghi kết quả mà không có giải thích sẽ không được tính điểm. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm. Đề gồm 4 câu.)*

Câu 1. (2,5 điểm) Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Tìm các giá trị của a để hệ có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm đó.

Câu 2. (2,5 điểm) Cho $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}_3$, trong đó

$$u_1 = (1,2,1), \quad u_2 = (1,-1,2), \quad u_3 = (1,1,2),$$

$$u'_1 = (2,0,-1), \quad u'_2 = (-3,1,1), \quad u'_3 = (-5,1,3).$$

(1) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

(2) Cho $v \in \mathbb{R}_3$ có tọa độ trong cơ sở B' là $(1,3,-2)$. Tìm v và tọa độ của nó trong cơ sở B.

Câu 3. (2,5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2 + x_3,\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3,\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3).$$

(1) Tìm ma trận của T trong cơ sở chính tắc $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

(2) Tìm một cơ sở và số chiều của $\mathrm{Ker}(T)$. Tìm số chiều của $\mathrm{Im}(T)$.

Câu 4. (2,5 điểm) Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) Tìm tất cả các giá trị riêng và các véctơ riêng của A.

(2) Tìm một ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ có dạng đường chéo. Tìm dạng đường chéo đó.

(3) Cho C là đường cong trong mặt phẳng gồm các điểm có cặp tọa độ đề các (x_1, x_2) thỏa mãn

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -6.$$

Hãy nhận dạng đường cong C.

HẾT