ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN
HỌC KỲ 1, NĂM HỌC 2022-2023

Môn thi: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã môn học: PHY1010 TNL — Số tín chỉ: 05 — **Đề số: 1**

Dành cho sinh viên chương trình CNKHTN ngành Vật lý (K67)

Thời gian làm bài thi: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

———o0o———

Bài số 1 *(2.0 đ)* Giả sử $n \geq 1$ là số tự nhiên cho trước. Gọi $V = M(n, \mathbb{R})$ là không gian véc tơ gồm tất cả các ma trận thực vuông $n \times n$ trên trường số thực. Gọi W là tập hợp con của V bao gồm tất cả các ma trận phản đối xứng $A = -A^T$.

(a) CMR W là không gian con của V.

(b) Xác định số chiều của không gian W. Cho ví dụ hệ cơ sở của W.

Bài số 2 *(2.0 đ)* Trường $\mathbb{Z}_5$ là tập hợp các số nguyên $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ với phép cộng modulo 5, nhân modulo 5.

Trong bài này, trường số $\mathbb{K}$ là $\mathbb{Z}_5$, và $V = P_{100}^{\mathbb{K}}[x]$ là không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$ gồm tất cả các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 100, biến x, với các hệ số đa thức thuộc $\mathbb{K}$.

Ánh xạ $T : V \to V$ là ánh xạ lấy đạo hàm $T = \frac{d}{dx}$, tức là $T(f) = f'$.

(a) Xác định số chiều của hạt nhân $Ker(T)$ và không gian ảnh $R(T)$.

(b) Cho ví dụ hệ cơ sở của các không gian con $Ker(T)$ và $R(T)$.

Bài số 3 *(3.0 đ)* Cho ma trận vuông

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính ma trận dạng chuẩn Jordan của A và ma trận P khả đảo đưa A về dạng chuẩn Jordan.

(b) Tính $B = A^n$ với n là số tự nhiên. Biểu diễn các phần tử của ma trận B bằng các công thức tường minh.

Bài số 4 *(1.0 đ)* Giả sử V là không gian Unita hữu hạn chiều, W là không gian con của V. Ký hiệu $W^{\perp}$ là không gian con trực giao của W. Hãy xác định mối liên hệ giữa ba không gian véc tơ con $W, W^{\perp}, (W^{\perp})^{\perp}$.

Bài số 5 *(2.0 đ)* Giả sử $F : V \to V$ là tự đồng cấu không gian véc tơ V hữu hạn chiều. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên $k \geq 1$ sao cho V là tổng trực tiếp của hạt nhân và ảnh của đồng cấu F^k, tức là $V = Ker(F^k) \bigoplus R(F^k)$.

Ánh xạ $F^k = F \circ F \circ \cdots \circ F$ là hợp k lần ánh xạ F.

———

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.