

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

ĐỀ THI HỌC KỲ
Học kỳ I, năm học 2022-2023

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã học phần: MAT1090

Thời gian làm bài: 90 phút.

Yêu cầu:

- Sinh viên không được sử dụng tài liệu dưới mọi hình thức.
- Sinh viên được phép sử dụng máy tính bỏ túi, nhưng máy tính bỏ túi chỉ hỗ trợ các phép tính trên các con số và giải các phương trình đa thức.
- Sinh viên không được sử dụng máy tính bỏ túi để giải hệ phương trình tuyến tính, tính định thức, ...
- Các tính toán không giải thích đều không được tính điểm.

Câu 1. Cho ma trận vuông khả nghịch cỡ 5×5

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 4 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Gọi α là định thức của A .

- (a) Tính theo α định thức của các ma trận A^{-1} và $2A^3$.
- (b) Tìm α .

Câu 2. Cho ma trận vuông cỡ 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

- (a) Ma trận A có khả nghịch hay không? Nếu A khả nghịch, tính ma trận nghịch đảo A^{-1} .
- (b) Sử dụng ý trên, hoặc cách khác, giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 4x_1 & + 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Câu 3. Cho ma trận vuông cỡ 3×3

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -5 & -4 & 11 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Tìm các giá trị riêng của ma trận A .
 (b) Ma trận A có chéo hoá được hay không?
 (c) Sử dụng ý trên, hoặc cách khác, chứng minh rằng $\lambda = 4$ là một giá trị riêng của ma trận A^2 .

Câu 4. Sinh viên chọn một trong hai phần sau đây.

Phần 4A. Cho đường cong bậc hai

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}(x + 2y) - 32 = 0.$$

- (a) Tìm ma trận thực đối xứng A cỡ 2×2 sao cho

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- (b) Chéo hóa trực giao ma trận A .
 (c) Hãy đưa đường cong bậc hai trên về dạng chính tắc rồi vẽ đường cong bậc hai này.

Phần 4B. Cho dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ với $a_1 = 3, a_2 = -1$ và

$$a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$$

với mọi $n \geq 3$.

- (a) Xét dãy véc tơ $v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$ với $n = 1, 2, 3, \dots$. Tìm ma trận A cỡ 2×2 sao cho

$$v_n = Av_{n-1}$$

với mọi $n \geq 1$.

- (b) Tính lũy thừa A^k của ma trận A .
 (c) Tìm công thức tổng quát của dãy số $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Câu 5. Cho các véc tơ

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

của không gian véc tơ \mathbb{R}^4 trang bị tích vô hướng thông thường. Gọi W là bao tuyến tính của hệ véc tơ v_1, v_2, v_3 , nói cách khác, W là không gian con của \mathbb{R}^4 sinh ra từ hệ véc tơ v_1, v_2, v_3 .

- (a) Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ v_1, v_2, v_3 .
 (b) Tìm hình chiếu vuông góc x_W của x trên không gian con W .
 (c) Véc tơ x có thuộc không gian con W hay không? Vì sao?

Hết.