

Đại học Quốc Gia Hà Nội

ĐỀ THI HỌC KỲ I, NĂM HỌC 2017-18

Môn thi: Đại số Tuyến tính

Đề thi Chính thức

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)
Thí sinh không được dùng bất kỳ loại máy tính nào.

Câu 1. Định nghĩa các khái niệm sau đây:

- (a) Cơ sở của một không gian vectơ;
- (b) Cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}$ -không gian vectơ $\mathbb{K}^n$;
- (c) Ma trận của một ánh xạ $\mathbb{K}$ -tuyến tính $\varphi : V \rightarrow W$ đối với cặp gồm một cơ sở của không gian V và một cơ sở của không gian W , trong đó V và W là các không gian vectơ trên trường $\mathbb{K}$;
- (d) Cho ma trận $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$. Xét ánh xạ tuyến tính

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

trong đó v phải là tích của ma trận A với vectơ cột có các thành phần $x_1, \dots, x_n$. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính đó đối với cặp gồm cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^n$ và cơ sở chính tắc của $\mathbb{K}^m$.

Câu 2. Phát biểu và chứng minh khẳng định về mối liên hệ giữa số chiều của hạt nhân, số chiều của ảnh, và số chiều của miền xác định của một đồng cấu tuyến tính giữa hai không gian vectơ.

Câu 3. Tìm số chiều của ảnh của ánh xạ tuyến tính $f : V \rightarrow W$ xác định bởi ma trận sau đây đối với một cặp cơ sở nào đó, một cái của V và một cái của W :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Câu 4. Tính định thức sau đây

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$