

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II
NĂM HỌC 2015 - 2016

Môn thi: GIẢI TÍCH HÀM ỨNG DỤNG

Mã môn học: MAT2048 Số tín chỉ: 3 Đề số: 1
Dành cho sinh viên khóa: Khóa K59 Ngành: Toán Cơ

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Định nghĩa không gian tuyến tính định chuẩn $(X, \|\cdot\|)$. Cho $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ là 2 chuẩn trên \mathbb{R}^n , chứng minh $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ là 2 chuẩn tương đương với nhau.

Câu 2. Định nghĩa không gian tiền Hilbert thực. Cho H là không gian tiền Hilbert thực với tích vô hướng (\cdot, \cdot) , ta định nghĩa $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in H$. Chứng minh rằng

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Câu 3. Cho $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, trong đó $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x = (x_1, x_2)$ và

$$Tx = (2x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

Chứng minh rằng T là các toán tử tuyến tính liên tục và tìm $\|T\|$.

b. Cho $A : (C[0, 2], \|\cdot\|_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$, trong đó $\|x\|_{\max} = \max_{t \in [0, 2]} |x(t)|$ và

$$Ax = 3x(0) - \int_0^2 x(t) dt, \quad x \in C[0, 2].$$

Chứng minh rằng A là các phiếm hàm tuyến tính liên tục và tìm $\|A\|$.

Câu 4. Cho $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$. Ta xác định

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \text{với } x, y \in l_2.$$

a. Chứng minh rằng $(l_2, (\cdot, \cdot))$ là không gian Hilbert thực.

b. Tìm toán tử liên hợp A^* của toán tử A trong l_2 nếu

$$A : l_2 \rightarrow l_2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \rightarrow (0, 0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots)$$

Hết

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.