

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ
NĂM HỌC 2022-2023

Môn thi: Giải tích số (MAT2404)

Thời gian làm bài: 120 phút

Đề thi gồm 02 trang

Câu 1.

Cho phương trình $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

- (a) Chứng minh rằng: trong đoạn $[1, 2]$, phương trình trên có duy nhất một nghiệm x^* .
- (b) Khảo sát điều kiện hội tụ của phép lặp đơn $x_{n+1} = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$ với $x_0 \in [1, 2]$.
- (c) Cho $x_0 = 1$, xác định số phép lặp n cần thiết để $|x_n - x^*| \leq 10^{-4}$.

Câu 2.

Cho hệ phương trình $Ax = b$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 14 \\ 3 & 14 & 62 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 28 \\ -31 \end{pmatrix}$. Giải hệ trên

bằng phương pháp phân tích Cholesky.

Câu 3.

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{aligned} 5x_1 & - 3x_2 & = 7 \\ -x_1 & + 5x_2 & = 12 \\ 2x_2 & - 4x_3 & = 3 \end{aligned}$$

- (a) Viết công thức lặp Jacobi cho hệ trên và kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp.
- (b) Cho $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, tính $x^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$. Đánh giá sai số tiên nghiệm và hậu nghiệm cho nghiệm xấp xỉ $x^{(3)}$ theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$.
- (c) Viết công thức lặp Gauss-Seidel. Với $x^{(0)}$ ở phần trên tính $x^{(1)}$ bằng phương pháp Gauss-Seidel.

Câu 4.

Cho $\{(-2, 1), (-1, 0), (0, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ là các cặp biến-giá trị (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, 4$ của hàm số $y = f(x)$. Tìm đa thức xấp xỉ bình phương tối thiểu của f có dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ theo các bước sau:

- (a) Viết lại tổng bình phương sai số tại các mốc x_i , $i = 0, 1, \dots, 4$ dưới dạng $\|b - Ax\|_2^2$, với A, b, x là các ma trận thích hợp.
- (b) Sử dụng phương pháp phân tích QR rút gọn của ma trận A , hãy tìm x sao cho $\|b - Ax\|_2^2$ nhỏ nhất.

Câu 5.

Cho bài toán Cauchy

$\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x^2+2y+1}, & x \geq 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Viết công thức hình thang hiện và áp dụng để tính y_1, y_2 với bước lưới $h = 0.1$.

$$x_i = x_0 + h \cdot i$$

$$x_1 = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1$$

$$x_2 = 1 + 0,1 \cdot 2 = 1,2$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y$$

$$\frac{1}{2} \cdot f(x_n, y_n) = y_n + f(x_n, y_n)$$

$$= y_0 + f(x_0, y_0)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot 0,1$$

$$2 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot ($$

Chú ý: Các kết quả tính toán được lấy qui tròn đến 5 chữ số sau dấu phẩy. Cán bộ coi thi không cần giải thích gì thêm.