

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ
NĂM HỌC 2021-2022

Môn thi: Giải tích số (MAT2034 CLCMTKHTT 1)

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. Cho phương trình $x^5 + 10x - 2 = 0$.

- (a) Chứng minh rằng: phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x^* trong đoạn $[0, 1]$.
 (b) Khảo sát điều kiện hội tụ của phép lặp đơn $x_{n+1} = \frac{1}{10}(2 - x^5)$ với $x_0 \in [0, 1]$.
 (c) Cho $x_0 = 0$, xác định số phép lặp n cần thiết để $|x_n - x^*| \leq 10^{-4}$.

Câu 2. Cho hệ phương trình $Ax = b$ với $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 14 \\ 3 & 14 & 62 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 28 \\ -31 \end{pmatrix}$. Giải hệ trên bằng phương pháp phân tích Cholesky.

Câu 3. Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + 5x_2 &= 12 \\ 2x_2 - 7x_3 &= 3 \end{aligned}$$

- (a) Viết công thức lặp Jacobi cho hệ trên và kiểm tra điều kiện hội tụ của phương pháp.
 (b) Cho $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, tính $x^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$. Đánh giá sai số tiên nghiệm và hậu nghiệm cho nghiệm xấp xỉ $x^{(3)}$ theo chuẩn $\|\cdot\|_\infty$.

Câu 4. Cho $\{(-3, -1), (-1, 0), (0, 2), (1, 3), (3, 3)\}$ là các giá trị (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, 4$ của hàm số $y = f(x)$. Tìm đa thức bình phương tối thiểu của f có dạng $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ theo các bước sau:

- (a) Viết lại tổng bình phương sai số tại các mốc x_i , $i = 0, 1, \dots, 4$ dưới dạng $\|b - Ax\|_2^2$, với A, b, x là các ma trận thích hợp.
 (b) Sử dụng phương pháp phân tích QR rút gọn của ma trận A , hãy tìm x sao cho $\|b - Ax\|_2^2$ nhỏ nhất.

Câu 5. Cho bài toán Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy^2, & x \geq 1, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Viết công thức hình thang hiện và áp dụng để tính y_1, y_2 với cùng bước lưới $h = 0.1$.

Chú ý: Các kết quả tính toán được lấy qui tròn đến 5 chữ số sau dấu phẩy. Cán bộ coi thi không cần giải thích gì thêm.