

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI GIỮA KỲ
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn thi: LÝ THUYẾT ĐỘ ĐO VÀ TÍCH PHẦN

Mã môn học: MAT

Số tín chỉ: 3

Đề số: 3

Dành cho sinh viên khóa: Khóa K63

Ngành: Toán học

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Trong đề này, ta kí hiệu \mathcal{H} là ngày sinh của bạn, \mathcal{K} là tháng sinh của bạn.

Câu 1. Định nghĩa độ đo ngoài. Cho \mathcal{L} là lớp tất cả các tập m^* -đo được, với m^* là độ đo ngoài trên X . Chứng minh rằng \mathcal{L} là một đại số trên X và $m = m^*|_{\mathcal{L}}$ là một độ đo trên X .

Câu 2. a. Định nghĩa độ đo. Chứng minh rằng độ đo là một hàm liên tục đơn điệu tăng, tức là nếu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy tăng các tập hợp $A_n \subset A_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) và $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ thì

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

b. Cho (X, \mathcal{A}, m) là một không gian đo với $m(X) < \infty$ và f là một hàm đo được hữu hạn hầu khắp nơi. Chứng minh rằng tồn tại một tập $B \in \mathcal{A}$ sao cho f bị chặn trên B và $m(B^c) < \frac{1}{4+\mathcal{H}}$.

Câu 3. Định nghĩa đại số. Tìm đại số trên X sinh bởi họ các tập con M biết

a. $X = \{\mathcal{K}, \mathcal{K} + 1, \mathcal{K} + 2, \mathcal{K} + 6\}$ và $M = \{\{\mathcal{K} + 1\}, \{\mathcal{K}, \mathcal{K} + 1, \mathcal{K} + 2\}\}$.

b. $X = \{\mathcal{H}, \mathcal{H} + 1, \mathcal{H} + 2, \mathcal{H} + 6\}$ và $M = \{\{\mathcal{H}\}, \{\mathcal{H}, \mathcal{H} + 1\}\}$.

Câu 4. Cho $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Hỏi m có phải độ đo không? trong đó

a.

$$m(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} & \text{nếu } A \text{ có hữu hạn phần tử} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ có vô hạn phần tử} \\ 0 & \text{nếu } A = \emptyset \end{cases}$$

b.

$$m(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} \mathcal{H}^{-n} \ln \frac{n+7}{n} & \text{nếu } A \text{ có hữu hạn phần tử} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ có vô hạn phần tử} \\ 0 & \text{nếu } A = \emptyset \end{cases}$$

Câu 5. a. Cho $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đo được. Hàm g_1 có đo được không? trong đó

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } g(x) > 2, \\ -5x + 1 & \text{nếu } g(x) \leq 2. \end{cases}$$

b. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hàm f có đo được không? biết

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{nếu } x \geq 2, \\ 8x + 1 & \text{nếu } x < 2. \end{cases}$$