

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2020-2021

—oOo—

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: MAT3365

Số tín chỉ: 3

Đề số: 1

Dành cho sinh viên lớp: Lớp MAT3365

Ngành học: Toán Tin

Thời gian làm bài 60 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét phương trình sau:

$$xu_x(x, y) + (1 + y^2)u_y(x, y) + xu = x^2, x > 0, y > 0.$$

- (a) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- (b) Tìm a, b để phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn $u(x, y) = ax + b + 2e^{-x}$ khi $\ln(x) - \arctan(y) = 0$. Khi đó hãy viết ra hai nghiệm và kiểm tra lại chúng.

Câu 2. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t) & \text{khi } 0 < x < 2, t > 0, \\ u_x(0, t) = \varphi(t), u_x(2, t) = \psi(t) & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{khi } 0 \leq x \leq 2, \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{khi } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh bài toán đang xét có tối đa một nghiệm.
- (b) Cho $F(x, t) = 0$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ và $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. Thác triển chẵn, tuần hoàn chu kỳ 4 các điều kiện ban đầu. Xác định sóng tiến, sóng lùi của bài toán trên. Vẽ đồ thị $u(x, t)$ tại các thời điểm $t = 1/4, 1/2, 1, 7/2$.
- (c) Cho $F(x, t) = t \cos^2(\pi x)$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$ và $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. Dùng phương pháp tách biến giải bài toán đã cho.

Câu 3. Giải bài toán giá trị ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 4u_{xx}(x, t) & \text{khi } -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \chi_{[-1,2]}(x) & \text{khi } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Thang điểm. Câu 1: 2đ+3đ. Câu 2: 1đ+3đ+4.5đ. Câu 3: 1.5đ.