

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2020-2021

—oOo—

Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng

Mã môn học: MAT3365

Số tín chỉ: 3

Đề số: 3

Dành cho sinh viên lớp: Lớp MAT3365

Ngành học: Toán Tin

Thời gian làm bài 60 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$\begin{cases} u(x, y)u_x(x, y) + yu_y(x, y) = -4x & \text{khi } -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty, \\ u(x, 1) = 0 & \text{khi } -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

- (a) Kiểm tra điều kiện hoành cho bài toán đang xét.
(b) Giải bài toán đã cho. Kiểm tra lại nghiệm tìm được.

Câu 2. Xét phương trình cấp 2 sau:

$$\cos^2(y) u_{xx}(x, y) + 2 \sin(y) u_{xy}(x, y) - u_{yy}(x, y) + \cos(y) u_x(x, y) = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Xác định loại và chuyển phương trình đã cho về dạng chính tắc.
(b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
(c) Tìm nghiệm $u(x, y)$ của phương trình đã cho thỏa mãn

$$u(x, 0) = x^2, u_y(x, 0) = 2x \text{ khi } x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền nhiệt sau:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 3u_{xx}(x, t) - 6u_x(x, t) + e^x \sin(x) & \text{khi } 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = xe^x & \text{khi } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng bài toán đã cho có tối đa một nghiệm.
(b) Tìm các hằng số α, β để hàm $v(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} u(x, t)$ thỏa mãn phương trình

$$v_t(x, t) = 3v_{xx}(x, t) + e^{-3t} \sin(x), 0 < x < \pi, t > 0.$$

Khi đó $v(x, t)$ thỏa mãn bài toán nào?

- (c) Giải bài toán đã cho.

Thang điểm. Câu 1: 0.5đ+3đ. Câu 2: 2.5đ+1đ+1.5đ. Câu 3: 1.5đ+2.5đ+2.5đ.