

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ II  
NĂM HỌC 2020-2021

—oOo—

**Môn thi: Phương trình vi phân đạo hàm riêng**

Mã môn học: MAT3365

Số tín chỉ: 3

Đề số: 5

Dành cho sinh viên lớp: **Lớp MAT3365**

Ngành học: **Toán Tin**

Thời gian làm bài **60 phút** (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1.** Xét bài toán Cauchy cho phương trình cấp 1 sau:

$$u_t(x, t) + (1 - 2u(x, t))u_x(x, t) = 0 \text{ khi } 0 < x < \infty, t > 0,$$

với điều kiện Cauchy  $u(x, 0) = 1/3$  khi  $x > 0$ , và  $u(0, t) = 0$  khi  $t > 0$ .

- Vẽ các đường đặc trưng của bài toán đã cho. Xác định vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua và vùng sốc. Giải nghiệm  $u(x, t)$  trong vùng chỉ có một đường đặc trưng đi qua.
- Dùng điều kiện Rankine-Hugoniot tính vận tốc sốc. Từ đó xác định đường sốc và giải nghiệm  $u(x, t)$ . Vẽ đồ thị của  $u(x, t)$  tại các thời điểm  $t = 0, 1, 2$ .

**Câu 2.** Xét phương trình cấp 2 sau:

$$u_{xx}(x, y) + 2y \sin x u_{xy}(x, y) + y^2 \sin^2 x u_{yy}(x, y) + y(\sin^2 x + \cos x) u_y(x, y) = \cos x,$$

với  $0 < x < \pi, y > 0$ .

- Xác định loại và chuyển phương trình đã cho về dạng chính tắc.
- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.
- Tìm  $a, b$  để phương trình đã cho có nghiệm  $u(x, y)$  thỏa mãn  $u(x, y) = ax + b \cos x$  khi  $\ln y + \cos x = 0$ . Khi đó hãy viết ra hai nghiệm và kiểm tra lại chúng.

**Câu 3.** Xét bài toán biên-ban đầu cho phương trình truyền sóng sau:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - u(x, t) + F(x, t) & \text{khi } 0 < x < 2, t > 0, \\ u_x(0, t) = 2, u(2, t) = e^2 + 1 & \text{khi } t \geq 0, \\ u(x, 0) = e^x + 1, u_t(x, 0) = \cos^3(\pi x/4) & \text{khi } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- Chứng minh rằng bài toán đã cho có tối đa một nghiệm.
- Cho  $F(x, t) = 1$ . Tìm  $v(x)$  thỏa mãn  $v''(x) - v(x) + 1 = 0$  và  $v'(0) = 2, v(2) = e^2 + 1$ . Khi đó  $w = u - v$  thỏa mãn bài toán nào. Từ đó giải bài toán biên-ban đầu đã cho.

Thang điểm. Câu 1: 2đ+1.5đ. Câu 2: 2.5đ+1đ+3đ. Câu 3: 1đ+4đ.