

Học phần: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Mã học phần: MAT2314

Số tín chỉ: 4

Đề số: 1

Dành cho sinh viên hệ: Chính quy Ngành: Sư phạm Toán

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

HATI

Câu 1. Giải các phương trình vi phân sau

a) $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6,$

c) $(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0.$

Câu 2. Cho A là ma trận thực cỡ $n \times n$. Ta định nghĩa $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Chứng minh rằng $U(t) = e^{tA}$ là ma trận cơ bản chuẩn tắc của $y'(t) = Ay(t)$.

Câu 3a) Tìm nghiệm của hệ vi phân tuyến tính

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -4x_1 + 10x_2 + 5x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1 + 2x_2 + 2x_3. \end{cases} \quad X(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1-5t \\ -2t \\ -t \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 5t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

b) Tính ma trận cơ bản, ma trận tiền hóa của hệ trên.

$X(t) = (x_1(t) | x_2(t) | x_3(t))$

Câu 4. Hệ vi phân sau đây mô tả quá trình trao đổi chất dinh dưỡng giữa mẹ và thai nhi trong nhau thai

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dx} = -a_1(c_1 - c_2) \\ \frac{dc_2}{dx} = -a_2(c_1 - c_2), \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = D_1 + c_2 \frac{a_2}{a_1 - a_2} \\ c_2 = D_1 + c_1 \frac{a_1}{a_2 - a_1} \end{cases}$$

trong đó $c_1(x)$ và $c_2(x)$ tương ứng là nồng độ chất dinh dưỡng trong máu của mẹ và trong máu của thai nhi ở khoảng cách x trong màng nhau thai; $a_1, a_2 > 0$ là các hằng số tỷ lệ.

a) Hãy giải hệ trên biết các nồng độ $c_1(0), c_2(0)$.

b) Kết luận rằng nếu $c_1(0) = c_2(0)$ thì $c_1(x) = c_2(x)$; nếu $c_1(0) > c_2(0)$ thì $c_1(x) > c_2(x)$ với mọi $x \in [0, L]$ ($L > 0$ là độ dài của màng nhau thai). Nêu ý nghĩa sinh học của kết luận này.

Hết

Ghi chú: Sinh viên không được dùng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.