

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI KÌ

Môn: Tối ưu hóa

Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1 (1 điểm).** Một nhà đầu tư có 2 tỉ đồng, muốn đầu tư vào 4 lĩnh vực chứng khoán, công trái, gửi tiết kiệm và bất động sản. Biết lợi nhuận hàng năm của các lĩnh vực đầu tư này lần lượt là 20%, 12%, 10% và 15%. Ngoài ra để giảm thiểu mức rủi ro, nhà đầu tư cho rằng không nên đầu tư vào chứng khoán vượt quá 40% tổng vốn đầu tư và tổng vốn đầu tư vào công trái và gửi tiết kiệm phải ít nhất là 25%. Nhà đầu tư mong muốn có lợi nhuận cao nhất. Hãy giúp nhà đầu tư mô hình hóa các yêu cầu này dưới dạng một bài toán quy hoạch tuyến tính.

**Câu 2 (1.5 điểm).** Hãy phát biểu định lý về độ lệch bù cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tắc. Hãy chứng minh rằng nếu ta có một nghiệm chấp nhận được của bài toán gốc (dạng chuẩn tắc) và một nghiệm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu thỏa mãn điều kiện về độ lệch bù thì chúng là nghiệm tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu.

**Câu 3 (2.5 điểm).** Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

a) (1đ). Hãy viết bài toán đối ngẫu của bài toán trên.

b) (1.5đ). Hãy sử dụng định lý về độ lệch bù kiểm tra xem  $(\frac{9}{7}, 0, \frac{1}{7})$  có phải là nghiệm tối ưu của bài toán trên hay không.

**Câu 4 (2.5 điểm).** Hãy giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau sử dụng thuật toán đơn hình hai pha

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \leq 3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leq -2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

**Câu 5 (2.5 điểm).** Cho hàm số  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2xy - 8x + 2y + 4$ .

a) (1.5đ). Hãy tìm một nghiệm cực tiểu toàn cục của  $f$ . Hãy giải thích xem tại sao nghiệm tìm được là nghiệm toàn cục.

b) (1đ). Hãy thực hiện 2 bước của thuật toán giảm gradient với điểm xuất phát  $(\frac{7}{8}, 0)^T$  và độ dài bước  $\lambda = \frac{1}{4}$ .

Chú ý: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm