

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2022-2023
—oOo—

Môn thi: Toán rời rạc
Số tín chỉ: 4 Đề số: 1
Mã môn học: MAT3500
Lớp học phần: MAT3500 2, MAT3500 3 Ngành học: KHMT&TT
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 6 câu/2 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 70% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (1 điểm) Một tập các toán tử logic C được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi mệnh đề phức hợp có một mệnh đề phức hợp tương đương logic với nó chỉ sử dụng các toán tử logic trong C . Để thấy $C = \{\neg, \wedge\}$ là một tập các toán tử logic đầy đủ, với hai mệnh đề p, q , hãy tìm các mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử logic trong C và tương đương logic với

- (a) $p \vee q$ (c) $p \rightarrow q$
(b) $p \oplus q$ (d) $p \leftrightarrow q$

Câu 2. (1 điểm) Với một tập hợp A bất kỳ, gọi $\mathcal{P}(A)$ là tập hợp tất cả các tập con của A .

- (a) Với các tập A, B bất kỳ, chứng minh rằng $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
(b) Nếu thay \cap bằng \cup thì phát biểu ở phần (a) còn đúng hay không? Tại sao?

Câu 3. (2 điểm)

- (a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $a_1 = 23^{2023} \pmod 3$, $a_2 = 23^{2023} \pmod 7$, và $a_3 = 23^{2023} \pmod{11}$.
(b) Tìm số nguyên x thỏa mãn $0 \leq x < 231$ và

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{3} & 2 & & (1) \\ x &\equiv a_2 \pmod{7} & 2 & & (2) \\ x &\equiv a_3 \pmod{11} & 1 & & (3) \end{aligned}$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $23^{2023} \pmod{231}$. (Chú ý rằng $231 = 3 \times 7 \times 11$.)

Câu 4. (3 điểm)

- (a) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số?
(b) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số chia hết 5?

- (c) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số không chia hết cho 5?
- (d) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 hoặc hai chữ số cuối là 00?
- (e) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có chứa 111111 (chuỗi 6 chữ số 1 liên tiếp)?
- (f) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ít nhất hai chữ số giống nhau?

Câu 5. (1 điểm) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng có $n \geq 2$ đỉnh.

- (a) Chứng minh rằng không tồn tại đồng thời hai đỉnh phân biệt u, v thỏa mãn $\deg_G(u) = 0$ và $\deg_G(v) = n - 1$.
- (b) Chứng minh rằng nếu với mọi $v \in V$ ta có $\deg_G(v) \geq n/2$ thì G là một đồ thị liên thông.

Câu 6. (2 điểm)

- (a) Đồ thị C_n ($n \geq 3$) có bao nhiêu cạnh? Đồ thị Q_n ($n \geq 1$) có bao nhiêu cạnh?
- (b) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng. Chứng minh rằng nếu G có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u và v thì có một đường đi trong G giữa u và v .