Đại Học Quốc Gia Hà Nội
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên

Môn học: ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG
Học kì 1 năm học 2018-2019

ĐỀ THI HỌC KÌ

Dành cho lớp: K61 Toán tin,

Mã học phần: MAT3450, Thời gian làm bài: 120 phút.

Không sử dụng tài liệu.

Câu 1 (1 điểm)**.** Tích trực tiếp $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ có phải là một nhóm xyclic? Vì sao?

Câu 2 (2 điểm)**.** Cho hai phép thế trong S_5:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm cấp, dấu của phép thế α và tính α^{2019}.

(b) Tìm phép thế x trong S_5 sao cho $\alpha x = \beta$.

Câu 3 (3 điểm)**.** Xét nhóm thay phiên A_4 bao gồm các phép thế chẵn trong nhóm đối xứng S_4. Chứng minh các khẳng định sau đây.

(a) Tập con $V_4 = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ của A_4 là một nhóm con chuẩn tắc.

(b) Nhóm thương A_4/V_4 đẳng cấu với nhóm cyclic $\mathbb{Z}/3$.

Câu 4 (2 điểm)**.** Cho $I \neq \{0\}$ là một iđêan của vành đa thức $\mathbb{Q}[X]$.

(a) Gọi $f(X) \in I$ là một đa thức khác không có bậc nhỏ nhất có thể. Chứng minh rằng $I = \langle f(X) \rangle$.

(b) Giả sử $I = \langle X^6 + X^5 + 2X^3 + X - 2, X^4 + 2X^3 + X^2 - 1 \rangle$. Tìm một đa thức $f(X)$ sao cho $I = \langle f(X) \rangle$.

Câu 5 (2 điểm)**.** Xét vành đa thức $\mathbb{Q}[X,Y]$ và iđêan $\langle X^2+1, Y-2 \rangle$ của $\mathbb{Q}[X,Y]$.

(a) Chứng minh rằng $\mathbb{Q}[X,Y]/\langle X^2+1, Y-2 \rangle \cong \mathbb{Q}[\mathtt{i}]$ trong đó $\mathtt{i} \in \mathbb{C}$ là đơn vị ảo.

(b) iđêan $\langle X^2+1, Y-2 \rangle$ của vành đa thức $\mathbb{Q}[X,Y]$ có phải là một iđêan cực đại ? Vì sao?

Hết.

Đại Học Quốc Gia Hà Nội
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên

Đáp án ĐỀ THI HỌC KÌ

Môn học: ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG, Dành cho lớp: K61 Toán tin,
Học kì 1 năm học 2018-2019, Thời gian làm bài: 120 phút.

`Không sử dụng tài liệu.`

Câu 1 (1 điểm)**.** Tích trực tiếp $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ có phải là một nhóm xyclic? Vì sao?

Lời giải. Một phần tử x bất kì của $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ có dạng $x = (a + 2\mathbb{Z}, b + 4\mathbb{Z})$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Ta thấy

$$4x = 4(a + 2\mathbb{Z}, b + 4\mathbb{Z}) = (4a + 2\mathbb{Z}, 4b + 4\mathbb{Z}) = (0 + 2\mathbb{Z}, 0 + 4\mathbb{Z}).$$

Do đó, các phần tử của $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ có cấp không quá 4. Mặt khác, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ là một nhóm cấp 8. Do đó, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$ không phải một nhóm xyclic. □

Câu 2 (2 điểm)**.** Cho $\alpha, \beta \in S_5$ là hai phép thế sau đây

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Tìm cấp, dấu của phép thế α và tính α^{2019}.

(b) Giải phương trình $\alpha x = \beta$ trong S_5.

Lời giải. (a) Viết α dưới dạng tích các xích rời rạc

$$\alpha = (1, 3, 5)(2, 4).$$

Do đó, cấp của α là $\mathrm{lcm}(3, 2) = 6$ và dấu của α là $(-1)^{(3-1)+(2-1)} = -1$. Vì cấp của α là 6 nên

$$\alpha^{2019} = \alpha^{2019 \mod 6} = \alpha^3 = (2, 4).$$

(b) Ta có

$$\alpha x = \beta \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha^{-1}\beta \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

Câu 3 (3 điểm)**.** Xét nhóm thay phiên A_4 bao gồm các phép thế chẵn trong nhóm đối xứng S_4. Chứng minh các khẳng định sau đây.

(a) Tập con $V_4 = \{\mathrm{Id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ của A_4 là một nhóm con.

(b) V_4 là một nhóm con chuẩn tắc của A_4.

(c) Nhóm thương A_4/V_4 đẳng cấu với nhóm cyclic $\mathbb{Z}/3$.

Lời giải. Các phần tử của A_4 là

$$\mathrm{Id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 2, 4), (1, 4, 2).$$

(a) Lập bảng nhân của V_4.

(b) Ta thấy các lớp kề trái và kề phải của V_4 trong A_4 đều là

$$\begin{gathered}\{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}, \\ \{(1,2,3), (2,4,3), (1,4,2), (1,3,4)\}, \\ \{(1,3,2), (2,3,4), (1,2,4), (1,4,3)\}.\end{gathered}$$

Do đó, $V_4 \triangleleft A_4$.

(c) Nhóm thương A_4/V_4 có cấp bằng $|A_4| / |V_4| = 3$. Vì 3 là một số nguyên tố nên $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3$.

□

Câu 4 (2 điểm)**.** Cho $I \neq \{0\}$ là một iđêan của vành đa thức $\mathbb{Q}[X]$.

(a) Gọi $f(X) \in I$ là một đa thức khác không có bậc nhỏ nhất có thể. Chứng minh rằng $I = \langle f(X) \rangle$.

(b) Giả sử $I = \langle X^6 + X^5 + 2X^3 + X - 2, X^4 + 2X^3 + X^2 - 1 \rangle$. Tìm một đa thức $f(X)$ sao cho $I = \langle f(X) \rangle$.

Lời giải. (a) Ta cần phải chứng minh $\langle f(X) \rangle \subset I$ và $I \subset \langle f(X) \rangle$.

- Vì $f(X) \in I$ và I là một iđêan nên $\langle f(X) \rangle \subset I$.
- Lấy $g(X) \in I$ bất kì. Thực hiện phép chia Euclid $g(X)$ cho $f(X)$, ta được

$$g(X) = f(X)q(X) + r(X).$$

Vì $r(X) = f(X) - g(X)q(X)$ nên $r(X) \in I$. Từ cách chọn của $f(X)$ và $\deg r(X) < \deg f(X)$ suy ra $r(X) = 0$, tức là $g(X)$ chia hết cho $f(X)$. Vậy $g(X) \in \langle f(X) \rangle$.

(b) Đặt $F(X) = X^6 + X^5 + 2X^3 + X - 2$ và $G(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 - 1$. Khi đó, một đa thức $f(X)$ cần tìm là ước chung lớn nhất của $F(X)$ và $G(X)$. Thực hiện liên tiếp các phép chia Euclid, ta được

$$\begin{aligned} F(X) &= G(X)\left(X^2 - X + 1\right) + \left(X^3 - 1\right) \\ G(X) &= \left(X^3 - 1\right)(X + 2) + \left(X^2 + X + 1\right) \\ X^3 - 1 &= \left(X^2 + X + 1\right)(X - 1). \end{aligned}$$

Do đó, $f(X) = X^2 + X + 1$.

□

Câu 5 (2 điểm)**.** Xét vành đa thức $\mathbb{Q}[X, Y]$ và iđêan $\langle X^2 + 1, Y - 2 \rangle$ của $\mathbb{Q}[X, Y]$.

(a) Chứng minh rằng $\mathbb{Q}[X, Y] / \langle X^2 + 1, Y - 2 \rangle \cong \mathbb{Q}[\mathtt{i}]$ trong đó $\mathtt{i} \in \mathbb{C}$ là đơn vị ảo.

(b) iđêan $\langle X^2 + 1, Y - 2 \rangle$ của vành đa thức $\mathbb{Q}[X, Y]$ có phải là một iđêan cực đại ? Vì sao?

Lời giải. (a) Định nghĩa đồng cấu vành

$$\varphi : \mathbb{Q}[X, Y] \to \mathbb{C}, \quad f(X, Y) \mapsto f(\mathtt{i}, 2).$$

- Dễ thấy $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Q}[\mathtt{i}]$ và $\langle X^2 + 1, Y - 2 \rangle \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

- Tiếp theo, ta chứng minh $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \langle X^2+1, Y-2\rangle$. Lấy $f(X,Y) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ bất kì. Sử dụng liên tiếp các phép chia Euclid, ta được

$$f(X,Y) = (Y-2)q(X,Y) + r(X), \quad r(X) = \left(X^2+1\right)p(X) + (aX+b)$$

trong đó $q(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]$, $r(X), p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ và $a, b \in \mathbb{Q}$. Suy ra

$$f(X,Y) = (Y-2)q(X,Y) + \left(X^2+1\right)p(X) + (aX+b).$$

Vì $f(\mathtt{i},2) = 0$ nên $a\mathtt{i} + b = 0$, tức là $a = b = 0$. Do đó $f(X,Y) = (Y-2)q(X,Y) + (X^2+1)\,p(X) \in \langle X^2+1, Y-2\rangle$.

Vì đồng cấu vành φ có ảnh là $\mathbb{Q}[\mathtt{i}]$ và hạt nhân là $\langle X^2+1, Y-2\rangle$ nên, theo định lí đồng cấu Noether, đồng cấu φ cảm sinh đẳng cấu vành

$$\mathbb{Q}[X,Y]/\left\langle X^2+1, Y-2\right\rangle \cong \mathbb{Q}[\mathtt{i}], \quad f(X) + \left\langle X^2+1, Y-2\right\rangle \mapsto f(\mathtt{i},2).$$

(b) Vì vành $\mathbb{Q}[\mathtt{i}]$ là một trường nên theo khẳng định (a), vành thương $\mathbb{Q}[X,Y]/\langle X^2+1, Y-2\rangle$ là một trường. Như vậy, $\langle X^2+1, Y-2\rangle$ là một iđêan cực đại của $\mathbb{Q}[X,Y]$.

$\square$

Hết.