

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2018-2019

—oOo—

Môn thi: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã học phần: MAT1090

Số tín chỉ: 3

Đề số: 1

Dành cho sinh viên khoá: K63 Khoa Môi trường

Ngành học:

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Hướng dẫn: Sinh viên KHÔNG được sử dụng tài liệu. Bài làm chỉ ghi kết quả mà không có giải thích cụ thể sẽ không được tính điểm.

Câu 1. Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 7x_5 = a \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 = a^2 + 1. \end{cases}$$

- (i) Tìm tất cả các giá trị a sao cho hệ phương trình trên có nghiệm.
- (ii) Giải hệ phương trình tuyến tính trên với a là những giá trị tìm được ở (i).

Câu 2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- (i) Các ma trận A, B có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo của chúng.
- (iii) Giải phương trình $AX = B$ đối với ẩn là ma trận X .

Câu 3. Cho các vectơ $v_1 = (3, 1, -1, 3), v_2 = (-5, 1, 5, -7), v_3 = (1, 1, -2, 8)$.

- (i) Chứng minh rằng hệ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ độc lập tuyến tính.
- (ii) Xét không gian vectơ Euclid $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ trong đó $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ và $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn cho không gian con sinh bởi B .

Câu 4. Cho $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính được xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + 4x_2 - 2x_3, -3x_1 + 4x_2, -3x_1 + x_2 + 3x_3).$$

- (i) Tìm ma trận của T trong cơ sở chính tắc $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- (ii) Tìm tất cả các giá trị riêng của T .
- (iii) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ mà trong cơ sở này ma trận của T có dạng chéo, hãy tìm ma trận chéo đó.

Câu 5. Hãy đưa dạng toàn phương $Q(\alpha) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ về dạng chuẩn tắc bằng phương pháp Lagrange và tìm phép biến đổi tuyến tính tương ứng.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2018-2019
Môn thi: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã môn học: MAT1090

Số tín chỉ: 3

Đề số: 1

Dành cho sinh viên khoá: K63 Khoa Môi trường

Ngành học:

Câu 6. (1,5 điểm)

- (i) Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 - 2a + 1 = 0$ hay $a = 1$.
- (ii) Nghiệm của hệ $x_1 = 2x_3 + 13x_4 + x_5 - 3, x_2 = 5x_4 - x_5 - 1$ trong đó x_3, x_4, x_5 tùy ý.

Câu 7. (2,5 điểm)

- (i) $\det A = -2$ nên A khả nghịch, B không khả nghịch. Ta có $A^{-1} = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
- (ii) Ta có $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Câu 8. (2,5 điểm)

- (i) Chứng minh hệ phương trình $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- (ii) B độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của $\mathcal{L}(B)$. Dùng quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt cơ sở B :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = (3, 1, -1, 3) \\ u_2 = v_2 + 2u_1 = (1, 3, 3, -1) \\ u_3 = v_3 - \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = (-3, 1, 1, 3). \end{cases}$$

Chuẩn hóa cơ sở u_1, u_2, u_3 ta thu được cơ sở trực chuẩn cần tìm: $\frac{1}{2\sqrt{5}}u_1, \frac{1}{2\sqrt{5}}u_2, \frac{1}{2\sqrt{5}}u_3$

Câu 9. (2,5 điểm)

- (i) Ma trận của T trong cơ sở chính tắc: $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- (ii) Đa thức đặc trưng của A : $P_A(X) = |A - xE| = -(x-1)(x-2)(x-3)$. Vậy T có 3 giá trị riêng là 1, 2, 3.
- (ii) Cơ sở cần tìm là cơ sở gồm các véc tơ riêng của T :
- + Với $x = 1$ hệ $(A - E)X = 0$ có nghiệm $x_1 = x_2 = x_3$. Chọn $v_1 = (1, 1, 1)$.
 - + Với $x = 2$ hệ $(A - 2E)X = 0$ có nghiệm $x_1 = 2/3x_3, x_2 = x_3$. Chọn $v_2 = (2, 3, 3)$.

+ Với $x = 3$ hệ $(A - 3E)x = 0$ có nghiệm $x_2 = 3x_1, x_3 = 4x_1$. Chọn $v_3 = (1, 3, 4)$.

Khi đó v_1, v_2, v_3 là một cơ sở gồm các véc tơ riêng. Ma trận của T trong cơ sở này là $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Câu 10. (1 điểm) Ta có $Q = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2$.

Phép biến đổi tuyến tính không suy biến:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = 2x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + (1/2)y_2 - (3/2)y_3 \\ x_2 = (1/2)y_2 - (1/2)y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Hà nội, ngày 22 tháng 5 năm 2019
 NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
 (ký và ghi rõ họ tên)