

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI CUỐI HỌC KỲ I
NĂM HỌC 2015-2016
—oOo—

Môn thi: Giải tích 3

Mã môn học: **MAT 2304 1-2**

Số tín chỉ:

Đề số:

Dành cho sinh viên khoá: **K59SP**

Ngành học:

Thời gian làm bài **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1 (1,5 + 1,5 điểm). Phát biểu và chứng minh công thức tích phân trên miền tổng quát trong $\mathbb{R}^3$.

Áp dụng công thức này, tính tích phân 3 lớp sau:

$$I = \iiint_V (x+1)z dx dy dz,$$

trong đó $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 3, z \geq 0\}$.

Câu 2 (1,5 + 1,5 điểm). Phát biểu và chứng minh công thức Ostrogradski.

Áp dụng công thức này, tính tích phân mặt loại II sau:

$$I = \iint_{S^+} xz dy dz + yz dz dx + z^2 dx dy,$$

trong đó S^+ là biên của miền $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}$, $h > 0$, được định hướng ra ngoài.

Câu 3 (1 + 1 điểm). Tính tích phân đường loại I và loại II sau:

(a)

$$I = \int_L y ds,$$

trong đó L là nửa trên của đường Cardioid có phương trình trong hệ tọa độ cực là $r = 1 + \cos \varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.

(b)

$$I = \int_C y^2 dx + (x-1)^2 dy,$$

trong đó C là nửa trên đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 4$ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Câu 4 (1,5 + 1,5 điểm). Tính tích phân mặt loại I và loại II sau:

(a)

$$I = \iint_S z^2 dS,$$

trong đó S là phần mặt paraboloid hyperbolic $z = xy$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 3$.

(b)

$$I = \iint_{S^+} x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

trong đó S^+ là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ($a > 0$).

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu nào.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI CUỐI HỌC KỲ I, NĂM HỌC 2015-2016
Môn thi: Giải tích 3

Mã môn học: **MAT 2304 1-2**
Dành cho sinh viên khoá: **K59SP**

Số tín chỉ: _____
Ngành học: _____

Câu 1. Sách giáo trình.

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, D = \{(x, y) : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

$$I = \iint_D dx dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x+1)z dz = \frac{1}{2} \iint_D (x+1)(4-x^2-y^2) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 2. Sách giáo trình.

$$\Omega = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq h^2\}, D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq h^2\}.$$

$$I = \iiint_{\Omega} (z + z + 2z) dx dy dz = 4 \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz = 2 \iint_D (h^2 - (x^2 + y^2)) dx dy = \pi h^4.$$

Câu 3. (a) Phương trình tham số của đường cong L là

$$x(\varphi) = (1 + \cos \varphi) \cos \varphi, y(\varphi) = (1 + \cos \varphi) \sin \varphi, \varphi \in [0, \pi].$$

$$I = \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi = \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \frac{16}{5}.$$

(b) Phương trình tham số của C là

$$x(t) = 1 + 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t, t \in [0, \pi].$$

$$I = 8 \int_0^\pi (\cos^3 t - \sin^3 t) dt = -\frac{32}{3}.$$

Câu 4. (a)

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}, S = (x, y, z) : z = xy, (x, y) \in D.$$

$$I = \int_D x^2 y^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{1 + r^2} r dr d\varphi = \frac{212\pi}{105}.$$

(b)

$$I = 4\pi a^3.$$

Hà nội, ngày 25 tháng 12 năm 2015
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

TS. Phạm Trọng Tiến