ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

——————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I

NĂM HỌC 2017-2018

TailieuVNU.com

——oOo——-

Môn thi: Giải tích 3

Mã môn học: **MAT2304** Số tín chỉ: **4** Thời gian: **120 phút**

Dành cho sinh viên khoá: **61** Ngành học: **Toán học, Sư phạm Toán, Toán Tin**

Câu 1. Phát biểu và chứng minh định lý về tính liên tục của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số với cận vô hạn.

Câu 2. Nêu cách xây dựng tổng tích phân, định nghĩa giới hạn của tổng tích phân, khái niệm hàm nhiều biến khả tích trên hình hộp D trong $\mathbb{R}^2$. Nêu cách xây dựng tổng Darboux trên và tổng Darboux dưới.

Cho hàm số $f(x,y) = xy$ xác định trên hình chữ nhật $D = [0,1] \times [0,2]$. Xét các phân hoạch P_n, Q_n trên đoạn $[0,1]$ và $[0,2]$ lần lượt xác định bởi

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}, \quad Q_n = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)}{n}, 2\right\}.$$

Với phân hoạch này, hình chữ nhật D được phân hoạch thành các hình chữ nhật con $D_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{2(j-1)}{n}, \frac{2j}{n}\right], 1 \le i, j \le n$. Tính tổng Darboux trên S_n và tổng Darboux dưới s_n của hàm f ứng với phân hoạch trên và tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} S_n, \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Câu 3. Tính các tích phân bội sau.

a) $\iint_D x^2 dxdy$, với D là miền hữu hạn giới hạn bởi đường ellipse $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$.

b) $\iiint_V z dxdydz$, trong đó V là vật thể giới hạn bởi hai mặt cong $z = (x^2+4y^2)^2,\ z = 1$.

Câu 4. Tính các tích phân đường sau

a*) $\oint_{\mathcal{L}^+} \left(e^x \cos y + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx - \left(e^x \sin y + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$, trong đó $\mathcal{L}^+$ là đường tròn đơn vị $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$ định hướng dương.

b) $\oint_{\mathcal{L}^+} (y - z + \sin y)dx + (2x + 4z + x\cos y)dy + (5y - 2x)dz$, trong đó $\mathcal{L}^+$ là đường tròn

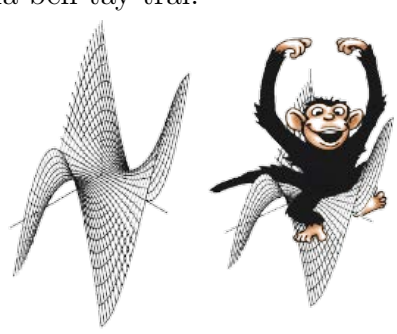
$$(\mathcal{C}): \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y - z = 0$$

định hướng dương sao cho nếu một người đứng trên mặt phẳng $(P): x + y - z = 0$ theo hướng véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1, -1, 1)$ và đi theo hướng đó thì người đó thấy phần hình cầu đơn vị nằm trên mặt phẳng (P), ở phía bên tay trái.

Câu 5. Tính tích phân mặt sau

$$I = 16 \iint_S x^3 y^3 dS$$

trong đó S là một phần của mặt yên ngựa của con khỉ $3z = x^3 - y^3$ với $(x,y) \in D := [0,1] \times [0, \sqrt[4]{3}]$.



Mặt yên ngựa của con khỉ (Nguồn: Internet)

HẾT

Không được sử dụng tài liệu

ĐÁP ÁN

TailieuVNU.com

Câu 1: SGK (2 điểm)

Câu 2: SGK ($1 + 0.5 + 0.5$ điểm)

(Phần tính tổng Darboux: $0.5 + 0.5$). Xét hàm $f(x, y) = xy$ trên hình chữ nhật D_{ij}, và gọi S_{ij} là diện tích hình chữ nhật D_{ij}, ta có

$$\min_{D_{ij}} f(x, y) = \frac{2(i-1)(j-1)}{n^2}; \quad \max_{D_{ij}} f(x, y) = \frac{2ij}{n^2}, \quad S_{ij} = \frac{2}{n^2}.$$

Từ đó, ta có

- Tổng Darboux trên

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij} \max_{D_{ij}} f(x, y) = 4 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{ij}{n^4} \\ &= \frac{4}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{2}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{(n+1)^2}{n^2}. \end{aligned}$$

- Tổng Darboux dưới

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i,j=1}^{n} S_{ij} \min_{D_{ij}} f(x, y) = 4 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(i-1)(j-1}{n^4} \\ &= \frac{4}{n^4} \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{2}{n^4} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. (Điều này có nghĩa là tích phân bội $\iint_D xy = 1$).

Câu 3: ($1.5 + 1.5$ điểm)

Câu a). Dễ thấy miền D có dạng

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + y^2 \leq 1.$$

- *Cách 1:* Đổi biến $x - y = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, \quad (r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Ta có

$$x = r\cos\varphi + r\sin\varphi, y = r\sin\varphi$$

Định thức Jacobi của phép biến đổi này là $\det J = r$. (Định thức dạng này của J là đơn giản vì khi tính định thức, ta tách định thực thành tổng hai định thức thì sẽ có một định thức bằng không vì có các hàng tỉ lệ (liên quan đến thành phần $r\sin\varphi$ của x và y). Do vậy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)^2 r d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 (1 + \sin 2\varphi) d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- *Cách 2:* Miền D có dạng

$$D = \{-1 \le y \le 1, \quad y - \sqrt{1-y^2} \le x \le y + \sqrt{1-y^2}\}.$$

TailieuVNU.com

Do đó,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} dy \int_{y-\sqrt{1-y^2}}^{y+\sqrt{1-y^2}} x^2 dx \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \left[(y+\sqrt{1-y^2})^3 - (y-\sqrt{1-y^2})^3\right] dy \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (6y^2\sqrt{1-y^2} + 2(\sqrt{1-y^2})^3) dy \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (4y^2+2)\sqrt{1-y^2} dy \overset{y=\sin t}{=} \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4\sin^2 t + 2)\cos^2 t dt \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 4t}{2} + 1 + \cos 2t\right) dt = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Câu b) Miền V có dạng

$$V = \{0 \le z \le 1, (x,y) \in D_z\}, \quad D_z = \left(\frac{x}{\sqrt[4]{z}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt[4]{z}/2}\right)^2 \le 1.$$

Ta có

$$I = \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{3/2} dz = \frac{1}{5}.$$

Chú ý D_z là ellipse nên diện tích của D_z là $\frac{\sqrt{z}}{2}$. Ngoài ra, bài này cũng có thể thực hiện đổi biến trong hệ tọa độ trụ.

Câu 4. (1.5 + 1.5 điểm)

Câu a) Biểu thức trong dấu tích phân đường là vi phân toàn phần, tuy nhiên miền giới hạn bởi đường cong $\mathcal{L}$ lại không đơn liên (trên miền xác định của hàm trong dấu tích phân).

- *Cách 1.* Tách thành hai tích phân

$$I = \oint_{\mathcal{L}^+} e^x \cos y dx - e^x \sin y dy + \oint_{\mathcal{L}^+} \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = I_1 + I_2.$$

Ta có,

$$\frac{\partial}{\partial x}(-e^x \sin y) = -e^x \sin y = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y)$$

nên $I_1 = 0$. Mặc khác, lưu ý là

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Tuy nhiên, trong trường hợp này, ta không dùng định lý Green mà tham số đường tròn đơn vị $x\cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$, ta tính được $I_2 = -2\pi$. Vậy $I = -2\pi$.

- *Cách 2.* "Cố tình" tham số hóa đường tròn đơn vị $x\cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$, ta tính được,

TailieuVNU.com

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (e^{\cos t}\cos(\sin t)(-\sin t) - e^{\cos t}\sin(\sin t)\cos t)dt - \int_0^{2\pi} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}(e^{\cos x}\cos(\sin t))dt - 2\pi = -2\pi. \end{aligned}$$

Câu b). Sử dụng định lý Stoke's, tích phân đường đưa về tích phân mặt

$$I = \iint_{\mathcal{S}^+} dydz + dzdx + dxdy$$

trong đó $\mathcal{S}$ là phần mặt phẳng $(P) : x+y-z = 0$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2 = 1$, định hướng theo hướng véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1, -1, 1)$. Mặt $\mathbb{S}$ có biểu diễn tham số

$$\mathcal{S} = \begin{cases} z = x + y \\ (x, y) \in E := \{x^2 + y^2 + (x + y)^2 \leq 1\} \end{cases}.$$

Do vậy,

$$I = -1 \iint_E dudv = -\text{Diện tích của } E.$$

Ta có, $E = \{u^2 + uv + v^2 \leq \frac{1}{2}\}$ hay là $\left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} \leq \frac{1}{2}$. Đổi biến

$$u + \frac{v}{2} = r\cos\varphi, \frac{\sqrt{3}v}{2} = r\sin\varphi, \quad (r, \varphi) \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \times [0, 2\pi].$$

Định thức Jacobi của phép biến đổi

$$\det \frac{d(u, v)}{d(r, \varphi)} = \frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

Dễ dàng tính được

$$I = -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{1/\sqrt{2}} rdr \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Lưu ý, có thể tính diện tích của E một cách đơn giản như sau. Ta có E là hình chiếu của hình tròn lớn $\mathcal{L} : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y - z = 0$ lên mặt phẳng $0xy$. Góc giữa mặt phẳng Oxy và mặt phẳng $x + y - z = 0$ là $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (bằng góc giữa hai véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ và $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Theo công thức liên hệ giữa diện tích hình chiếu và diện tích của vật thể, ta có

$$\text{Diện tích của } E = (\cos\theta) \times \text{Diện tích của } \mathcal{L} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Bài này cũng hoàn toàn là tính toán được nếu biết cách biểu diễn tham số của đường tròn lớn $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \begin{cases} z = x + y \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin t \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Câu 5(1.5 điểm) Phương trình tham số của phần mặt yên ngựa của con khỉ là

TailieuVNU.com

$$\mathcal{S} : z = \frac{u^3}{3} - \frac{v^3}{3}, (u, v) \in D := [0, 1] \times [0, \sqrt[4]{3}].$$

Dễ thấy véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-u^2, v^2, 1)$. Do đó, tích phân mặt cần tính là

$$\begin{aligned}
I &= 16 \iint_D u^3 v^3 \sqrt{1 + u^4 + v^4} du dv = 16 \int_0^1 u^3 du \int_0^{\sqrt[4]{3}} v^3 \sqrt{1 + u^4 + v^4} dv \\
&= \int_0^1 dx \int_0^3 \sqrt{1 + x + y} dy \\
&= 2 \int_0^1 ((4 + x)\sqrt{4 + x} - (1 + x)\sqrt{1 + x}) dx \\
&= \frac{4}{5}(25\sqrt{5} - 32 - 4\sqrt{2} + 1) = \frac{4}{5}(25\sqrt{5} - 31 - 4\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Tổng điểm toàn bài là 11.5 điểm

$$11.5 = 2 + 2 + 3 + 3 + 1.5$$