ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM MÔN GIẢI TÍCH II
Học kỳ I, năm học 2014-2015

ĐỀ 01

Câu	Các bước giải	Điểm
Câu 1 (1,0 điểm)	- Hàm số liên tục tại mọi điểm khác $(0,0)$ trên $\mathbf{R}^2$	0.25
	- Xét tính liên tục của $f(x,y)$ tại điểm $(0,0)$ Ta có đánh giá sau: $\left\|x^2\sin y - y^2\sin x\right\| \le \left\|x^2\sin y\right\| + \left\|y^2\sin x\right\| \le \left\|x^2\right\| + \left\|y^2\right\| = x^2+y^2$	0.25
	- Từ đó dẫn đến $0 \le \left\|\dfrac{x^2\sin y - y^2\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\| \le \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$	0.25
	- Nhận xét rằng $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$, theo nguyên lý kép của giới hạn ta thu được $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2\sin y - y^2\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$ Tức là hàm số $f(x,y)$ liên tục tại (0,0). Kết luận: Hàm số liên tục tại mọi điểm trên $\mathbf{R}^2$	0.25
Câu 2 (1,0 điểm)	- Nhận xét: Điểm M(2,1,1/2) thuộc mặt cong đã cho	0.25
	- Pháp tuyến của mặt tại M là $\vec{n} = \left(-\dfrac{\partial z(\mathrm{M})}{\partial x}, -\dfrac{\partial z(\mathrm{M})}{\partial y}, 1\right) = \left.\left(\dfrac{1}{8}x, \dfrac{1}{2}y, 1\right)\right\|_{\substack{x=2\\ y=1}} = \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$	0.25
	- Mặt phẳng tiếp diện đi qua điểm M(2,1,1/2) và nhận $\vec{n}$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình là $\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{2}(y-1)+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0$	0.25
	- Rút gọn ta được $x+2y+4z-6=0$	0.25
Câu 3 (1,0 điểm)	- Vẽ hình đúng Viết tích phân dưới dạng $I = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (2x-y)\,dy$	0.25
	$= \int\limits_2^3 \left.\left(2xy - \dfrac{y^2}{2}\right)\right\|_{y=x}^{y=2x} dx$	0.25
	$= \int\limits_2^3 \dfrac{1}{2}x^2 dx$	0.25

	$=\dfrac{19}{6}$	0.25
Câu 4a (1,0 điểm)	Ta sử dụng công thức Green để tính tích phân này. Đường cong C+ bao quanh miền D là hình tròn tâm O bán kính R=1 $D=\{(x,y)\,\vert\,x^2+y^2\le 1\}$ Đặt $P(x,y)=e^x\sin y-4y,\ Q(x,y)=e^x\cos y-3y$.	0.25
	Tính hiệu: $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-(e^x\cos y-4)=4$	0.25
	Viết tích phân đường dưới dạng $I=\oint_{C^+}(e^x\sin y-4y)dx+(e^x\cos y-3y)dy$ $=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D 4dxdy=4\iint_D dxdy$	0.25
	Nhận xét: Tích phân $\iint_D dxdy$ chính là diện tích miền D và giá trị của nó bằng $\pi.1^2=\pi$. Như vậy $I=4\pi$.	0.25
Câu 4b (1,0 điểm)	-Hình chiếu của phần mặt nón xuống mặt phẳng Oxy là $D=\{(x,y)\,\vert\,x^2+y^2\le 1\}$. Tính vi phân diện tích mặt $ds=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$	0.25
	- Viết tích phân đã cho thành tích phân bội hai trên miền D $J=\iint_S(x^2+y^2)ds=\sqrt{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy$	0.25
	- Đặt $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$ với $\varphi\in[0,2\pi],\ r\in[0,1]$ Jacobian của phép biến đổi: $\vert J\vert=r$	0.25
	- Tính tích phân $J=\sqrt{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2.rdr=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$	0.25
Câu 5a (1,0 điểm)	- Ta viết lại phương trình dưới dạng $\cos y.y'-\sin y=x$ Đặt $z=\sin y\Rightarrow z'=y'\cos y$ Phương trình đã cho trở thành $z'-z=x$	0.25
	- Phương trình thuần nhất $z'-z=0$ có nghiệm là $z=Ce^x$	0.25
	- Giả sử nghiệm của phương trình không thuần nhất đối với z có dạng $z=C(x)e^x$	0.25

	trong đó $C(x)$ là hàm phụ thuộc vào x. Thay $z'=C'(x)e^x+C(x)e^x$ và z vào phương trình không thuần nhất, rút gọn ta được $C'(x)=xe^{-x}$. - Tìm ra $C(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1$	
	- Từ đó: $z=\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)e^x=C_1e^x-x-1$ Trở lại hàm y $\sin y=C_1e^x-x-1$ Từ điều kiện $y(0)=0$, suy ra $C_1=1$. Kết luận: $\sin y=e^x-x-1$	0.25
Câu 5b (1,5 điểm)	- Phương trình thuần nhất: $y''+y=0$ - Phương trình đặc trưng: $\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm i$ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\tilde{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$	0.25
	- Phương trình: $y''+y=4\cos x$ Tìm nghiệm riêng của phương trình này dưới dạng $y_1^*=x(A\cos x+B\sin x)$	0.25
	Tìm ra $A=0,B=2$, và $y_1^*=2x\sin x$	0.25
	- Phương trình $y''+y=\left(2x^2+4\right)e^x$ Tìm nghiệm riêng y_2^* dưới dạng $y_2^*=e^x\left(Cx^2+Dx+E\right)$	0.25
	- Tìm ra $C=1,D=-2,E=3$ và $y_2^*=e^x\left(x^2-2x+3\right)$	0.25
	Kết luận: Nghiệm tổng quát $y=\tilde{y}(x)+y_1^*+y_2^*$ $=C_1\cos x+C_2\sin x+2x\sin x+e^x\left(x^2-2x+3\right)$	0.25
Câu 6 (1,5 điểm)	- Gọi D là khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường cong (C). Ta đặt $f(x,y)=D^2=x^2+y^2$. Ta tìm f lớn nhất và nhỏ nhất với điều kiện $x^2-xy+y^2=4$. Hàm Lagrange: $\Phi(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2-xy+y^2-4\right)$	0.25
	- Điểm dừng của $\Phi(x,y,\lambda)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}(2+2\lambda)x-\lambda y=0\\ (2+2\lambda)y-\lambda x=0\\ x^2-xy+y^2-4=0\end{cases}$	0.25
	- Giải ra $\lambda=-2,\lambda=-\dfrac{2}{3}$	0.25

	- Với $\lambda=-2$, $y=x$. Tìm được hai điểm $M_1(2,2)$ và $M_2(-2,-2)$ - Với $\lambda=-\frac{2}{3}$, $y=-x$. Tìm được hai điểm $M_3\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ và $M_4\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	
	Biểu thức vi phân bậc hai $d^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2$ $=(2+2\lambda)dx^2-2\lambda dxdy+(2+2\lambda)dy^2$	0.25
	- Với $\lambda=-2$, $d^2\Phi=-2dx^2+4dxdy-2dy^2=-2(dx-dy)^2<0$ - Các điểm M_1,M_2 là điểm cực đại, $f_{CD}=4$	0.25
	- Với $\lambda=-2/3$, $d^2\Phi=\frac{2}{3}(dx+dy)^2>0$ - Các điểm M_3,M_4 là điểm cực tiểu, $f_{CT}=\frac{8}{3}$ - Kết luận: Khoảng cách lớn nhất, nhỏ nhất là: $D_{\max}=\sqrt{f}=2, D_{\min}=\sqrt{f}=\sqrt{\frac{8}{3}}$	0.25
Câu 7 (1,0 điểm)	- Đặt $y'=yz\Rightarrow y''=y(z^2+z')$.	0.25
	- Ta đưa phương trình về biến z $z'-\frac{1}{x}z=0$	0.25
	- Giải ra $z=C_1x$	0.25
	- Phương trình sau khi tìm được z: $y'=C_1xy$ Giải ra ta được nghiệm tổng quát $y=C_2e^{\frac{1}{2}C_1x^2}$	0.25