ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II
NĂM HỌC 2014-2015

ĐÁP ÁN ĐỀ THI SỐ 02

Bài thi môn: Giải Tích II. **Số tín chỉ:** 5.
Hệ đào tạo: Chính quy.
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu I. (1.0đ)

(0.5đ) $0 \le \left|\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{|x+y|}{2} \to 0, (x,y)\to(0,0)$

(0.5đ) Do đó: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, nên hàm số liên tục tại (0,0).

Câu II. (1.5đ)

(0.25đ) Trong miền mở D, các điểm dừng thỏa mãn: $\begin{cases} f'_x = -ye^{-xy} = 0 \\ f'_y = -xe^{-xy} = 0 \end{cases}$

(0.25đ) Giải hệ trên, ta có điểm dừng: $(0,0)$. Khi đó: $f(0,0) = 1$.

(0.25đ) Trên biên của miền D, lập hàm Lagrange: $L(x,y) = e^{-xy} + \lambda(x^2+4y^2-1)$

(0.25đ) Điểm dừng của hàm Lagrange: $\begin{cases} L'_x = -ye^{-xy} + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -xe^{-xy} + 8\lambda y = 0 \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases}$

(0.25đ) Giải hệ trên, ta có các điểm dừng: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

$$f_{CT}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{4}}, f_{CĐ}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}$$

.

(0.25đ) So sánh, suy ra: $f_{\min}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{4}}, f_{\max}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}$.

Câu III. (1.5đ)

(0.25đ) Giao giữa 2 mặt là: $x^2+y^2=1$.

(0.25đ) Chuyển sang tọa độ trụ: $0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le 1; r \le z \le \sqrt{2-r^2}$

(0.25đ) $\Rightarrow I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 re^{r^2}dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} zdz$

(0.25đ) $= 6\pi.\int_0^1 re^{r^2}(1-r^2)dr = 3\pi\int_0^1 (1-r^2)de^{r^2}$

(0.25đ) $=3\pi\left[(1-r^2)e^{r^2}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{r^2}d(1-r^2)\right]=3\pi\left(-1+\int_0^1 2re^{r^2}dr\right)$

(0.25đ) $=-3\pi+3\pi\int_0^1 de^{r^2}=-3\pi+3\pi e^{r^2}\Big|_0^1=3\pi(e-2)$

Câu IV. (1.5đ)

(0.25đ) Ta có: $\begin{matrix} P(x,y)=(1+xy)e^{xy}\to P'_y=2xe^{xy}+x^2ye^{xy} \\ Q(x,y)=e^y+x^2e^{xy}\to Q'_x=2xe^{xy}+x^2ye^{xy} \end{matrix}$

(0.25đ) $\to P'_y=Q'_x$

(0.25đ) Suy ra, tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân. Do đó:

$$I=\int_{OA}(1+xy)e^{xy}dx+(e^y+x^2e^{xy})dy+\int_{AB}(1+xy)e^{xy}dx+(e^y+x^2e^{xy})dy \quad ; \quad A(0,1)$$

(0.25đ) $=\int_0^1 e^y dy+\int_0^1(1+x)e^x dx$

(0.25đ) $=e^y\Big|_0^1+xe^x\Big|_0^1$

(0.25đ) $=2e-1$

Câu V. (1.5đ)

(0.25đ) Ta có: $I=\iint_S d\text{x}d\text{y}-\iint_S x^2zdydz=I_1-I_2$

(0.25đ) Xét $I_1=\iint_S d\text{x}d\text{y}$. Hình chiếu của S xuống Oxy là: $\begin{cases} 4x^2+y^2=4\Leftrightarrow x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$

Chuyển sang tọa độ cực, đặt: $x=r\cos\varphi, y=2r\sin\varphi\Rightarrow J=2r$

(0.25đ) $x=r\cos\varphi, y=2r\sin\varphi\Rightarrow J=2r\Rightarrow I_1=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 2rdr=\dfrac{\pi}{2}.r^2\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{2}$

(0.25đ) Xét $I_2=\iint_S x^2zdydz$. Hình chiếu của S xuống Oyz là: $\begin{cases} y^2+4z^2=4\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{4}+z^2=1 \\ y,z\ge 0 \end{cases}$

Chuyển sang tọa độ cực, đặt

$y=2r\cos\varphi, z=r\sin\varphi\Rightarrow J=2r\Rightarrow x^2=\dfrac{4-y^2-4z^2}{4}=\dfrac{4-4r^2}{4}$

(0.25đ)

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1 2r\left(1-r^2\right)r\sin\varphi dr=2\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^1(r^2-r^4)dr=-2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}.\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{15}$$

(0.25đ) $\Rightarrow I=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{15}=\dfrac{15\pi-8}{30}$

Câu VI. (1.5đ)

(0.25đ) Pt không thuần nhất: $y'' + 2y' + y = x^2 + 4x - 1 + 4e^x$.

Pt thuần nhất: $y'' + 2y' + y = 0$

(0.25đ) Pt đặc trưng: $k^2 + 2k + 1 = 0 \to k = -1$

(0.25đ) Nghiệm tổng quát của pt thuần nhất: $y^*(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

(0.25đ) Nghiệm riêng của pt không thuần nhất tìm dưới dạng:

$$\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$$

(0.25đ) Dùng phương pháp đồng nhất thức: $A = 1, B = 0, C = -3, D = 1$.

(0.25đ) Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^2 - 3 + e^x$$

Câu VII. (1.5đ)

(0,25đ) Xét phương trình thuần nhất y'' – y = 0.
Đa thức đặc trưng $k^2 - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $k_1 = 1$ và $k_2 = -1$.
(0,25đ) Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là
$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$
(0,25đ) Xét phương trình vi phân không thuần nhất. Ta thấy $k = 1 \pm 2i$ không phải là nghiệm của đa thức đặc trưng.
(0,25đ) Do đó ta xét nghiệm riêng có dạng
$y = e^x(A\sin 2x + B\cos 2x)$
(0,25đ) Đạo hàm rồi thay vào phương trình vi phân và sử dụng phép đồng nhất thức ta thu được.
$A = B = -\frac{1}{8}$
(0,25đ) Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là
$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{8}e^x(\sin 2x + \cos 2x)$

------------------------- Hết -------------------------