

**ĐỀ THI CUỐI KỲ**

Môn học: Tín hiệu và hệ thống (ELT2035)

Thời gian làm bài: 90 phút

(Đề thi có 4 trang)

**Câu 1.** Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục nhân quả được mô tả bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 5 y(t) = x(t)$$

a) Xác định đáp ứng của hệ thống với các điều kiện đầu  $y(0^-) = 1$  và

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = -2 \quad (\text{khi không có tín hiệu vào}).$$

$$y_0(t) = c_1 e^{-(2+j)t} + c_2 e^{-(2-j)t} \quad (t \geq 0)$$

$$y(0^-) = c_1 + c_2 = 1$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = -(2+j)c_1 - (2-j)c_2 = -2$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_0(t) = \frac{1}{2} e^{-(2+j)t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-(2-j)t} u(t) = e^{-2t} \cos(t) u(t)$$

b) Xác định hàm chuyển (hàm truyền đạt)  $H(s)$ , đáp ứng tần số  $H(\omega)$  và đáp ứng xung  $h(t)$  của hệ thống.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5}$$

Hệ thống nhân quả ổn định (ROC:  $\Re(s) > -2$  chứa trục  $j\omega$ ) nên:

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 4j\omega + 5}$$

Đáp ứng xung:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = -\frac{1}{2j} \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{2j} \frac{1}{s+2-j}$$

$$h(t) = -\frac{1}{2j} e^{-(2+j)t} u(t) + \frac{1}{2j} e^{-(2-j)t} u(t) = e^{-2t} \sin(t) u(t)$$

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với các tín hiệu vào sau đây (không có điều kiện đầu):

c1)  $x(t) = u(t) - u(t-1)$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-st}}{s}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = (1 - e^{-st}) \frac{1}{s(s+2+j)(s+2-j)}$$

$$Y(s) = (1 - e^{-st}) \left[ \frac{1}{5} \frac{1}{s} + \frac{1}{4j-2} \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{-4j-2} \frac{1}{s+2-j} \right]$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{5} \frac{1}{s} + \frac{1}{4j-2} \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{-4j-2} \frac{1}{s+2-j}$$

$$y_1(t) = \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{4j-2} e^{-(2+j)t} + \frac{1}{-4j-2} e^{-(2-j)t} \right] u(t)$$

$$Y(s) = (1 - e^{-st}) Y_1(s) = Y_1(s) - e^{-st} Y_1(s)$$

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t-1)$$

$$y(t) = \left[ \frac{1}{5} + \frac{e^{-(2+j)t}}{4j-2} + \frac{e^{-(2-j)t}}{-4j-2} \right] u(t) - \left[ \frac{1}{5} + \frac{e^{-(2+j)(t-1)}}{4j-2} + \frac{e^{-(2-j)(t-1)}}{-4j-2} \right] u(t-1)$$

c2)  $x(t) = \cos(t)u(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{jt} u(t) + \frac{1}{2} e^{-jt} u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-j} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j} = \frac{1}{(s+j)(s-j)}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s+j)(s-j)(s+2+j)(s+2-j)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{-8j-8} \frac{1}{s+j} + \frac{1}{8j-8} \frac{1}{s-j} + \frac{1}{-8j+8} \frac{1}{s+2+j} + \frac{1}{8j+8} \frac{1}{s+2-j}$$

$$y(t) = \left[ -\frac{e^{-jt}}{8j+8} + \frac{e^{jt}}{8j-8} - \frac{e^{-(2+j)t}}{8j-8} + \frac{e^{-(2-j)t}}{8j+8} \right] u(t)$$

c3)  $x(t) = \cos(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{jt} + \frac{1}{2} e^{-jt}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} H(\omega=1) e^{jt} + \frac{1}{2} H(\omega=-1) e^{-jt}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{4j+6} e^{jt} + \frac{1}{2} \frac{1}{-4j+6} e^{-jt}$$

$$y(t) = \frac{6(e^{jt} + e^{-jt})}{2(16+36)} = \frac{3}{26} \cos(t)$$

**Câu 2.** Một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc nhân quả **T** được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y[n] + y[n-1] - \frac{3}{4} y[n-2] = x[n]$$

a) Hệ thống có ổn định hay không? Giải thích.

Hàm chuyển  $H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}-\frac{3}{4}z^{-2}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}$

ROC:  $|z| > \frac{3}{2}$  không chứa đường tròn đơn vị  $\implies$  hệ thống không ổn định.

(\*\*\*\*nếu dùng đề chưa sửa:

$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-2}} = \frac{1}{(1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1})(1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1})}$$

ROC:  $|z| > \frac{1+\sqrt{7}}{2}$  không chứa đường tròn đơn vị  $\implies$  hệ thống không ổn định.

\*\*\*\*)

b) Xác định đáp ứng xung  $h[n]$  của hệ thống.

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{4} \frac{1}{1+\frac{3}{2}z^{-1}}$$

$$h[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n]$$

(\*\*\*\*nếu dùng đề chưa sửa:

$$H(z) = \frac{7+\sqrt{7}}{14} \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1}} + \frac{7-\sqrt{7}}{14} \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1}}$$

$$h[n] = \frac{7+\sqrt{7}}{14} \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^n u[n] + \frac{7-\sqrt{7}}{14} \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^n u[n]$$

\*\*\*\*)

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào  $x[n] = u[n]$ .

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{4}{5} \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{9}{20} \frac{1}{1+\frac{3}{2}z^{-1}}$$

$$y[n] = \frac{4}{5} u[n] - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{9}{20} \left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n]$$

(\*\*\*\*nếu dùng đề chưa sửa:

$$Y(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1})(1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1})}$$

$$Y(z) = 2 \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{4+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}} \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1}} + \frac{4-\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}} \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1}}$$

$$y[n] = 2u[n] + \frac{4+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}} \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^n u[n] + \frac{4-\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}} \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^n u[n]$$

\*\*\*\*)

d) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào  $x[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-2k]$ .

$$y[n] = h[n] * x[n] = \left[ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n] \right] * \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

$$y[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \right] * \delta[n-2k] + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n] \right] * \delta[n-2k]$$

$$y[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} u[n-2k] + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-2k} u[n-2k]$$

$$y[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n \lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2k} + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2}\right)^{n \lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2k} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{n \lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} 4^k + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2}\right)^{n \lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

$$y[n] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1-4^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}}{1-4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{3}{2}\right)^n \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}}{1-\frac{4}{9}}$$

e) Vẽ sơ đồ một hệ thống có hàm chuyển (hàm truyền đạt) là  $\frac{z}{z-1/2}$ , với thành phần của hệ thống này bao gồm hệ thống **T** nói trên, một bộ trễ **D** (có  $H_D(z) = z^{-1}$ ), một bộ cộng tín hiệu, và một bộ nhân tín hiệu với hằng số  $K$  tùy chọn (xem hình vẽ trang sau).

