ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Trường Đại học Công nghệ

Ngày thi: 26/12/2018

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CUỐI KỲ

Môn học: Tín hiệu và hệ thống **(ELT2035)**

Câu 1. Xem xét tín hiệu $x(t)=[\cos(\pi t)]^2+\sin(\pi t)+2$:

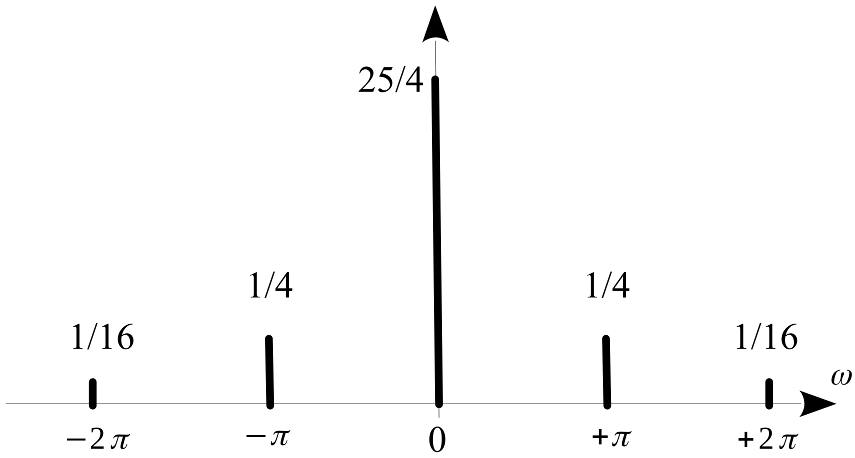
a) Vẽ phổ công suất của $x(t)$. (0,5 điểm)

Đáp án:

$$x(t)=[\cos(\pi t)]^2+\sin(\pi t)+2=\frac{1}{4}[e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}]^2+\frac{1}{2j}e^{j\pi t}-\frac{1}{2j}e^{-j\pi t}+2$$

$$x(t)=\frac{1}{4}e^{j2\pi t}+\frac{1}{4}e^{-j2\pi t}+\frac{1}{2j}e^{j\pi t}-\frac{1}{2j}e^{-j\pi t}+\frac{5}{2}$$

Phổ công suất $|c_k|^2$:



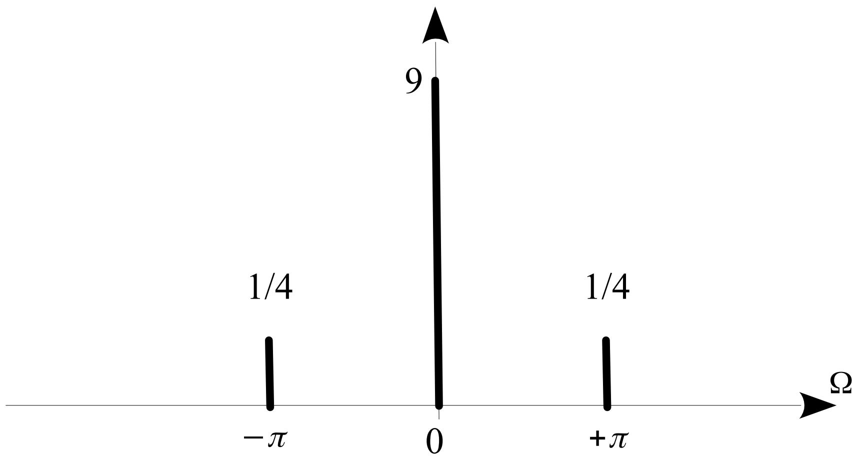
b) Lấy mẫu $x(t)$ với tốc độ lấy mẫu $\omega_s=2\pi$ (rad/giây) (f_s=1 (mẫu/giây)) để thu được tín hiệu rời rạc $x[n]$. Vẽ phổ công suất của $x[n]$. (0,5 điểm)

Đáp án:

Tín hiệu rời rạc:

$$x[n]=[\cos(\pi n)]^2+\sin(\pi n)+2=\frac{1}{2j}e^{j\pi n}-\frac{1}{2j}e^{-j\pi n}+3$$

Phổ công suất $|c_k|^2$ trong khoảng $[-\pi,+\pi]$:



Câu 2. Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục nhân quả được mô tả bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2}+\pi^2 y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

a) Hệ thống có ổn định hay không? Giải thích. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống không ổn định vì 2 trị cực $s_1=j\pi$ và $s_2=-j\pi$ nằm trên trục $j\omega$.

b) Xác định đáp ứng xung $h(t)$ của hệ thống. (1 điểm)

Đáp án:

$$H(s)=\frac{s}{s^2+\pi^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{s-j\pi}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+j\pi}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}[e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}]u(t)=\cos(\pi t)u(t)$$

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)=u(t-1)$ (với các điều kiện đầu bằng không). (1 điểm)

Đáp án:

$$X(s)=\frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2}=\frac{e^{-s}}{2j\pi}\left(\frac{1}{s-j\pi}-\frac{1}{s+j\pi}\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{2j\pi}[e^{j\pi(t-1)}-e^{-j\pi(t-1)}]u(t-1)=\frac{1}{\pi}\sin[\pi(t-1)]u(t-1)$$

Câu 3. Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục nhân quả có hàm chuyển (hàm truyền đạt) được cho như sau:

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

a) Xác định đáp ứng biên độ $|H(\omega)|$ của hệ thống, nếu tồn tại. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống nhân quả ổn định vì tất cả các trị cực của $H(s)$ đều nằm bên trái trục $j\omega$ (phần thực của các trị cực đều âm), suy ra đáp ứng tần số $H(\omega)$ của hệ thống xác định được từ $H(s)$:

$$H(\omega)=H(s)_{s=j\omega}=\frac{1}{(j\omega+1)(-\omega^2+j\omega+1)}$$

b) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)=\sin(t+\pi/2)-1$.

Đáp án:

$$x(t)=\sin(t+\pi/2)-1=\cos(t)-1=\frac{1}{2}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{-jt}-1$$

$$y(t)=\frac{1}{2}H(\omega=1)e^{jt}+\frac{1}{2}H(\omega=-1)e^{-jt}-1\,H(\omega=0)$$

ở đó:

$$H(\omega=1)=\frac{1}{(j+1)(-1+j+1)}=\frac{1}{j-1}$$

$$H(\omega=-1)=\frac{1}{(-j+1)(-1-j+1)}=-\frac{1}{j+1}$$

$$H(\omega=0)=1$$

Câu 4. Một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc nhân quả được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y[n]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n-2]=x[n]$$

a) Xác định đáp ứng xung $h[n]$ của hệ thống. (1 điểm)

Đáp án:

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{4}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h[n]=\frac{4}{3}2^n u[n]-\frac{1}{3}2^{-n}u[n]$$

b) Xác định đáp ứng của hệ thống với điều kiện đầu $\{y[-1]=2, y[-2]=1\}$ khi không có tín hiệu vào.

Đáp án:

$$y_0[n]=c_1 2^n+c_2 2^{-n}$$

$$y_0[-1]=\frac{1}{2}c_1+2c_2=2$$

$$y_0[-2]=\frac{1}{4}c_1+4c_2=1$$

$$c_1=4, c_2=0$$

$$y_0[n]=4\times 2^n=2^{n+2}, n\geqslant 0 \text{ hay } y_0[n]=2^{n+2}u[n]$$

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x[n]=2^{-n}u[n]$, với các điều kiện đầu bằng không. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống có hai trị cực 2 và 1/2, đáp ứng với tín hiệu vào vì vậy có dạng:

$$y_s[n]=c_1 2^n+c_2 2^{-n}+c_3 n 2^{-n}$$

$$y_s[-2]=0=\frac{1}{4}c_1+4c_2-8c_3$$

$$y_s[-1]=0=\frac{1}{2}c_1+2c_2-2c_3$$

$$y_s[0]-\frac{5}{2}y_s[-1]+y_s[-2]=x[0]$$

$$y_s[0]=1=c_1+c_2$$

$$c_1=\frac{16}{9}, c_2=-\frac{7}{9}, c_3=-\frac{3}{9}$$

$$y_s[n]=\frac{16}{9}2^n-\frac{7}{9}2^{-n}-\frac{3}{9}n2^{-n}, n\geqslant 0$$

hay

$$y_s[n]=[\frac{16}{9}2^n-\frac{7}{9}2^{-n}-\frac{3}{9}n2^{-n}]u[n]$$

d) Xác định đáp ứng tần số $H(\Omega)$ của hệ thống, nếu tồn tại. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống nhân quả không ổn định vì có một trị cực của $H(z)$ nằm ngoài đường tròn đơn vị, suy ra $H(\Omega)$ không xác định.

***** HẾT *****