

Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2016
Môn: Đại số tuyến tính
 Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội
 (Thời gian làm bài: 120 phút)

6 Bài 1. (2 điểm) Cho hệ phương trình với tham số m :

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ (m-1)x + 3y + z = -15 \\ -x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

- (a) Giải hệ phương trình trên với $m = -2$.
 (b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m .

Bài 2. (2 điểm) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

- (a) Tính $\det(A)$.
 (b) Tìm a để ma trận A có hạng nhỏ nhất có thể.

Bài 3. (2 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 3z, 2x - y + z).$$

- (a) Tìm ma trận của T trong cơ sở chính tắc (chuẩn tắc) của \mathbb{R}^3 .
 (b) Tìm ma trận của T trong cơ sở $\{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ của \mathbb{R}^3 .

Bài 4. (2 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z).$$

- (a) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\text{im}T$ của T .
 (b) Dùng Gram-Schmidt để đưa cơ sở tìm được ở phần (a) về cơ sở trực chuẩn (theo tích vô hướng Euclid trong \mathbb{R}^3).

Bài 5. (2 điểm) Cho ma trận

Ma trận đường chéo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

trong đó a là một số thực.

- (a) Chứng minh rằng $\lambda = 2$ luôn là một giá trị riêng của A , với mọi a .
 (b) Khi $a = 3$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, không sử dụng thiết bị điện tử (điện thoại, máy tính bảng,...) trong giờ kiểm tra. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.