

**Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 2 năm học 2019-2020**

**Môn: Đại số tuyến tính**

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

**Bài 1. (2 điểm)** Cho hệ phương trình với tham số  $m$ :

$$\begin{cases} x + my - z = 1 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

- (a) Giải hệ phương trình trên với  $m = 0$ .
- (b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số  $m$ .

**Bài 2. (2 điểm)** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & m \end{bmatrix}$$

- (a) Tìm  $m$  để ma trận  $A$  có hạng bằng 3.  $m = 4$
- (b) Tìm điều kiện của  $m$  để  $A$  khả nghịch.  $m \neq 4$

**Bài 3 (2 điểm)** Cho ánh xạ  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (y + 2z, 3y + 8z, 4z).$$

- (a) Chứng minh  $T$  là ánh xạ tuyến tính.
- (b) Tìm ma trận chuẩn tắc (chuẩn tắc) của  $T$ .
- (c) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân)  $\ker(T)$ .
- (d) Vec-tơ  $(3, 1, 2)$  có thuộc không gian ảnh  $\text{range}(T) = \text{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$  hay không? Vì sao?

**Bài 4. (2 điểm)** Cho  $V$  là không gian con của  $\mathbb{R}^3$  với tích vô hướng thông thường, sinh bởi ba vec-tơ:  $(1, 0, 1), (1, 1, 3), (3, 1, 5)$ .

- (a) Tìm một cơ sở và số chiều của  $V$ .
- (b) Dùng quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt để biến cơ sở tìm được ở ý (a) thành một cơ sở trực chuẩn của  $V$ .

**Bài 5. (2 điểm)** Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

- (a) Tìm tất cả các giá trị riêng và các vec-tơ riêng tương ứng của  $A$ .
- (b) Tìm một ma trận trực giao  $P$  và một ma trận đường chéo  $D$  sao cho  $D = P^T A P$ .

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

$l_2 = t \Rightarrow l_1 =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_3 \\ l_2 \end{pmatrix} =$$