

ĐỀ THI PPT CÁC KỲ THI 2018 – 2019, 2019 - 2020

ĐỀ SỐ 1
THỜI GIAN: 90'

Câu 1. Xét phương trình $x = 2^{-x}$.

- a) Giải phương trình trên với $\varepsilon = 10^{-3}$ bằng phương pháp điểm bất động.
 b) Hãy tìm khoảng $[a, b]$ sao cho phép lặp $x_{n+1} = 2^{-x_n}$ hội tụ đến điểm bất động duy nhất với x bất kỳ thuộc $[a, b]$ (Cần nhớ rằng $\frac{d}{dx} 2^{-x} = -2^{-x} \ln 2$).
 c) Chứng minh rằng phương trình đã cho tương đương về mặt đại số với phương trình $x = -\frac{\ln x}{\ln 2}$. Hãy giải thích (với sự tham khảo định lý về điểm bất động) tại sao phép lặp điểm bất động dưới dạng này không hội tụ.

Câu 2. Hãy giải hệ phương trình sau bằng cách phân tích LU:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 + 34x_2 + 52x_3 = -160 \\ 8x_1 + 52x_2 + 129x_3 = -452 \end{cases}$$

Câu 3. a) Cho hàm f có bảng sai phân tiến như sau:

$x_0 = 0.0$	$f[x_0] = \dots$	$f[x_0, x_1] = \dots$ $f[x_1, x_2] = 10$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
$x_0 = 0.4$	$f[x_1] = \dots$		
$x_0 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

Hãy tìm các giá trị còn thiếu trong bảng.

b) Sử dụng kết quả ở phần a) để xây dựng đa thức nội suy bậc 2 cho f trên đoạn $[0.0, 0.7]$. Tính giá trị xấp xỉ của $f(0.6)$ dựa vào kết quả phần b).

Câu 4. Hãy tính tích phân $I = \int_{-1}^3 \frac{2}{x^2 + 4} dx$ theo công thức Simpson với bước $h=2$ và đánh giá cận sai số.

Câu 5 a) Xét bài toán biên $y'' + y = 0$, $0 \leq x \leq b$, $y(0) = 0$, $y(b) = B$.

Hãy chọn b và B sao cho bài toán biên: a₁) Không có nghiệm, a₃) Có đúng một nghiệm, a₃) Có vô số nghiệm.

b) Dùng phương pháp sai phân để giải phương trình vi phân bậc 2 sau với $h=0.25$

$$y'' + xy' = e^{-x}; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2$$

Chúc các anh/chị thi tốt!

ĐỀ SỐ 2
THỜI GIAN: 90'

Câu 1. a) Giải phương trình $xe^{2x} - 1 = 0$ bằng phương pháp dây cung với $x_0 = 0$ và $x_1 = 1$ trên đoạn $[1, 2]$. Thực hiện 3 bước lặp.

b) Tìm nghiệm phương trình trên theo phương pháp Newton sau 4 bước với $x_0 = 1$. Hãy đánh giá sai số.

Câu 2. Hãy giải hệ phương trình sau bằng cách phân tích LU:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 + 34x_2 + 52x_3 = -160 \\ 8x_1 + 52x_2 + 129x_3 = -452 \end{cases}$$

Câu 3. a) Hãy xây dựng đa thức nội suy bậc 2, $P_2(x)$, theo phương pháp Newton với mốc cách đều với $f(0.1) = 0.665$, $f(0.2) = 0.8$, $f(0.3) = 1.8$, $f(0.4) = 0.25$.

b) Sử dụng đa thức nội suy $P_2(x)$ để tính gần đúng $f(0.22)$. Giả sử $|f'''(x)| < 5$ trên toàn khoảng chứa các điểm 0.1, 0.2, 0.3 và 0.4. Hãy ước lượng sai số $|f(0.22) - P_2(0.22)|$.

Câu 4. a) Hãy dùng công thức ba điểm chính xác nhất để tính các giá trị còn thiếu trong bảng sau:

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.1	16.94410	
8.3	17.56492	
8.5	18.19056	
8.7	18.82091	

b) Dữ liệu trong phần a) được lấy từ hàm $f(x) = x \ln x$. Hãy tính sai số thực tế và đánh giá cận sai số bằng cách dùng công thức sai số.

Câu 5. Hãy giải phương trình vi phân với điều kiện ban đầu sau theo phương pháp Taylor bậc 4:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.5.$$

So sánh các giá trị tìm được với nghiệm đúng $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Chúc các anh/chị thi tốt!

ĐỀ SỐ 3
THỜI GIAN: 120'

Câu 1. a) Sử dụng công thức Newton để xây dựng đa thức nội suy bậc 2 cho hàm $f(x)$ có kết quả tính như sau:

$$f(0.1) = -0.29004986; \quad f(0.2) = -0.56079734; \quad f(0.3) = -0.81401972;$$

b) Sử dụng công thức sai số để tìm cận của sai số, so sánh cận của sai số với sai số thực tế tại $x = 0.18$. Biết biểu thức của hàm f là $f(x) = x^2 \cos x - 3x$.

Chú ý: Các tính toán thực hiện đến 8S.

Câu 2. a) Hãy dùng phương pháp biến đổi Fourier rời rạc để xây dựng hàm nội suy lượng giác cho bộ dữ liệu sau:

t	0	1/4	1/2	3/4
x	0	-1	0	1

b) Sử dụng công thức tìm được để tính $x(3/8)$.

Câu 3. a) Hãy giải hệ phương trình sau theo phương pháp Cholesky:

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 + 12x_3 = 17.4 \\ 6x_1 + 13x_2 + 11x_3 = 23.6 \\ 12x_1 + 11x_2 + 26x_3 = 30.8 \end{cases}$$

b) Dùng phương pháp Gauss - Seidel để giải hệ phương trình tuyến tính sau với $TOL = 10^{-3}$ theo chuẩn l_∞ :

$$\begin{cases} 24x_1 + x_2 - x_3 = 25 \\ -x_1 + 33x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 25x_3 = 27 \end{cases}$$

Câu 4. a) Hãy trình bày phương pháp giải gần đúng hệ phương trình vi phân với giá trị ban đầu bằng phương pháp điểm giữa.

b) Áp dụng phần a) để giải hệ phương trình vi phân sau:

$$u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos t + 4 \sin t, \quad u_1(0) = 0;$$

$$u_2' = 3u_1 + u_2 - 3 \sin t, \quad u_2(0) = -1.$$

với $0 \leq t \leq 2$ và $h = 1.0$.

So sánh kết quả tìm được với giá trị chính xác, biết nghiệm đúng của hệ phương trình là:

$$u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t \quad \text{và} \quad u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Chúc các anh/chị thi tốt!