TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

Đề thi kết thúc môn học: Học kỳ I, năm học 2019-2020

Môn thi: ELT2029 - Toán trong công nghệ

- Exam duration: 120 minutes.
- No electronic devices and text materials are allowed.
- Maximum marks: 10/13.

- Thời gian làm bài: 120 phút.
- Không sử dụng tài liệu và các thiết bị điện tử.
- Điểm tối đa: 10/13.

---

1. [3 marks] **Discrete random variables**
   (a) The PMF of a geometric random variable I is given by
   $$p_I[i] = 0.2(0.8)^i, i \geq 0$$
   i. Find the probability that I is greater than 1 and less than 5.
   ii. If it is desired that $P[I \leq \alpha] \approx 0.6$, what should be the value of α?

   (b) Let X be an exponential random variable with mean $\mu = 0.5$. A random variable Y is defined in terms of X, as $Y = 2X + 3$.
   i. What is the mean of Y?
   ii. What is the variance of Y?
   iii. Is Y an exponential random variable?

2. [3 marks] **One random variable**
   A radar receiver observes a voltage V which is equal to a signal s (due to reflection from a target) plus noise N: $V = s + N$. Assume that the signal s is a constant and the noise N is a Gaussian random variable with mean $\mu_N = 0$ and variance $\sigma_N^2 = 4$. Assume further that the radar will detect the target if the voltage V is greater than 2 volts. When the target is at a certain distance from the radar, the signal s is equal to 3 volts.

   (a) What is the probability that the radar detects the target?

   (b) As the target moves closer to the radar the signal becomes stronger. What would be the strength of s in volts required so that the probability of detecting the target is 0.98?

1. [3 điểm] **Biến ngẫu nhiên rời rạc**
   (a) Hàm PMF của biến ngẫu nhiên hình học I cho bởi:
   $$p_I[i] = 0.2(0.8)^i, i \geq 0$$
   i. Tính xác suất mà I lớn hơn 1 và nhỏ hơn 5.
   ii. Xác định giá trị α để $P[I \leq \alpha] \approx 0.6$?

   (b) Biến ngẫu nhiên Y cho bởi $Y = 2X + 3$, với X là biến ngẫu nhiên phân bố mũ có trung bình $\mu = 0.5$.
   i. Tính giá trị trung bình của Y?
   ii. Tính phương sai của Y?
   iii. Y có phải là biến ngẫu nhiên phân bố mũ không?

2. [3 điểm] **Một biến ngẫu nhiên**
   Một bộ thu radar thu điện áp V bằng tín hiệu s (do phản xạ từ mục tiêu) cộng với nhiễu N: $V = s + N$. Giả thiết rằng tín hiệu s là hằng số và nhiễu N là biến ngẫu nhiên Gauss có trung bình $\mu_N = 0$ và phương sai $\sigma_N^2 = 4$. Cũng giả thiết rằng radar sẽ phát hiện được mục tiêu nếu điện áp V lớn hơn 2 volts. Khi mục tiêu ở khoảng cách nhất định so với radar, tín hiệu s bằng 3 volts.

   (a) Tính xác suất radar phát hiện được mục tiêu?

   (b) Khi mục tiêu di chuyển gần radar hơn thì tín hiệu s trở nên mạnh hơn. Nếu nhiễu không đổi, tính độ mạnh tín hiệu s để xác suất phát hiện mục tiêu là 0.98?

3. [4 marks] **Pair of random variables**

(a) Let f_{X_1,X_2} be the joint PDF of two random variables X_1 and X_2, uniformly distributed over the region of $(-2 \le x_1 \le 2, -1 \le x_2 \le 1)$.

i. Find the joint PDF and the marginal PDFs.

ii. Determine $P[X_1^2 + X_2^2 \le 1]$.

iii. Compute the conditional PDF $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$.

(b) Two zero-mean unit-variance random variables X_1 and X_2 are described by the joint Gaussian PDF:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp^{-\dfrac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}}$$

Two new random variables Y_1 and Y_2 are defined through the following linear transformation:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

i. What would be a so that each point (y_1, y_2) has a unique corresponding point (x_1, x_2).

ii. Find $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$.

iii. Let $\rho = 1/2$. For what value of a are Y_1 and Y_2 independent? What are then the variances of Y_1 and Y_2?

3. [4 điểm] **Cặp biến ngẫu nhiên**

(a) Gọi f_{X_1,X_2} là PDF đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X_1 và X_2, phân bố đều trong khoảng $(-2 \le x_1 \le 2, -1 \le x_2 \le 1)$.

i. Tính PDF đồng thời và các PDF biên.

ii. Xác định $P[X_1^2 + X_2^2 \le 1]$.

iii. Tính xác suất có điều kiện $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$.

(b) Hai biến ngẫu nhiên X_1 và X_2 (trung bình bằng 0, phương sai bằng 1) có pdf Gauss đồng thời như sau:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp^{-\dfrac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}}$$

Hai biến ngẫu nhiên mới Y_1 and Y_2 được cho bởi:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

i. Xác định a sao cho ánh xạ với điểm (y_1, y_2) chỉ có một điểm tương ứng (x_1, x_2).

ii. Tìm $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$.

iii. Cho $\rho = 1/2$. Xác định giá trị a sao cho hai biến ngẫu nhiên Y_1 và Y_2 là độc lập? Khi đó, tính phương sai của Y_1 và Y_2?

Xem tiếp trang sau...

4. [2 marks] **Sum of random variables**
   (a) State the Central Limit Theorem and give a reason for its importance in electrical engineering.

   (b) A voltage of constant, but unknown, value is to be measured. Each measurement X_j is actually the sum of the desired voltage v and a noise voltage N_j of zero mean and standard deviation of $1\mu V$: $X_j = v + N_j$. Assume that the noise voltages are independent random variables. How many measurements are required so that the probability that the sample mean $M_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ is within $\epsilon = 1\mu V$ of the true mean is at least 0.99?

5. [1 mark] **Statistics**
   (a) What are measures of the quality of an estimator?

   (b) Assume that we two estimators for the sample variance, as given by

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2,$$

$$\hat{S}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2,$$

   where

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j.$$

   Which estimator is better? Explain.

4. [2 điểm] **Tổng các biến ngẫu nhiên**
   (a) Nêu Định lý Giới hạn Trung tâm và tầm quan trọng của định lý này trong kỹ thuật điện.

   (b) Thực hiện đo một điện áp v là hằng số nào đó nhưng ta không biết trước. Kết quả mỗi lần đo là một biến ngẫu nhiên $X_j = v + N_j$ với N_j là điện áp nhiễu có trung bình bằng 0, độ lệch chuẩn $1\mu V$. Giả thiết các điện áp nhiễu N_j là các biến ngẫu nhiên độc lập. Cần bao nhiêu mẫu đo, n, trong phép tính trung bình mẫu $M_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ để xác suất mà M_n lệch khỏi giá trị trung bình thực không quá $\epsilon = 1\mu V$ ít nhất là 0.99?

5. [1 điểm] **Thống kê**
   (a) Nêu các thước đo dùng để đánh giá chất lượng của một bộ ước lượng?

   (b) Cho hai bộ ước lượng phương sai mẫu như sau:

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2,$$

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X}_n)^2,$$

   trong đó

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j.$$

   Bộ ước lượng nào tốt hơn? Tại sao?

MỘT SỐ THÔNG TIN HỮU ÍCH

Geometric Random Variable

First Version: $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$

$p_k = p(1-p)^k \qquad k = 0, 1, \dots$

$$E[X] = \frac{1-p}{p} \qquad \text{VAR}[X] = \frac{1-p}{p^2} \qquad G_X(z) = \frac{p}{1-qz}$$

Remarks: X is the number of failures before the first success in a sequence of independent Bernoulli trials. The geometric random variable is the only discrete random variable with the memoryless property.

Second Version: $S_{X'} = \{1, 2, \dots\}$

$p_k = p(1-p)^{k-1} \qquad k = 1, 2, \dots$

$$E[X'] = \frac{1}{p} \qquad \text{VAR}[X'] = \frac{1-p}{p^2} \qquad G_{X'}(z) = \frac{pz}{1-qz}$$

Remarks: $X' = X + 1$ is the number of trials until the first success in a sequence of independent Bernoulli trials.

Uniform Random Variable

$S_X = [a, b]$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \le x \le b$$

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{VAR}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \Phi_X(\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$$

Exponential Random Variable

$S_X = [0, \infty)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0 \text{ and } \lambda > 0$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{VAR}[X] = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \Phi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$$

Remarks: The exponential random variable is the only continuous random variable with the memoryless property.

Gaussian (Normal) Random Variable

$S_X = (-\infty, +\infty)$

$$f_X(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \qquad -\infty < x < +\infty \quad \text{and} \quad \sigma > 0$$

$$E[X] = m \qquad \text{VAR}[X] = \sigma^2 \qquad \Phi_X(\omega) = e^{jm\omega - \sigma^2\omega^2/2}$$

Remarks: Under a wide range of conditions X can be used to approximate the sum of a large number of independent random variables.

$$\sum_{n=k}^{l} \beta^n = \begin{cases} \dfrac{\beta^k - \beta^{l+1}}{1-\beta}, & \beta \neq 1 \\ l - k + 1, & \beta = 1 \end{cases}$$

Xem tiếp trang sau...

TABLE 4.2 Comparison of $Q(x)$ and approximation given by Eq. (4.54).

x	$Q(x)$	Approximation	x	$Q(x)$	Approximation
0	5.00E-01	5.00E-01	2.7	3.47E-03	3.46E-03
0.1	4.60E-01	4.58E-01	2.8	2.56E-03	2.55E-03
0.2	4.21E-01	4.17E-01	2.9	1.87E-03	1.86E-03
0.3	3.82E-01	3.78E-01	3.0	1.35E-03	1.35E-03
0.4	3.45E-01	3.41E-01	3.1	9.68E-04	9.66E-04
0.5	3.09E-01	3.05E-01	3.2	6.87E-04	6.86E-04
0.6	2.74E-01	2.71E-01	3.3	4.83E-04	4.83E-04
0.7	2.42E-01	2.39E-01	3.4	3.37E-04	3.36E-04
0.8	2.12E-01	2.09E-01	3.5	2.33E-04	2.32E-04
0.9	1.84E-01	1.82E-01	3.6	1.59E-04	1.59E-04
1.0	1.59E-01	1.57E-01	3.7	1.08E-04	1.08E-04
1.1	1.36E-01	1.34E-01	3.8	7.24E-05	7.23E-05
1.2	1.15E-01	1.14E-01	3.9	4.81E-05	4.81E-05
1.3	9.68E-02	9.60E-02	4.0	3.17E-05	3.16E-05
1.4	8.08E-02	8.01E-02	4.5	3.40E-06	3.40E-06
1.5	6.68E-02	6.63E-02	5.0	2.87E-07	2.87E-07
1.6	5.48E-02	5.44E-02	5.5	1.90E-08	1.90E-08
1.7	4.46E-02	4.43E-02	6.0	9.87E-10	9.86E-10
1.8	3.59E-02	3.57E-02	6.5	4.02E-11	4.02E-11
1.9	2.87E-02	2.86E-02	7.0	1.28E-12	1.28E-12
2.0	2.28E-02	2.26E-02	7.5	3.19E-14	3.19E-14
2.1	1.79E-02	1.78E-02	8.0	6.22E-16	6.22E-16
2.2	1.39E-02	1.39E-02	8.5	9.48E-18	9.48E-18
2.3	1.07E-02	1.07E-02	9.0	1.13E-19	1.13E-19
2.4	8.20E-03	8.17E-03	9.5	1.05E-21	1.05E-21
2.5	6.21E-03	6.19E-03	10.0	7.62E-24	7.62E-24
2.6	4.66E-03	4.65E-03			

–Kết thúc đề thi–