Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2016
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ (m-1)x + 3y + z &= -15 \\ -x + y + 2z &= 5. \end{aligned}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = -2$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Tính $\det(A)$.

(b) Tìm a để ma trận A có hạng nhỏ nhất có thể.

Bài 3. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x,y,z) = (x + y + z, -x + 2y + 3z, 2x - y + z).$$

(a) Tim ma trận của T trong cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$.

(b) Tìm ma trận của T trong cơ sở $\{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x,y,z) = (x + y, x + z, 2x + y + z).$$

(a) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian ảnh $\mathrm{im}T$ của T.

(b) Dùng Gram-Schmidt để đưa cơ sở tìm được ở phần (a) về cơ sở trực chuẩn (theo tích vô hướng Euclid trong $\mathbb{R}^3$).

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

trong đó a là một số thực.

(a) Chứng minh rằng $\lambda = 2$ luôn là một giá trị riêng của A, với mọi a.

(b) Khi $a = 3$, hãy tìm một ma trận P khả nghịch (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, không sử dụng thiết bị điện tử (điện thoại, máy tính bảng,...) trong giờ kiểm tra. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. a) Khi $m = -2$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ -3x + 3y + z &= -15 \\ -x + y + 2z &= 5. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -15 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do vậy nghiệm của hệ là $x = 7 + t$, $y = t$ và $z = 6$, với $t \in \mathbb{R}$.

b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m :
Định thức của ma trận hệ số là $m + 2$. Với $m \neq -2$ thì định thức của ma trận hệ số khác không. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = -2$ thì hệ có vô số nghiệm (câu a)).

Bài 2. (a) $\det(A) = 5a + 10$.

(b) Vì có 2 hàng độc lập tuyến tính nên hạng nhỏ nhất có thể là 2. Chỉ bằng 2 khi định thức bằng 0, hay $a = -2$.

Bài 3. (a) Ma trận của T trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ma trận chuyển từ cở số chính tắc sang cơ sở $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận nghịch đảo của P là $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ma trận của T trong cơ sở B là

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 4. Ma trận A của T là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Không gian ảnh của T được xác định bởi không gian cột của A, hay không gian dòng của

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sau đây, ta đưa A^T về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi dòng:

$$D1 - D2 \longrightarrow D2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D3 - D2 \longrightarrow D3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy $\{v_1 = (1,1,2), v_2 = (0,1,1)\}$ là một cơ sở của $\mathrm{im}T$. Do đó $\dim(\mathrm{im}T) = 2$.

(b) Ta trực chuẩn hóa cơ sở tìm được ở mục (a) theo Gram-Schmidt:

$w_1 := v_1 := (1,1,2)$
$v_2 := (0,1,1)$
$w_2 := v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,1,1) - \dfrac{3}{6}(1,1,2) = \Big(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\Big).$

Vậy $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\Im T$ với

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big).$$
$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big).$$

Bài 5. a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

(1) $$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -a & 1 \\ 3 & \lambda-5 & 1 \\ 3 & -3 & \lambda-1 \end{pmatrix} \overset{R_3 - R_2 \to R_3}{=}$$

$$= det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -a & 1 \\ 3 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -\lambda+2 & \lambda-2 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{C_2 + C_3 \to C_2}{=} det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -a+1 & 1 \\ 3 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -a+1 \\ 3 & \lambda-4 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda - 7 + 3a).$$

Từ (1) ta thấy, với mọi số thực a ta luôn có $\lambda = 2$ là một nghiệm của đa thức đặc trưng của A, tức là một giá trị riêng của A.

b)Khi thay $a = 3$ vào (1) ta có

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda-2)^2(\lambda-1).$$

Do đó A có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = 2$(bội 2) và $\lambda_2 = 1$ (bội 1).

$\lambda_1 = 2$: Xét hệ

(2) $$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (2) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 2$ có dạng

(3) $$(x_1, x_2, x_3) = (s, t, -3s + 3t) = s(1, 0, -3) + t(0, 1, 3), s, t \in \mathbb{R}.$$

Khi $s = 1, t = 0$ ta được vector riêng $v_1 = (1, 0, -3)$. Khi $s = 0, t = 1$ ta được vector riêng $v_2 = (0, 1, 3)$.

$\lambda_2 = 1$: Xét hệ

(4) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ (4) ta được các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ có dạng

(5) $$(x_1, x_2, x_3) = (b, b, b), b \in \mathbb{R}.$$

Khi $b = 1$, ta được vector riêng $v_3 = (1, 1, 1)$.

Chọn P là ma trận với các vector cột là v_1, v_2, v_3 đã tìm được ở trên:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$