Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2018
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút)*

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x - y - 5z = 3 \\ 4x - 2y - mz = 6 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 10$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*)

a) Cho

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m^3 \end{pmatrix}.$$

Tìm m để $\operatorname{rank}(A) < 2$.

b) Tính định thức của ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x - 4y + 3z, -x + 3y - z).$$

(a) Tìm ma trận của T đối với các cở sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.
(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker T$ của T.
(c) Tìm số chiều của không gian ảnh $\operatorname{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$.
(d) Tập $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = (0, 1)\}$ có phải là không gian con của $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

Bài 4. (*2 điểm*) Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^4$, cùng với tích vô hướng thông thường trong $\mathbb{R}^4$, là không gian nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Tìm một cơ sở của V và dùng Gram-Schmidt để đưa cơ sở tìm được về cơ sở trực chuẩn.
(b) Tìm hình chiếu của vectơ $x = (1, 1, 1, 1)$ lên V.

Bài 5. (*2 điểm*)

(a) Định nghĩa giá trị riêng của một ma trận vuông. Định nghĩa ma trận chéo hóa được.
(b) Trong các ma trận sau đây, ma trận nào chéo hóa được? Hãy chéo hóa ma trận đó.

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Khi $m = 10$, hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x - y - 5z = 3 \\ 4x - 2y - 10z = 6 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -10 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do vậy nghiệm của hệ là $x = 2 + 3t,\ y = 1 + t$ và $z = t$ với $t \in \mathbb{R}$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m:
Định thức của ma trận hệ số là $10 - m$. Với $m \neq 10$ thì định thức của ma trận hệ số khác không, do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = 10$ thì hệ có vô số nghiệm (câu (a)).

Bài 2. a) $\operatorname{rank}(A) < 2$ khi và chỉ khi hai véc tơ hàng của A phụ thuộc tuyến tính. Từ đó nhận được $m^2 = 1$.
b) Khai triển theo hàng đầu tiên. Ta được định thức bằng 2.

Bài 3. **(1)** (*0,5 điểm*) Ma trận của T:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) (*0,5 điểm*) Hạt nhân là không gian nghiệm của hệ:

$$\begin{matrix} x - 4y + 3z = 0 \\ -x + 3y - z) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x - 4y + 3z = 0 \\ -y + 2z) = 0 \end{matrix}$$

Có nghiệm $(x, y, z) = (5t, 2t, t)$ với $t \in \mathbb{R}$. Vậy hạt nhân có một cở sở là $(5, 2, 1)$.
(3) (*0,5 điểm*) Theo Định lý về số chiều, chiều của không gian ảnh bằng $\dim T(\mathbb{R}^3) = 3 - \dim\ker T = 2$.
(4) (*0,5 điểm*) Tập $T^{-1}(0, 1)$ không phải là không gian con vì không chứa vec-tơ $(0, 0, 0)$.

Bài 4. (a) Một cơ sở của V: $\{v_1, v_2\} = \{(1, 3, 1, 0); (3, 10, 0, -1)\}$.
Áp dụng quá trình Gramschmidt, ta được

$$w_1 = v_1 = (1, 3, 1, 0);$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (0, 1, -3, -1).$$

Cơ sở trực chuẩn của V: $\{u_1, u_2\} = \{(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, 0); (0, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}})\}$.
(b)

$$proj_V(x) = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2 = (5/11, 12/11, 14/11, 3/11).$$

Bài 5. (1) Định nghĩa giá trị riêng: Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó số thực λ gọi là một giá trị riêng của A nếu tồn tại vectơ $x \in \mathbb{R}^n$ khác không sao cho $Ax = \lambda x$.

Định nghĩa ma trận chéo hóa được: Cho A là ma trận vuông cấp n. Khi đó A gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận cấp n khả nghịch P, sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận chéo.

(2) Với

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

đa thức đặc trưng của A là

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 6 & 4 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 16.$$

Ta có $\Delta = 6^2 - 4 \times 16 = 36 - 64 < 0$, suy ra đa thức đặc trưng của A vô nghiệm. Suy ra A không chéo hóa được.

Với

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

đa thức đặc trưng của B là

$$\det(\lambda I_2 - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 6 & -4 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16.$$

Ta có $\Delta = 6^2 + 4 \times 16 = 100$, suy ra đa thức đặc trưng của B có 2 nghiệm phân biệt

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 10}{2} = \{-2, 8\}.$$

uuy ra B chéo hóa được.

Với $\lambda = -2$,

$$\lambda I_2 - B = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hệ

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

có nghiệm $y = -2x$. Do đó ta có vectơ riêng $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Với $\lambda = 8$,

$$\lambda I_2 - B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Hệ

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

có nghiệm $x = 2y$. Do đó ta có vectơ riêng $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Chọn P là ma trận với các cột v_1, v_2, tức là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$