Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 2 năm học 2019-2020
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(*Thời gian làm bài: 120 phút*)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{cases} x + my - z = 1 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với m = 0.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & m \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm m để ma trận A có hạng bằng 3.

(b) Tìm điều kiện của m để A khả nghịch.

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (y + 2z, 3y + 8z, 4z).$$

(a) Chứng minh T là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của T.

(c) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker(T)$.

(d) Vec-tơ $(3, 1, 2)$ có thuộc không gian ảnh $range(T) = \operatorname{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$ hay không? Vì sao?

Bài 4. (*2 điểm*) Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng thông thường, sinh bởi ba vec-tơ: $(1, 0, 1), (1, 1, 3), (3, 1, 5)$.

(a) Tìm một cơ sở và số chiều của V.

(b) Dùng quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt để biến cơ sở tìm được ở ý (a) thành một cơ sở trực chuẩn của V.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và các vec-tơ riêng tương ứng của A.

(b) Tìm một ma trận trực giao P và một ma trận đường chéo D sao cho $D = P^T AP$.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 1

Bài 1. (a) Khi $m = 0$, hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x \quad\quad - z = 1 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \\ -x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do vậy nghiệm của hệ là $x = 1 + t$, $y = 1 + t$ và $z = t$ với $t \in \mathbb{R}$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m:
Định thức của ma trận hệ số là $6m$. Với $m \neq 0$ thì định thức của ma trận hệ số khác không. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất.
Khi $m = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (câu (a))

Bài 2. Dùng phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa A về dạng sau:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m-4 \end{pmatrix}.$$

(a) Hạng A bằng 3 khi và chỉ khi $m = 4$.
(b) Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $m \neq 4$.

Bài 3. (a) Chứng minh theo định nghĩa ánh xạ tuyến tính
(b) Ma trận cần tìm là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Qua phép biến đổi sơ cấp hàng ta thu được

$$A \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nên

$$\ker T = \{(t, 0, 0) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy $\{(1, 0, 0)\}$ là một cơ sở của $\ker T$ và số chiều của $\ker T$ là 1.
(d) $(3, 1, 2)$ không thuộc $\mathrm{im}(T)$ vì phương trình $AX = b$ vô nghiệm với $b = (3 \quad 1 \quad 2)^t$.

Bài 4. a) Xét $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Do đó một cơ sở của V là $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$. Số chiều của V là 2.
b) Áp dụng trực chuẩn Gram-Schmidt vào hệ gồm hai véc-tơ $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, ta được hệ trực chuẩn

$$\Big\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\Big\}.$$

Bài 5. (a) Đa thức đặc trưng của A là $|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

Do đó A có các giá trị riêng là: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (bội 2), $\lambda_3 = 2$.

Với $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$: $-I - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{phép khử Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ta nhận được hệ phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Đặt $x_2 = s, x_3 = t \implies x_1 = -s - t$. Vậy các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ có dạng $\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix}, s^2 + t^2 \neq 0$.

Với $\lambda_3 = 2 : 2I - A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{phép khử Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $x_3 = t \implies x_1 = x_2 = t$. Vậy các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 1$ có dạng $\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0$.

(b) Với giá trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, ta lấy $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt $w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$w_2 = v_2 - \frac{v_2.w_1}{w_1.w_1} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$p_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Với giá trị riêng $\lambda_3 = 2$ ta lấy $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rồi chuẩn hóa nó, ta được $p_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \implies D = P^T A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.