Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2019
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số a:

$$\begin{cases} x - 4y - 3z - t = 2 \\ x + y + 3az - 3a^2t = 2 \\ -3x + 3y - 4z + 11t = -6 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $a = 1$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số a.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tính định thức của ma trận $A + B$? Ma trận này có ma trận nghịch đảo hay không?
(b) Áp dụng kết quả của a) để giải phương trình ma trận $(A + B)X = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bài 3 (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x + 2z, x - y + 2z, 2x + y + 4z).$$

(a) Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của T.
(b) Tìm một cơ sở của không gian hạch (hạt nhân) $\ker T$.
(c) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian ảnh $\mathrm{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$. T có phải là toàn cấu không? Vì sao?

Bài 4 (*2 điểm*) Xét không gian $\mathbb{R}^3$ cùng với tích vô hướng thông thường. Cho hệ véc-tơ

$$\{v_1 = (a, 1, 1),\ v_2 = (1, 2, 2),\ v_3 = (1, 2, 1)\},$$

với a là một tham số.
(a) Với những giá trị nào của a thì tích vô hướng của các véc-tơ trên lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 1?
(b) Với $a = 0$, dùng phương pháp Gram-Schmidt để đưa hệ véc-tơ trên về hệ trực chuẩn.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và không gian riêng tương ứng của A.
(b) Tìm một ma trận trực giao P (nếu có) sao cho P^TAP là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 2

Bài 1. a) Khi $a = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x - 4y - 3z \quad\quad - 1 = 2 \\ \quad\quad y - \ \ z + 4t \quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad\quad z - 2t \quad\quad = 0 \end{cases}$$

(Các phép biến đổi:
(a) $R_2 - 1 \times R_1\,;\, R_3 + 3 \times R_1\,;$
(b) $R_3 + 2 \times R_2\,;\, R_2 \leftrightarrows R3\,;$
(c) $R_3 - 5 \times R_2\,;\, R_3 \times \frac{1}{11}$.)

Từ đó hệ có vô số nghiệm: $x = -t + 2\,, y = -2t\,, z = 2t\,, t \in \mathbb{R}\,.$

b) Dùng các phép biến đổi tương tự câu trên, đưa về hệ:

$$\begin{cases} x - 4y - \quad\quad 3z \quad\quad\quad\quad\quad\quad - 1 = 2 \\ \quad\quad y + \quad (6a-7)z + \ \ (10 - 6a^2)t \quad\quad = 0 \\ \quad\quad\quad (38 - 27a)z + (27a^2 - 49)t \quad\quad = 0 \end{cases}$$

Ta có nhận xét rằng với mọi giá trị của a: 1) hệ luôn có một nghiệm là $x = 2\,, y = z = t = 0\,;$ 2) hệ phương trình thuần nhất tương ứng luôn có vô số nghiệm (số ẩn nhiều hơn số phương trình). Do đó hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm với mọi giá trị của a.

(Đề bài chỉ yêu cầu biện luận số nghiệm nên không bắt buộc phải viết công thức nghiệm cụ thể.)

Bài 2. a) Ta có

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó $\det(A + B) = -2 + 3 - 4 + 3 + 2 - 4 = -2 \neq 0$. Suy ra ma trận $A + B$ khả nghịch, nói cách khác, tồn tại ma trận $(A + B)^{-1}$.

b) Vì ma trận $(A + B)$ có ma trận nghịch đảo nên ta có $X = (A + B)^{-1}.b$.

Ma trận nghịch đảo của $(A + B)$ được tính bằng phương pháp phụ đại số như sau:

Ta có $(A + B)^{-1} = \dfrac{1}{-2}.C^t$, trong đó C^t là ma trận chuyển vị của ma trận $C = [c_{ij}]_{3\times 3}$ với các phần tử của nó được tính như sau:

$c_{11} = (-1)^{1+1}.\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 0;$

$c_{12} = (-1)^{1+2}.\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -1;$

$c_{13} = (-1)^{1+3}.\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -1;$

$c_{21} = (-1)^{2+1}.\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = -4;$

$c_{22} = (-1)^{2+2}.\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -1;$

$c_{23} = (-1)^{2+3}.\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = 5;$

$c_{31} = (-1)^{3+1}.\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2;$

$c_{32} = (-1)^{3+2}.\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1;$

$c_{33} = (-1)^{3+3}.\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -3.$

Do đó $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, hay $C^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

Vậy $(A+B)^{-1} = \frac{1}{-2}.C^t = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -5/2 & 3/2 \end{bmatrix}$.

Ta suy ra nghiệm của phương trình ma trận là

$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -5/2 & 3/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$.

Bài 3. (1) [*0.5 điểm*] Ma trận cần tìm là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) Qua phép biến đổi sơ cấp hàng ta thu được

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nên

$$\ker T = \{(-2t, 0, t) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Vậy $\{(-4, 2, 7)\}$ là một cơ sở của $\ker T$ và số chiều của $\ker T$ là 1. [*0.5 điểm*]

(3) [*0.5 điểm*] Một cơ sở của $\operatorname{im}(T)$ là $\{(1,1,2), (0,-1,1)\}$ và số chiều của $\operatorname{im}(T)$ là 2.

([*0.5 điểm*] T không phải là toàn ánh vì số chiều của $\operatorname{im}(T)$ là 2 nên $\operatorname{im}(T) \neq \mathbb{R}^3$.

Bài 4. (a) Ta có:

- $x := \langle v_1, v_2 \rangle = a + 4;$
- $y := \langle v_1, v_3 \rangle = a + 3;$
- $z := \langle v_1, v_3 \rangle = 7.$

Dễ thấy $x - y = 1$ nên y và x là hai số liên tiếp của cấp số cộng. Vậy ta chỉ có hai khả năng:

- Nếu 7 là số đầu của cấp số cộng thì $a = 5$.
- Nếu 7 là số cuối của cấp số cộng thì $a = 2$.

(b) Với $a = 0$, ta có hệ $\{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,2,2), v_3 = (1,2,1)\}$. Ta trực chuẩn hóa hệ này theo Gram-Schmidt:

$w_1 := v_1 := (0,1,1);$

$w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (1,2,2) - \frac{4}{2}(0,1,1) = (1,0,0);$

$w_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = (1,2,1) - \frac{3}{2}(0,1,1) - \frac{1}{1}(1,0,0) = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$

Vậy $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ với

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big);$$
$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = (1, 0, 0);$$
$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Bài 5. Đa thức đặc trưng của A là: $|\lambda I_3 - A| = (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$. A có 3 giá trị riêng $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$.

$4I_3 - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ta tìm được không gian riêng $V_4(A) = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$.

Tương tự, ta tìm được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$ là $V_1(A) = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ và không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = -2$ là $V_{-2}(A) = \{t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$.

(1) Chọn $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Do các vector đôi một vuông góc với nhau nên ta chỉ cần chuẩn hóa chúng, ta nhận được: $p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

Lấy $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \Longrightarrow P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.