

# Đề thi Kết thúc môn học, Học kỳ 2 năm học 2019-2020

## Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

**Bài 1.** (2 điểm) Cho hệ phương trình với tham số  $m$ :

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + (m^2 + 3)z = m \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với  $m = 1$ .

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số  $m$ .

**Bài 2.** (2 điểm) Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -3 & 0 \\ -9 & 1 & 3 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & -1 \\ p & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

trong đó  $p$  là tham số.

(a) Khi  $p = 6$ , hãy tính  $\det(A)$ .

(b) Tìm tất cả các giá trị của  $p$  để  $\text{rank}(A) < 4$ .

**Bài 3** (2 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định như sau:

$$T(x, y, z) = (x - 2z, 2x - y - 2z, -2x + 2y + z).$$

(a) Chứng minh  $T$  là ánh xạ tuyến tính.

(b) Tìm ma trận chuẩn tắc (chính tắc) của  $T$ .

(c) Tìm một cơ sở của không gian ảnh  $\text{range}(T) = \text{im}(T)$ .

(d) Vec-tơ  $(1, 2, 3)$  có thuộc không gian ảnh  $\text{range}(T) = \text{im}(T) = T(\mathbb{R}^3)$  hay không? Vì sao?

**Bài 4.** (2 điểm) Xét hệ vec-tơ  $B = \{(\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}, 0), (0, 1, 0, 0), (-\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ .

(a) Chứng minh rằng  $B$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}_4$  với tích vô hướng thông thường (tích chấm).

(b) Tìm tọa độ của vec-tơ  $x = (2, 3, 4, -1)$  đối với cơ sở  $B$ .

**Bài 5.** (2 điểm) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Chứng minh  $\lambda = 4$  là một giá trị riêng của  $A$ .

(b) Tìm một ma trận  $P$  khả nghịch và một ma trận đường chéo  $D$  (nếu có) sao cho  $D = P^{-1}AP$ .

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

## Đáp án: Đề số 2

**Bài 1.** Ma trận (bổ sung) của hệ là

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & m^2 + 3 & m \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Thực hiện biến đổi sơ cấp hàng ta thu được

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & m^2 - 1 & m - 1 \end{pmatrix}$$

(a) Khi  $m = 1$ , ma trận bổ sung của hệ có dạng hình thang là

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do vậy nghiệm của hệ là  $x = -2t$ ,  $y = -1$  và  $z = t$  với  $t \in \mathbb{R}$ .

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số  $m$ :

Với  $m \neq \pm 1$  thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Với  $m = -1$  thì hệ vô nghiệm

Với  $m = 1$  thì hệ có vô số nghiệm.

**Bài 2** a) Có thể chẳng hạn lấy hàng 2 trừ đi hàng 3 rồi khai triển theo cột 2. Kết quả: khi  $p = 6$ ,  $\det(A) = -1$ .

b) Đưa về dạng bậc thang theo hàng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3x + 19 \end{pmatrix}$$

Các phép biến đổi:

(a)  $R_1 + R_2$

(b)  $R_2 + 9 \times R_1; R_3 + 6 \times R_1; R_4 - x \times R_1$

(c)  $R_2 - R_3$

(d)  $R_3 - 2 \times R_2$

(e)  $R_2 \leftrightarrow R_3$

(f)  $R_3 - 3 \times R_2; R_4 + x \times R_2$

(g)  $R_4 + 2 \times R_3$

Từ đó  $\text{rank}(A) < 4$  nếu và chỉ nếu  $-3x + 19 = 0$ , hay  $x = 19/3$ .

**Bài 3.** a) [0.25 điểm]  $\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$T(u + v) = T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$= (u_1 + v_1 - 2(u_3 + v_3), 2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) - 2(u_3 + v_3), -2(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + u_3 + v_3)$$

$$= (u_1 - 2u_3, 2u_1 - u_2 - 2u_3, -2u_1 + 2u_2 + u_3) + (v_1 - 2v_3, 2v_1 - v_2 - 2v_3, -2v_1 + 2v_2 + v_3)$$

$$= T(u) + T(v),$$

[0.25 điểm]  $\forall k \in \mathbb{R}$ ,

$$T(ku) = T(ku_1, ku_2, ku_3)$$

$$= (ku_1 - 2ku_3, 2ku_1 - ku_2 - 2ku_3, -2ku_1 + 2ku_2 + ku_3)$$

$$= k(u_1 - 2u_3, 2u_1 - u_2 - 2u_3, -2u_1 + 2u_2 + u_3)$$

$$= kT(u).$$

b) [0.5 điểm] Ma trận chuẩn tắc của  $T$  là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) [0.5 điểm] Qua phép biến đổi sơ cấp cột ta thu được

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nên Vậy  $\{(1, 2, -2), (0, -1, 2), (0, 0, 1)\}$  là một cơ sở của  $\text{Im}(T)$ .

d) [0.5 điểm] Do  $\text{Im}(T)$  có số chiều bằng 3 bằng số chiều của  $\mathbb{R}^3$  và  $\text{Im}(T) \subset \mathbb{R}^3$ , nên  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ , nên  $(1, 2, 3) \in \text{Im}(T)$ .

**Bài 4.** (a) Đặt  $v_1 = (\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $v_3 = (-\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}, 0)$ ,  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ . Ta có

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$$

tức là  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  là tập hợp các vec-tơ trực giao, do đó  $B$  độc lập tuyến tính. Vì  $B$  là tập hợp 4 vec-tơ độc lập tuyến tính trong không gian  $\mathbb{R}_4$  có số chiều là 4, nên  $B$  là một cơ sở của không gian này. Mặt khác, ta có

$$\|v_i\| = 1 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

nên  $B$  là cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{R}_4$ .

(b) Theo công thức hệ số Fourier, ta có tọa độ của vec-tơ  $x$  trong cơ sở  $B$  là

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x \cdot v_1 \\ x \cdot v_2 \\ x \cdot v_3 \\ x \cdot v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{13} \\ 3 \\ -\frac{4}{13} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Bài 5.** (a) Đa thức đặc trưng của  $A$ :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5 - \lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$$

Do đó  $\lambda = 4$  là 1 giá trị riêng của  $A$ .

(b) Từ ý (1) ta thấy  $A$  có 2 giá trị riêng là  $-2$  (bội 2) và 4.

Không gian con riêng của  $A$  ứng với giá trị riêng  $\lambda = -2$  là không gian nghiệm của hệ thuần nhất có ma trận hệ số:

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Giải hệ ta được

$$V_{-2}(A) = \{(s - t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$$

Do đó  $V_{-2}(A)$  có một cơ sở là  $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

Tương tự  $V_4(A)$  có một cơ sở là  $\{(1, 1, 2)\}$ .

Đặt  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , ta có chéo hóa của  $A$ :

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = P^{-1}AP$$