Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2019
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Xét hệ phương trình tuyến tính sau, ở đó x, y, z là ẩn và m là tham số:

$$\begin{cases} x + 2y - \quad 2z = 1 \\ 2x + 3y - \quad 6z = 8 \\ x + 3y + (m-1)z = -m - 5. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình với $m = 2$.

(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

(a) (0.5 điểm) Tính $I_3 - 2A^TA$, trong đó I_3 là ma trận đơn vị cấp 3, U^T là chuyển vị của U.

(b) (0.5 điểm) Tính $(I_3 - 2A^TA)^2$.

(c) (1 điểm) Ma trận $I_3 - 2A^TA$ có khả nghịch hay không? Nếu có, tính $(I_3 - 2A^TA)^{-1}$.

Bài 3 (*2 điểm*) Xét các ánh xạ sau đây:

(a) $T_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T_1(v) = -v$.

(b) $T_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(x, y, z) = -(x+1, y+z)$.

(c) T_3 là phép chiếu của $\mathbb{R}^3$ lên trục hoành Ox: $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$.

Những ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính? Giải thích câu trả lời. Tìm ma trận chính tắc (chuẩn tắc) của các ánh xạ tuyến tính này.

Bài 4. (*2 điểm*) Cho ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x, y, z) = (x + y + z, x + ay + z, x + y + (a+1)z),$$

với a là một tham số.

(a) Tìm tất cả các giá trị của a để số chiều của không gian ảnh $\operatorname{im}(T)$ của T bằng 2?

(b) Chọn một trong các giá trị a tìm được ở câu (a), tìm một cơ sở trực chuẩn (theo tích vô hướng thông thường trong $\mathbb{R}^3$) của không gian ảnh của T.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng của ma trận A.

(b) Tìm một ma trận trực giao P (nếu có) sao cho P^TAP là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 3

Bài 1. a) Với $m = 2$, ma trận hệ số mở rộng tương đương với:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Hệ có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (1, -2, -2)$.

b) Ma trận hệ số mở rộng tương đương với:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & m-1 & -m \end{array}\right]$$

Từ đó:

- Nếu $m = 1$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $m \neq 1$ thì hệ có một nghiệm duy nhất

$$x = \frac{7m - 13}{m - 1}, y = \frac{-4m + 6}{m - 1}, z = \frac{-m}{m - 1}.$$

Bài 2. (a) $I_3 - 2A^T A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $(I_3 - 2A^T A)^2 = I_3$.

(c) Từ kết quả phần (b) ta suy ra ma trận $I_3 - 2A^T A$ khả nghịch và

$$(I_3 - 2A^T A)^{-1} = I_3 - 2A^T A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 3. 1. (0.5 điểm) T_1 là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, với mọi $u, v \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}$, ta kiểm tra

$$T_1(u + v) = -(u + v) = -u - v = T_1(u) + T_1(v),$$
$$T_1(cu) = -cu = cT_1(u).$$

(0.25 điểm) Ma trận chính tắc của T_1 là $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.(0.5 điểm) T_2 không là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, lấy $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Ta có

$$T_2(u + v) = T_2(x + x', y + y', z + z') = -(x + x' + 1, y + y' + z + z'),$$
$$T_2(u) + T_2(v) = -(x + 1, y + z) - (x' + 1, y' + z') = -(x + x' + 2, y + y' + z + z').$$

Do đó $T_2(u + v) \neq T_2(u) + T_2(v)$.

3. (0.5 điểm) T_3 cho bởi công thức $T_3(x, y, z) = (x, 0, 0)$. Đây là ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, lấy $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Ta có

$$T_3(u + v) = T_3(x + x', y + y', z + z') = (x + x', 0, 0) = T_3(u) + T_3(v),$$
$$T_3(cu) = (cx, 0, 0) = cT_3(u).$$

(0.25 điểm) Ma trận chính tắc của T_3 là $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Bài 4. Ma trận A của T là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{bmatrix} = A^T$$

(a) Dễ thấy không gian ảnh của T được xác định bởi không gian dòng của A. Để số chiều của không gian ảnh im$T$ của T bằng 2 thì A phải có hạng bằng 2. Bằng các phép biến đổi dòng, ta đưa A về ma trận sau:

$$\begin{matrix} -D1 + D2 \longrightarrow D2 \\ -D1 + D3 \longrightarrow D3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Vậy A có hạng bằng 2 khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $a = 1$.

(b) Với $a = 0$, hệ $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,-1,0)\}$ là một cơ sở của $\Im T$. Ta trực chuẩn hóa cơ sở này theo Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} &w_1 := v_1 := (1,1,1); \\ &w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,-1,0) - \frac{-1}{3}(1,1,1) = \Big(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\Big). \end{aligned}$$

Vậy $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của im$T$ với

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big); \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big). \end{aligned}$$

Với $a = 1$, hệ $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,0,1)\}$ là một cơ sở của $\Im T$. Ta trực chuẩn hóa cơ sở này theo Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} &w_1 := v_1 := (1,1,1); \\ &w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \Big(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big). \end{aligned}$$

Vậy $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\Im T$ với

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big); \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \Big(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\Big). \end{aligned}$$

Ghi chú: Chỉ cần xét một trong các giá trị của a.

Bài 5. a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-4 \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+4).$$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$.
b)Với $\lambda_1 = 1$: Xét hệ

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ trên ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ có dạng

$$R_1^3(A) = \{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} |t \in R\} = span(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}).$$

Ta có vector riêng $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, chuẩn hóa $p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Với $\lambda_2 = 5$: Xét hệ

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ trên ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 5$ có dạng

$$R_5^3(A) = \{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 4t \end{pmatrix} |t \in R\} = span(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$$

Ta có vector riêng $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, chuẩn hóa $p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$.

Với $\lambda_3 = -4$: Xét hệ

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ trên ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = -4$ có dạng

$$R_{-4}^3(A) = \{ \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} |t \in R\} = span(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}). \tag{1}$$

Ta có vector riêng $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, chuẩn hóa $p_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Khi đó:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$