Đề thi Kết thúc môn học, Đông 2019
Môn: Đại số tuyến tính

Trường Đại học Công nghệ - Đại học Quốc gia Hà Nội

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1. (*2 điểm*) Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 10 \\ mx - 3y - 3z &= 22 \\ 4x - 2y + 3z &= -2. \end{aligned}$$

(a) Giải hệ phương trình trên với $m = 2$.
(b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Bài 2. (*2 điểm*) Cho hai ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 12 \\ -3 & m & -9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1-m \end{bmatrix}.$$

(a) Tính tích AB.
(b) Ma trận tích AB có là ma trận khả nghịch không? Tại sao?

Bài 3 (*2 điểm*) Cho $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ tuyến tính cho bởi:

$$T(x, y, z) = (x + 16y - 12z, 2x + 5y - 2z, -z).$$

Cho B là cơ sở chính tắc (chuẩn tắc) của $\mathbb{R}^3$ và $B' = \{(2, 1, 0), (-1, 1, 0), (-2, 1, 1)\}$.
(a) Chứng minh rằng B' là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
(b) Tìm ma trận của T đối với cơ sở B, và ma trận của T đối với cơ sở B'.

Bài 4 (*2 điểm*) Xét không gian $\mathbb{R}^3$ cùng với tích vô hướng thông thường. Cho hệ vectơ

$$\{v_1 = (1, 0, 2);\ v_2 = (a, 1, a-1);\ v_3 = (a, 2, 1)\}.$$

(a) Với những giá trị nào của a thì các véc-tơ trên là các đỉnh của một tam giác đều?
(b) Với $a = -1$, dùng phương pháp Gram-Schmidt để đưa hệ véc-tơ trên về dạng trực chuẩn.

Bài 5. (*2 điểm*) Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm tất cả các giá trị riêng và không gian con riêng tương ứng của ma trận A.
(b) Tìm một ma trận khả nghịch P (nếu có) sao cho $P^{-1}AP$ là một ma trận đường chéo. Viết ma trận đường chéo nhận được.

Không sử dụng tài liệu, máy tính bảng, điện thoại thông minh. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án: Đề số 4

Bài 1. a) Khi $m = 2$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 10 \\ 2x - 3y - 3z &= 22 \\ 4x - 2y + 3z &= -2. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -3 & 22 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2 \\ 0 & 0 & 19/3 & -38 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất là $x = 5$, $y = 2$ và $z = -6$.

b) Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.

Ta có $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 10 \\ m & -3 & -3 & 22 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -6-3m & -6-m & 44-10m \\ 0 & -8 & 1 & -22 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -6-3m & -6-m & 44-10m \\ 0 & 0 & 11m+54 & -836-146m \end{bmatrix}.$

Khi $m \neq \frac{-54}{11}$ thì hệ có nghiệm duy nhất, ngược lại hệ vô nghiệm.

Bài 2. $a)$ Ta có tích $A.B = \begin{pmatrix} 22 & 37 & 7-4m \\ 48 & 68 & 16-8m \\ 2m-30 & -3m-60 & 7m-9 \end{pmatrix}.$

$b)$ Ta đặt $C = A.B$ với $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 12 \\ -3 & m & -9 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1-m \end{pmatrix}.$

Khi đó $\det C = \det A.\det B$, vì ma trận A có hai cột 1 và 3 tỉ lệ với nhau nên suy ra $\det A = 0$ với mọi giá trị của m. Do đó ta có $\det C = 0$ với mọi m, nói cách khác ma trận tích $A.B$ không khả nghịch với mọi giá trị của m.

Bài 3. (a) Xét ma trận có các cột là các phần tử của B':

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Định thức của ma trận này là $3 \neq 0$ (khai triển Laplace theo hàng 3), nên ba vectơ của B' là độc lập tuyến tính. Suy ra B' là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Ma trận A của T đối với cơ sở B là ma trận chính tắc của T. Ta có

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,2,0), \\ T(0,1,0) &= (16,5,0), \\ T(0,0,1) &= (-12,-2,-1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 16 & -12 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Đặt $u_1 = (2,1,0), u_2 = (-1,1,0), u_3 = (-2,1,1)$. Ta có

$$\begin{aligned} T(u_1) &= (18,9,0), \\ T(u_2) &= (15,3,0), \\ T(u_3) &= (2,-1,-1). \end{aligned}$$

Ma trận X của T đối với B' là nghiệm của hệ

$$\left(u_1 \vdots u_2 \vdots u_3\right) X = \left(T(u_1) \vdots T(u_2) \vdots T(u_3)\right),$$

hay

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Xét ma trận bổ sung

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 18 & 15 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{H1} \leftarrow \text{H1-2H2}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{H1} \leftrightarrow \text{H2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{H1} \leftarrow \text{H1-H3, H2} \leftarrow \text{H2+4H3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{H2} \leftarrow \text{H2/(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{H1} \leftarrow \text{H1-H2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy ma trận của T đối với cơ sở B' là

$$X = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4. (a) Để các vectơ trên là đỉnh một tam giác đều thì ta phải có

$$\begin{aligned} & \|v_1 - v_2\| = \|v_2 - v_3\| = \|v_3 - v_1\| \\ \iff & \|(1-a,-1,3-a)\| = \|(0,-1,a-2)\| = \|(a-1,2,-1)\| \\ \iff & (a-1)^2 + 1 + (a-3)^2 = 1 + (a-2)^2 = (a-1)^2 + 5 \\ \iff & 2a^2 - 8a + 11 = a^2 - 4a + 5 = a^2 - 2a + 6 \\ \iff & a^2 - 6a + 6 = -2a = 1 \\ \iff & a^2 + 9 = -2a = 1. \end{aligned}$$

Vậy không có giá trị a nào để các vectơ trên là đỉnh một tam giác đều.

(b) Với $a = -1$, hệ trở thành $\{v_1 = (1,0,2);\ v_2 = (-1,1,-2);\ v_3 = (-1,2,1)\}$, ta trực chuẩn hóa theo Gram-Schmidt:

$$w_1 := v_1 := (1,0,2)$$
$$w_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (-1,1,-2) - \frac{-5}{5}(1,0,2) = (0,1,0).$$
$$w_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = (-1,2,1) - \frac{1}{5}(1,0,2) - \frac{2}{1}(0,1,0) = (-\frac{6}{5}, 0, \frac{3}{5}).$$

Vậy hệ trực chuẩn nhận được là $\{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big).$$
$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = (0,1,0).$$
$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \Big(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big).$$

Bài 5. (a) Đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = det\begin{pmatrix} \lambda-3 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & 2 \\ 1 & 3 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$.

Với $\lambda_1 = -2$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ trên ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -2$ có dạng

$$R^3_{-2}(A) = \{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} | t \in R\} = span(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Ta có vector riêng $p_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Với $\lambda_2 = 2$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ trên ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 2$ có dạng

$$R^3_2(A) = \{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} | t \in R\} = span(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Ta có vector riêng $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Với $\lambda_3 = 4$: Xét hệ

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Giải hệ trên ta được không gian riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 4$ có dạng

(1) $$R_4^3(A) = \{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix} | t \in R\} = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Ta có vector riêng $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Khi đó:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$