Đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1094) - Đề số 1
(Học kỳ I năm học 2013-2014, thời gian làm bài 150 phút)

Câu 1. (*1,5đ*) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & \text{khi} \quad x\neq 0\\ a & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$

Tìm giá trị của a để hàm số liên tục trên **R**

Câu 2. (*1,5đ*) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

Câu 3. (*1,5đ*) Tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2x^2-3x+1}$

Câu 4. (*1,5đ*) Tính tích phân $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx$

Câu 5. (*1,5đ*) Tìm bán kính hội tụ, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}(x+2)^n$

Câu 6. **(*1,5đ*)** Khai triển hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-4x+3}$ thành chuỗi lũy thừa của x và xác định miền hội tụ của chuỗi

Câu 7. (*1,0đ*) Thí sinh chỉ chọn làm một trong hai câu **7a.** hoặc **7b.** sau đây:

7a. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+x^{2n}}$ trên **R**

7b. Định nghĩa đạo hàm của hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b), tại điểm $x\in(a, b)$ và áp dụng để tìm giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$ trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

==============================

Đáp án và thang điểm Đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1094) - Đề số 1
(Học kỳ I năm học 2013-2014, thời gian làm bài 150 phút)

Câu	Lời giải	Điểm
1	Vì sin3x và x là các hàm sơ cấp nên khi $x\neq 0$ thì hàm $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$ là hàm sơ cấp nên liên tục trên R\{0}= $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$	0,25
	do đó f(x) liên tục trên R $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục tại x = 0	0,25
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}3\dfrac{\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}$	0,25
	đặt t = 3x, khi $x\to 0$ thì $t\to 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=3.1=3\,(1)$	0,25
	Theo định nghĩa, f(x) liên tục tại x = 0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ (2), mặt khác, theo giả thiết f(0) = a (3)	0,25
	từ (1), (2) và (3) suy ra a = 3	0,25
	Cộng	**1,50**
Cách khác	Khi $x\to 0$ thì $\sin 3x\to 0$ $\Rightarrow\dfrac{\sin 3x}{x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên có thể áp dụng quy tắc Lôpital để tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$	0,25
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 3x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}3\cos 3x=3\,(1)$	0,25
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}}$	0,25

Câu	Lời giải	Điểm
	khi $x \to \infty \Rightarrow \frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2+\frac{1}{x}} \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\frac{\pi x}{2x+1} \to \tan\frac{\pi}{2} = \infty \Rightarrow \ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right) \to \infty$ $\Rightarrow \frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ nên có thể áp dụng quy tắc Lôpital để tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}$	0,25
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right]'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi}{(2x+1)^2\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}\tan\frac{\pi x}{2x+1}} =$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\pi}{(2x+1)^2\sin\frac{2\pi x}{2x+1}} \overset{(*)}{=}$	0,25
	$= \frac{2\pi}{\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)^2\sin\frac{2\pi x}{2x+1}} = \frac{2\pi}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}}$ khi $x \to \infty$ $\Rightarrow \frac{2\pi x}{2x+1} = \frac{2\pi}{2+\frac{1}{x}} \to \pi \Rightarrow \sin\frac{2\pi x}{2x+1} \to \sin\pi = 0, \frac{1}{(2x+1)^2} \to 0$ $\Rightarrow \frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên có thể áp dụng quy tắc Lôpital để tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}$	0.25
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{2\pi x}{2x+1}\right)'}{\left[\frac{1}{(2x+1)^2}\right]'} = \frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left(-\cos\frac{2\pi x}{2x+1}\right) = \frac{\pi}{2}.\infty.1 = \infty$	0,25
	$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}{\frac{1}{(2x+1)^2}}} = \frac{2\pi}{\infty} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$	0,25
	Cộng	**1,50**
Cách khác	Từ $^{(*)}$: Đặt $t = \pi - \frac{2\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2x+1} \Rightarrow \frac{2\pi x}{2x+1} = \pi - t$ và $2x+1 = \frac{\pi}{t} \Rightarrow \sin\frac{2\pi x}{2x+1} = \sin(\pi - t) = \sin t$ và khi $x \to \infty$ thì $t \to 0$	0,25
	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\pi}{(2x+1)^2\sin\frac{2\pi x}{2x+1}} = \frac{2}{\pi}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{\sin t} = \frac{2}{\pi}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{\pi}\frac{\lim\limits_{t\to 0} t}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{\pi}.\frac{0}{1} = 0$	0,25
	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$	0,25

Câu	Lời giải	Điểm
3	$f(x)=\frac{x}{2x^2-3x+1}=\frac{x}{(x-1)(2x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}$	0,25
	$\frac{A(2x-1)+B(x-1)}{(x-1)(2x-1)}=\frac{(2A+B)x-(A+B)}{(x-1)(2x-1)}\Rightarrow\begin{cases}2A+B=1\\A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}\Rightarrow f(x)==\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x-1}$	0,25
	Có thể chứng minh hoặc chỉ cần đưa ra công thức $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$	0.25
	$\Rightarrow\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!1^n}{(x-1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$	0,25
	$\Rightarrow\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!2^n}{(2x-1)^{n+1}}$	0,25
	$\Rightarrow f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left[\left(\frac{1}{(x-1)^{(n+1)}}-\frac{2^n}{(2x-1)^{n+1}}\right)\right]$	0,25
	Cộng	**1,50**
4	$I=\int_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{1+\ln^2x}}{x}dx=\int_1^e\ln x\sqrt[3]{1+\ln^2x}d(\ln x)$	0,25
	$I=\frac{1}{2}\int_1^e(1+\ln^2x)^{\frac{1}{3}}d(1+\ln^2x)$	0,25
	đặt t = 1 + ln^{2}x, khi x = 1 thì t = 1 và khi x = e thì t = 2 $\Rightarrow I=\int_1^2 t^{\frac{1}{3}}dt$	0,25
	$I=\frac{3}{8}t^{\frac{4}{3}}\Big\vert_1^2$	0,50
	$I=\frac{3}{8}\left(2^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{8}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right)$	0,25
	Cộng	**1,50**
Cách khác	$I=\int_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{1+\ln^2x}}{x}dx$, đặt $t=\sqrt[3]{1+\ln^2x}$	0,25
	$\Rightarrow t^3=1+\ln^2x\Rightarrow 3t^2dt=2\frac{\ln x}{x}dx\Rightarrow\frac{\ln x}{x}dx=\frac{3}{2}t^2dt$ và khi x = 1 thì t = 1 và khi x = e thì $t=\sqrt[3]{2}$	0,25
	$I=\frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}}t^3dt$	0,25
	$I=\frac{3}{8}t^4\Big\vert_1^{\sqrt[3]{2}}$	0,50
	$I=\frac{3}{8}\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^4-1^4\right]=\frac{3}{8}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right)$	0,25
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}(x+2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ với $a_n=\frac{n!2^n}{n^n}$ và t = x + 2	0,25
	Gọi bán kính hội tụ của chuỗi là R, khi đó	0,25

Câu	Lời giải	Điểm
	$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2^{n+1}n^n}{(n+1)^n n!2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}=\frac{e}{2}$	
	$\Rightarrow$ khoảng hội tụ của chuỗi là $\lvert t\rvert<R\Leftrightarrow\lvert x+2\rvert<R=\frac{e}{2}\Rightarrow-\frac{e}{2}-2<x<\frac{e}{2}-2$	0,25
	tại $x=\frac{e}{2}-2$ (đầu mút phải) chuỗi trở thành chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ với $b_n=\frac{n!e^n}{n^n}\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$ do $e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow b_n$ là dãy tăng và không tiến về 0 khi $n\to\infty$ nên chuỗi phân kỳ tại đầu mút phải của khoảng hội tụ	0,25
	tại $x=-\frac{e}{2}-2$ (đầu mút trái) chuỗi trở thành chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!e^n}{n^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ với $b_n=(-1)^n\frac{n!e^n}{n^n}\Rightarrow\left\lvert\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\rvert=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1$ do $e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Rightarrow\lvert b_n\rvert$ là dãy tăng và không tiến về 0 khi $n\to\infty$ nên chuỗi phân kỳ tại đầu mút trái của khoảng hội tụ	0,25
	$\Rightarrow$ miền hội tụ của chuỗi là $\left(-\frac{e}{2}-2,\frac{e}{2}-2\right)$ hay $-\frac{e}{2}-2<x<\frac{e}{2}-2$	0,25
	Cộng	**1,50**
6	$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-4x+3}=1+\frac{5x-2}{(x-3)(x-1)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{13}{x-3}-\frac{3}{x-1}\right)$	0,25
	$\frac{13}{x-3}=-\frac{13}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}=-\frac{13}{3}.\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=$ (sử dụng $\frac{1}{1-t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n$ trong miền hội tụ $\lvert t\rvert<1$, với $t=\frac{x}{3}$)	0,25
	$=-\frac{13}{3}\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+...\right]=-\frac{13}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ trong miền hội tụ $\left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert<1$ hay $\lvert x\rvert<3$ (4)	0,25
	$-\frac{3}{x-1}=\frac{3}{1-x}=3.\frac{1}{1-x}=$ (sử dụng $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ trong miền hội tụ $\lvert x\rvert<1$)	0,25
	$=3\left(1+x^2+x^3+...\right)=3\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ trong miền hội tụ $\lvert x\rvert<1$ (5)	0,25
	$\Rightarrow f(x)=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{13}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}+3\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)=1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(3-\frac{13}{3^{n+1}}\right)x^n$ trong miền hội tụ $\lvert x\rvert<1$ [giao của (4) và (5)]	0,25
	Cộng	**1,50**
7a	$\lvert x\rvert<1:\ \lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$	0,20

Câu	Lời giải	Điểm
	$\lvert x\rvert=1:\ \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=1\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$	
	$\lvert x\rvert>1:\ \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty} x^2\sqrt[n]{\frac{3}{x^{2n}}+1}=x^2$	0,20
	$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & \text{khi } \lvert x\rvert\le 1\\ x^2 & \text{khi } \lvert x\rvert>1\end{cases}$ $\Rightarrow$ hàm số liên tục với $\forall x\neq\pm1$ (6)	0,20
	vì $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} x^2=1=f(-1)$ và $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} 1=1=f(-1)$ nên hàm số liên tục tại x = -1 (7) vì $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} 1=1=f(1)$ và $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} x^2=1=f(1)$ nên hàm số liên tục tại x = 1 (8)	0,20
	từ (6), (7) và (8) $\Rightarrow$ hàm số liên tục trên R	0,20
	Cộng	**1,00**
7b	Giả sử hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b) và $x_0\in$ (a, b), nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\in R$ thì A được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0 vàđược ký hiệu là f’(x_0).	0,20
	Đặt $\Delta x=x-x_0$, $\Delta f=f(x)-f(x_0)$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	0,20
	Xét hàm f(x) = arctanx xác định trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, theo định nghĩa đạo hàm của hàm f(x) tại điểm $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\arctan(x+\Delta x)-\arctan x}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$ (9)	0,20
	Mặt khác $f'(x)=(\arctan x)'=\frac{1}{x^2+1}$ (10)	0,20
	Từ (9) và (10) suy ra $\lim\limits_{h\to0}\frac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}=\frac{1}{x^2+1}$	0,20
	Cộng	**1,00**