**Đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1041) - Đề số 1**

(Học kỳ I năm học 2017-2018, thời gian làm bài 120 phút)

**Câu 1.(*1,5đ*)** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\right)$

**Câu 2.(*1,5đ*)** Cho hàm số $f(x)=|x-1|\ln x$. Chứng tỏ rằng:

a. Hàm số f(x) liên tục tại x = 1

b. Đạo hàm cấp 1 của f(x) liên tục tại x = 1

c. Đạo hàm cấp 2 của f(x) không liên tục tại x = 1

**Câu 3.(*2,0đ*)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$

a. Khai triển Taylo của hàm số f(x) trong lân cận điểm $x_0 = 0$ đến $x^6$

b. Tính đạo hàm cấp 6 tại $x_0 = 0$ của hàm số f(x)

**Câu 4.(*1,5đ*)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi $\{y=\sqrt{x}, y=x\}$. Tính thể tích của khối tròn xoay V được tạo thành khi quay miền D quanh trục hoành Ox

**Câu 5.(*1,5đ*)** Tính tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}dx$

**Câu 6.(*2,0đ*)** Xác định miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$

==============================

**Đáp án đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1041) - Đề số 1**

(Học kỳ I năm học 2017-2018)

**Câu 1.** Biểu thức cần tìm giới hạn $\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{x}}$ khi $x\to 1$ có dạng vô định $\infty-\infty$

- Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=t^4\Rightarrow$ khi $x\to 1$ thì $t\to 1$

- Biến đổi $\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{x}}=\dfrac{4}{1-t^4}-\dfrac{1}{1-t}=\dfrac{4}{(1-t)(1+t+t^2+t^3)}-\dfrac{1}{1-t}=\dfrac{4-(1+t+t^2+t^3)}{(1-t)(1+t+t^2+t^3)}$

$$=\frac{(1-1)+(1-t)+(1-t^2)+(1-t^3)}{(1-t)(1+t+t^2+t^3)}=\frac{0+(1-t)[1+(1+t)+(1+t+t^2)]}{(1-t)(1+t+t^2+t^3)}=\frac{3+2t+t^2}{1+t+t^2+t^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{1-x}-\frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\right)=\lim_{t\to 1}\frac{3+2t+t^2}{1+t+t^2+t^3}=\frac{3+2.1+1^2}{1+1+1^2+1^3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

*Cách khác*

Biến đổi $\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{x}}=\dfrac{4(1-\sqrt[4]{x})-(1-x)}{(1-x)(1-\sqrt[4]{x})}=\dfrac{3-4x^{\frac14}+x}{1-x^{\frac14}-x+x^{\frac54}}$, bây giờ biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to 1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4}{1-x}-\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-4x^{\frac14}+x}{1-x^{\frac14}-x+x^{\frac54}}$

$$\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(3-4x^{\frac14}+x\right)'}{\left(1-x^{\frac14}-x+x^{\frac54}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-4.\frac{1}{4}.x^{\frac14-1}+1}{-\frac{1}{4}.x^{\frac14-1}-1+\frac{5}{4}.x^{\frac54-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{-x^{-\frac34}+1}{-\frac14 x^{-\frac34}-1+\frac54 x^{\frac14}}$$

Biểu thức cần tìm giới hạn bây giờ lại có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to 1$ nên

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{1-x}-\frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\right)\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(-x^{-\frac{3}{4}}+1\right)'}{\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-1+\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{3}{4}-1}}{-\frac{1}{4}.\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{3}{4}-1}+\frac{5}{4}.\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}}{\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}+\frac{5}{16}x^{-\frac{3}{4}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{16}+\frac{5}{16}x}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{16}+\frac{5}{16}.1}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

*Có thể biến đổi gọn hơn*

- Đặt $t=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=t^4\Rightarrow$ khi $x\to 1$ thì $t\to 1$
- Biến đổi $\frac{4}{1-x}-\frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}=\frac{4}{1-t^4}-\frac{1}{1-t}=\frac{4}{(1-t)(1+t+t^2+t^3)}-\frac{1}{1-t}$

$$=\frac{4-(1+t+t^2+t^3)}{(1-t)(1+t+t^2+t^3)}=\frac{3-t-t^2-t^3}{1-t^4}$$

- Bây giờ biểu thức cần tìm giới hạn có dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi $t\to 1$ nên

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{1-x}-\frac{1}{1-\sqrt[4]{x}}\right)=\lim_{t\to 1}\frac{3-t-t^2-t^3}{1-t^4}\overset{(L)}{=}\lim_{t\to 1}\frac{(3-t-t^2-t^3)'}{(1-t^4)'}=\lim_{t\to 1}\frac{-1-2t-3t^2}{-4t^3}$$

$$=\frac{-1-2.1-3.1^2}{-4.1^3}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

**Câu 2.** Hàm số $f(x)=|x-1|\ln x$ được xác định khi x > 0 nên miền xác định của hàm số f(x) này là

$D(f)=(0,\infty)$, do đó $f(x)=(x-1)\operatorname{sgn}(x-1)\ln x=\begin{cases}(x-1).(-1)\ln x & \text{khi } \begin{cases}x-1<0\\ x>0\end{cases}\\ (x-1).0.\ln x & \text{khi } \begin{cases}x-1=0\\ x>0\end{cases}\\ (x-1).1.\ln x & \text{khi } \begin{cases}x-1>0\\ x>0\end{cases}\end{cases}$

$$=\begin{cases}(1-x)\ln x & \text{khi } 0<x<1\\ 0 & \text{khi } x=1\\ (x-1)\ln x & \text{khi } x>1\end{cases}\quad (1)$$

**a.** Từ (1) ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)\ln x=0=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x-1)\ln x=0=f(1)\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$ nên f(x) liên tục tại x = 1

**b.** Từ (1) ta thấy f(x) là hàm số sơ cấp trên miền $(0,1)\cup(1,+\infty)$ nên tồn tại đạo hàm $f'(x)$ trên miền này, do đó $f'(x)=\begin{cases}[(1-x)\ln x]' & \text{khi } 0<x<1\\ [(x-1)\ln x]' & \text{khi } x>1\end{cases}=\begin{cases}-\ln x+\frac{1-x}{x} & \text{khi } 0<x<1\\ \ln x+\frac{x-1}{x} & \text{khi } x>1\end{cases}$ (2)

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\left(-\ln x+\frac{1-x}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 1+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)=0\end{cases}\quad (3)$$

Mặt khác, theo định nghĩa của đạo hàm ta có

$$\begin{cases} f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{(1-x)\ln x - 0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-}(-\ln x) = 0 \\ f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{(x-1)\ln x - 0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1-} \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'_-(1) = 0 = f'_+(1) \Leftrightarrow f'(1) = 0\,(4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f'(x) = f'(1) \Leftrightarrow f'(x)$ liên tục tại x = 1

**c.** Từ (2) ta thấy $f'(x)$ là hàm số sơ cấp trên miền $(0,1)\cup(1,+\infty)$ nên tồn tại đạo hàm $[f'(x)]$ trên miền này, do đó $f''(x) = \begin{cases} \left(-\ln x + \dfrac{1-x}{x}\right)' & \text{khi} \quad 0 < x < 1 \\ \left(\ln x + \dfrac{x-1}{x}\right)' & \text{khi} \quad x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} & \text{khi} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} & \text{khi} \quad x > 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1-} f''(x) = \lim\limits_{x\to 1-}\left(-\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1+} f''(x) = \lim\limits_{x\to 1-}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1-} f''(x) \ne \lim\limits_{x\to 1+} f''(x) \Rightarrow f''(x) \text{ không liên tục tại } x = 1.$$

**Câu 3. a.** Khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ trong lân cận điểm $x_0 = 0$ là khai triển Mac Laurin của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ là chuỗi lũy $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

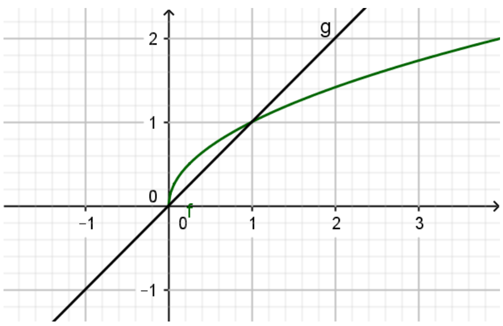
Bây giờ, ta sử dụng công thức khai triển thành chuỗi lũy thừa đã biết $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$ trong miền hội tụ $-1 < t < 1$ để khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ thành chuỗi lũy thừa $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bằng cách đặt $t = -x^3$ thì nhận được $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{1-(-x^3)} = \dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ trong miền hội tụ $-1 < t < 1 \Leftrightarrow -1 < -x^3 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Do đó theo yêu cầu của đề bài ta được $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6$

**b.** Theo công thức khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ thành chuỗi Mac Laurin đến $x^6$ ta có

$$f(x) = \frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \Leftrightarrow 1 - x^3 + x^6 = \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \Rightarrow 1 = \frac{f^{(6)}(0)}{6!} \Leftrightarrow f^{(6)}(0) = 6! = 720$$

**Câu 4.**



Đường parabol $y=f_2(x)=\sqrt{x}$ và đường thẳng $y=f_1(x)=x$ cắt nhau tại các điểm O(0,0); A(1,1) nên thể tích V của khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int_0^1[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx=\pi\int_0^1[(\sqrt{x})^2-x^2]dx=\pi\int_0^1(x-x^2)dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left[\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right)\right]=\frac{\pi}{6}$$

**Câu 5.** Biến đổi $I=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^2(x^2+1)}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{d(x^2)}{x^2(x^2+1)}$

Đặt $t=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=1\to t=1\\ x=+\infty\to t=+\infty\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(t+1)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt-\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+1}d(t+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{t}dt-\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{t+1}d(t+1)\right]=\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big\|_1^b-\lim_{b\to+\infty}\ln|t+1|\Big\|_1^b\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg\|_1^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{b+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{1}{1+\frac{1}{b}}+\frac{\ln 2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b}}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+0}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}.0+\ln 2^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{2}\,.$$

**Câu 6.** Viết chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$ dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ với $a_n=\frac{\ln n}{n}$

- Ta có $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\frac{\ln n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.\frac{n}{n+1}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$

+

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n}=\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}\right]=1+\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}=1+\ln\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}}$$

$$=1+\ln(1+0)^0=1+0=1$$

$$+\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$\Rightarrow\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.1=1$ nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{1}=1$

- Tại x = -1: Chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$, chuỗi số này là chuỗi đan dấu có $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ vì ta áp dụng kết quả đã biết $\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0$ với a = e, nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibniz

- Tại x = 1: Chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}.1^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$, vì $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ khi $n\to\infty$ mà chuỗi số điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi số phân kỳ nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ phân kỳ theo dấu hiệu so sánh.

Tóm lại, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$ là $-1 \le x < 1$