Đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1041) - Đề số 1

(Học kỳ I năm học 2018-2019, thời gian làm bài 120 phút)

Câu 1.(*2,0đ*) Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\ln x\tan\frac{\pi x}{2}\right)$, $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln x\tan\frac{\pi x}{2}\right)$

Câu 2.(*2,0đ*) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x\ln\frac{x+1}{2} & \text{khi} \quad x\ge 1\\ \frac{x-a}{x-b} & \text{khi} \quad x<1\end{cases}$

a. Tìm a để hàm số f(x) liên tục tại x = 1

b. Tìm b để hàm số f(x) khả vi tại x = 1

Câu 3.(*2,0đ*) Khảo sát sự hội tụ của các tích phân $\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln x dx}{(x+2)^2}$, $\int\limits_0^1\frac{\ln x dx}{(x+2)^2}$

Câu 4.(*2,0đ*) Cho hình phẳng D giới hạn bởi $\{x=(y-1)^2+1; x=1; y=0\}$. Tính thể tích của khối tròn xoay V được tạo thành khi quay miền D quanh trục hoành Ox

Câu 5.(*2,0đ*) Xác định miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}x^n$

==============================

Đáp án đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1041)

(Học kỳ I năm học 2018-2019) - **Đề số 1**

Câu 1. - Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\ln x\tan\frac{\pi x}{2}\right)$

$$+f(x)=\ln x\tan\frac{\pi x}{2}=\ln x.\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{\ln x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.\sin\frac{\pi x}{2}\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.\sin\frac{\pi x}{2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi x}{2},\text{ vì }\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi x}{2}=1\text{ nên }\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\cos\frac{\pi x}{2}}.1=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

+ Biểu thức cần tìm giới hạn $\frac{\ln x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ khi $x\to1$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\cos\frac{\pi x}{2}}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi.1}{2}}=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}.1}=-\frac{2}{\pi}$$

- Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln x\tan\frac{\pi x}{2}\right)$

$$+f(x)=\ln x\tan\frac{\pi x}{2}=\ln x.\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}}.\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}}.\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}}.\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}},\text{ vì }\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{1}{1}=1\text{ nên }\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}}.1=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}}$$

+ Biểu thức cần tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}}$ khi $x\to0$ có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$ nên

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}\right)'} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{x}.\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$$

$= -\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{x}.\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$, vì $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\dfrac{1}{1}=1$ nên $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{x}$

$$= -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to0}\frac{\pi^2 x}{4}.\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2} = -\frac{\pi}{2}\lim_{x\to0}x.\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\right)^2 = -\frac{\pi}{2}\lim_{x\to0}x.\left(\lim_{\frac{\pi x}{2}\to0}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\right)^2 = -\frac{\pi}{2}.0.1^2=0$$

Câu 2. a. Hàm số $f(x)=\begin{cases} x\ln\dfrac{x+1}{2} & \text{khi} \quad x\ge1 \\ \dfrac{x-a}{x-b} & \text{khi} \quad x<1\end{cases}$ liên tục tại x = 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1-} f(x)=f(1)$ (1)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1+} f(x)=\lim\limits_{x\to1+} x\ln\dfrac{x+1}{2}=1.\ln1=1.0=0=f(1) \\ \lim\limits_{x\to1-} f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{1-a}{1-b}\end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $\dfrac{1-a}{1-b}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b\ne1\end{cases}$ (3)

Như vậy, nếu $\begin{cases} a=1 \\ b\ne1\end{cases}$ và $f(x)=\begin{cases} x\ln\dfrac{x+1}{2} & \text{khi} \quad x\ge1 \\ \dfrac{x-a}{x-b} & \text{khi} \quad x<1\end{cases}$ liên tục tại x = 1.

b. Để hàm số $f(x)=\begin{cases} x\ln\dfrac{x+1}{2} & \text{khi} \quad x\ge1 \\ \dfrac{x-1}{x-b} & \text{khi} \quad x<1\end{cases}$ khả vi tại x = 1 thì f(x) phải liên tục tại x = 1 ($b\ne1$) và

tồn tại đạo hàm tại x = 1, tức là $f'(1+)=f'(1-) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (4)

+ $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x\ln\frac{x+1}{2}}{x-1}$ vì biểu thức cần tìm giới hạn $\dfrac{x\ln\frac{x+1}{2}}{x-1}$ khi $x\to1+$

có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{\left(x\ln\frac{x+1}{2}\right)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{\ln\frac{x+1}{2}+x.\dfrac{1}{\frac{x+1}{2}}.\dfrac{1}{2}}{1}$

$$= \lim_{x\to 1+}\left(\ln\frac{x+1}{2}+\frac{x}{x+1}\right)=\ln\frac{1+1}{2}+\frac{1}{1+1}=\ln 1+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ (5)$$

$$+\ \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{\frac{x-1}{x-b}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x-b}=\frac{1}{1-b}\ (6)$$

+ Thay (5) và (6) vào (4) ta được $\frac{1}{2}=\frac{1}{1-b}\Rightarrow b=-1$ (7)

+ Từ (3) và (7) suy ra, nếu $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ hàm số $f(x)=\begin{cases} x\ln\frac{x+1}{2} & \text{khi } x\ge 1 \\ \frac{x-a}{x-b} & \text{khi } x<1 \end{cases}$ khả vi tại x = 1.

Câu 3. - Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_1^{\infty}\frac{\ln x dx}{(x+2)^2}$

Dễ thấy rằng, các hàm số $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln x}{(x+2)^2} \\ g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$ là các hàm số dương trên $[1,+\infty)$, bây giờ ta tìm giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{(x+2)^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\ln x}{(x+2)^2}$ biểu thức cần tính giới hạn $\frac{x^{\frac{3}{2}}\ln x}{(x+2)^2}$ khi $x\to+\infty$ có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ nên $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^{\frac{3}{2}}\ln x\right)'}{\left[(x+2)^2\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x+x^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{x}}{2(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x+x^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)}$, bây giờ biểu thức cần tính giới hạn $\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x+x^{\frac{1}{2}}}{2(x+2)}$ khi $x\to+\infty$ vẫn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ nên

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x+x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\left[2(x+2)\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln x+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+8}{8\sqrt{x}},$$

bây giờ biểu thức cần tính giới hạn $\frac{3\ln x+8}{8\sqrt{x}}$ khi $x\to+\infty$ vẫn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ nên

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(L)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(3\ln x+8)'}{(8\sqrt{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{8.\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{4}.0=0$$

Mặt khác, theo Dấu hiệu so sánh, ta đã biết tích phân $\int_1^{\infty}g(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ là tích phân hội tụ vì $p=\frac{3}{2}>1$, do đó tích phân $\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{\ln x dx}{(x+2)^2}$ hội tụ.

- Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_0^{1}\frac{\ln x dx}{(x+2)^2}$

+ Vì hàm dưới dấu tích phân $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x+2)^2}\to -\infty$ khi $x\to 0+$ nên tích phân $\int_0^1 \dfrac{\ln x dx}{(x+2)^2}$ là tích phân suy rộng loại 2.

+ Dễ thấy rằng, các hàm số $\begin{cases} f(x)=-\dfrac{\ln x}{(x+2)^2} \\ g(x)=-\ln x \end{cases}$ là các hàm số dương trên $[0,1]$, bây giờ ta tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)}{-g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln x}{(x+2)^2}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{(0+2)^2}=\dfrac{1}{4}$ (8)

+ Mặt khác, ta có $\int \ln x dx = x\ln x-\int x d(\ln x)=x\ln x-\int dx = x(\ln x-1)+C$

$\Rightarrow \int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 -\ln x dx=-\int_0^1 \ln x dx=-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[x(\ln x-1)\right]_\varepsilon^1=-1(\ln 1-1)+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(\ln\varepsilon-1)$

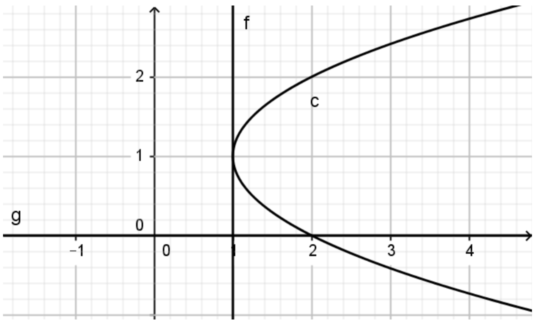
$=1+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(\ln\varepsilon-1)$, ta có $\varepsilon(\ln\varepsilon-1)=\dfrac{\ln\varepsilon-1}{\dfrac{1}{\varepsilon}}$ có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$ khi $\varepsilon\to 0$ nên

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(\ln\varepsilon-1)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon-1}{\frac{1}{\varepsilon}}\overset{(L)}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\ln\varepsilon-1)'}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)'}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon=0$$

$\Rightarrow \int_0^1 g(x)dx=1+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(\ln\varepsilon-1)=1+0=1$, tức là tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ hội tụ (9)

+ Từ (8) và (9), theo Dấu hiệu so sánh, tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_0^1 \dfrac{\ln x}{(x+2)^2}dx=-\int_0^1 f(x)dx$ hội tụ.

Câu 4.



Đường parabol $x=(y-1)^2+1$ tiếp xúc với đường thẳng x = 1 tại điểm A(1,1) và giao với đường thẳng y = 0 (trục hoành) tại điểm B(2,0).

Cung AB của đường parabol $x=(y-1)^2+1$ trên đoạn $1\le x\le 2$ có phương trình $y=f(x)=1-\sqrt{x-1}$, nên thể tích của khối tròn xoay V được tạo thành khi quay miền D quanh trục hoành Ox là

$$V=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2(1-\sqrt{x-1})^2dx=\pi\int_1^2(x-2\sqrt{x-1})dx=\pi\left[\int_1^2 x dx-2\int_1^2(x-1)^{\frac{1}{2}}d(x-1)\right]$$

$$= \pi\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 - 2.\left.\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2\right] = \pi\left[\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)-\frac{4}{3}\left(1^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)\right] = \pi\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

Câu 5. Ký hiệu $a_n = \frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$

- Ta có $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt[4]{n+2}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}} = \frac{1}{2}.\sqrt[4]{\frac{n+1}{n+2}}.\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.\sqrt[4]{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}.\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}.\sqrt[4]{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}}.\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.\sqrt[4]{\frac{1+0}{1+0}}.\frac{1}{1+0} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là $R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$,

do đó chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}x^n$ hội tụ trong khoảng -2 < x < 2 (8)

- Tại x = -2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n}$ là chuỗi đan dấu có

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = \sqrt[4]{0+0} = 0$ nên chuỗi hội tụ theo Dấu hiệu Leibniz

- Tại x = 2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}2^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n}$ có $\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n} > 0$ nên nó là chuỗi số dương,

bây giờ ta so sánh chuỗi số dương này với chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$ là phân kỳ vì nó là chuỗi Riemann

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ có $p = \frac{3}{4} < 1$. Ta có $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} = \sqrt[4]{1+0} = 1$, do đó chuỗi số

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n}$ phân kỳ.

Từ (8) và hai kết quả trên, ta khẳng định rằng miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n+1}}{n2^n}x^n$ là $-2 \le x < 2$.