ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ I NĂM HỌC 2019 - 2020

Đề thi số 1

Môn thi: Giải tích I. Số tín chỉ: 4.
Hệ: Chính quy. Thời gian làm bài: 120 phút.

Câu 1. (2 điểm) Tính các giới hạn hàm số dạng 0/0 và ∞-∞:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^x - x^3 + 3^x - 27}{x-3}\right);\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3} - \frac{3}{\ln(x-2)}\right)$$

Câu 2. (1 điểm) Tính đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của hàm số $y = 3^{\left(2^x\right)}$

Câu 3. (2 điểm)

a. Tính tích phân suy rộng loại một $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x+3}\right)dx$

b. Chứng minh tích phân suy rộng loại một $\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x+3}\right)dx$ phân kỳ

Câu 4. (1.5 điểm). Cho hình phẳng D giới hạn bởi: $\left\{x = y^2 - 1; y = 0; x = 2y - 2\right\}$. Tính thể tích khối tròn xoay V được tạo thành khi quay miền D quanh trục hoành Ox.

Câu 5. (2 điểm).

a. Khai triển hàm số $f(x) = \frac{1+x}{1-2x}$ theo công thức Mac-lo-ranh đến x^9.

b. Tính đạo hàm cấp 9 của f(x) tại x=0: $f^{(9)}(0)$

Câu 6. (1.5 điểm). Xác định miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n + 3^n + 4^n}$

Sinh viên không sử dụng tài liệu

<u>Đáp án đề thi số 1</u>

Câu 1. (2 điểm) Sinh viên có thể làm bằng nhiều cách, nếu ra kết quả đúng thì được đủ điểm. Đáp án trình bày cách giải bằng quy tắc Lôpitan.

Giới hạn thứ nhất có dạng 0/0.

(0.5đ) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^x - x^3 + 3^x - 27}{x-3}\right) \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^x(\ln x + 1) - 3x^2 + 3^x \ln 3}{1}\right) = 54\ln 3$

Ta biến đổi giới hạn thứ hai:

(0.5đ) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3}{\ln(x-2)}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\ln(x-2) - 3(x-3)}{(x-3)\ln(x-2)}$

Giới hạn có dạng 0/0

(0.5đ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\ln(x-2) - 3(x-3)}{(x-3)\ln(x-2)} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2) + \dfrac{x}{x-2} - 3}{\ln(x-2) + \dfrac{x-3}{x-2}} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)\ln(x-2) - 2x + 6}{(x-2)\ln(x-2) + x - 3}$

Giới hạn có dạng 0/0, áp dụng tiếp quy tắc Lôpitan

(0.5đ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)\ln(x-2) - 2x + 6}{(x-2)\ln(x-2) + x - 3} \overset{L}{=} \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x-2) - 1}{\ln(x-2) + 2} = \dfrac{-1}{2}$

Câu 2. (1 điểm)

(0.5đ) Ta có $\ln y = 2^x \ln 3$ nên $\dfrac{y'}{y} = 2^x \ln 3 \ln 2 \Rightarrow y' = y2^x \ln 3 \ln 2$

Lấy đạo hàm tiếp một lần nữa ta có:

(0.5đ) $y'' = y'2^x \ln 3 \ln 2 + y2^x \ln 3(\ln 2)^2 = y2^x \ln 3(\ln 2)^2\left(2^x \ln 3 + 1\right)$

Câu 3. (2 điểm)

a. (0.5đ) Ta có: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \left(\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) - \ln|x+3|\right)\Big|_0^{\infty}$

(0.5đ) $= \left(\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+3}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+3} - \ln\dfrac{1}{3} = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{3}{x}}\right) + \ln 3 = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$

b. Xét $f\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x+3}$ và $g\left(x\right)=\frac{1}{x}$.

(0.5đ) Có $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{x+3}\right)=1$

(0.5đ) Mà ta có $\int_1^\infty g\left(x\right)dx=\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ là phân kỳ. Theo tiêu chuẩn so sánh ta có $\int_1^\infty f\left(x\right)dx$ phân kỳ

Mà $\int_0^\infty f\left(x\right)dx=\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_1^\infty f\left(x\right)dx$ là phân kỳ vì tích phân đầu tiên là tích phân thường, có giá trị hữu hạn.

Câu 4. (1.5 điểm).
(0.25đ) Đường thẳng x=2y-2 là tiếp tuyến của parabol x=y^2-1 tại điểm (0,1). Đường thẳng này cắt trục hoành tại điểm (-2,0).
(0.5đ) Gọi V1 là khối tròn xoay khi xoay miền giới hạn bởi đường x=2y-2 và 2 trục tọa độ quanh Ox. Thể tích khối V1 là thể tích hình nón chiều cao 2, bán kính 1, và bằng 2π/3 (đvtt)
(0.5đ) Gọi V2 là khối tròn xoay khi xoay miền giới hạn bởi x=y^2-1 và 2 trục tọa độ quanh Ox. Thể tích khối V2 bằng $\pi\int_{-1}^{0}y^2dx=\pi\int_{-1}^{0}\left(x+1\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{\pi}{2}$ (đvtt)

(0.25đ) Thể tích khối cần tìm là hiệu thể tích của 2 khối V1 và V2 và bằng $\frac{\pi}{6}$ (đvtt)

Câu 5. (2 điểm).

a. Ta có

(0.5đ) $f\left(x\right)=\frac{1+x}{1-2x}=\left(1+x\right)\left(1+\left(2x\right)+\left(2x\right)^2+...\left(2x\right)^n+...\right)$

(0.5đ) $=\left(1+2x+4x^2+...2^nx^n+...\right)+\left(x+2x^2+4x^3+...2^{n-1}x^n+...\right)$

(0.5đ) $=1+3x+6x^2+...\left(2^9+2^8\right)x^9+o\left(x^9\right)$

b. Từ công thức khai triển Macloranh

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n$$

So sánh với câu a ta có:

(0.5đ) $\frac{f^{(9)}\left(0\right)}{9!}=2^9+2^8\Rightarrow f^{(9)}\left(0\right)=9!\left(2^9+2^8\right)$

Câu 6. (1.5 điểm).

(0.5đ) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa là

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}+4^{n+1}}{2^n+3^n+4^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{4^n}+\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{2^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}+1} = 4$$

(0.5đ) Xét tại đầu biên $x = \pm 4$. Chuỗi trở thành: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 4)^n}{2^n+3^n+4^n}$

Ta có $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\pm 4)^n}{2^n+3^n+4^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}+1} = 1$

Số hạng của chuỗi không tiến về 0 khi *n* tiến ra vô cùng. Theo điều kiện cần của chuỗi hội tụ, tại cả hai đầu biên chuỗi đều phân kỳ.

(0.5đ) Miền hội tụ của chuỗi là -4<x<4