ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ

ĐỀ THI HẾT MÔN
HỌC KỲ II NĂM HỌC 2017 - 2018

<u>Đề thi số 1</u>

Môn thi: Giải tích I. Số tín chỉ: 4.
Hệ: Chính quy. Thời gian làm bài: 120 phút.

Câu 1. (1.5 điểm) Tính giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}$

Câu 2. (1.5 điểm) Cho hàm số dưới dạng ẩn $y^2-xy=1$. Hãy tính:

a. Giá trị của y' tại điểm x=0,y=1

b. Giá trị của y'' tại điểm x=0,y=1

Câu 3. (2 điểm) Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng loại một $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{xdx}{e^{2x}-1}$ và tích phân suy rộng loại hai $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

Câu 4. (1.5 điểm). Cho hình phẳng D giới hạn bởi: $\left\{y=(x-2)^2, y=0, x=0\right\}$. Tính thể tích khối tròn xoay V được tạo thành khi quay miền D quanh trục tung Oy.

Câu 5. (1.5 điểm). Khai triển hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ thành:

a. Chuỗi lũy thừa của x
b. Chuỗi lũy thừa của x-1

Câu 6. (2 điểm). Xác định miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{n^2+1}$

Sinh viên không sử dụng tài liệu

Đáp án đề thi số 1

Câu 1. (1.5 điểm) Sinh viên có thể làm nhiều cách như sử dụng vô cùng bé, sử dụng quy tắc Lôpitan hoặc nhân chia với lượng liên hợp, nếu ra kết quả đúng thì được đủ điểm. Đáp án trình bày cách giải bằng quy tắc Lôpitan. Giới hạn có dạng 0/0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+5x)^{-4/5}-1}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{-4(1+5x)^{-9/5}}=\frac{-1}{2}$$

Câu 2. (1.5 điểm)

Lấy đạo hàm 2 vế theo *x* một lần và 2 lần ta có

$$2yy'-y-xy'=0 \qquad (1)$$

$$2(y')^2+2yy''-2y'-xy''=0 \qquad (2)$$

Thay x=0, y=1 vào (1) ta có

$y'=\frac{1}{2}$ tại x=0, y=1 (3)

Thay x=0, y=1 và biểu thức (3) vào (2) ta có $y''=\frac{1}{4}$ tại x=0, y=1

Câu 3. (2 điểm) Xét $L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{2x}-1}:\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}-1}$

Ta có $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}-1}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Sử dụng quy tắc Lopitan 3 lần ta có

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3!}{8e^{2x}}=0$$

Mà $\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ là hội tụ. theo tiêu chuẩn so sánh ta có $\int_1^\infty\frac{xdx}{e^{2x}-1}$ hội tụ.

Xét $L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}:\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}}$

Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}$ có dạng $\frac{0}{0}$. Sử dụng quy tắc Lopitan 1 lần ta có

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{1}{2}$. Vậy $L=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Mà $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ là hội tụ. Theo tiêu chuẩn so sánh ta có $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ hội tụ.

Câu 4. (1.5 điểm). Parabol giao với 2 trục tọa độ tại (0,4) và (2,0).

Thể tích khối tròn xoay bằng $\pi\int_0^4 x^2dy$. Có thể tính tích phân theo 2 cách. Sinh viên nếu tính đúng thì được đầy đủ điểm.

Cách 1

Đổi biến $y=(x-2)^2$. Khi y chạy từ 0 đến 4 thì x chạy từ 2 đến 0.

Vậy thể tích bằng $\pi\int_2^0 x^2\times 2(x-2)dx=2\pi\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_2^0=2\pi\left(\frac{16}{3}-4\right)=\frac{8\pi}{3}$

Cách 2

Từ $y=(x-2)^2$ và x<2 ta có $x=2-\sqrt{y}$. Thay vào tích phân có:

$$\pi\int_0^4 x^2dy=\pi\int_0^4\left(2-\sqrt{y}\right)^2dy=\pi\int_0^4\left(4-4\sqrt{y}+y\right)dy=\pi\left(4y-\frac{8}{3}y\sqrt{y}+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4=\frac{8\pi}{3}$$

Câu 5. (1.5 điểm).

a. Ta có $f(x)=\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$

b. Đặt $u=x-1$ ta có $x=u+1$ và

$$f(u)=\frac{1}{u+3}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{u}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n$$

Câu 6. (2 điểm). Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}$ là

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n/\left(n^2+1\right)}{\left(n+1\right)/\left(\left(n+1\right)^2+1\right)} = 1$$

Xét tại đầu mút thứ nhất x=1, chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

Ta có $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}:\frac{1}{n}\right)=1$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ nên theo tiêu chuẩn so sánh, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ phân kỳ.

Xét tại đầu mút thứ hai x=-1, chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{n}{n^2+1}$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{x}{x^2+1}$ có $f'\left(x\right)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}<0$ khi x>1. Ngoài ra $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$.

Vậy với n>1 thì dãy số $\frac{n}{n^2+1}$ đơn điệu giảm về 0. Theo tiêu chuẩn Leibnitz thì chuỗi đan dấu hội tụ.

Kết luận: miền hội tụ là $-1\le x<1$