TailieuVNU.com

Đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1094) - Đề số 2

(Học kỳ I năm học 2013-2014, thời gian làm bài 150 phút)

Câu 1. (*1,5đ*) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x} & \text{khi } |x|<1\\ a & \text{khi } x=0\end{cases}$

Tìm giá trị của a để hàm số liên tục trên (-1,1)

Câu 2. (*1,5đ*) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

Câu 3. (*1,5đ*) Tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)=5+4\cos^3 x$

Câu 4. (*1,5đ*) Tính tích phân $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$

Câu 5. (*1,5đ*) Tìm bán kính hội tụ, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{5^n\sqrt[3]{3n-1}}$

Câu 6. (*1,5đ*) Khai triển hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$ thành chuỗi lũy thừa của x và xác định miền hội tụ của chuỗi.

Câu 7. (*1,0đ*) Thí sinh chỉ chọn làm một trong hai câu **7a.** hoặc **7b.** sau đây:

7a. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5+x^{2n}}$ trên **R**

7b. Định nghĩa đạo hàm của hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b), tại điểm $x\in$(a, b) và áp dụng để tìm giới hạn $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arccot}(x+h)-\operatorname{arccot} x}{h}$ trong khoảng $(0,\pi)$

Đáp án và thang điểm Đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1094) - Đề số 2

(Học kỳ I năm học 2013-2014, thời gian làm bài 150 phút)

Câu	Lời giải	Điểm
1	Vì ln(1+x), ln(1-x) và x là các hàm sơ cấp nên khi $x \neq 0$ thì hàm $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$ là hàm sơ cấp nên liên tục trên (-1, 1)\{0} = (-1, 0) $\cup$ (0, 1)	0,25
	do đó f(x) liên tục trên (-1, 1) $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục tại x = 0	0,25
	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)-1]-[\ln(1-x)-1]}{x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-1}{x}+\lim\limits_{-x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)-1}{-x}$	0,25
	đặt t = -x, khi $x\to 0$ thì $t\to 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-1}{x}+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-1}{t}=1+1=2\,(1)$	0,25
	Theo định nghĩa, f(x) liên tục tại x = 0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ (2), mặt khác, theo giả thiết f(0) = a (3)	0,25
	từ (1), (2) và (3) suy ra a = 2	0,25
	Cộng	**1,50**
Cách khác	Khi $x\to 0$ thì ln(1+x) – ln(1-x) $\to 0 \Rightarrow \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên có thể áp dụng quy tắc Lôpital để tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$	0,25
	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)-\ln(1-x)]'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1-x^2}=2\,(1)$	0,25
2	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x\ln(1+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\tan^2 x}}$	0,25

Câu	Lời giải	Điểm
	khi $x \to 0$ thì $\ln(1+x^2) \to 0$ và $\tan^2 x \to 0 \Rightarrow \frac{\ln(1+x^2)}{\tan^2 x}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên có thể áp dụng quy tắc Lôpital để tìm $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\tan^2 x}$	0,25
	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\tan^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{[\ln(1+x^2)]'}{(\tan^2 x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos^3 x}{(1+x^2)\sin x} =$	0,25
	$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\cos^3 x}{1+x^2}}{\frac{\sin x}{x}} =$	0.25
	$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^3 x}{1+x^2}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1$	0,25
	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\cot^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\tan^2 x}} = e^1 = e$	0,25
	Cộng	**1,50**
Cách khác	$\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\cot^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}.x^2\cot^2 x} =$	0,25
	$= \left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2\cot^2 x} = \left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} =$	0,25
	$= \left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\cos^2 x\right)} =$	0,25
	$= \left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}} =$	0,25
	$= \left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos x\right)^2}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}} =$	0,25
	$= e^{\frac{1^2}{1^2}} = e^1 = e$	0,25
3	Có thể chứng minh hoặc chỉ cần đưa ra công thức $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$	0,25
	$\Rightarrow f(x) = 5 + 4\cos^3 x = 5 + 4.\frac{3\cos x + \cos 3x}{4} = 5 + 3\cos x + \cos 3x$	0,25
	Có thể chứng minh hoặc chỉ cần đưa ra công thức $\cos^{(n)} ax = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$ với a là hằng số	0.25
	$\Rightarrow \cos^{(n)} x = 1^n \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$	0,25
	$\Rightarrow \cos^{(n)} 3x = 3^n \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$	0,25

Câu	Lời giải	Điểm
	$\Rightarrow f^{(n)}(x) = 3\cos^{(n)} x + \cos^{(n)} 3x = 3\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + 3^n \cos\left(3x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$	0,25
	Cộng	**1,50**
4	$I = \int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx = \int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}x^7dx =$	0,25
	$= \dfrac{1}{8}\int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}d(x^8) = \dfrac{1}{24}\int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}d(1+3x^8)$	0,25
	đặt $t = 1 + 3x^8 \Rightarrow x^8 = \dfrac{1}{3}(t-1)$, khi x = 0 thì t = 1 và khi x = 1 thì t = 4 $\Rightarrow I = \dfrac{1}{72}\int_1^4 (t-1)t^{\frac{1}{2}}dt$	0,25
	$I = \dfrac{1}{72}\int_1^4\left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \dfrac{1}{72}\left(\dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg\|_1^4 = \dfrac{1}{36}\left(\dfrac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} - \dfrac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg\|_1^4$	0,25
	$I = \dfrac{1}{36}\left[\dfrac{1}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right) - \dfrac{1}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)\right] =$	0,25
	$I = \dfrac{29}{270}$	0,25
	Cộng	**1,50**
Cách khác	$I = \int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$ đặt $t = \sqrt{1+3x^8}$ khi x = 0 thì t = 1 và khi x = 1 thì t = 2	0,25
	$\Rightarrow t^2 = 1 + 3x^8 \Rightarrow x^8 = \dfrac{1}{3}\left(t^2 - 1\right) \Rightarrow 8x^7dx = \dfrac{2}{3}tdt \Rightarrow x^7dx = \dfrac{1}{12}tdt$	0,25
	$I = \int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}\left(x^7dx\right) = \int_1^2 \dfrac{1}{3}\left(t^2-1\right)t.\dfrac{1}{12}tdt = \dfrac{1}{36}\int_1^2\left(t^4 - t^2\right)dt$	0,25
	$I = \dfrac{1}{36}\left(\dfrac{1}{5}t^5 - \dfrac{1}{3}t^3\right)\Bigg\|_1^2$	0,25
	$I = \dfrac{1}{36}\left[\dfrac{1}{5}\left(2^5 - 1^5\right) - \dfrac{1}{3}\left(2^3 - 1^3\right)\right] =$	0,25
	$I = \dfrac{29}{270}$	0,25
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{5^n\sqrt[3]{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ với $a_n = \dfrac{1}{5^n\sqrt[3]{3n-1}}$ và $t = x - 2$	0,25
	Gọi bán kính hội tụ của chuỗi là R, khi đó $\rho = \lim_{n\to\infty}\left\|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\dfrac{5^n\sqrt[3]{3n-1}}{5^{n+1}\sqrt[3]{3(n+1)-1}} = \dfrac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3n-1}{3n+2}} = \dfrac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}}$ $= \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{\dfrac{3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{3 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}} = \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{\dfrac{3-0}{3+0}} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow R = \dfrac{1}{\rho} = 5$	0,25
	$\Rightarrow$ khoảng hội tụ của chuỗi là $\|t\| < R \Leftrightarrow \|x-2\| < R = 5 \Rightarrow -5 + 2 < x < 5 + 2 \Rightarrow -3 < x < 7$	0,25

TailieuVNU.com

Câu	Lời giải	Điểm
	tại $x=7$ (đầu mút phải) chuỗi trở thành chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}$ hiển nhiên $\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ là chuỗi phân kỳ, nên theo dấu hiệu so sánh, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}$ phân kỳ, do đó chuỗi phân kỳ tại đầu mút phải của khoảng hội tụ	0,25
	tại $x=-3$ (đầu mút trái) chuỗi trở thành chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ với $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}} \Rightarrow \lvert b_n\rvert = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}} \to 0$ khi $n\to\infty$, nên theo định lý Lepnit, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}}$ hội tụ nên chuỗi hội tụ tại đầu mút trái của khoảng hội tụ	0,25
	$\Rightarrow$ miền hội tụ của chuỗi là $[-3,7)$ hay -3 ≤ x < 7	0,25
	Cộng	**1,50**
6	$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{6x-5}{(x-3)(x-2)} = 1 + \frac{13}{x-3} - \frac{7}{x-2}$	0,25
	$\frac{13}{x-3} = -\frac{13}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} = -\frac{13}{3}.\frac{1}{1-\frac{x}{3}} =$ (sử dụng $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ trong miền hội tụ $\lvert t\rvert < 1$, với $t=\frac{x}{3}$)	0,25
	$= -\frac{13}{3}\left[1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\ldots\right] = -\frac{13}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ trong miền hội tụ $\lvert t\rvert<1 \Leftrightarrow \left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert < 1$ hay $\lvert x\rvert < 3$ (4)	0,25
	$-\frac{7}{x-2} = \frac{7}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \frac{7}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} =$ (sử dụng $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ trong miền hội tụ $\lvert t\rvert<1$, với $t=\frac{x}{2}$)	0,25
	$= \frac{7}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots\right] = \frac{7}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ trong miền hội tụ $\lvert t\rvert<1 \Leftrightarrow \left\lvert\frac{x}{2}\right\rvert<1$ hay $\lvert x\rvert < 2$ (5)	0,25
	$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{13}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n} + \frac{7}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{2^{n+1}} - \frac{13}{3^{n+1}}\right)x^n$ trong miền hội tụ $\lvert x\rvert < 2$ [giao của (4) và (5)]	0,25
	Cộng	**1,50**
7a	$\lvert x\rvert < 1$: $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5} = 1$ $\lvert x\rvert = 1$: $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{6} = 1$	0,20
	$\lvert x\rvert > 1$: $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} x^2\sqrt[n]{\frac{5}{x^{2n}}+1} = x^2$	0,20
	$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } \lvert x\rvert \le 1 \\ x^2 & \text{khi } \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ hàm số liên tục với $\forall x \ne \pm 1$ (6)	0,20
	vì $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = x^2 = f(-1)$ và $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 1 = 1 = f(-1)$ nên hàm số liên tục tại x = -1 (7) vì $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1 = f(1)$ và $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1 = f(1)$ nên hàm số liên tục tại x = 1 (8)	0,20

TailieuVNU.com

Câu	Lời giải	Điểm
	từ (6), (7) và (8) suy ra hàm số liên tục trên R	0,20
	Cộng	**1,00**
7b	Giả sử hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b) và $x_0 \in$ (a, b), nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \in R$ thì A được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm x_0 và được ký hiệu là $f'(x_0)$.	0,20
	Đặt $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	0,20
	Xét hàm f(x) = arccotx xác định trong khoảng $(0,\pi)$, theo định nghĩa đạo hàm của hàm f(x) tại điểm $x\in(0,\pi)$: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{arc}\cot(x+\Delta x)-\mathrm{arc}\cot x}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{arc}\cot(x+h)-\mathrm{ar}\cot x}{h}$ (9)	0,20
	Mặt khác $f'(x)=(\mathrm{arc}\cot x)'=-\frac{1}{x^2+1}$ (10)	0,20
	Từ (9) và (10) suy ra $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{arc}\cot(x+h)-\mathrm{arc}\cot x}{h}=-\frac{1}{x^2+1}$	0,20
	Cộng	**1,00**