Đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1041) - Đề số 1

(Học kỳ I năm học 2017-2018, thời gian làm bài 120 phút)

Câu 1.(*2,0đ*) Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x\neq 0\\ a & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại x = 0

Câu 2.(*1,5đ*) Dùng khai triển Taylor tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

Câu 3.(*1,5đ*) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo bởi miền $D=\{(x,y)|y\le 4x; y\ge 2x^2\}$ quay quanh trục Ox

Câu 4.(*1,5đ*) Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int\limits_0^1\dfrac{x^2dx}{\ln(2-x)}$

Câu 5.(*1,5đ*) Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{3^n}$

Câu 6.(*2,0đ*) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}(3x+1)^n$

==============================

Đáp án đề thi cuối kỳ môn học GIẢI TÍCH 1 (MAT1041)

(Học kỳ I năm học 2017-2018) - **Đề số 2**

Câu 1. D(f) = **R**\{0}, đặt $f(x)=(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, f(x) là hàm sơ cấp nên liên tục trên D(f)

Xét $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$, ta thấy biểu thức cần tìm giới hạn $(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ có dạng vô định 1^∞ khi $x\to 0$ nên biến đổi $f(x)=(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)}$ (1)

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$, bây giờ biểu thức cần tìm giới hạn $\dfrac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to 0$ nên

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos 2x)\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(\cos 2x)]'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}=-2\lim_{2x\to 0}\frac{\tan(2x)}{2x}=-2.1=-2 \ (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$, mặt khác để hàm f(x) đang xét liên tục tại x = 0 thì điều kiện cần và đủ là $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow \dfrac{1}{e^2}=a$. Do đó, khi $a=\dfrac{1}{e^2}$ thì hàm số f(x) đang xét liên tục tại x = 0.

Câu 2. Đặt $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ (3)

+ Đặt u = 2x và biến đổi $\sqrt{1+2x}=(1+2x)^{\frac{1}{2}}=(1+u)^{\frac{1}{2}}$ sau đó áp dụng khai triển Taylor tại lân cận điểm u = 0 đối với biểu thức $(1+u)^\alpha=1+\dfrac{\alpha}{1!}u+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3+...$ với $\alpha=\dfrac{1}{2}$ ta được

$$(1+u)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}u+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}u^3+...=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{48}-...$$

với $-1<u<1$

Trở lại biến x ta được $\sqrt{1+2x}=1+\frac{2x}{2}-\frac{(2x)^2}{8}+\frac{(2x)^3}{48}-...=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-...$ (4) với $-1<2x<1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

+ Đặt v = 3x và biến đổi $\sqrt[3]{1+3x}=(1+3x)^{\frac{1}{3}}=(1+v)^{\frac{1}{3}}$ sau đó áp dụng khai triển Taylor tại lân cận điểm v = 0 đối với biểu thức $(1+v)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}v+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}v^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}v^3+...$ với $\alpha=\frac{1}{3}$ ta được $(1+v)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}v+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}v^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}v^3+...=1+\frac{v}{3}-\frac{v^2}{9}+\frac{5v^3}{81}-...$ với $-1<v<1$

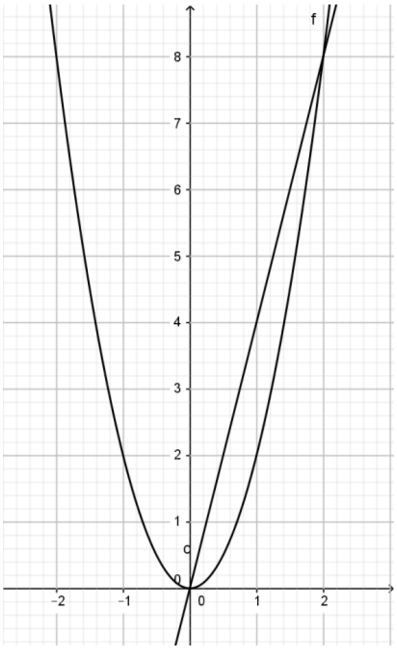
Trở lại biến x ta được $\sqrt{1+3x}=1+\frac{3x}{3}-\frac{(3x)^2}{9}+\frac{5.(3x)^3}{81}-...=1+x-x^2+\frac{5x^3}{3}-...$ (5) với $-1<3x<1\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$

+ Thay (4) và (5) vào (3) ta được

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\frac{\left(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-...\right)-\left(1+x-x^2+\frac{5x^3}{3}-\right)}{x^2}=\frac{1}{2}+xg(x)$$ với g(x) là một đa thức, do đó

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}+xg(x)\right]=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}xg(x)=\frac{1}{2}+0.g(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

Câu 3.



Đường thẳng $y=f_2(x)=4x$ và đường parabol $y=f_1(x)=2x^2$ cắt nhau tại các điểm O(0,0); A(2,8) nên thể tích V của khối tròn xoay cần tính là

$$V=\pi\int_0^2[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx=\pi\int_0^2[(4x)^2-(2x^2)^2]dx=4\pi\int_0^2(4x^2-x^4)dx$$

$$=4\pi\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=4\pi\left[\left(\frac{4.2^3}{3}-\frac{2^5}{5}\right)-\left(\frac{4.0^3}{3}-\frac{0^5}{5}\right)\right]=\frac{256\pi}{15}$$

Câu 4. $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(2-x)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2}{\ln(2-x)}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1-x}{\ln[1+(-x)]}.\dfrac{x^2}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{\dfrac{\ln[1+(-x)]}{1-x}}.\dfrac{x^2}{1-x}$

$=\dfrac{1}{\lim\limits_{1-x\to 0-}\dfrac{\ln[1+(-x)]}{1-x}}.\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x^2}{1-x}=\dfrac{1}{1}.(+\infty)=+\infty \Rightarrow \int_0^1 \dfrac{x^2dx}{\ln(2-x)}$ là tích phân suy rộng loại 2

- Dễ thấy rằng, các hàm số $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(2-x)} \\ g(x)=\dfrac{1}{1-x} \end{cases}$ là các hàm số dương trên $0\le x<1$, bây giờ ta có

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{\dfrac{x^2}{\ln(2-x)}}{\dfrac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\dfrac{\ln[1+(1-x)]}{1-x}}.x^2=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\dfrac{\ln[1+(1-x)]}{1-x}}.\lim_{x\to 1-}x^2$$

$=\dfrac{1}{\lim\limits_{1-x\to 0-}\dfrac{\ln[1+(1-x)]}{1-x}}.\lim\limits_{x\to 1-}x^2=\dfrac{1}{1}.1=1$ do đó vì tích phân $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\dfrac{dx}{1-x}$ phân kỳ nên tích phân $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{x^2dx}{\ln(2-x)}$ phân kỳ theo Dấu hiệu so sánh.

Câu 5. Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{3^n}$ có số hạng tổng quát là $a_n=\dfrac{n(n+1)}{3^n}>0$

Ta có $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}}{\dfrac{n(n+1)}{3^n}}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{n+2}{n}=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\Rightarrow D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{1}{3}(1+0)=\dfrac{1}{3}<1$ nên theo Dấu hiệu D'Alembert thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{3^n}$ hội tụ.

Câu 6. Đặt $\begin{cases} a_n=\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}} \\ t=3x+1 \end{cases} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}(3x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$

Ta có $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\dfrac{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}\right|}=\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}.\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}.\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

+

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\ln\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\ln n}=\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}\right]=1+\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}=1+\ln\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}}$$

$=1+\ln(1+0)^0=1+0=1$

$+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+0}}=1$

$\Rightarrow \rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}.\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1.1=1$ nên bán kính hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}t^n$ là $R=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{1}=1$

- Tại t = -1: Chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}t^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}(-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$, vì $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ là chuỗi Riemann $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ có p < 1 nên phân kỳ, do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ phân kỳ theo Dấu hiệu so sánh hai chuỗi dương;

- Tại x = 1: Chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}t^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}.1^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$ là chuỗi đan dấu.

Đặt $t=\ln n\Rightarrow n=e^t\Rightarrow\sqrt{n}=(\sqrt{e})^t\Rightarrow\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=\dfrac{t}{(\sqrt{e})^t}$, khi $n\to\infty$ thì $t\to\infty$ nên

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{(\sqrt{e})^t}=0$ vì hàm số mũ tăng nhanh hơn hàm lũy thừa, do đó chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibniz;

Như vậy, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}t^n$ là

$-1<t\le 1\Leftrightarrow -1<3x+1\le 1\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<x\le 0$, tức là miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}(3x+1)^n$ là $\dfrac{2}{3}<x\le 0$.